

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

**НАВЧАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ**

для студентів спеціальності "математика"
механіко–математичного факультету

(I семестр першого курсу)

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів спеціальності "математика" механіко–математичного факультету (1 семестр першого курсу) / Упорядн. А. В. Чайковський, М. В. Сердюк.
– Електронне видання. – 2026. – 81 с.

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, професор Городній М.Ф.

доктор фіз.-мат. наук, п.н.с. Покутний О.О.

Затверджено на засіданні вченої ради
механіко-математичного факультету
2 квітня 2026 року, протокол № 12

ЗМІСТ

ЗМІСТ	3
ПЕРЕДМОВА	5
ЗАНЯТТЯ 1. СПРОЩЕННЯ ВИРАЗІВ. АЛГЕБРАІЧНІ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ПРОГРЕСІЇ.....	6
ЗАНЯТТЯ 2. ГРАФІКИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ.....	12
ЗАНЯТТЯ 3. ТРИГОНОМЕТРІЯ. НЕРІВНОСТІ.....	15
КОНТРОЛЬНА РОБОТА. ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ.....	18
ЗАНЯТТЯ 4. ЛОГІЧНІ СИМВОЛИ. МНОЖИНИ І ДІЇ НАД НИМИ.....	21
ЗАНЯТТЯ 5. ВІДОБРАЖЕННЯ. ОБРАЗИ І ПРООБРАЗИ. СЮР'ЄКЦІЯ, ІН'ЄКЦІЯ, БІЄКЦІЯ.....	25
ЗАНЯТТЯ 6. ДІЙСНІ ЧИСЛА. ТОЧНІ МЕЖІ.....	28
ЗАНЯТТЯ 7. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦІ ЗА ОЗНАЧЕННЯМ. ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ПОСЛІДОВНОСТІ.....	31
ЗАНЯТТЯ 8. ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ. ТЕОРЕМА ПРО ГРАНИЦЮ СУМИ, ДОБУТКУ І ЧАСТКИ.....	36
ЗАНЯТТЯ 9. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ. ТЕОРЕМА ШТОЛЬЦА.....	39
ЗАНЯТТЯ 10. ГРАНИЦЯ МОНОТОННОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ	41
ЗАНЯТТЯ 11. ПІДПОСЛІДОВНОСТІ. ЧАСТКОВІ ГРАНИЦІ. ВЕРХНЯ ТА НИ- ЖНЯ ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ	44
КОНТРОЛЬНА РОБОТА. ДІЇ НАД МНОЖИНАМИ. ТОЧНІ МЕЖІ. ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ.....	46
ЗАНЯТТЯ 12. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ У ТОЧЦІ. АРИФМЕТИЧНІ ДІЇ НАД ГРАНИЦЯМИ.....	49
ЗАНЯТТЯ 13. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ (ПРОДОВЖЕННЯ).....	53
ЗАНЯТТЯ 14. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ У ТОЧЦІ (ПРОДОВЖЕННЯ). ВІДНО- ШЕННЯ "О" ТА ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ	57
ЗАНЯТТЯ 15. НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ. ТОЧКИ РОЗРИВУ.....	63

ЗАНЯТТЯ 16. ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ. РІВНОМІРНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ	65
ЗАНЯТТЯ 17. ОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ. ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ	68
ЗАНЯТТЯ 18. ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ (ПРОДОВЖЕННЯ)	71
ЗАНЯТТЯ 19. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ. ДИФЕРЕНЦІАЛ	74
ЗАНЯТТЯ 20. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ	78
КОНТРОЛЬНА РОБОТА. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ. ПОХІДНА	80

ПЕРЕДМОВА

У цьому методичному посібнику наведені теми практичних занять з **математичного аналізу**, умови задач, рекомендованих для розв'язання в аудиторії, а також задачі для домашньої роботи

Головна мета практичних занять — активне засвоєння студентами основних понять і положень курсу, набуття навичок їх застосування до розв'язання стандартних задач, опанування деяких спеціальних методів. Умовам задач в кожному занятті передують кілька контрольних запитань, відповіді на які студенти мають підготувати вдома.

У кожному занятті група задач **А — задачі для аудиторної роботи, група Б — для домашнього завдання**. Кількість і якість задач, що розв'язуються в аудиторії і задаються додому, залежить від рівня підготовки студентів. Ці задачі підбираються викладачем з набору задач, наведених в методичці.

Пропонуються також завдання підвищеної складності для студентів з високим рівнем підготовки за умови успішного виконання обов'язкової частини. **Задачі підвищеної складності позначені літерою Д.**

У першому семестрі, як правило, проводяться три контрольні роботи, зразки умов та розв'язання (частково) яких наведено в тексті.

При підборі задач використано такі збірники задач:

Частина задач складена упорядниками. При підготовці цього учбового посібника автори суттєво використали методичні розробки

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко-математичного факультету (1 семестр першого курсу) // Упорядн. А.Я.Дороговцев, О.О.Курченко, М.О.Денисьєвський. — К., 1994,

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко-математичного факультету (1 семестр першого курсу) / Упорядн. М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, А. В. Чайковський. — К.: ВПЦ "Київський університет 2002.

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко-математичного факультету (2 семестр першого курсу) // Упорядн. М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, А. В. Чайковський, О.Н. Нестеренко. — К.: ВПЦ "Київський університет 2004.

ЗАНЯТТЯ 1
СПРОЩЕННЯ ВИРАЗІВ.
АЛГЕБРАЇЧНІ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ПРОГРЕСИЇ

Контрольні запитання

1. *Формули скороченого множення.*
2. *Властивості дій над степенями.*
3. *Властивості дій з коренями.*

A1

1. Спростити вираз:

- 1) $\frac{a^2+3a}{ax-5x+8a-40} - \frac{a}{x+8};$
- 2) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}};$
- 3) $\left(\frac{x^{1/2}+y^{1/2}}{(x+y)^{1/2}} - \frac{(x+y)^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}} \right)^{-2} - \frac{x+y}{2\sqrt{xy}}.$

2. Коли правильні формули:

- а) $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2;$ б) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy};$
в) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}};$ г) $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}?$

3. Виділити повний квадрат:

- 1) $x^2 - 6x^2 - 13;$
- 2) $1 - x^2 - 5x;$
- 3) $2x^2 - 5x + 7;$
- 4) $-4x - 2x^2.$

4. Розв'язати рівняння:

- 1) $8x^4 - 5x^2 - 3 = 0;$
- 2) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12;$
- 3) $2x^3 - 5x^2 + 7x - 10 = 0;$
- 4) $|x| + |x - 1| = 1;$
- 5) $|x^2 - 3x + 2| + 2x = 0.$

5. Розв'язати системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5, \\ x^{-2} + y^{-2} = 13; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y^2 - xy = -12, \\ x^2 - xy = 28. \end{cases}$$

6. Розв'язати рівняння з ірраціональностями:

$$1) \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = 1;$$

$$2) \sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}.$$

7. Знайдіть суму дванадцяти перших членів арифметичної прогресії, якщо $a_1 = -40$, $d = 6$.

8. Знайдіть 10-й член геометричної прогресії, якщо $b_1 = -128$ і $q = \frac{1}{2}$.

9. Знайти натуральне число n таке, що:

$$1) 2 + 5 + \dots + (3n + 2) = 7n + 5;$$

$$2) 3 + 6 + 12 + \dots + 3 \cdot 2^n = 4^n - 7 \cdot 2^{n+2} + 2^{n+1} - 3.$$

Д1. Спростити вираз:

$$1) \sqrt[4]{(1-2a+a^2)(a^2-1)(a-1)} : \frac{a^2+2a-3}{\sqrt[4]{a+1}};$$

$$2) \frac{x^4-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3} \cdot |x-3|;$$

$$3) \frac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x \cdot |2x^2-x-1|}};$$

$$4) \frac{\sqrt{\sqrt{5}-2} \cdot \sqrt[4]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2} \cdot \sqrt[4]{9+4\sqrt{5}+a}}.$$

Д2. Розв'язати рівняння:

$$1) \frac{x}{x^2+3x+2} - \frac{x}{x^2+5x+2} = \frac{1}{24};$$

$$2) \sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4;$$

$$3) \sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2;$$

$$4) \sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4;$$

$$5) \sqrt[3]{24+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{5+\sqrt{x}} = 1.$$

Д3. Розв'язати системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{x^3}{y^3} = 14, \\ x + y = 3; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

Д4. Чи правильно, що для всіх $x \in (-2, 2)$ виконується нерівність $x^4 + x \leq 20$.

Д5. Скільки членів арифметичної прогресії 4, 10, ... знаходиться між числами 110 і 340?

Д6. При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2 + 2(a - 7)x + a^2 - 9 = 0$ різні і обидва додатні?

Д7. Знайти всі значення параметра a , при яких рівняння $(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$ має два корені, які задовольняють умову: а) $x_1 < 2, x_2 > 3$; б) $x_1 < 3, x_2 > 2$.

Д8. При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 + 4x - 2|x - a| + 2 - a = 0$ має чотири корені?

Б1

1. Розкласти на множники:

- 1) $a^2(x - 1) - y(1 - x)$;
- 2) $3(x + y) + (x + y)^2$;
- 3) $a^x + a^{x+1}$;
- 4) $a^c x^{2c} + a^c x^c$;
- 5) $ax^2 - cx^2 - cx + ax - a + c$;
- 6) $12a^2y^2 - 6ayc + 3ac^2 - 6a^2yc - c + 2ay$;
- 7) $(x + y)(x^2 + y^2) - x^3 - y^3$;
- 8) $a^2b^2(b - a) + b^2c^2(c - b) + c^2a^2(a - c)$;
- 9) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$;
- 10) $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2$;
- 11) $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz$.

2. Позбавитися ірраціональності в знаменнику:

- 1) $\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt[4]{b^5}}$;
- 2) $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{6}}$;
- 3) $\frac{47}{2\sqrt{3} - \sqrt[4]{3}}$.

3. Спростити вираз:

- 1) $a + x - \frac{a^2 + x^2}{a - x}$;
- 2) $\frac{y}{3x - 2} - \frac{3y}{6xy + 9x - 4y - 6}$;
- 3) $\left(\frac{x}{x+1} + 1\right) \cdot \frac{1 - x^2}{4x^2 - 1}$;
- 4) $\left(\frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-y} - \frac{3y}{y^2 - 4x^2}\right) \cdot \left(\frac{y^2}{8x^2} - \frac{1}{2}\right)$;
- 5) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$;

- 6) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$;
- 7) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$;
- 8) $a^{7/12} \cdot x^{5/6} : a^{2/3} \cdot x^{3/4} \cdot 6^0$;
- 9) $(a^{0.5} + (ax)^{0.25} + x^{0.5}) \cdot (a^{0.5} - (ax)^{0.25} + x^{0.5})$;
- 10) $\left(\frac{a \cdot a^{0.5} + x \cdot x^{0.5}}{a^{0.5} + x^{0.5}} - (ax)^{0.5} \right) \cdot \left(\frac{a^{0.5} + x^{0.5}}{a - x} \right)^2$;
- 11) $\frac{a^{4/3} - 8a^{1/3}b}{a^{2/3} + 2\sqrt[3]{ab} + 4b^{2/3}} : (1 - 2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}) - a^{2/3}$;
- 12) $\left(\frac{x + (x^2 - 1)^{1/2}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x(x^2 - 1)^{-1/2} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{(x - \frac{1}{x})^{-1/2}}$.

4. Спростити вираз:

- 1) $\frac{(\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n})^2 + (\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n})^2}{2(m - n)} : \frac{1}{\sqrt{m^3} - \sqrt{n^3}} - 3\sqrt{mn}$;
- 2) $\frac{x - y}{x^{3/4} + x^{1/2}y^{1/4}} \cdot \frac{x^{1/2}y^{1/4} + x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2} + y^{1/2}} \cdot \frac{x^{1/4}y^{-1/4}}{x^{1/2} - 2x^{1/4}y^{1/4} + y^{1/2}}$.

5. Нехай $D = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} \geq 0$, $x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{D}}$. Обчислити $x^3 + ax + b$.

6. Розв'язати рівняння:

- 1) $5x^2 - 4x - 1 = 0$;
- 2) $2x^2 + 3x + 7 = 0$;
- 3) $3x^2 + 9x + 1 = 0$;
- 4) $2x^4 + x^2 - 3 = 0$;
- 5) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) = 9$;
- 6) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 3$;
- 7) $3x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$;
- 8) $\frac{x^2+1}{x+1} + \frac{x^2+2}{x-2} = -2$;
- 9) $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$;
- 10) $\frac{2x}{3x^2-x+2} - \frac{7x}{3x^2+5x+2} = 1$;
- 11) $|2x - 1| + |x + 1| = 1$;
- 12) $|1 - x| + |3x - 1| = 2$;
- 13) $|x^2 - 3| + 2 = 0$;
- 14) $|5 - 4x - x^2| + x - 5 = 0$.

7. Розв'язати системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^4 + y^4 = 82, \\ xy = 3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x + y = 3; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2. \end{cases}$$

8. Розв'язати рівняння з ірраціональностями:

- 1) $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$;
- 2) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$;
- 3) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$;
- 4) $\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2-7} = 2$;
- 5) $\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-12} = 1$;
- 6) $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}$.

9. Знайдіть 24-й член арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 13,5$ і $d = -0,8$.

10. Скільки членів арифметичної прогресії 88, 80, ... знаходиться між числами -40 і 10?

11. Шостий член арифметичної прогресії дорівнює 70, а 12-й член 10. Знайдіть суму двадцяти чотирьох перших членів цієї прогресії.

12. Знайдіть 8-й член геометричної прогресії, якщо $b_1 = -0,0001$ і $q = 10$.

13. У геометричній прогресії $b_9 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. Знайдіть перший член і суму дев'яти перших членів прогресії.

14. Знайти n натуральне таке, що:

- 1) $7 + 11 + \dots + (4n - 1) = 20n - 38$;
- 2) $4 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^{n^2 - \frac{29}{2}n + \frac{65}{2}}$.

ЗАНЯТТЯ 2

ГРАФІКИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Контрольні запитання

1. Область визначення та область значень функції.
2. Функції непарні, парні, монотонні та періодичні. Відповідні властивості графіків.
3. Елементарні перетворення графіків.

A2

1. Знайти множини визначення функцій. Чи є вони парними? непарними? періодичними?

1) $y = \sqrt{4 - x}$;

3) $y = \cos 3x$;

2) $y = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$;

4) $y = x^5$.

2. Побудувати графіки функцій:

1) $y = 2x + 3$;

4) $y = -x^2 + 4x - 1$;

2) $y = -1$;

3) $y = 5 - x^2$;

5) $y = x^2 + 4x + 5$.

3. Побудувати графіки функцій:

1) $y = -\log_2 x$;

3) $y = 2 + \log_2(x + 1)$;

2) $y = \log_2(-x)$;

4) $y = 2^{x-2}$.

4. Побудувати графіки дробово-лінійних функцій:

1) $y = \frac{2x - 3}{x - 2}$;

2) $y = \frac{3x + 1}{x + 1}$.

5. Побудувати графіки функцій:

1) $y = \sin(3x) - 4$;

6) $y = \frac{2 - |x|}{3 + |x|}$;

2) $y = 4 - \log_2(x - 2)$;

7) $y = |x^2 - 4x + 3|$;

3) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$;

8) $y = x^2 - 4|x| + 3$;

4) $y = \sin |x|$;

9) $y = |x^2 - 4|x| + 3|$;

5) $y = |\sin x|$;

10) $y = |x^2 - 4x| + 3$.

Д1. Спростити вираз:

- 1) $((\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2)^{1/2} + 2)^{1/2} - \log_b a - \log_a b$;
- 2) $\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}} + 8^{\frac{1}{3\log_x 2}} + 1\right)^{1/2}$;
- 3) $\left(\left(\frac{\log_a^2 b + 1}{2\log_a b} - 1\right)^{1/2} - \left(\frac{\log_a^2 b + 1}{2\log_a b} + 1\right)^{1/2}\right) \sqrt{2} \log_a^{1/2} b (a > 1)$;
- 4) $\sqrt{\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2 + 4} + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x}}$;
- 5) $\left(\frac{x^8+x^4-x^2\sqrt{2}+2}{x^4-x^2\sqrt{2}+1} + x^2\sqrt{2}\right)^{1/2}$;
- 6) $\sqrt{x^2 - 12x + 36} - \sqrt{x^2}$;
- 7) $\frac{(\lg b \cdot 2^{\log_2 \lg b})^{1/2} \cdot \lg^{-1/2} b^2}{\sqrt{\frac{\lg^2 b + 1}{2 \lg b} + 1} - 10^{0,5 \lg \lg b^{1/2}}}$;
- 8) $\sqrt{\frac{a - 8\sqrt[6]{a^3 b^2} + 4\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{b} + 2\sqrt[12]{a^3 b^2}}} + 3\sqrt[3]{b}$.

Д2. Без електронних засобів дізнатися, яке з чисел більше: $\log_{135} 675$ чи $\log_{45} 75$.

Д3. Знайти множину визначення та множину значень функції $y = \sqrt{2 + x - x^2}$.

Б2**1. Побудувати графіки функцій:**

- | | |
|---|---|
| 1) $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; | 9) $y = \left \frac{x-1}{x+4}\right $; |
| 2) $y = 3 + 2 \sin 2x$; | 10) $y = (x + 1)^3$; |
| 3) $y = 1 - \cos \frac{x}{2}$; | 11) $y = x^2 + 2x - 3 $; |
| 4) $y = \operatorname{tg} 2x $; | 12) $y = x^2 + 2 x - 3$; |
| 5) $y = \operatorname{tg} 2x $; | 13) $y = x^2 + 2 x - 3 $; |
| 6) $y = -2 \operatorname{arctg} x$; | 14) $y = x^2 + 2x - 3$. |
| 7) $y = \frac{1}{x-3}$; | |
| 8) $y = \frac{ x -1}{ x +4}$; | |

2. Знайти $\lg 56$, **якщо** $\lg 2 = a$ і $\log_2 7 = b$.

3. Знайти помилку в доведенні:

- 1) $8 < 32 \Rightarrow 2^3 < 2^5 \Rightarrow \log_{0.1}(2^3) < \log_{0.1}(2^5) \Rightarrow 3 \log_{0.1} 2 < 5 \log_{0.1} 2 \Rightarrow 3 > 5$;

$$2) \frac{1}{25} < \frac{1}{5} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{25} < \log_2 \frac{1}{5} \Rightarrow 2^{\log_2 \frac{1}{25}} < 2^{\log_2 \frac{1}{5}} \Rightarrow 2^{2 \log_2 \frac{1}{5}} < 2^{\log_2 \frac{1}{5}} \Rightarrow 4^{\log_2 \frac{1}{5}} < 2^{\log_2 \frac{1}{5}} \Rightarrow 4 < 2.$$

4. Розв'язати показникові рівняння:

$$1) 25^x = \frac{1}{5};$$

$$6) 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13;$$

$$2) 9^{-x} = 27;$$

$$7) 4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}};$$

$$3) \sqrt{2^x} \sqrt{3^x} = 36;$$

$$8) 4^x + 2^x - 6 = 0;$$

$$4) 5^{x+1} = 8;$$

$$9) 3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0;$$

$$5) 7^x - 7^{x-1} = 6;$$

$$10) 7 \cdot 2^x = 5 \cdot 3^x;$$

5. Розв'язати логарифмічні рівняння:

$$1) \lg x = 3 - \lg 5;$$

$$4) \log_2(x-1) = \log_2(x^2 - x - 16);$$

$$2) \lg(\lg x) = 0;$$

$$5) \log_3^2 x - 3 \log_3 x - 10 = 0;$$

$$3) \log_x 36 = 2;$$

$$6) \log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1;$$

ЗАНЯТТЯ 3 ТРИГОНОМЕТРИЯ. НЕРІВНОСТІ

Контрольні запитання

1. Основні тригонометричні формули.
2. Властивості нерівностей.

А3

1. Знаючи, що $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, знайдіть: $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{2}{5}$.
2. Спростіть вираз
 - 1) $\sin \alpha \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)$;
 - 2) $\frac{\sin \alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 5\alpha}$.
3. Розв'язати рівняння
 - 1) $\sin 2x + \cos 7x = 0$;
 - 2) $\cos 3x + \cos \frac{5x}{2} = 2$.
4. Розв'язати нерівності:
 - 1) $\frac{x-1}{x-3} \geq 2x - 3$;
 - 2) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-4} \leq 1$;
 - 3) $x^4 < 5$;
 - 4) $x^7 \geq 2$;
 - 5) $|x+2| < 0,03$;
 - 6) $|2x-1| < |x-1|$.
5. Розв'язати нерівності з ірраціональностями:
 - 1) $\sqrt{x+1} < 3$;
 - 2) $\sqrt{x} + x > 4$;
 - 3) $\sqrt{x^2+x-2} > x-2$;
 - 4) $\sqrt{x^2-x-12} < x$;
 - 5) $\sqrt{x^2-4x} > x-3$.
6. Розв'язати логарифмічні нерівності:
 - 1) $\log_{0,3}(3x-8) > \log_{0,3}(x^2+4)$;
 - 2) $\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \leq 1$.
7. Розв'язати показникові та степеневі-показникові нерівності:
 - 1) $1 < 3^x \leq 27$;
 - 2) $-3 \leq 25^x - 4 \cdot 5^x < 5$;
 - 3) $(x-3)^{x^2+x} < (x-3)^{7x-5}$;
 - 4) $|x+2|^{\frac{1}{x^2+x-6}} \geq |x+2|^{\frac{3}{x+3}}$.

8. Розв'язати нерівності:

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1) $\sin 2x \leq 0$; | 5) $\operatorname{tg} x \geq 0$; |
| 2) $\cos x \geq 1$; | 6) $\sin x \cos x > 0$; |
| 3) $\cos 3x \geq -\frac{1}{2}$; | 7) $\sin x \leq \cos x$; |
| 4) $\operatorname{tg} 3x \geq 1$; | 8) $7 \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x + 1 < 0$. |

БЗ

1. 1) Знаючи, що $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, знайдіть: $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.

2) Знаючи, що $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, знайдіть: $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{2}{5}$.

3) Знайдіть $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,4$, де α – гострий кут.

4) Знайдіть $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, якщо $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{5}$.

5) Знайдіть $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$, якщо $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$.

6) Знайдіть $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2$.

7) Знайдіть $\cos(\alpha + \beta)$, якщо $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \beta = \frac{5}{13}$, причому $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

8) Знайдіть $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\cos \alpha = 0,8$ і α – кут 4 чверті.

2. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу

- $1 + 4 \cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha$;
- $5 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$.

3. Обчисліть $\frac{\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6} + \sin \frac{11\pi}{6}}{\cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{3}}$.

4. Спростіть вираз

- $\frac{\sin 3\beta}{\cos 3\beta - \sin 3\beta} + \frac{\sin 3\beta}{\cos 3\beta + \sin 3\beta}$;
- $2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$;
- $4 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$.

5. Розв'язати рівняння

- | | |
|---|--|
| 1) $\cos(3x + \frac{\pi}{6}) = -1$; | 7) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$; |
| 2) $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{8}) = 0$; | 8) $6 \operatorname{ctg}^2 x - 2 \cos^2 x = 3$; |
| 3) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) = 1$; | 9) $\operatorname{ctg}^4 x = \cos^2 2x - 1$; |
| 4) $\sin x - \sin 3x = 0$; | 10) $4 \cos x - \operatorname{ctg} x - 1 = \frac{1}{\sin x}$; |
| 5) $\sin 5x + \cos 5x = 1$; | 11) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0,5$; |
| 6) $\cos 3x - \cos 5x = 0$; | |

6. Розв'язати нерівності:

- | | |
|---|---------------------|
| 1) $\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x-1} < \frac{3}{(x-2)^2};$ | 4) $2x^6 \leq 3;$ |
| 2) $\frac{1}{3x-2-x^2} - \frac{3}{7x-4-3x^2} > 0;$ | 5) $3x^3 \geq -1;$ |
| 3) $\frac{15}{4+3x-x^2} > 1;$ | 6) $ x-5 \geq 12;$ |
| | 7) $ x > x+1 .$ |

7. Розв'язати нерівності з ірраціональностями:

- | | |
|------------------------------|------------------------|
| 1) $\sqrt{2-x} < 3;$ | 3) $\sqrt{9x-20} < x;$ |
| 2) $\sqrt{x^2+3x+2} < 2x+5;$ | 4) $\sqrt{x+3} > x.$ |

8. Розв'язати логарифмічні нерівності:

- 1) $\log_{1/2}(x-7) > 4;$
- 2) $\lg(x+1) > \lg(5-x);$
- 3) $\log_{1/3} \frac{3x-1}{x+2} < 1;$
- 4) $\sqrt{\log_3 \frac{2x-3}{1-x}} < 1;$
- 5) $\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < 2 \log_{25}(5x^2 - 10x + 10);$
- 6) $\log_{x+1}(x^2 - x + 1) < 1;$
- 7) $\log_{1-x}(x^2 + x - 2) \geq 1;$
- 8) $\log_{4-x}(x^2 - x - 2) < \log_{4-x}(x+6);$
- 9) $\log_3(3^x - 1) \log_3(3^{x+2} - 9) > 3;$
- 10) $\log_{x^2+3x}(x+3) \leq 1.$

9. Розв'язати показникові та степеневі-показникові нерівності:

- | | |
|--|------------------------------------|
| 1) $10^{x^2} \leq 1;$ | 4) $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1;$ |
| 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} < \frac{1}{9};$ | 5) $(x-2)^{x^2-6x+8} \geq 1;$ |
| 3) $0 \leq 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \leq 3;$ | 6) $ x+1 ^{x^2+2x} \leq x+1 ^3.$ |

10. Розв'язати нерівності:

- | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $\cos 3x \geq 0;$ | 5) $\operatorname{ctg} x > 0;$ |
| 2) $\sin x \leq -1;$ | 6) $\sin 2x \cos x \leq 0;$ |
| 3) $\cos 2x < -\frac{1}{2};$ | 7) $\operatorname{tg} x \leq \sin x;$ |
| 4) $\operatorname{ctg} 3x \leq 1;$ | 8) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 \geq 0.$ |

**КОНТРОЛЬНА РОБОТА.
ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ**

Завдання індивідуальні. Зразок варіанта

1. Спростити вираз: $\frac{x^6+y^6}{x^2+y^2} - \sqrt{(x^4+y^4)\sqrt[4]{(x^4+y^4)^3}(x^4+y^4)^{1/4}}.$
2. Розв'язати нерівність $(2x)^{x^2+1} < (2x)^{4x}.$
3. Розв'язати рівняння: $\sin^4 x + 2\cos^2 x - 2 = 0.$
4. Знайти натуральне n таке, що $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = 4n - 3.$
5. Для яких значень параметра a рівняння $ax^4 - 2a^2x^2 + 1 = 0$ має рівно два розв'язки?
6. Побудувати графіки функцій:
 - 1) $y = \pi - 3 \operatorname{arctg} 2x;$
 - 2) $y = \frac{2-5x}{7x+1}.$

РОЗВ'ЯЗКИ

1. Використаємо формули суми кубів та дій над степенями:

$$\begin{aligned} & \frac{x^6+y^6}{x^2+y^2} - \sqrt{(x^4+y^4)\sqrt[4]{(x^4+y^4)^3}(x^4+y^4)^{1/4}} = \\ &= \frac{(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)}{x^2+y^2} - \sqrt{(x^4+y^4)(x^4+y^4)^{3/4}(x^4+y^4)^{1/4}} = \\ &= x^4-x^2y^2+y^4 - \sqrt{(x^4+y^4)^{1+3/4+1/4}} = x^4-x^2y^2+y^4 - \sqrt{(x^4+y^4)^2} = \\ &= x^4-x^2y^2+y^4 - (x^4+y^4) = -x^2y^2. \end{aligned}$$

2. Маємо показникові функції з основою $2x$. Для розв'язання нерівності необхідно розглянути випадки:

$$1) 0 < 2x < 1. \text{ Тоді } x^2 + 1 > 4x. \text{ Маємо систему } \begin{cases} 0 < 2x < 1; \\ x^2 + 1 > 4x. \end{cases}$$

$$\text{Розв'язуємо її: } \begin{cases} 0 < x < 1/2; \\ x^2 - 4x + 1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < 1/2; \\ x \in (-\infty, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty). \end{cases}$$

Звідси $x \in (0, 2 - \sqrt{3}).$

2) $2x > 1$. Тоді $x^2 + 1 < 4x$. Маємо систему $\begin{cases} 2x > 1; \\ x^2 + 1 < 4x. \end{cases}$

Розв'язуємо її: $\begin{cases} x > 1/2; \\ x^2 - 4x + 1 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1/2; \\ x \in (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}). \end{cases}$ Звідси

$x \in (1/2, 2 + \sqrt{3})$.

3) $2x = 0$ або $2x = 1$. Тоді маємо нерівність $0 < 0$ або $1 < 1$. Отже, $x \in \emptyset$.

Для того, щоб отримати розв'язок, необхідно об'єднати отримані множини: $x \in (0, 2 - \sqrt{3}) \cup (1/2, 2 + \sqrt{3})$.

3. Перетворюємо рівність так, щоб отримати лише одну тригонометричну функцію:

$$\sin^4 x - 2 \sin^2 x = 0.$$

Зробимо заміну $\sin x = t$. Отримаємо біквadratне рівняння

$$t^4 - 2t^2 = 0.$$

Звідси $t^2 = 0$ або $t^2 = 2$, звідки $t = 0$, або $t = \sqrt{2}$, або $t = -\sqrt{2}$.

Останні дві рівності неможливі, бо синус за модулем не перевищує одиниці. Отже, $\sin x = 0$, тому $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. Зліва маємо арифметичну прогресію з n доданків, першим доданком 1 і різницею 2. Її сума $(1 + (2n - 1)) \cdot n/2 = n^2$. Отже, маємо рівняння $n^2 = 4n - 3$. Розв'язуючи його, отримаємо $n = 1; n = 3$.

5. Біквadratне рівняння має розв'язки, якщо $D = 4a^4 - 4a \geq 0$, тобто $a(a - 1)(a^2 + a + 1) \geq 0$, або $a \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. Для цих значень параметра a рівняння $ax^4 - 2a^2x^2 + 1 = 0$ може мати розв'язки $x^2 = a^2 \pm \sqrt{a^4 - a}$, де права частина рівності повинна бути невід'ємною.

При $a \leq 0$ права частина невід'ємна, лише якщо в ній обрати знак плюс. Тоді рівняння має рівно два розв'язки при $a < 0$.

При $a \geq 1$ права частина невід'ємна для обох знаків. При цьому в обох випадках $x^2 \neq 0$. Тому рівняння не може мати рівно два розв'язки.

Отже, остаточно $a < 0$.

6. 1) Потрібно намалювати графік функції $y = \arctg x$, стиснути його вдвічі вздовж осі Ox , отримавши графік $y = \arctg 2x$, розтягнути отриманий графік втричі вздовж осі Oy , отримавши графік $y = 3 \arctg 2x$, віддзеркалити отриманий графік відносно осі Oy , отримавши графік $y = -3 \arctg 2x$, підняти отриманий графік вгору на π , отримавши кінцевий графік.

2) Врахуємо, що

$$\frac{2-5x}{7x+1} = -\frac{5}{7} \cdot \frac{x-\frac{2}{5}}{x+\frac{1}{7}} = -\frac{5}{7} \cdot \left(1 - \frac{19}{35} \cdot \frac{1}{x+\frac{1}{7}}\right) = -\frac{5}{7} + \frac{19}{49} \cdot \frac{1}{x+\frac{1}{7}}.$$

Потрібно намалювати графік функції $y = \frac{1}{x}$, посунути його вліво на $\frac{1}{7}$ вздовж осі Ox , отримавши графік $y = \frac{1}{x+\frac{1}{7}}$, стиснути отриманий графік вздовж осі Oy в $\frac{49}{19}$ разів, отримавши графік $y = \frac{19}{49} \cdot \frac{1}{x+\frac{1}{7}}$, опустити отриманий графік вниз на $\frac{5}{7}$, отримавши кінцевий графік.

ЗАНЯТТЯ 4

ЛОГІЧНІ СИМВОЛИ. МНОЖИНИ І ДІЇ НАД НИМИ

Контрольні запитання

1. Логічні символи $\Rightarrow$; $\Leftrightarrow$; $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$; $\forall$; $\exists$; $\exists!$; $:=$; $\overset{\text{def}}{=}$.
2. Перетворення логічних тверджень "не $B \Rightarrow$ не A ". Доведення від супротивного.
3. Способи задання множин.
4. Дії над множинами.

A4

1. Визначити множину A , якщо:
 - 1) $A = \{x \mid \exists n \in \mathbf{N} : x = 2n\}$;
 - 2) $\forall x \in A \exists n \in \mathbf{N} : x = 2n$;
 - 3) $\forall x \in A \exists m \in \mathbf{Z} \exists n \in \mathbf{N} : x = \frac{m}{n}$;
 - 4) $\forall x \in A \exists y \in \mathbf{R}, y \geq 1 : 2^x = y$;
 - 5) $\forall a \in A \exists x \in \mathbf{R} : x^2 + 2ax + a = 0$;
 - 6) $A = \{x \mid \exists y \in \mathbf{R} : x^2 + y^2 = 1\}$;
 - 7) $\forall (x, y) \in A : \max(x, y) \geq 1$.
2. Чи вірні наступні висловлювання:
 - 1) $\forall a \in \mathbf{R} \exists x \in \mathbf{R} : x^2 + ax = 0$;
 - 2) $\forall a \in \mathbf{R} \exists x \in \mathbf{R} : x^2 + 2ax + a = 0$?
3. Записати в кванторах висловлювання:
 - 1) "у множині A міститься більше одного елемента";
 - 2) "у множині A містяться як завгодно великі додатні числа".
4. Записати твердження та його заперечення в кванторах, з'ясувати, яке з двох тверджень істинне:
 - 1) при кожному $a > 0$ рівняння $x^2 = a$ має дійсний корінь;
 - 2) при кожному дійсному a рівняння $x^2 = a$ має дійсний корінь;
 - 3) існує квадратне рівняння, що не має дійсних коренів.
5. В яких випадках правильні твердження $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$?
Записати правильні твердження у вигляді теорем, використовуючи слова "необхідно" і "достатньо".
 - 1) $A =$ "число $a > 0$ ", $B =$ "число $a > 1$ ";
 - 2) $A =$ "дані кути вертикальні", $B =$ "дані кути рівні";

- 3) $A =$ "натуральне число ділиться на 3", $B =$ "натуральне число ділиться на 9";
- 4) $A =$ "рівняння $f(x) = g(x)$ має корінь", $B =$ "рівняння $f^2(x) = g^2(x)$ має корінь";
- 5) $A =$ "заданий трикутник рівнобедрений", $B =$ "дві медіани заданого трикутника рівні між собою";
- 6) $A =$ "заданий чотирикутник є ромбом", $B =$ "діагоналі заданого чотирикутника ділять його кути навпіл".
6. Довести для натуральних n твердження $n^2 - n - 3 \geq 0 \Rightarrow n \geq 3$: а) безпосередньо розв'язавши нерівність; б) записавши еквівалентне твердження з використанням заперечень.
7. Визначити множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\bar{A}$ та дати їх геометричну інтерпретацію, якщо:
- 1) $A = [1, 3]$, $B = (2, 5]$;
 - 2) $A = \{x \mid x^2 + 6x + 8 < 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 3x < 0\}$;
 - 3) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < |x - 3| \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2|x| < 3\}$;
 - 4) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geq 0\}$;
 - 5) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2|y - 1| \leq 1\}$.
8. Відомо, що множина A скінченна, а множина $A \cup B$ нескінченна. Довести методом від супротивного, що множина B нескінченна.
9. Довести рівність:
 $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.
- Д1. Нехай для $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ множина $A_{mn} = (m, m + n)$. Визначити такі множини:
- 1) $B_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{mn}$, $C_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{mn}$, $m \in \mathbf{Z}$;
 - 2) $\bigcap_{m=-\infty}^0 (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{mn})$; $\bigcap_{m \in \mathbf{Z}} (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{mn})$.
- Д2. Нехай $A_{mn} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid m^2 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\}$ для $m, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $m < n$. Визначити множини:
- $$\bigcup_{m=0}^{n-1} A_{mn}, \quad \bigcap_{m=0}^{n-1} A_{mn}, \quad \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_{mn},$$
- $$\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=m+1}^{\infty} A_{mn}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{n-1} A_{mn}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=0}^{n-1} A_{mn}.$$

Д3. Визначити множини $\bigcup_{t \in T} A_t$ та $\bigcap_{t \in T} A_t$, якщо:

- 1) $A_t = [t, t + 1]$, $T = [0, +\infty)$;
- 2) $A_t = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin x = t\}$, $T = [0, 1]$;
- 3) $A_t = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq t^2\}$, $T = [0, +\infty)$;
- 4) $A_t = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = tx^2\}$, $T = (0, +\infty)$.

Д4. Визначити множини $\bigcup_{t \in T} A_t$, $\bigcap_{t \in T} A_t$, де:

- 1) $A_t = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = ty\}$, $T = (0, \infty)$;
- 2) $A_t = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = ty\}$, $T = [-1, 1]$.

Б4

1. Що можна сказати про дійсне число x , якщо:

- 1) $\forall a > 0 : x \leq a$;
- 2) $\forall a \geq 0 : x < a$;
- 3) $\forall a < 0 : x < a$;
- 4) $\forall a < 0 : x > a$?

2. Визначити множину A , якщо:

- 1) $\forall a \in A \exists x \in \mathbf{R} : 3a + 2ax - x^2 > 0$;
- 2) $A = \{a \mid \exists x \in \mathbf{R} : 3a + 2ax - x^2 > 0\}$;
- 3) $\forall a \in A \exists b \in \mathbf{R} \exists x \in \mathbf{R} : x^2 + 2ax + b^2 + 1 < 0$.

3. Чи правильні наступні висловлювання :

- 1) $\forall n \in \mathbf{N} \exists r_1 \in \mathbf{Q} \exists r_2 \in \mathbf{Q} : r_1 r_2 + r_1 = n$;
- 2) $\exists a \in \mathbf{R} \forall x \in \mathbf{R} : x^2 - 2ax + a > 0$?

4. Записати твердження та його заперечення в кванторах, з'ясувати, яке з двох тверджень істинне:

- 1) при кожному $a \leq 0$ рівняння $x^2 = a$ має дійсний корінь;
- 2) існує дійсне a , при якому рівняння $x^2 + 2a = 0$ має дійсний корінь.

5. В яких випадках правильні твердження $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$? Записати правильні твердження у вигляді теорем, використовуючи слова "необхідно" і "достатньо".

- 1) $A =$ "натуральне число ділиться на 2", $B =$ "натуральне число ділиться на 10";
- 2) $A =$ "рівняння $x^3 = a^3$ має корінь", $B =$ "рівняння $x^5 = a^5$ має корінь".

6. Нехай $c = 3a + 5b$ і відомо, що число c не ділиться на 5. Довести, що число a не ділиться на 5.

7. Визначити множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$ та дати їх геометричну інтерпретацію, якщо:

- 1) $A = (0, 2)$, $B = [-5, 1]$;
- 2) $A = (0, +\infty)$, $B = (-\infty, 3]$;
- 3) $A = \mathbf{Z}$, $B = \mathbf{N}$;
- 4) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 6x - 7 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x < x^2\}$;
- 5) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geq 0\}$,
 $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq x^2\}$;
- 6) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$,
 $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$;
- 7) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sin(x - y) = 0\}$,
 $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \cos(x + y) = 0\}$;
- 8) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \forall a \in \mathbf{R} : a^2 + 2ax + 1 > 0\}$,
 $B = \{x \in \mathbf{R} \mid \forall a \in \mathbf{R} : a^2x + 2x + 2a \leq 0\}$.

8. Довести включення:

- 1) $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D)$;
- 2) $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$.

9. Довести рівність:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C.$$

10. За допомогою правил де Моргана довести рівність: $\overline{\overline{A \cup B} \cap (\overline{A \cup B})} = A \cup B$.

ЗАНЯТТЯ 5
ВІДОБРАЖЕННЯ. ОБРАЗИ І ПРООБРАЗИ.
СЮР'ЄКЦІЯ, ІН'ЄКЦІЯ, БІЄКЦІЯ

Контрольні запитання

1. Загальне поняття відображення (функції), образи і прообрази.
2. Означення сюр'єкції, ін'єкції і бієкції.

A5

1. Для функції $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbf{R}$, визначити наступні множини:
 $f(\{0\})$, $f(\{1\})$, $f(\{1, 2\})$, $f((0, 1))$, $f((1, \frac{3}{2}))$, $f((1, 2))$,
 $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-4, -3\})$, $f^{-1}((-5, 6])$, $f^{-1}((-\infty, 0])$.

2. Для функції $f(x) = 1 + \sin x$, $x \in \mathbf{R}$, визначити наступні множини:
 $f(\{0, \pi\})$, $f(\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\})$, $f((0, \frac{3\pi}{2}])$,
 $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}((\frac{1}{2}, 2])$, $f^{-1}((\frac{1}{2}, +\infty))$.

3. Які з наступних відображень з $[-1, 1]$ в $[-1, 1]$ будуть сюр'єкціями? ін'єкціями? бієкціями?

$$x \mapsto x^3, \quad x \mapsto x^2, \quad x \mapsto 2^{x-1}, \quad x \mapsto 2^{|x|-1}.$$

4. Чи є відображення $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, що задається формулою 1) $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$; 2) $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ сюр'єкцією? ін'єкцією? бієкцією?

5. Визначити обернені функції та побудувати їх графіки для наступних функцій:

1) $y = 2^x + 1$, $x \in \mathbf{R}$; 2) $y = \log_{1/3}(2x)$, $x > 0$.

6. Показати, що функція $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$, не має оберненої. Визначити обернені функції для функцій:

1) $y = x^2$, $x \in [-1, 0]$; 2) $y = x^2$, $x \in [0, 1]$.

7. 1) Записати суперпозиції функцій $g(h)$, $h(g)$, $h(h)$, $g(g)$, де

$$g(x) = e^x, \quad h(x) = \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

- 2) Подати наступну функцію у вигляді суперпозиції кількох елементарних функцій:

$$1) f(x) = \sin^3 e^x; \quad 2) f(x) = \frac{1}{\sin^2(\ln x)}.$$

8. Довести методом математичної індукції:

1) рівність $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2) нерівність $n \geq \log_3 n$, $n \geq 1$.

Д1. Довести співвідношення: $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus B_k)$. Навести приклади множин, для яких має місце строге включення.

Д2. Функція $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ задана співвідношенням

$$f(n) = n(n+1), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Визначити прообрази наступних множин

$$\{1\}, \quad \{2\}, \quad \mathbf{N}, \quad \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}.$$

Д3. Чи є відображення $f: \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$ бієкцією, якщо

$$f(m, n) = m + \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}, \quad (m, n) \in \mathbf{N}^2?$$

Д4. Нехай $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{N}$, $g: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, $h = g(f): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Чи може h бути ін'єкцією? сюр'єкцією? бієкцією?

Д5. Довести, що жодне відображення $f: A \rightarrow 2^A$ не є бієкцією.

Б5

1. Для функції $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, визначити множини:

$$f(\{-1\}), \quad f(\{-1, 1\}), \quad f((-2, 0)), \quad f([1, +\infty)), \\ f^{-1}(\{1\}), \quad f^{-1}(\{-1\}), \quad f^{-1}((0, 1)), \quad f^{-1}((-1, 1)).$$

2. Які з наступних відображень $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------|
| 1) $(x, y) \mapsto (y, x);$ | 3) $(x, y) \mapsto (x+1, y+1);$ |
| 2) $(x, y) \mapsto (x, 0);$ | 4) $(x, y) \mapsto (2^x, 2^y)$ |

є сюр'єкцією? ін'єкцією? бієкцією? Для відображення f з 2) визначити $f^{-1}(A)$, де $A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$. Для відображення f з 4) визначити $f^{-1}(A)$, де $A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 1\}$.

3. Нехай $f: X \rightarrow Y$ і A, B - підмножини X . Довести, що :

- 1) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B);$
- 2) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B);$
- 3) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B).$

У випадках 1) та 2) навести приклади строгого включення.

4. Нехай $f: X \rightarrow Y$ і A, B - підмножини Y . Довести, що:

- 1) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$; 3) $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$;
 2) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$; 4) $f(f^{-1}(A)) = A \cap f(X)$.

5. Задано відображення $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$, $f(n) = 1 + n^2$. Знайти $f(\{1\})$, $f^{-1}(\{-2\})$, $f^{-1}(\{2\})$.

6. Визначити обернені функції та побудувати їх графіки для наступних функцій:

- 1) $y = (0, 3)^x$, $x \in \mathbf{R}$; 4) $y = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$;
 2) $y = \log_5 x$, $x > 0$; 5) $y = x^3$, $x \in \mathbf{R}$;
 3) $y = \cos x$, $x \in [\pi, 2\pi]$; 6) $y = \sqrt[4]{x}$, $x \geq 0$.

7. Знайти обернені функції та побудувати їх графіки:

- 1) $y = 2x - x^2$, $x \geq 1$; 2) $y = 2x - x^2$, $x \leq 1$.

8. 1) Записати суперпозиції функцій $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$, $g(h)$, $h(g)$, $f(h)$, $h(f)$, $h(h)$, де

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = \lg(|x| + 1), \quad x \in \mathbf{R}.$$

2) Подати наступну функцію у вигляді суперпозиції кількох елементарних функцій:

$$f(x) = \sqrt[3]{\arcsin^2(2^{-x^2})}.$$

9. Довести методом математичної індукції:

- 1) рівність $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $n \geq 1$;
 2) нерівність $2^n \geq n$, $n \geq 1$.

ЗАНЯТТЯ 6 ДІЙСНІ ЧИСЛА. ТОЧНІ МЕЖІ.

Контрольні запитання

1. Означення дійсного числа.
2. Порівняння дійсних чисел.
3. Означення раціональних та ірраціональних чисел.
4. Означення алгебраїчних чисел.
5. Означення обмеженої зверху, обмеженої знизу та обмеженої числової множини.
6. Означення найбільшого і найменшого елементів числової множини.
7. Означення точної верхньої та точної нижньої межі числової множини.

A6

1. Довести, що число $\sqrt{3}$ – ірраціональне.
2. Довести, що число $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ – алгебраїчне.
3. Довести, що не існує раціонального числа r , такого що:
1) $r^2 = 5$; 2) $r^3 = 7$.
4. Нехай $\alpha, \beta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $r \in \mathbf{Q}$. Які з наступних чисел можуть виявитися раціональними: 1) $\alpha + \beta$; 2) $\alpha + r$; 3) $\sqrt{r}$?
5. Для множини A визначити точні верхню та нижню межі, якщо
 - 1) $A = (-2, 3) \cup [4, 5]$;
 - 2) $A = (-1, 2) \cup \{4\} \cup (5, 6)$;
 - 3) $A = (-\infty, 3)$;
 - 4) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 1 > 0\}$;
 - 5) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x = 2, 13\alpha_3 \dots \alpha_n \dots; \alpha_n \in \{0, 1, \dots, 9\}, n \geq 3\}$;
6. Довести обмеженість та визначити точні верхню та нижню межі наступних множин:
 - 1) $\left\{ \frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$;
 - 3) $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$;
 - 2) $\left\{ \frac{n}{n+3}(2 + (-1)^n) \mid n \in \mathbf{N} \right\}$;
 - 4) $\left\{ 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$;
7. Наведіть приклад числової множини A такої, що $\inf A = 0$, $\sup A = 1$, але $A \neq [0, 1]$.

8. Знайти:

1) $\inf_{n \in \mathbf{N}} \sup_{m \in \mathbf{N}} \frac{m-n}{m+n};$

2) $\sup_{m \in \mathbf{N}} \inf_{n \in \mathbf{N}} \frac{m-n}{m+n};$

3) $\sup_{n \in \mathbf{N}} \inf_{x \in \mathbf{R}} (x^2 - 2nx)$

9. Довести, що множина дійсних чисел

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}.$$

необмежена зверху.

Д1. Показати, що якщо $\frac{m}{n}$ – хороше наближення до $\sqrt{2}$, то $\frac{m+2n}{m+n}$ – ще краще наближення і що похибки цих наближень будуть різних знаків. На основі цього твердження отримайте 4 наближення до $\sqrt{2}$, виходячи з наближення $\frac{1}{1}$. Оцініть їх точність.

Д2. Довести, що числа $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}, \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ – алгебраїчні.

Д3. Довести, що число, виражене нескінченним десятковим дробом $0,1000000001000000\dots$ (одиниці стоять на першому, десятому, сотому, тисячному і т.д. місці, інші цифри – нулі) – ірраціональне.

Д3. Якими співвідношеннями зв'язані точні межі непорожніх обмежених множин $A \subset \mathbf{R}, B \subset \mathbf{R}$, якщо:

1) $B = \{-x \mid x \in A\};$

4) $B = \{x^2 \mid x \in A\};$

2) $B = \{x+a \mid x \in A\}, a \in \mathbf{R};$

3) $B = \{ax \mid x \in A\}, a \in \mathbf{R};$

5) $B = \{x^3 \mid x \in A\}.$

Б6

1. Довести, що число $\sqrt[3]{4}$ – ірраціональне.

2. Довести, що число $\frac{\sqrt{2}+3}{4}$ – алгебраїчне.

3. Відрізок AB ділиться точкою C так, що $AB \cdot AC = BC^2$ (золотий поділ). Довести, що відношення $\frac{AC}{AB}$ ірраціональне.

4. Вказати два ірраціональних числа, різниця яких раціональна.

5. Вказати два ірраціональних числа, добуток яких раціональний.

6. Нехай $\alpha, \beta \notin \mathbf{Q}, \alpha + \beta \in \mathbf{Q}$. Довести, що $\alpha - \beta, \alpha + 2\beta \notin \mathbf{Q}$.

7. Нехай $\alpha, \beta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, r \in \mathbf{Q}$. Які з наступних чисел можуть виявитися раціональними: 1) $\sqrt{\alpha}$; 2) $\alpha \cdot \beta$; 3) $\alpha \cdot r$; 4) $\sqrt{\alpha+r}$;

5) $\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}$; 6) $\sqrt{\alpha+\sqrt{r}}$; 7) $\sqrt{r+\sqrt{\alpha}}$?

8. Довести, що дійсне число $0,12345678910111213\dots$ – ірраціональне.

9. Виписати десяткові наближення числа $\sqrt{2}$ з недостачею з точністю 0,1; 0,01; 0,001 і знайти різницю між числом 2 і квадратами цих наближень. Зробити те саме з наближеннями з надлишком.

10. Які з наступних числових множин обмежені зверху, які обмежені знизу, які необмежені? Знайти точні верхні та нижні межі для обмежених множин.

1) Множина раціональних чисел $r = \frac{p}{q}$, для яких $0 < q < p$.

2) Множина раціональних чисел $r = \frac{p}{q}$, для яких $-q < p < 0 < q$.

3) $[2, 7] \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$.

4) Множина периметрів правильних 2^{n+1} -кутників, вписаних у коло радіуса R .

5) Множина площ правильних 2^{n+1} -кутників, вписаних у коло радіуса R .

6) Множина десяткових наближень з надлишком для $\sqrt{2}$.

7) Множина десяткових наближень з недостачею для $\sqrt{2}$.

11. Знайти точні межі множин:

1) $[-2, 2] \cup \{7\}$;

5) $\left\{ \frac{n^3}{2n^3+1} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$;

2) $\{x \mid x^2 - 3x + 2 > 0\}$;

6) $\left\{ \frac{n}{2n+1} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$;

3) $\left\{ \frac{1}{n-10,5} \mid n \geq 1 \right\}$;

4) $\{(-1)^n (2 + \frac{3}{n}) \mid n \geq 1\}$;

7) $\left\{ 1 + \frac{n}{n+2} \sin \frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$.

8) $\left\{ 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mid n \geq 1 \right\}$;

12. Для яких числових множин $\inf A = \sup A$?

13. Довести, що множина всіх правильних раціональних дробів

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{N}, 0 < p < q \right\}$$

не має ні найменшого, ні найбільшого елементів. Знайти точні верхню та нижню межі цієї множини.

14. Знайти:

1) $\sup_{m \in \mathbf{N}} \inf_{n \in \mathbf{N}} \frac{m}{m+n}$;

3) $\sup_{n \in \mathbf{N}} \inf_{x \in \mathbf{R}} \frac{1}{n+2+\arctg x}$.

2) $\inf_{n \in \mathbf{N}} \sup_{m \in \mathbf{N}} \frac{m}{m+n}$;

ЗАНЯТТЯ 7

ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦІ ЗА ОЗНАЧЕННЯМ ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Контрольні запитання

1. Означення границі послідовності.
2. Означення обмеженої послідовності.
3. Теорема про єдиність границі.
4. Означення фундаментальної послідовності.
5. Критерій Коші збіжності числової послідовності.

A7

1. За означенням границі послідовності довести рівності:

$$\begin{array}{ll} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{4n+5} = \frac{1}{2}; & 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^3+1} = 0; \\ 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+6}{n+1} = 5; & 4) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\sqrt{n}} = 0. \end{array}$$

- У випадку 2) заповнити наступну таблицю:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
$N(\varepsilon)$				

2. Чи збіжна послідовність $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots$?

3. Знайти наступні границі:

$$\begin{array}{l} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); \\ 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \cos n!}{n+1}; \\ 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right); \\ 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right). \end{array}$$

4. Який вираз приймає більші значення для всіх натуральних n , починаючи з деякого:

1) $100n+200$ чи $0,01n^2$; 2) 2^n чи n^{1000} ; 3) 1000^n чи $n!$?

5. Нехай послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ обмежена, а послідовність $\{b_n : n \geq 1\}$ збіжна до нуля. Довести, що послідовність $\{a_n b_n : n \geq 1\}$ збігається до нуля.

6. Нехай $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Довести, що $|a_n| \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$ тоді і тільки тоді, коли $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

7. За допомогою критерію Коші довести збіжність наступних послідовностей:

$$1) x_n = \frac{\cos 1}{2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{2^3} + \dots + \frac{\cos n}{2^n}, \quad n \geq 1;$$

$$2) x_n = \frac{\sin 2}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 3}{2 \cdot 3} + \frac{\sin 4}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{\sin n}{(n-1)n}, \quad n \geq 2.$$

8. Нехай $\{a_n : n \geq 1\}$ – послідовність дійсних чисел і

$$\forall n \geq 1 : |a_{n+1} - a_n| < 2^{-n}.$$

Довести, що ця послідовність фундаментальна.

9. Довести, що послідовність

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1,$$

не є фундаментальною. Чи має границю ця послідовність?

Д1. Довести наступні рівності:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0;$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2\sqrt{n}} = 0.$$

Д2. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right)$.

Д3. Нехай послідовність прямує до $+\infty$. Довести, що серед її членів є найменший.

Д4. Довести, що збіжна послідовність має найбільший або найменший член.

Д5. Нехай $\{a_n : n \geq 1\}$ і $\{b_n : n \geq 1\}$ – фундаментальні послідовності.

Довести фундаментальність наступних послідовностей:

$$1) \{|a_n| : n \geq 1\};$$

$$5) \{a_n a_{n+2} : n \geq 1\};$$

$$2) \{a_n b_n : n \geq 1\};$$

$$6) \{\max\{a_n, b_n\} : n \geq 1\};$$

$$3) \{a_n^2 : n \geq 1\};$$

$$7) \{\min\{a_n, b_n\} : n \geq 1\}.$$

$$4) \{a_n + b_n : n \geq 1\};$$

Д6. Нехай $a \in \mathbf{R}$, $\{a_n : n \geq 1\}$ – послідовність дійсних чисел. Що означають наступні висловлювання:

$$1) \exists \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbf{N} \forall n > k : |a_n - a| < \varepsilon;$$

$$2) \exists \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbf{N} \forall n > k : |a_n - a| > \varepsilon;$$

$$3) \exists \varepsilon > 0 \forall k \in \mathbf{N} \exists n > k : |a_n - a| < \varepsilon;$$

$$4) \exists \varepsilon > 0 \forall k \in \mathbf{N} \forall n > k : |a_n - a| < \varepsilon;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right);$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right).$$

3. Чи зміниться зміст означення границі послідовності, якщо в означенні:

- 1) " $\forall \varepsilon > 0$ " замінити на " $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}$ ";
- 2) " $\forall \varepsilon > 0$ " замінити на " $\exists \varepsilon > 0$ ";
- 3) " $\exists N \in \mathbf{N}$ " замінити на " $\exists N \in \mathbf{R}$ ";
- 4) " $\exists N \in \mathbf{N}$ " замінити на " $\forall N \in \mathbf{N}$ ";
- 5) " $\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$ " замінити на " $\exists N \in \mathbf{N} : |a_N - a| < \varepsilon$ ";
- 6) " $|a_n - a| < \varepsilon$ " замінити на " $|a_n - a| \leq \varepsilon$ " ?

4. Нехай $a \in \mathbf{R}$, $\{a_n : n \geq 1\}$ – послідовність дійсних чисел. Довести, що кожна з наступних умов означає необмеженість послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$:

- 1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \exists n > k : |a_n - a| > \varepsilon$;
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \exists n > k : |a_n| > \varepsilon$.

5. Нехай $a \in \mathbf{R}$, $\{a_n : n \geq 1\}$ – послідовність дійсних чисел. Довести, що кожна з умов

- 1) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \forall n > k : |a_n - a| < \varepsilon$;
- 2) $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbf{N} \quad \forall n > k : |a_n - a| < \varepsilon$;
- 3) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} : |a_n - a| < \varepsilon$;
- 4) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} : |a_n| < \varepsilon$

означає обмеженість послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$.

6. Довести, що підпослідовність фундаментальної послідовності фундаментальна.

7. Нехай $\{a_n : n \geq 1\}$ – послідовність дійсних чисел і
 $\forall n \geq 1 : |a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n(n+1)}$.

Довести, що ця послідовність фундаментальна.

8. Нехай $\{a_n : n \geq 0\}$ – обмежена послідовність і $|q| < 1$. Довести, що послідовність

$$x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots + a_n q^n, \quad n \geq 1$$

фундаментальна.

9. За допомогою критерію Коші довести збіжність наступних послідовностей:

$$1) \quad x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 3!}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}, \quad n \geq 1;$$

2) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, n \geq 1.$

10. Нехай послідовність $\{a_n : n \geq 0\}$ така, що $a_{n+1} - a_n \rightarrow 0$. Чи обов'язково ця послідовність збіжна? Навести відповідні приклади.

ЗАНЯТТЯ 8

ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ. ТЕОРЕМА ПРО ГРАНИЦЮ СУМИ, ДОБУТКУ І ЧАСТКИ

Контрольні запитання

1. Властивості збіжних послідовностей.
2. Теорема про три послідовності.
3. Теорема про границю суми, добутку та частки збіжних послідовностей.

A8

1. Обчислити границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 2n^2 + 13n + 1}{14n^3 + 22n^2 - n + 2};$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 2n^2 + 13n + 1}{22n^2 - n + 2};$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 13n + 1}{14n^3 + 22n^2 - n + 2};$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{13} + (n+2)^{11}}{(n+3)^{13} + 1};$
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}};$
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2^n + \cos n}{2^{n+1} + \sin n^2};$
- 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n \sin n + \sqrt{n}}{(n + \lg n)^2};$
- 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1 + a^n}, \text{ де } a \geq 0;$
- 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - n^6);$
- 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - 1});$
- 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^4 + n + 1} - \sqrt{n^4 + 1});$
- 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n};$
- 13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 + n + 1};$
- 14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2\sqrt{n} + n + 1};$
- 15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n};$
- 16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\log_{n^2} 2};$
- 17) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}};$

Д1. Обчислити границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right);$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 2n|}{\sqrt{n^2 + 1}};$

- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(a + \frac{1}{n} \right)^2 + \left(a + \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left(a + \frac{n-1}{n} \right)^2 \right),$
де $a \in \mathbf{R};$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2}{n^3};$
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)}{n^3};$
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$

Д2. Нехай послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$ і $\{b_n : n \geq 1\}$ розбіжні. Що можна стверджувати про збіжність послідовностей $\{a_n + b_n : n \geq 1\}$ та $\{a_n b_n : n \geq 1\}$? Навести відповідні приклади.

Д3. Нехай $a_n b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Чи можна стверджувати, що у цьому випадку хоча б одна з послідовностей $\{a_n : n \geq 1\}$, $\{b_n : n \geq 1\}$ збігається до нуля?

Д4. Нехай $a_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$; $a_n \geq 0$, $n \geq 1$, $b_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$. До якого числа може збігатися послідовність $a_n b_n$? $b_n^{a_n}$?

Д5. Нехай $a_n \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$ і для деякого $m \in \mathbf{N}$
 $a_n^m \rightarrow a$, $n \rightarrow \infty$; $a \in \mathbf{R}$

Довести, що

$$a_n \rightarrow \sqrt[m]{a}, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Б8

1. Нехай послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ збіжна, а послідовність $\{b_n : n \geq 1\}$ розбіжна і обмежена. В якому випадку послідовність $\{a_n b_n : n \geq 1\}$ збіжна? Чи може збігатися послідовність $\{a_n + b_n : n \geq 1\}$?

2. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Чи можна стверджувати, що для довільної послідовності $\{b_n : n \geq 1\}$ має місце збіжність $a_n b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$? Навести приклади.

3. Обчислити границі послідовностей $\{x_n : n \geq 1\}$, якщо:

- 1) $x_n = \frac{3-n}{2n+1} - \frac{3n^2+2}{4n^2+1};$ 4) $x_n = \frac{1-n-n^3}{(3n+1)^3};$
- 2) $x_n = \frac{2n}{2n^2-1} \cos \frac{n+1}{2n-1};$ 5) $x_n = \frac{a^n}{1+a^n},$ де $a \neq -1;$
- 3) $x_n = \frac{(-1)^n n}{2n-1} \cdot \frac{n}{n^2+n+1};$ 6) $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt{n}};$

$$7) x_n = \sqrt{n^2 + 2n + 2} - \sqrt{n^2 - 2n + 3};$$

$$8) x_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n;$$

$$9) x_n = \frac{n + \lg n + 2^n}{n^2 + \lg n - 2^n};$$

$$10) x_n = \frac{2n}{2n^2 + 1} \sin \frac{n-1}{2n+1} + \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

4. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{(n-1)^2};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4 + n^2 + 1};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 2};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3 + n} - n};$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_3 n - \sqrt{n});$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 2n + 1};$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^5 + n + \log_2 n};$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^2} - \frac{n}{3} \right);$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3\sqrt{n} + n + 1}{2^{n+1} + 5\sqrt{n} + 7}.$$

5. Для додатних значень параметрів a , b обчислити наступні границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1 + a^{2n}};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2) \cdot \dots \cdot (1+a^n)};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + 3b^n}{5a^n + 7b^n}.$$

ЗАНЯТТЯ 9
ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ. ТЕОРЕМА ШТОЛЬЦА

Контрольне запитання

1. Теорема Штольца.

A9

1. Обчислити границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} + 3\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 1} - \frac{\sqrt{n} + 5\sqrt[3]{n} + 1}{\sqrt[3]{n} + 1};$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{2n+1} - \sqrt[5]{n+1}}{\sqrt[5]{n}};$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n^2 + 1}} - \sqrt{n - \sqrt{n^2 - 1}});$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - an), \text{ де } a \in \mathbf{R}.$

2. Обчислити границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}};$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + (2n)^3 + (2n+1)^3}{n^4}.$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k+1}} \left(k! + \frac{(k+1)!}{1!} + \dots + \frac{(k+n)!}{n!} \right), \text{ де } k \in \mathbf{N}.$

3. Нехай послідовність дійсних чисел $\{a_n : n \geq 1\}$ має границю. Довести, що послідовність середніх арифметичних

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n), \quad n \geq 1$$

також має границю і $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Обернене твердження, взагалі кажучи, не виконується. Навести відповідний приклад.

4. Нехай послідовність $\{a_n : n \geq 1\} \subset (0, +\infty)$ має границю. Довести, що послідовність середніх геометричних

$$b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad n \geq 1$$

також має границю і $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

5. Нехай послідовність $\{a_n : n \geq 1\} \subset (0, +\infty)$, $a_0 = 1$ та існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Довести, що послідовність $\{\sqrt[n]{a_n} : n \geq 1\}$ також збігається і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Д1. Нехай $k \in \mathbf{N}$. Обчислити границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n(-1)^n}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{1! + 2! + \dots + n!}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^k + 2^k + \dots + n^k}$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[k]{1^k + 2^k + \dots + n^k} - n)$;
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1} \right)$;

Б9

1. Обчислити границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n + 2^{n+1} + n}{2^n + 1} - \frac{3^n + 2^n}{2n + 2^n + 1} \right)$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2 + 1} \right)$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{n^3} \left(\sqrt[4]{n+a} - \sqrt[4]{n+b} \right)$, де $a > 0$, $b > 0$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + n^2 + 3n + 1}{bn^3 + 2n^2 + 7}$, $a, b \in \mathbf{R}$;

2. Послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a \in \mathbf{R}$.

Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$.

3. Нехай k – натуральне число. Обчислити границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 3^k + \dots + (2n-1)^k}{n^{k+1}}$.
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot a + 2 \cdot a^2 + \dots + n \cdot a^n}{n \cdot a^{n+1}}$, де $a > 1$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^k}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^k$, де $k \in \mathbf{N}$.

ЗАНЯТТЯ 10
ГРАНИЦЯ МОНОТОННОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Контрольні запитання

1. Означення монотонної послідовності.
2. Теорема про границю монотонної послідовності.
3. Число $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

A10

1. Визначити натуральне число n_0 так, щоб наступні послідовності були монотонними. Знайти границі цих послідовностей:

- 1) $\left\{a_n = \frac{n^5}{3^n} : n \geq n_0\right\};$
- 3) $\left\{a_n = \frac{n!}{n^n} : n \geq n_0\right\};$
- 2) $\left\{a_n = \frac{n^4}{2^n} : n \geq n_0\right\};$
- 4) $\{a_n = n^2 - 49n + 50 : n \geq n_0\};$
- 5) $\{a_n = 5^n + (-4)^n : n \geq n_0\}.$

2. Нехай для $n \geq 1$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}.$$

За допомогою теореми про границю монотонної послідовності довести збіжність цієї послідовності та знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

3. Нехай для $n \geq 1$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1),$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Довести, що:

- 1) $\forall n \geq 1 : a_n < b_n;$
- 2) $\forall n \geq 1 : a_n < a_{n+1};$
- 3) $\forall n \geq 1 : b_{n+1} < b_n;$
- 4) послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$ і $\{b_n : n \geq 1\}$ збіжні до одного числа – сталої Ейлера γ ($\gamma = 0,5772156649 \dots$).

6. За допомогою теореми про границю монотонної послідовності довести збіжність послідовності

$$x_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2^1} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{4 \cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

7. Довести, що послідовність

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad n \geq 2$$

спадна і прямує до $\frac{1}{2}$ при $n \rightarrow \infty$.

Д1. Довести, що послідовність

$$a_1 = 9, \quad a_{n+1} = (a_n - 3)^2, \quad n \geq 1,$$

зростає і необмежена зверху. Чому дорівнює границя цієї послідовності?

Д2. Довести, що послідовність

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

спадає і збіжна до 1, а послідовність

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad n \geq 1,$$

зростає і прямує до $+\infty$.

Д3. Обчислити наступні границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \ln n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right);$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right);$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Д4. Знайти границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln n} + \frac{\sqrt{2}}{2 \ln n} + \frac{\sqrt{3}}{3 \ln n} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{n \ln n}\right).$$

Д5. Знайти границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{2^n}}}.$$

Д6. Нехай для $n \geq 1$

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1},$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

Довести, що:

$$1) \forall n \geq 1 : a_n < b_n; \quad 2) \forall n \geq 1 : a_n < a_{n+1}; \quad 3) \forall n \geq 1 : b_{n+1} < b_n;$$

$$4) \text{ послідовності } \{a_n : n \geq 1\} \text{ і } \{b_n : n \geq 1\} \text{ збіжні до одного й того ж від'ємного числа.}$$

1. Довести монотонність наступних послідовностей:

- 1) $a_n = n^2 + 2^n$, $n \geq 1$; 4) $a_n = 3 + \arcsin \frac{1}{n^2 + 4}$, $n \geq 1$;
 2) $a_n = \frac{n^2}{n^2 + 10}$, $n \geq 1$; 5) $a_n = \lg \left(1 + \frac{n^4}{n^4 + 8} \right)$, $n \geq 1$;
 3) $a_n = \frac{n^4 + 3n^2 + 1}{n^4 + 3n^2 + 6}$, $n \geq 1$; 6) $a_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2}$, $n \geq 1$.

2. Знайти найбільший член послідовностей:

- 1) $\frac{n}{n^3 + 100}$, $n \geq 1$; 2) $\frac{(\sqrt{39})^n}{n!}$, $n \geq 1$; 3) $\sin \frac{\pi n}{2}$, $n \geq 1$.

3. Нехай $x_1 = \sqrt{3}$, $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$, $n \geq 1$. За допомогою теореми про границю монотонної послідовності довести збіжність цієї послідовності та знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.4. Нехай $\{a_n : n \geq 0\}$ – обмежена послідовність невід'ємних чисел. Довести збіжність послідовності

$$x_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, \quad n \geq 1.$$

5. За допомогою теореми про границю монотонної послідовності довести збіжність наступних послідовностей:

- 1) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$, $n \geq 1$;
 2) $x_n = 1 + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \cdots + \frac{1}{2^n+1}$, $n \geq 1$;
 3) $x_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$;
 4) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$;
 5) $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, $n \geq 1$;
 6) $x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{n+9}{2n+1}$, $n \geq 1$;
 7) $x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{8}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, $n \geq 1$;
 8) $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$, $n \geq 1$.

ЗАНЯТТЯ 11
ПІДПОСЛІДОВНОСТІ. ЧАСТКОВІ ГРАНИЦІ. ВЕРХНЯ ТА НИЖНЯ
ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Контрольні запитання

1. Означення обмеженої зверху, обмеженої знизу та обмеженої числової множини.
2. Означення найбільшого і найменшого елементів числової множини.
3. Означення точної верхньої та точної нижньої межі числової множини.
4. Означення підпослідовності числової послідовності.
5. Означення часткової границі послідовності.
6. Означення верхньої та нижньої границь послідовності.

A11

1. Знайти множину часткових границь, нижню та верхню границі послідовності $\{x_n : n \geq 1\}$:

1) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$; 2) $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi n}{2}$.

2. Знайти множину часткових границь послідовності

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

3. Нехай $a_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Довести, що послідовності $\{x_n : n \geq 1\}$ та $\{a_n x_n : n \geq 1\}$ мають одні й ті ж часткові границі.

4. Знайти множину часткових границь, нижню та верхню границі послідовності $\{x_n : n \geq 1\}$, а також точні межі відповідної множини:

1) $x_n = 1 + n \sin \frac{\pi n}{2}$;

4) $x_n = 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$;

2) $x_n = \frac{n^2}{n^2 + 1} \cos \frac{2\pi n}{3}$;

5) $x_n = (-1)^n + 2(-1)^{n+3}$;

3) $x_n = 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$; 6) $x_{2n-1} = \frac{1}{2^n}, x_{2n} = \frac{2^n - 1}{2^n}, n \geq 1$.

- Д1. Нехай послідовність дійсних чисел $\{x_n : n \geq 1\}$ і число a такі, що для довільного $\varepsilon > 0$ множина $\{n \in \mathbf{N} \mid x_n < a - \varepsilon\}$ скінченна. Довести, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq a.$$

- Д2. Знайти множину часткових границь, а також нижню та верхню границі такої послідовності:

$$1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$$

Б11

1. Знайти множину часткових границь, а також нижню та верхню границі наступних послідовностей:

1) $x_n = \frac{1}{n-10,5}, \quad n \geq 1;$

2) $x_n = (-1)^n \left(2 + \frac{3}{n}\right), \quad n \geq 1;$

3) $x_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad n \geq 1;$

4) $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2\pi n}{3}, \quad n \geq 1;$

5) $x_n = (-1)^n n, \quad n \geq 1;$

6) $x_n = -(2 + (-1)^n)n, \quad n \geq 1;$

7) $x_n = n^{(-1)^n}, \quad n \geq 1;$

8) $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sin \frac{\pi n}{4}, \quad n \geq 1;$

9) $x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{\pi n}{4}, \quad n \geq 1;$

10) $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}, \quad n \geq 1;$

11) $x_n = \cos^n \frac{2\pi n}{3}, \quad n \geq 1.$

**КОНТРОЛЬНА РОБОТА. ДІЇ НАД МНОЖИНАМИ.
ТОЧНІ МЕЖІ. ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ**

Завдання індивідуальні. Зразок варіанта

1. Визначити множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, якщо:
- 1) $A = \{x \mid \sin \pi x > 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - x - 2 < 0\}$;
 - 2) A – множина визначення функції $y = \operatorname{ctg} \pi x$, B – множина значень функції $y = \frac{2x+1}{x}$.

2. Визначити $\inf A$ і $\sup A$ для множин:

$$1) A = \left\{ \frac{1 + n^{(-1)^n}}{1 + 2n} \mid n \geq 1 \right\}; \quad 2) A = \left\{ \frac{2x}{1 + x^2} \mid x \in \mathbf{R} \right\}.$$

Для послідовності, що відповідає першій множині, визначити множину часткових границь, верхню та нижню границю.

3. Нехай $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Обчислити

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(n+1)^{10} + \sin n + \ln n + 7}{(n-1)^{13} + \sqrt{n} + 1}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + 2^n}{a^n}.$$

4. Довести, що послідовність

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n}, \quad n \geq 1,$$

монотонна та обмежена. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

РОЗВ'ЯЗКИ

1. 1) Розв'яжемо нерівності, що визначають елементи множин A та B :

$$\sin \pi x > 0 \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (2n, 2n + 1), \quad A = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (2n, 2n + 1);$$

$$x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 2), \quad B = (-1, 2).$$

Тому

$$A \cup B = (-1, 2) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} (2n, 2n + 1) \right), \quad A \cap B = (0, 1),$$

$$A \setminus B = \bigcup_{n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} (2n, 2n + 1), \quad B \setminus A = (-1, 0] \cup [1, 2),$$

$$\overline{A} = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} [2n + 1, 2n + 2].$$

- 2) Оскільки

$$A = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (n, n + 1), \quad B = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty),$$

маємо

$$A \cup B = B, A \cap B = A, A \setminus B = \emptyset, B \setminus A = \mathbf{Z} \setminus \{2\}, \bar{A} = \mathbf{Z}.$$

2. 1) Для $n = 2k, k \in \mathbf{N}$:

$$\frac{1 + n^{(-1)^n}}{1 + 2n} = \frac{1 + 2k}{1 + 4k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1 + 4k)};$$

для $n = 2k - 1, k \in \mathbf{N}$:

$$\frac{1 + n^{(-1)^n}}{1 + 2n} = \frac{1 + \frac{1}{2k-1}}{1 + 2(2k-1)} = \frac{2k}{(2k-1)(4k-1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-1}.$$

Тому $\forall x \in A : x \leq \frac{2}{3} \in A$. Отже, $\sup A = \max A = \frac{2}{3}$.

Далі, $\forall x \in A : x \geq 0$ та

$$\forall d > 0 \exists k \in \mathbf{N}, k > \frac{d+1}{2d} : \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-1} < \frac{1}{2k-1} < d.$$

Звідси $\inf A = 0$.

Відповідна послідовність розпадається на дві збіжні підпослідовності: $a_{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+4k)} \rightarrow \frac{1}{2}, k \rightarrow \infty; a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-1} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Тому множина часткових границь, верхня та нижня границі

$$A_{\text{ч}} = \{0, \frac{1}{2}\}, \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n} = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a_n} = 0.$$

2) З нерівності Коші між середніми арифметичним та геометричним випливає, що

$$\forall x \in \mathbf{R} : 2|x| \leq 1 + x^2,$$

де знак рівності має місце при $|x| = 1$, тобто при $x = \pm 1$. Тому

$$\forall z \in A : -1 \leq z \leq 1,$$

причому $\{-1, 1\} \subset A$. Звідси $\inf A = -1, \sup A = 1$.

3. 1) Безпосереднє використання теореми про границю дробу неможливе, оскільки чисельник та знаменник одночасно розбігаються до $+\infty$. Розділимо чисельник і знаменник дробу на n^{13} та використаємо теорему про арифметичні дії. Враховуючи співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^{13}} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{13}} = 0, \text{ для } \alpha > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0,$$

маємо

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(n+1)^{10} + \sin n + \ln n + 7}{(n-1)^{13} + \sqrt{n} + 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n^{-1})^{10} + n^{-13} \sin n + n^{-13} \ln n + 7n^{-13}}{(1-n^{-1})^{13} + n^{-25/2} + n^{-13}} = \\ &= \frac{1+0+0+0}{1+0+0} = 1. \end{aligned}$$

2) При $|a| < 2, a \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + 2^n}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{a}\right)^n}{1} = \infty.$$

При $a = -2$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 2^n}{2^n}$ не існує, оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^{2n} + 2^{2n}}{2^{2n}} = 2;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^{2n-1} + 2^{2n-1}}{2^{2n-1}} = 0.$$

При $a = 2$ маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 2^n}{2^n} = 2$. При $|a| > 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + 2^n}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{2}{a}\right)^n\right) = 1.$$

4. Доведемо обмеженість цієї послідовності деяким числом $C > 0$ зверху (обмеженість знизу нулем очевидна). Використаємо метод математичної індукції.

База: $a_1 \leq C$ – вірно при $C \geq \frac{1}{4}$.

Крок: якщо $a_n \leq C$, то $a_{n+1} = \sqrt{a_n} \leq \sqrt{C} \leq C$, остання нерівність вірна при $C \geq 1$.

Отже, послідовність обмежена зверху будь-яким числом $C \geq 1$.

Доведемо монотонність. Розглянемо деяку нестрогу нерівність між сусідніми членами послідовності, наприклад: $a_{n+1} \leq a_n$. Вона еквівалентна такій: $\sqrt{a_n} \leq a_n$. Розв'язуючи цю нерівність, отримаємо $a_n \in [1, +\infty)$. Але вище доведено, що $a_n \leq 1$, $n \geq 1$. Тому $a_{n+1} \geq a_n$, $n \geq 1$, тобто послідовність монотонно неспадна.

З монотонності і обмеженості випливає, що послідовність має деяку границю $a \in \mathbf{R}$.

Перейшовши до границі у рівності $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, отримаємо $a = \sqrt{a}$, тобто $a = 0$ або $a = 1$. Але $a_1 > 0$ і послідовність неспадна. Тому $a = 1$ – шукана границя.

ЗАНЯТТЯ 12

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ У ТОЧЦІ. АРИФМЕТИЧНІ ДІЇ НАД ГРАНИЦЯМИ

Контрольні запитання

1. Означення граничної точки числової множини.
2. Означення границі функції в точці за Коші.
3. Означення границі функції в точці за Гейне.
4. Теорема про рівносильність означень границі функції в точці за Коші і за Гейне.

A12

1. За означенням Коші границі функції в точці довести, що:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 1; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2) = 1.$$

Для кожного з цих випадків заповнити наступну таблицю :

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\delta(\varepsilon)$				

2. За означенням Коші границі функції в точці довести, що

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Заповнити наступну таблицю:

C	10	100	1000	10000
$\delta(C)$				

3. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Довести, що границя функції f у точці 0 не існує.

4. Для $\alpha > 0$, $b \in \mathbf{R}$ довести, що:

$$1) |x|^\alpha \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0; \quad 3) |x - b|^\alpha \rightarrow 0, \quad x \rightarrow b;$$

$$2) x^{-\alpha} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

5. Нехай $f(x) = \arctg(x^2)$, $x \in \mathbf{R}$. Знайти $\inf f([- \sqrt[4]{3}, 1))$, $\sup f([- \sqrt[4]{3}, 1))$.

6. Нехай $n, m \in \mathbf{N}$; $a_i \in \mathbf{R}$, $0 \leq i \leq n$; $b_j \in \mathbf{R}$, $0 \leq j \leq m$; $a_0 b_0 \neq 0$. Довести, що:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \begin{cases} \infty, & \text{якщо } n > m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{якщо } n = m, \\ 0, & \text{якщо } n < m. \end{cases}$$

7. Знайти границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}.$$

8. Знайти границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)^{20} (3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^2 - 4x + 4)^{10}}.$$

9. Знайти границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5 - x} - 2}{\sqrt{2 - x} - 1}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}.$$
$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - x} - \sqrt[3]{1 + x}}{x};$$

Д1. 1) Чи можна в означенні Гейне границі функції в точці замінити слова "довільна послідовність" на слова "довільна монотонна послідовність не змінюючи його змісту?

2) Нехай $\delta > 0$, $x_0 \in \mathbf{R}$, $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbf{R}$ і для довільної послідовності $x_n \rightarrow x_0$, $n \rightarrow \infty$, послідовність $\{f(x_n) : n \geq 1\}$ збіжна. Довести, що існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

3) Нехай $\delta > 0$, $x_0 \in \mathbf{R}$, $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbf{R}$ і для довільної монотонної послідовності $x_n \rightarrow x_0$, $n \rightarrow \infty$, послідовність $\{f(x_n) : n \geq 1\}$ збіжна. Чи обов'язково існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$?

Д2. Функція $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ визначена так: $f(x) = q$, якщо $x \in \mathbf{Q}$, $x = \frac{p}{q}$, де p, q – взаємно прості числа і $f(x) = 0$, якщо x – ірраціональне число. Довести, що функція f необмежена у довільному околі довільної точки $x_0 \in \mathbf{R}$.

Д3. Нехай функція $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ обмежена на кожному відрізку $[a, b]$. Покладемо:

$$m(x) = \inf\{f(t) \mid a \leq t \leq x\}, \quad M(x) = \sup\{f(t) \mid a \leq t \leq x\}.$$

Побудувати графіки функцій $y = m(x)$, $y = M(x)$, $x \geq 0$, якщо:

$$1) f(x) = \sin x, \quad x \geq 0; \quad 2) f(x) = \cos x, \quad x \geq 0.$$

Д4. Дослідити поведінку коренів x_1, x_2 квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \rightarrow 0$, де b, c – сталі, $b \neq 0$.

Б12

1. Сформулювати означення Коші границі функції у точці для таких границь ($a \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{R}$):

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = p$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = p$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = p$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;
- 15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. За означенням Коші границі функції у точці довести, що:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{3x+2} = \frac{1}{3}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = 0$.

Для кожного з цих випадків заповнити наступну таблицю:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
$C(\varepsilon)$				

3. За означенням Коші границі функції у точці довести, що:

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ ($a > 1$);
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ ($a > 1$).

4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

5. Довести, що не існують границі $\lim_{x \rightarrow a} \sin x$, $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x$, де $a = -\infty, \infty, +\infty$.

6. Знайти границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 - 2x^2 + 1}{10x^5 - x^4 + 3}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 + 3x^2 - 1}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^3 + 1}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x) \exp(-x^{-2})$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 8}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 3x}{2x^2 - 9x}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2 \operatorname{ctg} x}{(\pi - x) \sin \frac{x}{2}}$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x - 3}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4}$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{2} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4}}$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$;

- 14) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x+1}};$ 16) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x - 1};$
- 15) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49};$ 17) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{12} - 3x^{11} + 2}{x^{50} + 2x^{30} - 3};$
- 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)^5 - (1 - 3x^2)^6}{3x^2 - x^3};$
- 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}};$
- 20) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2x} + \frac{7}{3 - \sqrt[3]{x}} + 1 \right);$
- 21) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5-x}} + \frac{3}{x} - 2 \right);$
- 22) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{x}-3} + \frac{2x-1}{4x^2-1} \right);$
- 23) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - 3x^4 + 7x - 1}{3x^5 + 2x^3 - 3};$
- 24) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x + 10}{5x^2 + 3x - 1};$
- 25) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{3x^4 - 7x + 1};$
- 26) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2} + \sqrt[3]{2x-3}};$
- 27) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^{20} - (x + \sqrt{x^2 + 1})^{20}}{x^{20}};$
- 28) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x - 2}}{\sqrt{9x^2 - x + 3}};$
- 29) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}).$

7. Для натуральних чисел m, n знайти такі границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right).$$

8. Нехай $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \geq 0$. Знайти $\inf f([0, +\infty))$, $\sup f([0, +\infty))$.

9. Знайти $\inf \{\sin x \mid x > 0\}$, $\sup \{\sin x \mid x > 0\}$.

ЗАНЯТТЯ 13
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЙ В ТОЧЦІ (ПРОДОВЖЕННЯ)

Контрольні запитання

1. Теорема про границю суми, різниці, добутку та частки функцій.
2. Таблиця основних границь.

A13

1. Знайти границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$ де $m, n \in \mathbb{N};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right);$
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x} \right).$

2. Обчислити границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 4x};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{4x^2};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin x}.$

3. Знайти границі :

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \ln(1+x)}{x};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a},$ де $a > 0;$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}.$

Д1. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}, \text{ де } m, n \in \mathbf{N}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}.$$

Д2. Знайти сталі a_1, a_2, b_1, b_2 з наступних умов:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - a_1 x - b_1 \right) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - a_2 x - b_2 \right) = 0.$$

Б13

1. Знайти границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + x} - 1}{x}, \text{ де } n \in \mathbf{N};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1 - x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + 3x - x^2} - 2}{x + x^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1}}{x^2 - 9};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27 + x} - \sqrt[3]{27 - x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x - 6} + 2}{x^3 + 8};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt[3]{x + 20}}{\sqrt[4]{x + 9} - 2};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1 + ax} - \sqrt[n]{1 + bx}}{x}, \text{ де } m, n \in \mathbf{N};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{(x + a)(x + b)} - x \right);$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x - x^2} - (1 + x)}{x};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right);$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right);$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \right).$$

2. Обчислити границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x};$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x};$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x - \sin 2x};$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2 - 1};$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \operatorname{tg} 2x};$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}};$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2x^2};$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x};$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1};$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\operatorname{tg}^2 x + 1 - \cos 2x};$

12) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1};$

13) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x};$

14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\arcsin x};$

15) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2};$

16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 + 3x)}{\arcsin 2x};$

17) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg}^3 x};$

19) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sin(x-2)}{x^2 - 4} + 2^{-(x-2)^{-2}} \right);$

3. Довести рівності:

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0;$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0;$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad x_0 \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$

4. Знайти границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}};$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}};$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{2x-1} \right)^{x^2};$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}};$

5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right)^{\operatorname{tg} 2x};$

- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{\frac{1}{x}};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + a}{x - a} \right)^x;$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x};$
- 9) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}};$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$
- 11) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x};$
- 12) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x};$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right)^{\operatorname{ctg} x};$
- 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x;$
- 15) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}};$
- 16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^2}{1-x}};$

ЗАНЯТТЯ 14

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ У ТОЧЦІ (ПРОДОВЖЕННЯ). ВІДНОШЕННЯ "О" "о" ТА ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

Контрольні запитання

1. Означення односторонніх границь.
2. Означення відношення "О".
3. Означення відношення "о".
4. Означення відношення еквівалентності.

A14

1. Знайти границі :

- | | |
|---|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)};$ | 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)};$ |
| 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx};$ | 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})};$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)};$ | 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})};$ |

2. Побудувати графіки функцій:

- 1) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n}, x \geq 0;$
- 2) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}, x \geq 0;$
- 3) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n}, x \geq 0.$

3. Знайти односторонні границі функції $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}, x \neq 0$, при $x \rightarrow 0$.

4. Чи має функція $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}, x \neq 0$, односторонні границі при $x \rightarrow 0$?

5. Довести наступні твердження:

- | | |
|--|--|
| 1) $x \sin \frac{1}{x} = O(x), x \rightarrow 0;$ | 3) $\ln x = o(x^{-\varepsilon}), x \rightarrow 0, \varepsilon > 0;$ |
| 2) $\arctg \frac{1}{x} = O(1), x \rightarrow 0;$ | 4) $\ln x = o(x^\varepsilon), x \rightarrow +\infty, \varepsilon > 0;$ |

$$5) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}, x \rightarrow 0;$$

$$6) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}, \quad x \rightarrow +\infty;$$

$$7) x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Д1. Знайти границю

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 8) - (x - 2)(x - 3)}{(x^2 - 1)x(x + 2) - 24}.$$

Д2. Нехай для функції $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) + \frac{1}{|f(x)|} \right) = 0.$$

Знайти $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Д3. Нехай $f(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$. Довести, що $f(x) + f(2x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$.
Навести приклад, який показує, що обернене твердження, взагалі кажучи, не виконується.

Д4. Знайти границі :

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}};$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{2\pi n}{3n+1};$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n ;$

Д5. Визначити головну частину функції $f(x) = x^3 - 3x + 2$ відносно шкали порівняння $\{(x-1)^\alpha \mid \alpha > 0\}$ при $x \rightarrow 1$.

Д6. Визначити головну частину функції f відносно шкали порівняння $\{x^{-\alpha} \mid \alpha > 0\}$ при $x \rightarrow +\infty$, якщо:

1) $f(x) = \frac{x+1}{x^4+1}$;

2) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

Д7. Знайти порядок відносно функції $\beta(x) = x$ при $x \rightarrow 0$ функції $f(x) = \operatorname{tg}^3 x + x^4$.

Д8. Знайти порядок відносно функції $\beta(x) = \frac{1}{x-3}$ при $x \rightarrow 3$ функції $f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x-3)^2}}{\sin \pi x}$.

Д9. Нехай $g(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ і $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow +\infty$. Довести, що $e^{f(x)} = o(e^{g(x)})$ при $x \rightarrow +\infty$.

Д10. Нехай $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow 0$. Довести, що існує функція h така, що $f(x) = o(h(x))$, $x \rightarrow 0$ і $h(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow 0$.

Д11. Чи існує функція $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) > 0$, $x \neq 0$, така, що $f(x) = o(x^n)$, $x \rightarrow 0$ для кожного $n \in \mathbf{N}$?

Б14

1. Знайти границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}$;

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\lg(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$;

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x}$;

8) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$;

3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$;

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \ln(x+1) - \sin \ln x)$;

9) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$, де $x > 0$;

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \lg \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2}$;

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$,

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}$;

де $a, b, c \in (0, +\infty)$.

2. Знайти границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + xe^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^{\frac{x}{1+x}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}}$;

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2});$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}).$$

3. Побудувати графіки функцій:

$$1) y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}, \quad x \neq 0;$$

$$2) y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}};$$

$$3) y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \arctg x^n.$$

4. Довести наступні твердження:

$$1) x^2 = o(e^x), \quad x \rightarrow +\infty;$$

$$4) x = o(x^2), \quad x \rightarrow \infty;$$

$$2) x \ln x = o(e^x), \quad x \rightarrow +\infty;$$

$$3) x^{\ln x} = o(e^x), \quad x \rightarrow +\infty; \quad 5) \ln x \neq O(o(\ln x^2)), \quad x \rightarrow +\infty;$$

5. Знайти односторонні границі наступних функцій при $x \rightarrow x_0$:

$$1) f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x \leq 2, \\ -2x+1, & \text{якщо } x > 2, \end{cases} \quad x_0 = 2;$$

$$2) f(x) = \frac{x^3 - 1}{|x - 1|}, \quad x \neq 1, \quad x_0 = 1;$$

$$3) f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}, \quad x \neq 0, \quad x_0 = 0;$$

$$4) f(x) = \frac{x}{(x-3)^3}, \quad x \neq 3, \quad x_0 = 3;$$

$$5) f(x) = x + \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{2-x}}}, \quad x \neq 2, \quad x_0 = 2;$$

$$6) f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x < 1, \\ -2x, & \text{якщо } x \geq 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$$

$$7) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & \text{якщо } x < 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0, \\ 0, & \text{якщо } x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

$$8) f(x) = \frac{\cos x}{3 - 2^{\frac{1}{\sin x}}}, \quad x \neq 0, \quad x_0 = 0;$$

$$9) f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 - 3x}, \quad x \neq 0, \quad x_0 = 0.$$

6. Довести рівності:

$$1) 2x - x^2 = O(x), \quad x \rightarrow 0; \qquad 2) x \sin \sqrt{x} = O(x^{\frac{3}{2}}), \quad x \rightarrow 0;$$

7. Довести рівності:

$$1) 2x - x^2 = O(x), \quad x \rightarrow 0; \qquad 4) x + x^2 \sin x = O(x^2), \quad x \rightarrow +\infty;$$

$$2) x \sin \sqrt{x} = O(x^{\frac{3}{2}}), \quad x \rightarrow 0;$$

$$3) \frac{x+1}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty; \quad 5) \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow \infty;$$

$$6) (1+x)^n = 1 + nx + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad \text{де } n \in \mathbf{R};$$

$$7) 2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3), \quad x \rightarrow +\infty;$$

НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ. ТОЧКИ РОЗРИВУ

Контрольні запитання

1. Означення функції, неперервної в точці.
2. Теорема про арифметичні дії над неперервними функціями.
3. Теорема про суперпозицію неперервних функцій.
4. Неперервність основних елементарних функцій.
5. Означення точки розриву та класифікація точок розриву.

A15

1. Нехай $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$. За означенням Коші довести неперервність функції f в точці $x_0 \in \mathbf{R}$. Дати геометричну інтерпретацію неперервності функції f в точці $x_0 \in \mathbf{R}$.
2. Застосувати теореми про неперервність суперпозиції неперервних функцій та про арифметичні дії над неперервними функціями для доведення неперервності на $\mathbf{R}$ функції

$$f(x) = \sin^3 2x + e^{3x}(x^2 - x - 5), \quad x \in \mathbf{R}.$$

3. Дослідити неперервність та побудувати графіки наступних функцій ($a \in \mathbf{R}$):

$$\begin{aligned} 1) \quad f(x) &= \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \end{cases} & 3) \quad f(x) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \end{cases} \\ 2) \quad f(x) &= \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \end{cases} & 4) \quad f(x) &= \begin{cases} x \ln^2 x, & \text{якщо } x \neq 0, \\ a, & \text{якщо } x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

5. Визначити точки розриву функцій та дослідити характер розривів, якщо:

$$1) \ y = \frac{x+1}{x^3+1}; \quad 2) \ y = \exp\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

6. Дослідити неперервність наступних функцій та дослідити характер розривів, якщо вони є:

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{якщо } 1 < x \leq 2; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } |x| \leq 1, \\ 1, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}$$

7. Наступні функції визначити в точці 0 так, щоб вони були неперервними у цій точці (довизначити за неперервністю в точці 0):

$$1) \ y = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}; \quad 2) \ y = \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}.$$

- Д1.** Чи обов'язково розривна в точці x_0 сума двох функцій, одна з яких неперервна в точці x_0 , а друга розривна в точці x_0 ? Чи обов'язково розривна в точці x_0 сума двох розривних в точці x_0 функцій? Ті ж питання для добутку замість суми.

Д2. Функція

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

називається функцією Діріхле. Довести, що в кожній точці $x_0 \in \mathbf{R}$ ця функція має розрив другого роду.

Д3. Дослідити неперервність наступної функції:

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2), & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Б15

1. За означенням Коші (у термінах $\varepsilon - \delta$) довести неперервність наступних функцій:

1) $y = \frac{x+3}{2-3x}$ у точці $x_0 = \frac{1}{2}$; 2) $y = \sqrt{x}$ у точці $x_0 > 0$.

2. Застосувати теореми про неперервність суперпозиції неперервних функцій та про арифметичні дії над неперервними функціями для доведення неперервності на $\mathbf{R}$ функцій

1) $y = 2^{\frac{1}{1+x^2}}$, $x \in \mathbf{R}$; 2) $y = \arctg\left(\cos \frac{x}{2}\right)$, $x \in \mathbf{R}$.

3. Дослідити неперервність, неперервність справа і зліва, характер точок розриву і побудувати графіки наступних функцій:

1) $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$; 2) $y = \begin{cases} \frac{x^3}{x-1}, & \text{якщо } x \neq 1, \\ 4, & \text{якщо } x = 1. \end{cases}$

4. Знайти точки розриву та визначити характер розривів таких функцій:

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x \in [0, 1), \\ x^2 + 1, & x \geq 1; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ x^3, & x > 1; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ 1-x, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{1-x}, & x > 1; \end{cases}$ 4) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \tg x + 1, & x > 0. \end{cases}$

5. Довизначити функцію f за неперервністю в точці 0:

1) $f(x) = \frac{\ln(1-3x)}{x}$;

5) $f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$;

2) $f(x) = \frac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{\sin x}$;

6) $f(x) = \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$;

3) $f(x) = \frac{2^{3x}-1}{3x}$;

7) $f(x) = x^x$;

4) $f(x) = \frac{\arcsin x}{2 \tg x}$;

8) $f(x) = x \ln^2 x$.

ЗАНЯТТЯ 16
ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ.
РІВНОМІРНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Контрольні запитання

1. Властивості неперервних на відрізку функцій.
2. Означення рівномірно неперервної функції.
3. Теорема Кантора.

A16

1. Нехай функція $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ і виконуються наступні умови:
1) $f \in C((a, b))$; 2) $\forall x \in (a, b) : f(x) \neq 0$.
Довести, що функція f зберігає знак на інтервалі (a, b) .
2. Розв'язати нерівність
$$(2x - 1)(x - 2)^3(x + 1)(x + 2)^2 < 0$$

методом інтервалів та обґрунтувати цей метод.
3. Довести, що многочлен $P(x) = x^5 - 3x + 1$, $x \in \mathbf{R}$, має корінь на інтервалі $(1, 2)$.
4. Застосувати теорему про існування та властивості оберненої функції до функцій:
1) $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$; 3) $f(x) = x^2 - 2x$, $x \geq 1$.
2) $f(x) = x^2 - 2x$, $x \leq 1$;
5. Нехай $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. За означенням Коші довести неперервність функції f в точці $x_0 > 0$. Дати геометричну інтерпретацію неперервності функції f в точці $x_0 > 0$. Як змінюється $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ зі зменшенням ε ? зі зменшенням додатного x_0 ? Чи є функція f рівномірно неперервною на множині $(0, 1)$?
6. Довести, що функція $f(x) = 5x - 3$, $x \in \mathbf{R}$, рівномірно неперервна на $\mathbf{R}$.
7. Довести, що сума двох рівномірно неперервних на множині A функцій є рівномірно неперервною на цій множині функцією.
8. В термінах $(\varepsilon - \delta)$ сформулювати, що функція $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ не є рівномірно неперервною на множині $\mathbf{R}$. Довести, що функція f неперервна на множині A , але не рівномірно неперервна на цій множині, якщо:
1) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in A = (0, 1)$; 3) $f(x) = x^2$, $x \in A = \mathbf{R}$;
2) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$, $x \in A = (0, 1)$; 4) $f(x) = \sin x^2$, $x \in A = \mathbf{R}$.
9. Застосувати теорему Кантора для доведення рівномірної неперервності на множині A наступних функцій:

$$1) f(x) = \frac{x}{4-x^2}, \quad A = [-1, 1]; \quad 2) f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad A = (0, \pi).$$

Д1. Довести, що довільне алгебраїчне рівняння непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має принаймні один дійсний корінь.

Д2. Довести, що неперервна на $\mathbf{R}$ періодична функція приймає найбільше і найменше значення на $\mathbf{R}$.

Д3. Знайти всі неперервні на $\mathbf{R}$ функції, які задовольняють співвідношенню

$$\forall x, y \in \mathbf{R} : f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Це співвідношення називають *функціональним рівнянням Коші*.

Д4. Довести, що функція $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$, рівномірно неперервна на $[0, +\infty)$.

Д5. Нехай функція $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ і виконуються наступні умови:

$$1) f \in C([a, +\infty));$$

$$2) \text{ існує } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = p \in \mathbf{R}.$$

Довести, що функція f рівномірно неперервна на $[a, +\infty)$.

Б16

1. Довести, що наступні рівняння мають розв'язки на вказаних інтервалах:

$$1) x^5 - 6x^2 + 3x - 7 = 0, \quad x \in (0, 2);$$

$$2) 8^x - 2^x - 16 = 0, \quad x \in (0, 2);$$

$$3) 3 \sin^3 x - 5 \sin x + 1 = 0, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

2. Знайти обернену функцію до розривної в точці 0 функції $y = (1 + x^2) \operatorname{sign} x, x \in \mathbf{R}$, і довести, що обернена функція неперервна на множині визначення.

3. Застосувати теорему про існування та властивості оберненої функції для функцій:

$$1) y = \frac{2x}{1+x^2}, \quad x \leq -1;$$

$$3) y = \frac{2x}{1+x^2}, \quad x \geq 1;$$

$$2) y = \frac{2x}{1+x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$4) y = \operatorname{ctg} x, \quad x \in (0, \pi).$$

4. Довести, що многочлен $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x, x \in \mathbf{R}$, набуває найбільшого і найменшого значення на інтервалі $(-1, 1)$.

5. Довести, що функція $f(x) = 2 \cos(3x + 5), x \in \mathbf{R}$, рівномірно неперервна на $\mathbf{R}$.

6. Довести рівномірну неперервність на множині A наступних функцій:

- 1) $y = x^2$, $A = (-1, 1)$; 3) $y = \sqrt{x}$, $A = [1, +\infty)$.
2) $y = \sin x^2$, $A = (-2, 3)$;

7. Довести, що функція $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$, не рівномірно неперервна на $\mathbf{R}$.
8. Довести, що добуток скінченного числа рівномірно неперервних на відрізьку $[a, b]$ функцій є рівномірно неперервною на $[a, b]$ функцією.
9. Довести, що функція $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, рівномірно неперервна на кожному з інтервалів $(-\frac{1}{x}, 0)$ та $(0, 1)$, але не рівномірно неперервна на об'єднанні цих інтервалів.

ЗАНЯТТЯ 17
ОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ. ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ

Контрольні запитання

1. Означення похідної функції в точці.
2. Таблиця похідних.
3. Теорема про похідну від суми, різниці, добутку та частки функцій.
4. Теорема про похідну суперпозиції функцій.

A17

1. За означенням похідної знайти похідну функції f в точці x_0 , якщо
 - 1) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \ln x$, $x > 0$, $x_0 = 1$.
2. Довести, що функція $f(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbf{R}$, не має похідної в точці $x_0 = 0$. Побудувати графік цієї функції.
3. За означенням похідної знайти похідну функції f , якщо:
 - 1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$; 2) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbf{R}$.
4. За допомогою таблиці похідних та правил знаходження похідних знайти похідні наступних функцій:
 - 1) $y = (5 + 2x)^{10}(3 - 4x)^{20}$; 8) $y = \ln(\ln(\ln x))$;
 - 2) $y = \frac{2x}{1 - x^2}$; 9) $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;
 - 3) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$; 10) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;
 - 4) $y = \cos 2x - 2 \sin x$;
 - 5) $y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$;
 - 6) $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$; 11) $y = \arccos \frac{1}{x}$;
 - 7) $y = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$; 12) $y = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$;
 - 13) $y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$;
 - 14) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$;
 - 15) $y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x$;

$$16) y = \frac{e^x \cos x}{\sin x^2};$$

$$18) y = \exp((\operatorname{arctg} \sqrt{x+4})^2);$$

$$17) y = \cos^3 x^3 - e^{x^2} \operatorname{tg} x;$$

$$19) y = \sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

5. Знайти $f'(1)$, якщо $f(x) = x + (x-1) \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

Д1. Нехай функція f має похідну в точці x_0 . Довести, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)) = f'(x_0).$$

Навести приклад, коли ця границя існує, але функція не має похідної в точці x_0 .

Д2. Знайти точки, в яких функція

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

має похідну.

Д3. Для яких значень параметра α функція

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

має похідну в точці $x_0 = 0$?

Д4. Нехай $f \in C^1([a, b])$, $x_0 \in (a, b)$. Довести, що для довільних послідовностей $\{x_n : n \geq 1\}$ і $\{z_n : n \geq 1\}$ таких, що $x_n \rightarrow x_0$, $n \rightarrow \infty$, $z_n \rightarrow x_0$, $n \rightarrow \infty$, вірно, що

$$\frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} \rightarrow f'(x_0), \quad x \rightarrow x_0.$$

Чи можна відмовитися від умови неперервності похідної?

Б17

1. За означенням похідної знайти похідну функції f у точці x_0 , якщо

$$1) f(x) = \cos x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad x_0 = 0;$$

$$2) f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad x_0 = 1.$$

2. Довести, що функція $f(x) = (1 + |x|)^2$, $x \in \mathbf{R}$, не має похідної в точці $x_0 = 0$. Побудувати графік цієї функції.

3. За означенням похідної знайти похідну функції f , якщо:

$$1) f(x) = e^x, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$2) f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

4. Нехай $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$. Знайти $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$.

5. Використовуючи таблицю похідних та правила диференціювання, знайти похідні наступних функцій:

- | | |
|--|---|
| 1) $y = \frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$; | 6) $y = e^x(1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2})$; |
| 2) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$; | 7) $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$; |
| 3) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x + \sqrt{1+x^2})}$; | 8) $y = \ln(\ln^2(\ln^3 x))$; |
| 4) $y = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}$; | 9) $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$; |
| 5) $y = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}$; | 10) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; |
| | 11) $y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$; |
| | 12) $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$; |
| | 13) $y = x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$; |
| | 14) $y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$; |
| | 15) $y = \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right) \right)$; |
| 16) $y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x$; | 20) $y = \arcsin(\sin x)$; |
| 17) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x$; | 21) $y = \arccos(\cos^2 x)$; |
| 18) $y = \arcsin \frac{x}{2}$; | 22) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$; |
| 19) $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{2}}{x}$; | 23) $y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$; |
| | 24) $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1 + x^2})$. |

ЗАНЯТТЯ 18

ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ (ПРОДОВЖЕННЯ)

Контрольне запитання

1. Теорема про похідну суперпозиції функцій.
2. Формула для обчислення похідної оберненої функції.
3. Формула для обчислення похідної функції, заданої параметрично.
4. Обчислення похідних функцій, заданих неявно.

A18

1. Знайти похідні наступних функцій:

1) $y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2);$

2) $y = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}};$

3) $y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$

2. Нехай $f : A \rightarrow (0, +\infty)$ має похідну на множині A . Похідна від логарифма функції f називається логарифмічною похідною функції f :

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Знайти логарифмічну похідну функції

$$f(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_n)^{\alpha_n}.$$

3. Нехай функції $u : A \rightarrow (0, +\infty)$, $v : A \rightarrow \mathbf{R}$ мають похідні в точці x_0 . Довести, що функція $f(x) = u(x)^{v(x)}$, $x \in \mathbf{R}$, має похідну в точці x_0 та знайти цю похідну.

4. Знайти похідні:

1) $y = x^{\sin x};$

3) $y = (\ln x)^x : x^{\ln x};$

2) $y = x + x^x + x^{x^x};$

4) $y = \log_x e.$

5. Отримати формули для сум:

1) $P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1};$

2) $Q_n(x) = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1}.$

6. Нехай парна функція має похідну на множині визначення. Довести, що ця похідна є непарною функцією. Аналогічно, довести, що похідна непарної функції є функція парна.

7. За допомогою теореми про похідну оберненої функції, знайти похідну функції, оберненої до функції $g(y)$, $y \in A$:

- 1) $g(y) = y^3 + 3y, y \in \mathbf{R};$ 3) $g(y) = y + e^y, y \in \mathbf{R};$
 2) $g(y) = y + \ln y, y > 0.$

8. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

- 1) $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}};$ 2) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t.$

9. Функція $y = y(x), x \in A$ задана у неявному вигляді співвідношенням

$$x^2 + 2xy - y^2 = 2x.$$

Знайти похідну y' . Обчислити y' , якщо $x = 2$ і $y = 4$; якщо $x = 2$ і $y = 0$.

Д1. Функція f має похідну в точці a , причому $f(a) > 0$. Знайти наступні границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n;$ 2) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{\ln x - \ln a}}.$

Д2. Обчислити наступні суми:

- 1) $x + 3x^3 + 5x^5 + \dots + (2n + 1)x^{2n+1};$ 2) $\sum_{k=1}^n k C_n^k;$ 3) $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k.$

Д3. Записати формули переходу від полярної системи координат (r, φ) до декартової системи координат (x, y) , якщо полюс співпадає з початком декартової системи координат, а напрямок полярної вісі з напрямком вісі абсцис. Знайти y'_x , якщо $r = a\varphi$ (спіраль Архімеда).

Б18

1. За допомогою таблиці похідних та правил їх знаходження знайти похідні наступних функцій:

- 1) $y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{4\sqrt{2}};$
 2) $y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2);$
 3) $y = e^{m \arcsin x} (\cos(m \arcsin x) + \sin(m \arcsin x));$
 4) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} \frac{1}{x^2}}};$ 7) $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x};$
 5) $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^a};$ 8) $y = \ln(\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x};$
 6) $y = x^{\frac{1}{x}};$ 9) $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x});$

$$10) y = \frac{a^x}{1 + a^{2x}} - \frac{1 - a^{2x}}{1 + a^{2x}} \operatorname{arccotg} a^{-x}.$$

2. Знайти логарифмічну похідну функції y , якщо:

$$1) y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$2) y = (x + \sqrt{1+x^2})^n.$$

3. Нехай періодична функція має похідну на $\mathbf{R}$. Довести, що ця похідна також функція періодична з тим самим періодом.

4. Нехай $0 < \varepsilon < 1$. Довести, що функція $g(y) = y - \varepsilon \sin y$, $y \in \mathbf{R}$, має обернену функцію. Знайти похідну оберненої функції.

5. Вказати інтервали, на яких наступні функції мають обернені функції. Побудувати графіки обернених функцій і знайти їх похідні, якщо:

$$1) y = 2x^2 - x^4;$$

$$2) y = \frac{x^2}{1+x^2};$$

$$3) y = 2e^{-x} - e^{-2x}.$$

6. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

$$1) x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$2) x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad t \in (0, \pi);$$

$$3) x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

7. Знайти похідну $y'(x)$ наступних функцій, заданих у неявному вигляді:

$$1) y^2 = 2px \text{ (парабола);}$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (еліпс);}$$

$$3) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (логарифмічна спіраль).}$$

8. Нехай (r, φ) – полярні координати, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Знайти похідну $y'(x)$, якщо:

$$1) r = a(1 + \cos \varphi) \text{ (кардіоида);}$$

$$2) r = ae^{m\varphi} \text{ (логарифмічна спіраль).}$$

ЗАНЯТТЯ 19
ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ.
ДИФЕРЕНЦІАЛ

Контрольні запитання

1. Геометричний зміст похідної.
2. Означення диференційовності функції в точці.
3. Означення диференціалу функції в точці.
4. Геометричний зміст диференціалу.
5. Критерій диференційовності функції в точці.

A19

1. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 - x^4$, в точці $x = 2$.
 2. Під яким кутом графік функції $y = \ln x$, $x > 0$, перетинає вісь абсцис?
 3. При яких значеннях незалежної змінної дотичні до графіків функцій $y = x^2$ і $y = x^3$ паралельні?
 4. На параболі $y = x^2$ вибрано дві точки з абсцисами $x_1 = 1$ і $x_2 = 3$. Через ці точки проведена січна. У якій точці на параболі дотична до неї паралельна проведеній січній?
 5. Знайти диференціал: $d(\sin x - x \cos x)$.
 6. Записати повний приріст та диференціал функції $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$, у точці $x_0 = 1$. Обчислити та порівняти їх значення при таких значеннях приросту аргумента: 1) $\Delta x = 1$; 2) $\Delta x = 0,1$; 3) $\Delta x = 0,01$.
 7. Замінити повний приріст функції диференціалом і знайти наближене значення $\arctg 1,01$. Порівняти з точним значенням $0,79037\dots$ ($\pi \approx 3,1416$).
 8. Знайти наближене значення $\sqrt{2} \cos 46^\circ$. Порівняти з точним значенням $0,982395\dots$ ($\pi \approx 3,1416$).
 9. Довести, що наступні функції недиференційовні:
 - 1) $f(x) = |x - 1|$ у точці $x = 1$;
 - 2) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ у точці $x = 1$.
- Чи існують однобічні похідні в точках недиференційовності?
10. Знайти похідні, побудувати графіки наступних функцій та їх похідних:

$$1) y = |x|; \quad 2) y = x|x|; \quad 3) y = \ln |x|.$$

11. Довести, що функція

$$y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

має похідну на $\mathbf{R}$. Дослідити неперервність цієї похідної.

Д1. Дослідити диференційовність функції

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ -x^2, & \text{якщо } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Д2. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & \text{якщо } \frac{1}{n+1} \leq |x| < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbf{N}, \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

недиференційовна у точці 0.

Д3. Знайти диференціал функції $y = y(x)$, заданої у полярній системі координат рівнянням $r = a(1 + \cos \varphi)$, $0 < \varphi < \pi$, в точці $(0, a)$.

Д3. Для яких значень параметра $n \in \mathbf{Z}$ функція

$$y = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

1) неперервна на $\mathbf{R}$; 2) має неперервну похідну на $\mathbf{R}$?

Д4. Чи можна твердити, що сума функцій f та g не має похідної у точці x_0 , якщо:

- 1) функція f має похідну у точці x_0 , а функція g не має похідної у цій точці?
- 2) обидві функції f, g не мають похідної в точці x_0 ?

Д5. Чи можна твердити, що добуток функцій f та g не має похідної у точці x_0 , якщо:

- 1) функція f має похідну у точці x_0 , а функція g не має похідної у цій точці?
- 2) обидві функції f, g не мають похідної в точці x_0 ?

Розглянути приклади:

- 1) $f(x) = x$, $g(x) = |x|$;
- 2) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|$, де $x_0 = 0$.

Д6. Довести, що сімейства гіпербол $x^2 - y^2 = a$, $a > 0$ і $xy = b$, $b > 0$ утворюють ортогональну сітку, тобто криві цих сімейств перетинаються під прямими кутами.

Д7. Довести, що дотична до логарифмічної спіралі $r = ae^{m\varphi}$, де a , m – фіксовані, утворює сталий кут з радіусом-вектором точки дотику.

Д8. Навести приклад неперервної на $\mathbf{R}$ функції, яка не має похідної в заданих точках $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Б19

1. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = \sin x - \cos x$, в точці $x = \pi$.

2. Під якими кутами перетинаються графіки наступних функцій:

1) $y = \sin x$ і $y = \cos x$; 2) $y = 1/x$ і $y = \sqrt{x}$?

3. При яких значеннях незалежної змінної дотичні до графіків функцій $y = x^2$ і $y = x^3$ перпендикулярні?

4. Знайти:

1) $\frac{d(x^3 - 2x^6 - x^9)}{d(x^3)}$; 2) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$; 3) $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$.

5. Нехай формула $x = 5t^2$, де час t вимірюється у секундах, а шлях x у метрах, задає рівняння руху. Для моменту часу $t = 2$ сек. визначити приріст шляху Δx і диференціал шляху dx , якщо:

1) $\Delta t = 1$ сек.; 2) $\Delta t = 0,1$ сек.; 3) $\Delta t = 0,01$ сек.

6. Знайти наближені значення

1) $\sin 29^\circ$; 2) $\cos 151^\circ$; 3) $\lg 11$

за допомогою заміни приросту функції диференціалом. Порівняти з точними значеннями.

7. Знайти похідні і побудувати графіки функцій та їх похідних:

1) $y = \begin{cases} (1-x)(2-x), & \text{якщо } 1 \leq x \leq 2, \\ -(2-x), & \text{якщо } x > 2; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x < 0, \\ \ln(1+x), & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & \text{якщо } |x| \leq 1, \\ \frac{1}{e}, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}$

8. Довести, що функція

$$y = \begin{cases} x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

не має похідної в точках будь-якого околу точки 0, але існує похідна $f'(0)$.

9. Дослідити диференційовність наступних функцій:

1) $y = \sqrt[5]{(x-1)^2};$

3) $y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \end{cases}$

2) $y = |\ln x|;$

4) $y = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$

10. Дослідити диференційовність наступних функцій. Чи існують односторонні похідні у точках недиференційовності?

1) $y = \sqrt{1 - \cos 2x};$

3) $y = \arccos \frac{1}{x};$

2) $y = \ln |x^2 - 4x + 3|;$

4) $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}.$

ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

1. Знайти другу похідну таких функцій:

1) $y = x\sqrt{1+x^2}$;

4) $y = \operatorname{tg} x$;

2) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

5) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

3) $y = e^{-x^2}$;

6) $y = x \ln x$.

2. Нехай $u : A \rightarrow \mathbf{R}$ та $v : A \rightarrow \mathbf{R}$ двічі диференційовні на множині A функції, $u(x)v(x) > 0$, $x \in A$. Знайти другу похідну функції $y = \ln \frac{u}{v}$.

3. Знайти $d^2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$.

4. Знайти $d^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

5. Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ наступних функцій, заданих параметрично:

1) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$;

2) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

6. Знайти похідну порядку n наступних функцій:

1) $y = \frac{x^2}{1-x}$, $n = 8$;

2) $y = \frac{e^x}{x}$, $n = 10$;

3) $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$, $n = 10$.

7. Знайти $d^{10}(x \cos 2x)$.

8. Знайти похідну n -го порядку таких функцій:

1) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$;

4) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

2) $y = \sin^2 x$;

5) $y = \frac{e^x}{x}$;

3) $y = \cos ax \cos bx$;

6) $y = e^x \sin x$.

9. Нехай $y = \frac{\ln x}{x}$, n – натуральне число. Знайти $d^n y$.

10. Знайти $f^{(n)}(0)$, якщо:

1) $f(x) = x^2 e^{ax}$;

2) $f(x) = e^{ax} \cos bx$.

11. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

нескінченно диференційовна у точці $x = 0$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЙ В ТОЧЦІ. ПОХІДНА

Завдання індивідуальні. Зразок варіанта

1. Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x.$$

2. Знайти точки розриву та визначити їх тип: $f(x) = \frac{\sin x}{x} + e^{1/(x-1)}$.

3. Обчислити похідну: $f(x) = \frac{x^2 + \arctg(1-x)}{\sqrt{2x}} - \ln \left(\frac{\sin x}{\cos 2x} \right)$.

4. Обчислити похідну порядку n : $f(x) = x^2 \sin 4x$.

5. Обчислити похідну неявно заданої функції $y = y(x)$: $e^{xy} = x^2 + y^2$.

РОЗВ'ЯЗКИ

1. 1) Маємо невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$. Усунемо цю невизначеність алгебраїчними перетвореннями та застосуємо теорему про арифметичні дії:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{4/5} + x^{3/5} + x^{2/5} + x^{1/5} + 1)}{(x-1)(x^{2/3} + x^{1/3} + 1)} = \frac{5}{3}.$$

2) Маємо невизначеність типу (1^∞) . Зведемо задачу до застосування співвідношення $\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) \right)^{\frac{1 \cdot x \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right)}{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right). \end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin(1/x)}{1/x} + \frac{-2 \sin^2(1/2x)}{4x \cdot (1/2x)^2} \right) = 1.$$

Остаточо,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

2. В усіх точках, крім $x = 0$ та $x = 1$ функція неперервна за теоремами про арифметичні дії та суперпозицію. Точка $x = 0$ є усувним розривом 1 роду, бо $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1 + 1/e$, $f(0)$ не існує. Точка $x = 1$ є розривом 2 роду, бо $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = +\infty$.

3. Користуючись таблицею похідних та правилами диференціювання, отри-

маємо:
$$f'(x) = \frac{(2x + \frac{1}{1+(1-x)^2} \cdot (-1)) \cdot \sqrt{2x} - (x^2 + \arctg(1-x)) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}}{2x} - \frac{\cos 2x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot (-2 \sin 2x)}{\cos^2 2x} = \frac{3x^2 - \frac{2x}{1+(1-x)^2} - \arctg(1-x)}{2x\sqrt{2x}} - \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{tg} 2x.$$

4. Використовуючи формулу Лейбніца, отримаємо:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (x^2)^{(k)} (\sin 4x)^{(n-k)}. \text{ Враховуючи, що } (x^2)^{(k)} = 0, k \geq$$

$$\begin{aligned} 3, \text{ отримаємо } f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^2 C_n^k (x^2)^{(k)} (\sin 4x)^{(n-k)} = C_n^0 x^2 (\sin 4x)^{(n)} + \\ &C_n^1 (x^2)' (\sin 4x)^{(n-1)} + C_n^2 (x^2)'' (\sin 4x)^{(n-2)} = \\ &x^2 (\sin 4x)^{(n)} + n2x (\sin 4x)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} 2 (\sin 4x)^{(n-2)} = x^2 4^n \sin 4(x - \\ &\frac{\pi n}{2}) + 2nx 4^{n-1} \sin 4(x - \frac{\pi(n-1)}{2}) + \frac{n(n-1)}{2} 2 \cdot 4^n \sin 4(x - \frac{\pi(n-2)}{2}). \end{aligned}$$

5. Диференціюємо цю рівність: $e^{xy}(y + xy') = 2x + 2yy'$. Виражаючи звідси похідну, отримаємо: $y' = \frac{2x - ye^{xy}}{e^{xy}x - 2y}$.