

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**ТИПОВІ ЗАДАЧІ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ПЕРШОГО КУРСУ
СПЕЦІАЛЬНОСТІ «СЕРЕДНЯ ОСВІТА»**

КИЇВ 2026

Типові задачі з математичного аналізу для студентів першого курсу спеціальності «Середня освіта (Математика)». Навчально-методичний посібник. Укладачі:

Курченко О.О., Лебедєва І.В. Київський університет імені Тараса Шевченка.
2026. - 50 с.

Рецензенти:

Доктор технічних наук, професор, професор кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка Валентин СОБЧУК

Кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу Ужгородського національного університету Ольга СИНЯВСЬКА

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка

(протокол № 12 від 02 квітня 2026 р.)

Рекомендовано для самостійної роботи студентів першого курсу спеціальності «Середня освіта (Математика)» та проведення практичних занять з математичного аналізу

Зміст

Передмова	4
Дійсні числа	5
Обмежені множини. Точні межі	9
Метод математичної індукції	17
Обмежені послідовності	19
Границя послідовності	22
Властивості збіжних послідовностей	27
Нескінченні границі	30
Розкриття невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$	32
Розкриття невизначеності $\infty - \infty$	33
Розкриття невизначеності $0 \cdot \infty$	33
Теорема Штольца	34
Монотонні послідовності	37
Число Ейлера	40
Підпослідовності. Часткові границі	41
Фундаментальні послідовності. Критерій Коші	45
Завдання для підготовки до контрольної роботи	47
Зразок варіанта модульної контрольної роботи	49
Список літератури	50

Передмова

Специфіка викладання курсу математичного аналізу, як й інших математичних дисциплін, для спеціальності «середня освіта» на механіко-математичному факультеті КНУ імені Тараса Шевченка полягає у формуванні міцних знань на педагогічно доступному рівні. Для розуміння означень і властивостей похідної, інтеграла, з якими учні знайомляться у середній школі, необхідно створити відповідне підґрунтя. Логічне обґрунтування сучасного математичного аналізу це теорія дійсних чисел, поняття супремуму та інфімуму, теорії границь.

Наш багаторічний досвід викладання математичного аналізу свідчить, що студенти-математики першого курсу мають значні труднощі у засвоєнні базових понять, необхідних для логічної побудови похідної, інтеграла, теорії числових та функціональних рядів та інших понять диференціального та інтегрального числення. Автори підготували цю методичну розробку з метою полегшити студентам першого курсу спеціальності «середня освіта» засвоєння базових понять математичного аналізу.

Ця методична розробка містить типові задачі з таких тем: дійсні числа, точні межі, метод математичної індукції, границя послідовності, підпослідовності та часткові границі, фундаментальні послідовності та критерій Коші. До кожної теми наведені теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач, задачі для самостійного розв'язання, задачі для підготовки до модульної контрольної роботи та зразок варіанта модульної контрольної роботи. До всіх запропонованих задач наведені відповіді.

Використані нами підручники та збірники задач вказані у списку літератури.

14 березня 2026 року

Автори

Дійсні числа

Означення 1. Невід'ємним дійсним числом називається нескінченний десятковий дріб виду

$$a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

де $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\forall n \geq 1: a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Невід'ємне дійсне число називається додатним, якщо $\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}: a_n > 0$.

Від'ємне дійсне число визначається як додатне число зі знаком мінус.

Кожне раціональне число зображується скінченним або нескінченним періодичним десятковим дробом. Навпаки, кожний скінченний або нескінченний періодичний дріб є раціональне число.

Формула, за якою нескінченний періодичний дріб подається у вигляді відношення цілого і натурального чисел:

$$0, a_1 a_2 \dots a_n (\overline{b_1 b_2 \dots b_k}) = \left(\overline{a_1 \dots a_n} + \frac{\overline{b_1 \dots b_k}}{\underbrace{99 \dots 9}_k} \right) \cdot 10^{-n}, \quad (1)$$

де $\overline{b_1 \dots b_k}$, $\overline{a_1 \dots a_n}$ – цілі числа, записані цифрами $b_1, \dots, b_k$ та $a_1, \dots, a_n$ відповідно.

Наприклад,

$$0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}; \quad 0,(23) = \frac{23}{99}; \quad 0,13(31) = \left(13 + \frac{31}{99} \right) \cdot 10^{-2} = \frac{1318}{9900} = \frac{659}{4950}.$$

Зауважимо, що $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – множина всіх ірраціональних чисел.

Кожне ірраціональне число є неперіодичний десятковий дріб.

Скінченний десятковий дріб будемо вважати нескінченним з періодом нуль.

Означення 2. Нехай $a = a_0, a_1 a_2 \dots$, $b = b_0, b_1 b_2 \dots$ невід'ємні дійсні числа. Числа a, b називаються рівними, якщо

I. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}: a_n = b_n$ або

II. $\exists n \in \mathbb{N} \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\} a_k = b_k, a_n = b_n + 1$
і $\forall m \in \{n+1, n+2, \dots\}: a_m = 0, b_m = 9$.

У подальшому обмежимося нескінченними десятковими дробами, які не містять 9 у періоді.

Приклад 1. Доведіть, що $\sqrt{5}$ – ірраціональне число.

Розв. Застосуємо метод від супротивного. Припустимо, що $\sqrt{5}$ – раціональне число, тобто $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$, де p, q – взаємно прості натуральні числа.

Маємо: $5 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 5q^2 = p^2 \Rightarrow p$ ділиться без остачі на 5 $\Rightarrow$

p^2 ділиться без остачі на 25 $\Rightarrow q^2$ ділиться без остачі на 5 $\Rightarrow$
 q ділиться без остачі на 5.

Отже, натуральні числа p, q мають спільний дільник 5, що суперечить припущенню, що p, q – взаємно прості натуральні числа. Число $\sqrt{5}$ ірраціональне.

Приклад 2. Доведіть, що $\sqrt[3]{2}$ – ірраціональне число.

Розв. Застосуємо метод від супротивного. Припустимо, що $\sqrt[3]{2}$ – раціональне число, тобто

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}, \text{ де } p, q \text{ – взаємно прості натуральні числа.}$$

Далі,

$$2 = \frac{p^3}{q^3} \Rightarrow 2q^3 = p^3 \Rightarrow p \text{ ділиться без остачі на } 2 \Rightarrow$$

p^3 ділиться без остачі на 8 $\Rightarrow q^3$ ділиться без остачі на 4 $\Rightarrow$
 q ділиться без остачі на 2.

Отже, натуральні числа p, q мають спільний дільник 2. Це суперечить припущенню, що p, q – взаємно прості натуральні числа. Число $\sqrt[3]{2}$ ірраціональне.

Приклад 3. Нескінченний періодичний десятковий дріб $0,1(6)$

подайте у вигляді відношення двох натуральних чисел.

Розв. За формулою (1),

$$0,1(6) = \frac{1}{10} + \frac{6}{9} \cdot \frac{1}{10} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}.$$

Приклад 4. Нескінченний періодичний десятковий дріб $0,(405)$

подайте у вигляді відношення двох натуральних чисел.

Розв. За формулою (1),

$$0,(405) = \frac{405}{999} = \frac{15}{37}.$$

Приклад 5. Раціональне число $\frac{5}{7}$ подайте у вигляді десяткового дробу.

Розв. Застосуємо ділення у стовпчик до повторення залишку – зациклення обчислень

$$\frac{5}{7} = 0,71428571\ldots = 0,(714285).$$

Приклад 6. Доведіть, що десятковий дріб

$$0,110100100010000\dots, \quad (2)$$

якому після коми виписані числа 1, 10, 100, 1000, 10000 і так далі, число ірраціональне.

Розв. Нуль не є періодом, бо запис дробу містить безліч одиниць.

Методом від супротивного доведемо, що цей десятковий дріб не є періодичним. Припустимо протилежне, тобто що цей десятковий дріб періодичний. Оскільки у запису дробу зустрічаються як завгодно довгі проміжки нулів, то і період складається з нулів. Але нуль не є періодом. Суперечність. Отже, десятковий дріб (2) не є періодичним і тому є ірраціональним числом.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що $\sqrt{7}$ – ірраціональне число.
2. Доведіть, що $\sqrt[3]{5}$ – ірраціональне число.
3. Нескінченний періодичний десятковий дріб $0,12(7)$
подайте у вигляді відношення двох натуральних чисел.

Відповідь: $\frac{23}{180}$.

4. Нескінченний періодичний десятковий дріб $0,(231)$

подайте у вигляді відношення двох натуральних чисел.

Відповідь: $\frac{77}{333}$.

5. Раціональне число $\frac{5}{6}$ подайте у вигляді десяткового дробу.

Відповідь: $0,8(3)$.

6. Доведіть, що десятковий дріб

$$0,123456\dots,$$

в якому після коми виписані підряд всі натуральні числа, число ірраціональне.

Обмежені множини. Точні межі

Нехай $A \subset \mathbb{R}$ непорожня множина.

Означення 1. Множина A має найбільший (максимальний) елемент, якщо $\exists a \in A \forall x \in A: x \leq a$. Елемент a називається **найбільшим (максимальним) елементом** множини A .

$$\text{Позначення: } a = \max A = \max \{x | x \in A\} = \max_{x \in A} x.$$

Означення 2. Множина A має найменший (мінімальний) елемент, якщо $\exists a \in A \forall x \in A: x \geq a$. Елемент a називається **найменшим (мінімальним) елементом** множини A .

$$\text{Позначення: } a = \min A = \min \{x | x \in A\} = \min_{x \in A} x.$$

Означення 3. Множина $A \subset \mathbb{R}$ називається **обмеженою зверху**, якщо

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in A: x \leq M.$$

Число M називається **мажорантою (верхньою межею)** множини A .

Означення 4. Множина $A \subset \mathbb{R}$ називається **обмеженою знизу**, якщо

$$\exists m \in \mathbb{R} \forall x \in A: x \geq m.$$

Число m називається **мінорантою (нижньою межею)** множини A .

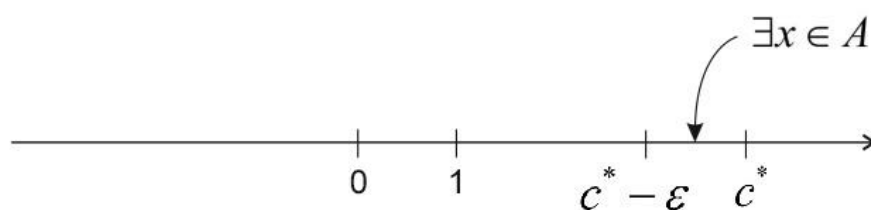
Означення 5. Множина $A \subset \mathbb{R}$ називається **обмеженою**, якщо вона обмежена зверху і знизу.

Зауваження 1. Множина $A \subset \mathbb{R}$ обмежена тоді й тільки тоді, коли $\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in A: |x| \leq c$.

Означення 6 (супремуму). Нехай $A \subset \mathbb{R}$. Число c^* називається супремумом (точною верхньою межею) множини A , якщо:

- 1) $\forall x \in A: x \leq c^*$;
- 2) $\forall d < c^* \exists x \in A: x > d$.

Геометрична інтерпретація означення супремуму



$$c^* = \sup A \Leftrightarrow \left(A \subset (-\infty, c^*] \right) \wedge \left(\forall \varepsilon > 0: A \cap (c^* - \varepsilon, c^*] \neq \emptyset \right)$$

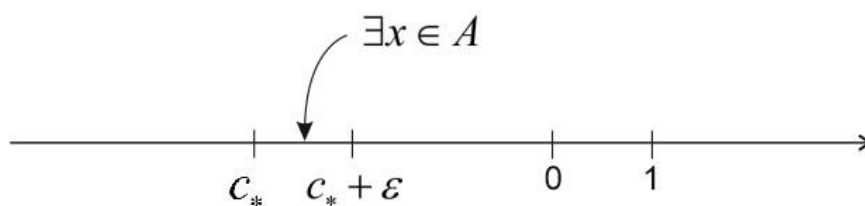
Таким чином, супремум – найменша з усіх мажорант.

Необмежена зверху множина не має супремуму.

Означення 7 (інфімуму). Нехай $A \subset \mathbb{R}$. Число c_* називається **інфімумом** (точною нижньою межею) множини A , якщо:

- 1) $\forall x \in A: x \geq c_*$;
- 2) $\forall d > c_* \exists x \in A: x < d$.

Геометрична інтерпретація інфімуму



$$c_* = \inf A \Leftrightarrow (A \subset [c_*, +\infty)) \wedge (\forall \varepsilon > 0: A \cap [c_*, c_* + \varepsilon) \neq \emptyset)$$

Таким чином, інфімум – це найбільша міноранта. Необмежена знизу множина не має інфімуму.

Зауваження 1. Нехай множина A має найбільший (найменший) елемент $\max A$ ($\min A$). Тоді існує $\sup A = \max A$ ($\inf A = \min A$). У цьому випадку $\sup A \in A$ ($\inf A \in A$).

Теорема 1 (про існування точних меж). Непорожня обмежена зверху множина дійсних чисел має точну верхню межу. Непорожня обмежена знизу множина дійсних чисел має точну нижню межу.

Приклад 1. Кожна скінченна непорожня підмножина дійсних чисел має найбільший та найменший елементи.

Приклад 2. Нехай $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ і $A = [a, b]$. Тоді $\inf A = \min A = a$, $\sup A = \max A = b$. Зауважимо, що в цьому випадку точні межі множини A належать цій множині.

Приклад 3. Нехай $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ і $A = (a, b)$.

Тоді $\sup A = b$, $\inf A = a$. Оскільки $a \notin A$, $b \notin A$, то $\max A$, $\min A$, не існують.

Приклад 4. Для множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 1$, але не існує $\sup \mathbb{N}$, оскільки множина $\mathbb{N}$ необмежена зверху.

Приклад 5. Доведіть обмеженість множини

$$A = \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Розв. $\exists m = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow A$ обмежена знизу;

$$\exists M = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1 \Rightarrow A \text{ обмежена зверху. Множина } A$$

обмежена, оскільки обмежена знизу і зверху.

Приклад 6. Знайдіть точні межі множини

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\} = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Розв. Для цієї множини $\max A = 1 \Rightarrow \sup A = 1$. Доведемо, що $\inf A = 0$:

1) $\forall \frac{1}{n} \in A : \frac{1}{n} > 0$;

2) $\forall d > 0$, внаслідок аксіоми Архімеда, $\exists n \in \mathbb{N}, n > \frac{1}{d} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < d$. Це

означає, що

$$\forall d > 0 \quad \exists \frac{1}{n} \in A : \frac{1}{n} < d.$$

Отже, за означенням інфімуму, $\inf A = 0$. Зауважимо, що у цьому випадку не існує $\min A$.

Відповідь: $\inf A = 0, \sup A = \max A = 1$.

Приклад 8. Знайдіть точні межі множини $A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Розв. Помітимо, що $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, $n \geq 1$; $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$.

Бачимо, що $\min A = \frac{1}{2} \Rightarrow \inf A = \frac{1}{2}$. Границя послідовності $\left(\frac{n}{n+1} \right)$ при $n \rightarrow \infty$

дорівнює 1. Зробимо припущення, $\sup A = 1$ і доведемо цю рівність, тобто доведемо, що виконуються пункти 1), 2) означення точної верхньої межі (супремуму).

$$1) \quad \forall n \in \mathbb{N} : \frac{n}{n+1} < 1 \Leftrightarrow n < n+1 - \text{виконується};$$

$$2) \quad \forall d \in (0;1) \exists n \in \mathbb{N} : \frac{n}{n+1} > d \Leftrightarrow n > dn + d \Leftrightarrow n > \frac{d}{1-d} - \text{таке натуральне}$$

число n існує за аксіомою Архімеда.

$$1), 2) \Rightarrow \sup A = 1.$$

$$\text{Відповідь: } \inf A = \frac{1}{2}, \sup A = 1.$$

Приклад 9. Знайдіть точні межі множини $A = \left\{ 1 - \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Розв. При непарному $1 - \frac{(-1)^n}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ при непарному $n \in \mathbb{N}$ і

$$1 - \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{n} \text{ при парному } n \in \mathbb{N}. \text{ Таким чином,}$$

$$A = \left\{ 2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \dots, \frac{2k}{2k-1}, \dots \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{2k-1}{2k}, \dots \right\}.$$

$$\text{Для цієї множини } \max A = 2 \Rightarrow \sup A = 2; \min A = \frac{1}{2} \Rightarrow \inf A = \frac{1}{2}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Доведіть обмеженість множини

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. Знайдіть точні межі множини $A = \left\{ 1 + \frac{1}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$

Відповідь: $\inf A = 1$; $\sup A = \frac{4}{3}.$

3. Знайдіть точні межі множини $A = \left\{ 1 - \frac{1}{2n-1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$

Відповідь: $\inf A = 0$; $\sup A = 1.$

4. Знайдіть точні межі множини $A = \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$

Відповідь: $\inf A = -1$; $\sup A = 1.$

5. Знайдіть точні межі множини $A = \left\{ \frac{n}{n+2} (2 + \cos \pi n) \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$

Відповідь: $\inf A = \frac{3}{5}$; $\sup A = 3.$

Дії над дійсними числами

Арифметичні дії над раціональними числами та властивості цих дій вважаємо відомими. Множина всіх раціональних чисел замкнена відносно арифметичних операцій (крім ділення на нуль). Ці операції мають усі відомі зі школи властивості. Для додатного дійсного числа $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ покладемо

$$a'_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \text{ — наближення з недостатчею,}$$

$$a''_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-n} \text{ — наближення з надлишком.}$$

Зауважимо, що $a = \sup_{n \geq 0} a'_n$, ..., $a = \inf_{n \geq 0} a''_n$.

Нехай $a, b \in \mathbb{R}$; $a > 0, b > 0$.

Означення 1. $a + b := \sup_{n \geq 0} (a'_n + b'_n)$; $ab := \sup_{n \geq 0} (a'_n b'_n)$;

$\frac{a}{b} := \sup_{n \geq 0} \frac{a'_n}{b''_n}$; при $a > b$ $a - b := \sup_{n \geq 0} (a'_n - b''_n)$.

Коректність цих означень впливає із теореми про існування точних меж.

Відомі властивості арифметичних дій для раціональних чисел зберігаються у випадку дійсних чисел.

Приклад 1. Доведіть, що сума ірраціонального та раціонального чисел є ірраціональне число.

Розв. Нехай $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{Q}$. Позначимо суму цих чисел через s . Якщо $s \in \mathbb{Q}$, то $\alpha = s - r$ – раціональне число як різниця двох раціональних чисел. Суперечність. Отже, сума ірраціонального та раціонального чисел є ірраціональне число.

Приклад 2. Чи може сума двох ірраціональних чисел бути раціональним числом?

Розв. Так. Наприклад, $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ – раціональне число.

Приклад 3. Відрізок $[0, 1]$ ділиться точкою з координатою x так, що

$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$ (золотий переріз). Доведіть, що x – ірраціональне число.

Розв. $\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$. Останнє квадратне рівняння має корені

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0. \text{ Корінь } x_2 < 0 \text{ і тому сторонній. Оскільки } \sqrt{5}$$

іраціональне число, то й $x = x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \in R \setminus Q$ (різниця іраціонального та раціонального числа – іраціональне число, частка від ділення іраціонального числа на раціональне – іраціональне число).

Приклад 4. Доведіть, що корінь натурального степеня із іраціонального додатного числа – іраціональне число.

Розв. Нехай $\alpha \in R \setminus Q$. Припустимо, $\sqrt[n]{\alpha} = \frac{p}{q}$ для деяких натуральних чисел p, q . Тоді $\alpha = \frac{p^n}{q^n}$ – раціональне число. Суперечність. Твердження доведено.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що різниця іраціонального та раціонального чисел є іраціональне число.
2. Доведіть, що добуток іраціонального числа на число раціональне, відмінне від нуля, дорівнює іраціональному числу.
3. Чи може куб іраціонального числа дорівнювати раціональному числу?
Відповідь: Так.
4. Чи може добуток іраціональних чисел дорівнювати раціональному числу?
Відповідь: Так.
5. Нехай $\alpha \in R \setminus Q, r \in Q$. Чи може число $\sqrt{r+\sqrt{\alpha}}$ бути раціональним?
Відповідь: Ні.

Метод математичної індукції

Нехай P – певне твердження стосовно натуральних чисел. **Метод (принцип) математичної індукції** полягає в наступному. Нехай

- 1) твердження P виконується для $n=1$ (база індукції);
- 2) з того, що твердження P виконується для натурального числа $n=k$, випливає, що це твердження виконується для $n=k+1$ (індукційний крок).

Тоді твердження P справджується для всіх натуральних чисел.

Приклад 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}: 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (3)$$

1. База індукції. Перевіряємо рівність (1) при $n=1$:

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

2. Індукційний крок. Припустимо, що рівність (3) справджується при $n=k$ і доведемо правильність цієї рівності при $n=k+1$:

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Отже, рівність (1) виконується для всіх натуральних чисел.

Приклад 2.

$$\forall n \in \mathbb{N}: 1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (4)$$

1. База індукції. Перевіряємо рівність (4) при $n=1$:

$$1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

2. Індукційний крок. Припустимо, що рівність (4) справджується при $n = k$ і доведемо правильність цієї рівності при $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= (k+1) \left(\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1) \right) = (k+1) \cdot \frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Отже, рівність (4) виконується для всіх натуральних чисел.

Приклад 3 (нерівність Я. Бернуллі).

$$\forall x > -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}: (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Доведемо цю нерівність методом математичної індукції.

- База індукції. Для $n = 1$ маємо рівність $1+x = 1+x$.
- Індукційний крок. Нехай $\forall x > -1: (1+x)^n \geq 1+nx$. Помножимо праву і ліву частини цієї нерівності на додатне число $1+x$:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

Таким чином, нерівність справджується для $n+1$. За принципом математичної індукції нерівність Я. Бернуллі має місце для всіх натуральних чисел.

Задачі для самостійного розв'язання

- Доведіть, що

$$\forall n \in \mathbb{N}: 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

- Доведіть, що

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

3. Доведіть, що

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

4. Доведіть, що

$$\forall n \geq 2 : 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Обмежені послідовності

Означення 1. Функція $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ називається **числовою послідовністю**.

Зазвичай записують $a_n := f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ і послідовність дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ позначають символом (a_n) .

Слід розрізняти послідовність $(a_n) = (f(n))$ і множину значень цієї послідовності, що позначається $E(f)$. Наприклад, множина значень послідовності $((-1)^n)$ дорівнює $\{-1, 1\}$ і складається з двох елементів, тоді як послідовність зліченна (точніше – графік функції, що задає послідовність, є зліченною множиною точок).

Означення 2. Послідовність (a_n) називається **обмеженою зверху**, якщо

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M.$$

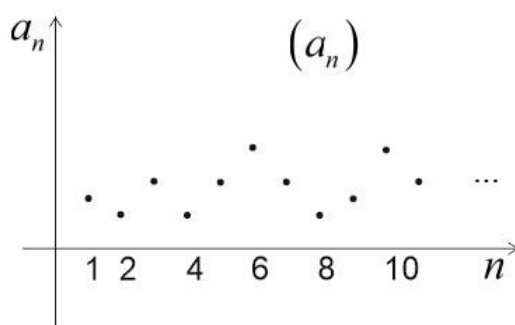
Послідовність (a_n) називається **обмеженою знизу**, якщо

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq m.$$

Послідовність (a_n) називається **обмеженою**, якщо

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq C.$$

Послідовність обмежена тоді й тільки тоді, коли вона обмежена знизу і обмежена зверху. Послідовність, що не є обмеженою, називається **необмеженою**. Нижче наведена геометрична інтерпретація послідовності за допомогою її графіка.



На осі абсцис відкладається номер члена послідовності, а на осі ординат – значення члена послідовності. Графік послідовності є зліченною множиною точок.

Графік обмеженої зверху числом M послідовності не містить точок, які лежать вище прямої $y = M$. Для обмеженої послідовності $\exists C \in \mathbb{R}$ таке, що графік послідовності не виходить із смуги, обмеженої прямими $y = -C$, $y = C$.

Приклад 1. Доведемо, що послідовність

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ коренів}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

обмежена. Дійсно, послідовність (a_n) обмежена знизу, наприклад, нулем:

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq 0.$$

Для доведення обмеженості зверху, помітимо, що

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Методом математичної індукції доведемо, що послідовність (a_n) обмежена зверху числом 2:

$$1) a_1 = \sqrt{2} \leq 2 \text{ (база індукції);}$$

$$2) \text{ якщо } a_n \leq 2, \text{ то } a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2 \text{ (індукційний крок).}$$

Отже, $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq 2$. Твердження доведено.

Приклад 2. Послідовність $(\sqrt{n})$ не обмежена зверху.

$$\text{Дійсно, } \forall M > 0 \exists n \in \mathbb{N} : n > M^2 \Rightarrow \sqrt{n} > M.$$

Приклад 3. Послідовність

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1$$

необмежена.

Доведення. Доведемо, що ця послідовність не обмежена зверху.

Помітимо, що для довільного $n \geq 2$

$$1 \geq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

і підсумуємо ці нерівності. Отримаємо нерівність

$$a_{n-1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}. \quad (5)$$

Оскільки послідовність $(\sqrt{n})$ не обмежена зверху (приклад 2), то

із нерівності (5) слідує, що послідовність (a_n) не обмежена зверху.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що послідовність

$$a_n = \underbrace{\sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{3}}}}_{n \text{ коренів}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

обмежена.

2. Доведіть, що послідовність $(\sqrt[3]{n^2})$ не обмежена зверху.

3. Доведіть, що послідовність

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \quad n \geq 1$$

не обмежена.

Границя послідовності

Нехай (a_n) - послідовність дійсних чисел.

Означення 1. Число $a \in \mathbb{R}$ називається **границею** послідовності (a_n) , якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon$.

Позначення: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$; $a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$.

При цьому кажуть, що послідовність (a_n) має границю a ; послідовність (a_n) збігається до числа a . Послідовність, яка збігається до деякого дійсного числа, називається **збіжною**. Послідовність, яка не є збіжною, називається **розбіжною**.

Зазначимо, що:

$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

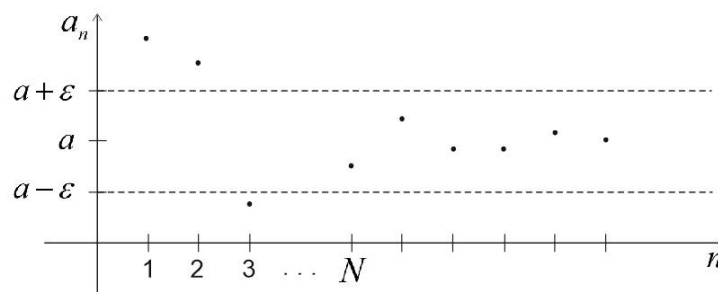
Інтервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ називають ε - **околом точки** a .

Для довільного натурального числа n_0 збіжність та значення границі послідовності (a_n) не залежить від значень перших n_0 її членів.

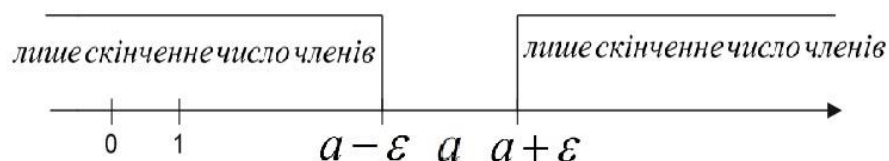
Геометрична інтерпретація границі послідовності

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ поза смугою, обмеженою прямими $y = a - \varepsilon$, $y = a + \varepsilon$

знаходиться лише скінченна множина точок графіка послідовності (a_n) .



Геометрична інтерпретація границі послідовності на числовій прямій



$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ кожний з променів $(-\infty, a - \varepsilon]$, $[a + \varepsilon, +\infty)$ містить лише

скінченне число членів послідовності $(a_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ інтервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ містить усі члени послідовності, починаючи з деякого номера.

Приклад 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$

За означенням 3: $\forall \varepsilon > 0: \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

Запишемо формальний рядок:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1: \forall n \geq N: \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Приклад 2. Послідовність $((-1)^n)$ розбіжна. Справді, якщо $a = 1$, то для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ поза околom $\left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ лежить нескінченна кількість членів цієї послідовності — всі члени послідовності з непарними номерами. Для $a \neq 1$ існує $\varepsilon = \frac{1}{2}|a - 1|$ таке, що поза околom $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ лежить нескінченна кількість членів послідовності $((-1)^n)$ — всі члени послідовності з парними номерами. Таким чином, жодне дійсне число a не є границею послідовності $((-1)^n)$, тобто ця послідовність розбіжна.

Приклад 3. Застосуйте означення границі послідовності для доведення рівності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{2n+3} = 2$.

Розв. $\forall \varepsilon > 0$

$$\left| \frac{4n+1}{2n+3} - 2 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{2n+3} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{5-3\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

Запишемо формальний рядок:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N = \left[\frac{5-3\varepsilon}{2\varepsilon} \right] + 1: \forall n \geq N: \left| \frac{4n+1}{2n+3} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Теорема 1. (про єдиність границі послідовності). Збіжна послідовність має рівно одну границю.

Приклад 4. Нехай $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$. Доведемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0. \quad (6)$$

При $q = 0$ маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$. Нехай тепер $q \neq 0$. Тоді $\exists x > 0$:

$$|q| = \frac{1}{1+x}. \text{ Далі, } \forall \varepsilon > 0$$

$$|q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \left| \frac{(1+x)^n \geq 1+nx}{\text{(нерівність Бернуллі)}} \right| \leq \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx} < \varepsilon$$

При $n > \frac{1}{x\varepsilon}$. Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \frac{1}{x\varepsilon} \forall n > N : |q|^n - 0 < \varepsilon. \text{ Рівність (6) доведена.}$$

Приклад 5. Нехай $b \in \mathbb{R}$ і $|b| > 1$. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b^n} = 0. \quad (7)$$

Доведення. Покладемо $q = \frac{1}{b}$. Тоді $|q| < 1$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Приклад 6. Нехай $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$ і $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha q^n = 0. \quad (8)$$

Доведення. Нехай число $k \in \mathbb{N}$ таке, що $k \geq \alpha + 1$. Для $q = 0$ твердження очевидне. Далі припускаємо, що $q \neq 0$. Оскільки $0 < |q|^{1/k} < 1$, то

$$\exists x > 0: |q|^{1/k} = \frac{1}{1+x}, \quad |q| = \frac{1}{(1+x)^k}. \text{ Для довільного } n \in \mathbb{N}$$

$$n^\alpha |q|^n = \frac{n^\alpha}{(1+x)^{kn}} \leq \left| \begin{array}{l} (1+x)^{nk} \geq (1+nx)^k \\ \text{(нерівність Бернуллі)} \end{array} \right| \leq \frac{n^\alpha}{(1+nx)^k} \leq \frac{n^\alpha}{n^k x^k} \leq \frac{1}{nx^k} <$$

$< \varepsilon$ при $n > \frac{1}{\varepsilon x^k}$. Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \frac{1}{\varepsilon x^k} \forall n > N : |n^\alpha q^n - 0| < \varepsilon.$$

Рівність (8) доведена.

Вправа 2. Нехай $a \in \mathbb{R}$, $|a| > 1$. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0. \quad (4)$$

Приклад 7. Доведемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} = 0. \quad (9)$$

Доведення. Для довільного $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{\lg n}{n} - 0 \right| = \frac{\lg n}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n < (10^\varepsilon)^n \Leftrightarrow \frac{n}{(10^\varepsilon)^n} < 1.$$

Але $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(10^\varepsilon)^n} = 0$. Тому, починаючи з деякого номера, $\frac{n}{(10^\varepsilon)^n} < 1$,

$$\text{тобто} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : \frac{n}{(10^\varepsilon)^n} < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\lg n}{n} - 0 \right| = \frac{\lg n}{n} < \varepsilon. \quad \text{Рівність} \quad (5)$$

доведена.

Приклад 8. Доведемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad (9)$$

Для оцінки $\sqrt[n]{n}$ зверху застосуємо нерівність між середнім геометричним і середнім арифметичним чисел $\sqrt{n}, \sqrt{n}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-2}; n \geq 2$:

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-2}} \leq \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Отже, $0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \frac{2}{\sqrt{n}}, n \geq 1$. Далі, $\forall \varepsilon > 0$

$$\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{4}{\varepsilon^2}.$$

Тому $\forall \varepsilon > 0 \exists N = \frac{4}{\varepsilon^2} \forall n > N : \left| \sqrt[n]{n} - 1 \right| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

Рівність (9) доведена.

Властивості збіжних послідовностей

Теорема 1. Збіжна послідовність обмежена.

Зауваження 1. Обернене твердження, взагалі кажучи, хибне.

Наприклад, послідовність $((-1)^n)$ обмежена, але розбіжна.

Теорема 2. Нехай $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}, n \rightarrow \infty$ і $b > a$. Тоді, починаючи з деякого номера, члени послідовності (a_n) менші числа b : $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : a_n < b$.

Теорема 3 (перехід до границі у нерівності). Нехай послідовності (a_n) і (b_n) задовольняють умови:

$$1) \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n;$$

$$2) a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty \text{ і } b_n \rightarrow b, n \rightarrow \infty.$$

Тоді $a \leq b$.

Зауваження 2. При переході до границі у строгій нерівності може виникнути рівність. Наприклад, $\forall n \in \mathbb{N}: -\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$. Але після переходу до границі отримуємо рівність $0 = 0$.

Зауваження 3. Твердження теореми 3 зберігається, якщо умову 1) замінити умовою $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: a_n \leq b_n$.

Теорема 4 (про три послідовності). Нехай послідовності (a_n) , (b_n) , (c_n) задовольняють наступні умови:

$$1) \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n \leq c_n;$$

$$2) a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty; c_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty.$$

Тоді $b_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$.

Зауваження 4. Твердження теореми 4 зберігається, якщо умову 1) замінити умовою $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: a_n \leq b_n \leq c_n$.

Приклад 1. Доведемо, що $\forall a > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Для $\forall a \geq 1 \forall n \geq [a] + 1: 1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$. За теоремою про три послідовності, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

У випадку $0 < a < 1$ покладемо $b = \frac{1}{a} > 1$. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}} = 1$.

Приклад 2. Для обчислення границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 7^n}$ застосуємо теорему

про три послідовності:

$$\forall n \in \mathbb{N}: 7 \leq \sqrt[n]{3^n + 7^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 7^n} = 7 \sqrt[n]{2} \rightarrow 7, n \rightarrow \infty. \text{ Отже, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 7^n} = 7.$$

Теорема 5 (про арифметичні дії над границями). Нехай $(a_n), (b_n)$ —

збіжні послідовності дійсних чисел, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Тоді

1) для довільного $c \in \mathbb{R}$ існує $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = ca$;

2) існує $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$;

3) існує $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$;

4) якщо $b \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Приклад 3. Знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}n^2 + n \lg n + 4n + 5}{n^2 + n^5 2^{-n} + 3n + 1}$.

Розв'язання. Чисельник і знаменник виразу під знаком границі поділимо на n^2 та застосуємо теорему про арифметичні дії над границями:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}n^2 + n \lg n + 4n + 5}{n^2 + n^5 2^{-n} + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} + \frac{\lg n}{n} + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + n^3 2^{-n} + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 2^{-n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \sqrt{2}.$$

Нескінченні границі

Серед розбіжних необмежених послідовностей виокремлюють такі, що мають границі $+\infty$, $-\infty$, ∞ , $-\infty$.

Означення 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall C \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{R} \forall n > N : a_n > C.$

Приклад 1. Доведемо за допомогою означення, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty.$

Дійсно,

$$\forall C > 0$$

$$\sqrt{n} > C \Leftrightarrow n > C^2. \text{ Тому}$$

$$\exists N = C^2 \quad \forall n > N : \sqrt{n} > C.$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty.$

Приклад 2. Доведемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{n + 1} = +\infty.$$

Доведення. Маємо:

$$\frac{n^3+1}{n+1} = n^2 - n + 1 \geq n \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty. \text{ Тому } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+1}{n+1} = +\infty.$$

Зауваження 1. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, то послідовність (a_n) не обмежена зверху. Проте не обмежена зверху послідовність не обов'язково має границю $+\infty$. Наприклад, послідовність $1, 2, 1, 3, 1, 4, \dots, 1, n, \dots$ не обмежена зверху і не прямує до $+\infty$.

$$\text{def} \\ \text{Означення 2. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{R} \forall n > N : a_n < C.$$

$$\text{Зауважимо, що } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = +\infty.$$

$$\text{def} \\ \text{Означення 3. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{R} \forall n > N : |a_n| > C.$$

$$\text{Зауважимо, що } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty.$$

Приклад 3. Нехай $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Доведення. Оскільки $\forall C > 0 : |a_n| > C \Leftrightarrow \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{C}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall C > 0 \exists N \in \mathbb{R} \forall n > N : |a_n| > C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall C > 0 \exists N \in \mathbb{R} \forall n > N : \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{C} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|} = 0.$$

Розкриття невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$

Нехай послідовності $(a_n), (b_n)$ прямують до нескінченності. Дослідження та обчислення границі частки цих послідовностей називають розкриттям невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$. При цьому можливі такі випадки:

- границя частки дорівнює дійсному числу (зокрема, може дорівнювати нулеві);
- границя частки дорівнює ∞ ;
- границя не існує.

Для знаходження границі відношення двох многочленів змінної n

ділимо чисельник і знаменник на n у старшому степені. Така границя існує і у залежності від співвідношення степенів многочленів у чисельнику і у знаменнику дорівнює:

- 0, якщо степінь многочлена у чисельнику менше степені многочлена у знаменнику;
- ∞ якщо степінь многочлена у чисельнику більше степені многочлена у знаменнику;
- Відношенню коефіцієнта при старшому степені многочлена у чисельнику до коефіцієнта при старшому степені многочлена у знаменнику.

Приклад 4.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 5n^2 + 2n + 4}{5n^3 + 4n^2 - 3n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3}}{5 + \frac{4}{n} - \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}} = \frac{3}{5}.$$

Приклад 5.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 2n + 4}{5n^3 + 4n^2 - 3n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3}}{5 + \frac{4}{n} - \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}} = 0.$$

Приклад 6.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 5n^2 + 2n + 4}{4n^2 - 3n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3}}{\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}} = \infty.$$

Розкриття невизначеності $\infty - \infty$

Нехай послідовності $(a_n), (b_n)$ прямують до нескінченності. Дослідження та обчислення границі різниці цих послідовностей називають розкриттям невизначеності $\infty - \infty$. При цьому можливі такі випадки:

- границя різниці дорівнює дійсному числу;
- границя різниці дорівнює ∞ ;
- границя різниці не існує.

Приклад 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^4 + 4n^2} - \sqrt{4n^4 + 6n^2}) =$ | множимо і ділимо на

спряжене $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2}{\sqrt{4n^4 + 4n^2} + \sqrt{4n^4 + 6n^2}} =$ | ділимо чисельник і

знаменник на спряжене $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{4 + \frac{4}{n^2}} + \sqrt{4 + \frac{6}{n^2}}} = -\frac{1}{2}.$

Розкриття невизначеності $0 \cdot \infty$

Нехай послідовності $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Дослідження та обчислення границі добутку цих послідовностей називають розкриттям невизначеності $0 \cdot \infty$. При цьому можливі такі випадки:

- границя добутку дорівнює дійсному числу (зокрема, нулеві);

- границя добутку дорівнює ∞ ;
- границя добутку не існує.

Приклад 8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{5n^2+n} \cdot (2n+7) =$ |множимо і спрощуємо| =

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 19n - 7}{5n^2 + n} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{19}{n} - \frac{7}{n^2}}{5 + \frac{1}{n}} = \frac{6}{5}.$$

Теорема Штольца¹

Ця теорема за певних умов дозволяє розкрити невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема (Штольца). Нехай послідовності (x_n) , (y_n) задовольняють умови: 1) $\forall n \in \mathbb{N}: y_n < y_{n+1}$;

2) $y_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$;

3) існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Тоді існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = p$.

Приклад 1. Застосуємо теорему Штольца для обчислення границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}.$$

¹ Отто Штольц (1842 – 1905) – австрійський математик

Покладемо $x_n := 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$, $y_n := n^3$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді:

$$1) \forall n \in \mathbb{N}: (n+1)^3 > n^3;$$

$$2) n^3 \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Далі, $x_n - x_{n-1} = n^2$;

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3 - (n-1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2 - 3n + 1} = \frac{1}{3}.$$

Внаслідок теореми Штольца, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$.

Приклад 3. Застосуємо теорему Штольца для обчислення границі відомої границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Покладемо $x_n := n^2$, $y_n := 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді:

$$1) \forall n \in \mathbb{N}: 2^{n+1} > 2^n;$$

$$2) 2^n \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Далі, $x_n - x_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$; $y_n - y_{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 1}{2^{n-1}}.$$

Для обчислення останньої границі знову застосуємо теорему Штольца.

Покладемо $u_n := 2n - 1$, $v_n := 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді:

$$1) \forall n \in \mathbb{N} : 2^n > 2^{n-1};$$

$$2) 2^{n-1} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Далі, $u_n - u_{n-1} = 2$.

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2^{n-2}} = 0.$$

Внаслідок теореми Штольца, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2^{n-1}} = 0$, звідки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

Задачі для самостійного розв'язання

Обчисліть границі

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 1}{(2n+3)^3}.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(n+3)(n+4) - n^4}{n^3 + n^2 + 5}.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n + 7^n}.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4}.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 6}{4n^2 - n}.$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{7n} + 6}{4n + 1}.$$

Відповіді: 1. $\frac{1}{8}$. 2. 1. 3. $\frac{1}{2}$. 4. 7. 5. $\frac{1}{4}$. 6. 2. 7. ∞ . 8. 0

Доведіть за означенням границі послідовності такі рівності:

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} = +\infty.$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \lg n = +\infty.$$

Монотонні послідовності

Означення 1. Послідовність (a_n) називається:

- зростаючою, якщо $\forall n \in \mathbb{N}: a_n < a_{n+1}$;
- неспадною, якщо $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$;
- спадною, якщо $\forall n \in \mathbb{N}: a_n > a_{n+1}$;
- незростаючою, якщо $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq a_{n+1}$.

Зауважимо, що зростаюча (спадна) послідовність є неспадною (незростаючою), але не навпаки. Неспадна або незростаюча послідовність називається монотонною.

Приклад 1. Послідовність натуральних чисел $(1, 2, 3, \dots, n, \dots)$ зростаюча; послідовність $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n, \dots)$ неспадна і не є зростаючою; послідовність $((-1)^{n-1})$ не є монотонною.

Послідовність (a_n) спадна тоді й тільки тоді, коли послідовність $(-a_n)$ зростаюча; послідовність (a_n) неспадна тоді й тільки тоді, коли послідовність $(-a_n)$ незростаюча.

Теорема (збіжність монотонної послідовності). Монотонна обмежена послідовність дійсних чисел збіжна.

Зауваження 1. Оскільки для фіксованого числа $n_0 \in \mathbb{N}$ значення членів $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$ послідовності (a_n) не впливають на збіжність цієї послідовності, то монотонність і обмеженість послідовності $(a_n: n \geq n_0)$ достатня для збіжності послідовності (a_n) .

Приклад 2. За допомогою теореми про збіжність монотонної послідовності доведемо збіжність та знайдемо границю послідовності

$$\left(\frac{n^2}{3^n}\right) = (a_n).$$

Дійсно,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{n^2}{3^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} < 1 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 3 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \sqrt{3},$$

що виконується для всіх $n \geq 2$. Отже, $\forall n \geq 2: a_{n+1} < a_n$ і послідовність

$(a_n: n \geq 2)$ спадна. Послідовність (a_n) обмежена знизу нулем. Внаслідок теореми про збіжність монотонної послідовності, існує $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Для

знаходження числа a у рівності

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

перейдемо до границі при $n \rightarrow \infty$ і отримаємо рівність $a = \frac{1}{3}a$, звідки $a = 0$.

Таким чином, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$.

Приклад 3. Доведемо, що послідовність

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ коренів}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

збіжна та знайдемо її границю. За індукцією доводиться, що ця послідовність обмежена зверху числом 2. Доведемо, що вона зростає. Помітимо, що

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

і застосуємо метод математичної індукції:

$$1) \quad n=1: a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_2 \quad (\text{база індукції});$$

$$2) \quad a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2} \quad (\text{індукційний крок}).$$

Отже, $\forall n \in \mathbb{N}: a_n < a_{n+1}$. Таким чином, послідовність (a_n) зростає, обмежена зверху числом 2 (було доведено раніше) і, внаслідок теореми про збіжність монотонної обмеженої послідовності, існує $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Із рекурентного співвідношення (1) отримаємо

$$a_{n+1}^2 = 2 + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

У цій рівності перейдемо до границі при $n \rightarrow \infty$ і отримаємо рівняння

$$a^2 = 2 + a,$$

звідки $a \in \{-1, 2\}$. Значення -1 не підходить, оскільки $\forall n \in \mathbb{N}: a_n > 0$. Отже $a = 2$.

Число Ейлера² e

Послідовність $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ зростає, обмежена зверху і, внаслідок теореми

про збіжність монотонної обмеженої послідовності, збіжна. Границя цієї послідовності називається числом Ейлера і позначається через e . Відомо, що число Ейлера ірраціональне,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828182845904523\dots$$

Число Ейлера – одна із фундаментальних математичних сталих. Логарифм з основою e називається **натуральним** і позначається символом

$$\ln := \log_e.$$

Приклад 4. Обчисліть $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$.

$$\text{Розв. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^3 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^3 = e^3.$$

Приклад 5. Обчисліть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Розв.

² Леонард Ейлер (Ойлер) (1707 – 1783) – швейцарський математик

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Доведіть збіжність та обчисліть границю послідовності $\left(\frac{n^2}{5^n}\right) = (a_n)$.

2. Доведіть збіжність та обчисліть границю послідовності

$$a_1 = \sqrt{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}, \quad n \geq 1.$$

3. Обчисліть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{5n}$.

4. Обчисліть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$.

$$\text{Відповіді. 1. 0. 2. } \frac{1 + \sqrt{13}}{2}. \text{ 3. } e^5. \text{ 4. } \frac{1}{e^2}.$$

Підпослідовності. Часткові границі

Нехай $(m(k))$ – зростаюча послідовність натуральних чисел, тобто

$$1 \leq m(1) < m(2) < \dots < m(k) < m(k+1) < \dots$$

Зауважимо, що $\forall k \geq 1: m(k) \geq k$ і тому $m(k) \rightarrow +\infty$.

Означення 1. Нехай (a_n) – послідовність дійсних чисел. Послідовність

$(a_{m(k)})$ називається **підпослідовністю** послідовності (a_n) .

Приклад 1. Послідовність є підпослідовністю самої себе. Дійсно, при $m(k)=k, k \geq 1$ маємо рівність $(a_{m(k)}) = (a_k)$.

Приклад 2. Послідовності $(a_{2k}), (a_{2k-1}), (a_{k!}), (a_{2^k})$ – підпослідовності послідовності (a_n) .

Означення 2. Число або символ $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ називається **частковою границею послідовності** (a_n) , якщо існує така підпослідовність $(a_{m(k)})$, яка має границю a .

Через A позначимо множину всіх часткових границь послідовності (a_n) .

Приклад 3. Нехай $\lim_{k \rightarrow \infty} a_n = a$. Тоді, внаслідок властивості 2, множина всіх часткових границь послідовності (a_n) дорівнює $\{a\}$.

Якщо послідовність (a_n) необмежена зверху, то символ $+\infty$ є її частковою границею.

Якщо послідовність (a_n) необмежена знизу, то символ $-\infty$ є її частковою границею.

Нехай послідовність (a_n) подана як об'єднання підпослідовностей

$(a_{m_i(k)}), 1 \leq i \leq p$, що мають границі: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{m_i(k)} = b_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, 1 \leq i \leq p$.

Тоді множина A всіх часткових границь послідовності (a_n) містить всі $b_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, 1 \leq i \leq p$ та не містить інших елементів множини $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Приклад 4. Знайдемо множину часткових границь послідовності $(a_n) = ((-1)^{n-1})$. Оскільки $a_{2k-1} = 1 \rightarrow 1, k \rightarrow \infty$ і $a_{2k} = -1 \rightarrow -1, k \rightarrow \infty$.

Отже, $A = \{-1, 1\}$.

Теорема 1 (про характеристизацію часткової границі). Число a є частковою границею послідовності (a_n) тоді й тільки тоді, коли довільний окіл точки a містить безліч членів послідовності (a_n) .

Теорема 2 (Больцано – Вейерштрасса). Довільна обмежена послідовність дійсних чисел містить підпослідовність, збіжну до дійсного числа.

Означення 1. Нехай A – множина всіх часткових границь числової послідовності (a_n) . **Нижньою границею** послідовності (a_n) називається число або символ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := \begin{cases} -\infty, & \text{якщо } -\infty \in A; \\ \inf A, & \text{якщо } -\infty \notin A \text{ і } A \neq \{+\infty\}; \\ +\infty, & \text{якщо } A = \{+\infty\}. \end{cases}$$

Верхньою границею послідовності (a_n) називається число або символ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \begin{cases} +\infty, & \text{якщо } +\infty \in A; \\ \sup A, & \text{якщо } +\infty \notin A \text{ і } A \neq \{-\infty\}; \\ -\infty, & \text{якщо } A = \{-\infty\}. \end{cases}$$

Зауваження 1. $-\infty \in A \Leftrightarrow$ послідовність (a_n) необмежена знизу.

$+\infty \in A \Leftrightarrow$ послідовність (a_n) необмежена зверху.

Зауваження 2. Для обмеженої послідовності (a_n)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf A, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup A.$$

Приклад 5. Нехай послідовність (a_n) має границю $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Тоді $A = \{a\}$ і тому $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = a$.

Приклад 6. Послідовність $(a_n) = ((-1)^{n-1})$ має

множину часткових границь $A = \{-1, 1\}$. (приклад 4). Тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf A = \min A = -1, \quad \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sup A = \max A = 1.$$

границі послідовності $(a_n) = \left(\cos \frac{2\pi n}{3} \right)$.

Розв.

$$a_{3k} = \cos 2\pi k = 1 \rightarrow 1, k \rightarrow \infty; \quad a_{3k+1} = \cos \frac{2\pi(3k+1)}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}, k \rightarrow \infty;$$

$$a_{3k+2} = \cos \frac{2\pi(3k+2)}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}, k \rightarrow \infty.$$

$$\text{Отже, } A = \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}, \quad \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{2}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти множину часткових границь, верхню та нижню

$$\text{Границі послідовності } (a_n) = \left(\sin \frac{2\pi n}{3} \right).$$

2. Знайти множину часткових границь, верхню та нижню

$$\text{Границі послідовності } (a_n) = \left(n \cos \frac{\pi n}{2} \right).$$

$$\text{Відповіді. 1. } A = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}, \quad \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2. A = \{-\infty, 0, +\infty\}, \quad \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = +\infty, \quad \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = -\infty.$$

Фундаментальні послідовності. Критерій Коші

Означення 1. Послідовність дійсних чисел (a_n) називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq N \quad \forall n \geq N : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Приклад 1. Доведемо, що послідовність

$$a_n = \frac{\cos 1}{2^1} + \frac{\cos 2}{2^2} + \dots + \frac{\cos n}{2^n}, n \geq 1 \text{ фундаментальна.}$$

Нехай $m, n \in \mathbb{N}$ і $m > n$. Оцінимо $|a_m - a_n|$:

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\cos m}{2^m} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^m} + \dots = \frac{1}{2^n}.$$

Далі,

$$\forall \varepsilon > 0 : \frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}.$$

Покладемо $N = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$. Тоді $\forall n \geq N, \forall m > n : |a_m - a_n| < \varepsilon$. Отже, послідовність (a_n) фундаментальна.

Приклад 2. Доведемо, що послідовність $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, n \geq 1$ не є фундаментальною. Спочатку напишемо заперечення фундаментальності послідовності:

послідовність (x_n) не є фундаментальною

def

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N, \exists m \geq N : |a_n - a_m| \geq \varepsilon.$$

У нашому прикладі покладемо

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n = N, \exists m = 2N : |x_{2n} - x_n| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \\ &\geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отже, послідовність (x_n) не є фундаментальною.

Теорема 1. Фундаментальна послідовність обмежена.

Теорема 2 (критерій Коші). Послідовність дійсних чисел збіжна тоді і тільки тоді, коли вона фундаментальна.

Приклад 3. Послідовність прикладу 2 не є фундаментальною і, внаслідок критерію Коші, розбіжна. Оскільки при цьому послідовність (x_n) зростаюча,

$$\text{то } x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що послідовність $a_n = \frac{\sin 1}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\sin n}{n(n+1)}, n \geq 1$ фундаментальна.
2. Доведіть, що добуток двох фундаментальних послідовностей – фундаментальна послідовність.
3. Доведіть, що послідовність $(\cos \pi n)$ не є фундаментальною.

Завдання для підготовки до контрольної роботи

Обчисліть

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2+1} \right);$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n^2 + 1}} - \sqrt{n - \sqrt{n^2 - 1}} \right);$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^4 + n + 1} - \sqrt{n^4 + 1} \right);$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right);$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 7}{n^3 + 2} \right)^{\frac{n^3 + 1}{5}};$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n + 3}{4n - 2} \right)^{8n-1};$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 3}{2n^2 - 1} \right)^{\frac{n^2}{4}};$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{\frac{n+1}{2}};$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{2n+1} - \sqrt[5]{n+1}}{\sqrt[5]{n}};$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right);$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right);$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 2n|}{\sqrt{n^2 + 1}};$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right);$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{5^n}};$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 8n + 7}{\sqrt{81n^4 - 5n^2 + 9}};$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n^2 + n}}{4n + 2};$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{5n^3 + 9} - \sqrt[4]{3n^3 - 8}}{\sqrt[3]{1 - 5n^5} + \sqrt[4]{7n^4 + 2}};$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + 5^n}{5^{n+1} + (-3)^{n+1}};$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} + n \sin n^2}{(n + \ln n)^2};$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 3^n + \sin n^2}{3^{n+1} + \cos n + n^5};$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n^2 + 1}{(2n + 3)^2};$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}};$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + (2n)^3 + (2n+1)^3}{n^4};$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot b^2 + 2 \cdot b^4 + \dots + n \cdot b^{2n}}{n \cdot b^{2n+2}}, \text{ де } |b| > 1;$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^k}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^k, \text{ } k \in \mathbb{N}.$$

26. Знайти множину часткових границь, верхню та нижню границі послідовності

$$1) (a_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} \right);$$

$$2) (a_n) = \left(1 + n \sin \frac{\pi n}{2} \right);$$

$$3) (a_n) = \left((-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n + \sin \frac{\pi n}{4} \right).$$

27. За допомогою теореми про існування границі монотонної послідовності довести збіжність послідовностей

$$1) x_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2^1} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{4 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}, \quad n \geq 1;$$

$$2) x_n = 1 + \frac{1}{2^1 + 1} + \frac{1}{2^2 + 1} + \dots + \frac{1}{2^n + 1}, \quad n \geq 1.$$

Відповіді. **1.** $\frac{2}{3}$. **2.** $+\infty$. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** e . **6.** e^{10} . **7.** $\sqrt{e}$. **8.** $1/\sqrt{e}$. **9.** $\sqrt[5]{2} - 1$. **10.** $\frac{1}{2}$. **11.** $\frac{1}{2}$. **12.**

1. $-\frac{1}{2}$. **13.** $\frac{6}{5}$. **14.** $\frac{1}{9}$. **15.** 0 . **16.** 0 . **17.** 0 . **18.** $\frac{1}{5}$. **19.** 1 . **20.** $\frac{1}{3}$. **21.** $\frac{1}{4}$. **22.** $\frac{2}{3}$. **23.** 4 . **24.** $\frac{1}{b^2-1}$. **25.** 2^k .

26.1) $A = \{0, 1\}$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; **2)** $A = \{-\infty, 1, +\infty\}$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$; **3)**

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} - e, -\frac{1}{\sqrt{2}} - e, e, 1+e, -1+e \right\}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1+e, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{\sqrt{2}} - e.$$

Зразок варіанта модульної контрольної роботи

1. а) Обчислити границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{8n+3}$;

б) Отриманий результат підтвердити за означенням границі послідовності.

Обчислити границі:

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{10}};$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{100n};$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n^3 - 1}{7 + 4n + 6n^2 + 10n^3};$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 + 2}{5n^2 + 3}\right)^{2n^2 + 1};$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin n! + \log_2 n + 5^n};$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot d + 2 \cdot d^2 + \dots + n \cdot d^n}{n \cdot d^{n+1}}, \text{ де } d > 1.$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 5n + 2} - \sqrt{n^2 - 1}\right);$

9. Знайти множину часткових границь, нижню та верхню границі послідовності $\{x_n : n \geq 1\}$, якщо

$$x_n = \frac{n-1}{2n+1} \sin \frac{2\pi n}{3}.$$

10. За допомогою теореми про існування границі монотонної послідовності довести збіжність послідовності

$$x_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^1} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \frac{1}{4 \cdot 4^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 4^{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Відповіді. 1. $\frac{1}{2}$. 2. 3. 3. $\frac{1}{2}$. 4. 5. 5. $\frac{5}{2}$. 6. e^{100} . 7. $\frac{1}{\sqrt{e^5}}$. 8. $\frac{1}{d-1}$. 9. $A = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{4}, 0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Список літератури

1. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: підручник: у 3 ч. Ч. 1. Функції однієї змінної. Київ : Вища школа, 198. 359 с.
2. Денисьєвський М. О., Курченко О. О., Нагорний В. Н. та ін. Збірник задач з математичного аналізу: функції однієї змінної. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2005. 240 с. Режим доступу:
<https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2018/03/all.pdf>
3. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : підручник: у 2 ч. Ч. 1. Київ : Либідь, 1993. 320 с.
4. Курченко О. О. Диференціальне числення функції однієї змінної: підручник. Київ, 2014. 239 с. Режим доступу:
<https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2018/03/merged.pdf>
5. Вища математика: збірник задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін.; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. Київ: А.С.К., 2005. 480 с.