

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**Клімчук Т.В.**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ  
З КУРСУ  
“ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА”**

**ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ  
А4.04 СЕРЕДНЯ ОСВІТА (МАТЕМАТИКА)  
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ**

**КИЇВ – 2025**

Рецензенти:

кандидат фіз.-мат. наук, доцент Гап'як І.В.  
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Курилко О.Б.

*Рекомендовано до друку вченою радою  
механіко-математичного факультету  
(протокол №7 від 26 грудня 2025 року)*

**Клімчук Т.В.**

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з курсу “Обчислювальна математика” для студентів спеціальності А4.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету / Т.В. Клімчук – Електронне видання, 2025.— 76 с.

Методична розробка містить перелік лабораторних робіт з курсу “Обчислювальна математика”, що викладається студентам механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Розробка містить завдання для засвоєння основних методів цього курсу, призначених для наближеного розв’язування СЛАР, задачі на власні значення, нелінійних рівнянь, задач оптимізації, звичайних диференціальних рівнянь, інтегральних рівнянь, а також для інтерполяції та апроксимації функцій, наближеного диференціювання та інтегрування функцій.

Для студентів механіко-математичного факультету та викладачів, які проводять заняття з курсів “Обчислювальна математика”, “Методи обчислень”, “Чисельні методи”.

## Зміст

|                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| Передмова.....                                                      | 5  |
| Лабораторна робота 1                                                |    |
| Ітераційні методи розв'язування СЛАР.....                           | 6  |
| Лабораторна робота 2                                                |    |
| Розв'язування СЛАР методами<br>факторизації матриць.....            | 9  |
| Лабораторна робота 3                                                |    |
| Наближені методи розв'язування задачі<br>на власні значення.....    | 12 |
| Лабораторна робота 4                                                |    |
| Наближені методи розв'язування<br>нелінійних рівнянь.....           | 19 |
| Лабораторна робота 5                                                |    |
| Наближені методи розв'язування<br>систем нелінійних рівнянь.....    | 21 |
| Лабораторна робота 6                                                |    |
| Інтерполяція функцій.....                                           | 24 |
| Лабораторна робота 7                                                |    |
| Апроксимація функцій.....                                           | 28 |
| Лабораторна робота 8                                                |    |
| Наближене диференціювання функцій.....                              | 31 |
| Лабораторна робота 9                                                |    |
| Наближене інтегрування функцій.....                                 | 35 |
| Лабораторна робота 10                                               |    |
| Наближені методи безумовної оптимізації<br>функції 1-ї змінної..... | 39 |

|                                                |           |
|------------------------------------------------|-----------|
| Лабораторна робота 11                          |           |
| <b>Наближені методи безумовної оптимізації</b> |           |
| <b>функції багатьох змінних.....</b>           | <b>41</b> |
| Лабораторна робота 12                          |           |
| <b>Наближені методи розв'язування задач</b>    |           |
| <b>лінійного програмування.....</b>            | <b>45</b> |
| Лабораторна робота 13                          |           |
| <b>Наближені методи розв'язування задач</b>    |           |
| <b>нелінійного програмування.....</b>          | <b>55</b> |
| Лабораторна робота 14                          |           |
| <b>Наближені методи інтегрування</b>           |           |
| <b>звичайних диференціальних рівнянь.....</b>  | <b>63</b> |
| Лабораторна робота 15                          |           |
| <b>Наближені методи розв'язування</b>          |           |
| <b>інтегральних рівнянь.....</b>               | <b>69</b> |
| Список джерел.....                             | 75        |

## Передмова

Курс “Обчислювальна математика” є важливою складовою підготовки фахівців з математичних, технічних та природничих спеціальностей. Його метою є формування у студентів практичних навичок застосування наближених методів обчислень для розв’язування прикладних задач, що виникають у наукових дослідженнях, інженерній практиці та інформаційних технологіях.

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт призначені для допомоги студентам у засвоєнні теоретичного матеріалу курсу, набутті навичок використання та програмної реалізації чисельних алгоритмів, аналізу похибок обчислень. У методичній розробці подано лабораторні роботи, які містять задачі з таких математичних дисциплін: лінійної алгебри, математичного аналізу, теорії оптимізації функцій, математичного програмування, теорії звичайних диференціальних рівнянь, інтегральних рівнянь. Ці задачі пропонується розв’язувати наближеними методами обчислювальної математики.

Методичні вказівки структуровано відповідно до основних тем курсу і складаються з 15 лабораторних робіт, кожна з яких містить список контрольних запитань, завдання лабораторної роботи для самостійного виконання студентами, варіанти завдань. Завдання лабораторних робіт даної методичної розробки можна виконувати як алгоритмічно, так і шляхом комп’ютерної реалізації за допомогою сучасних мов програмування (Python, C++, Java) чи спеціалізованих математичних пакетів (Matlab, GNU Octave, Maple, Mathematica, Mathcad).

Виконання лабораторних робіт з Обчислювальної математики сприяє розвитку алгоритмічного мислення, формуванню навичок комп’ютерного моделювання та вмінню застосовувати сучасні програмні засоби для розв’язування математичних задач.

Методичні вказівки можуть бути використані викладачами ВНЗ для проведення лабораторних та практичних занять з курсів “Обчислювальна математика”, “Методи обчислень”, “Чисельні методи”.

# Лабораторна робота 1

## Ітераційні методи розв'язування СЛАР

### Контрольні запитання:

- 1.1 Що таке системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)?
- 1.2 Коли ефективно використовувати ітераційні методи розв'язування СЛАР?
- 1.3 Що таке ітераційний процес?
- 1.4 Яка умова збіжності ітераційного процесу?
- 1.5 Наведіть алгоритм методу простої ітерації.
- 1.6 Який критерій зупинки обчислень в методі простої ітерації?
- 1.7 Яка матриця є діагонально-домінуючою?
- 1.8 Достатня умова збіжності ітераційного процесу методу простої ітерації?
- 1.9 Наведіть алгоритм методу Зейделя.
- 1.10 Яка матриця є симетричною та додатньо-визначеною?
- 1.11 Для яких СЛАР метод Зейделя збігається завжди?
- 1.12 Наведіть алгоритм методу Якобі.
- 1.13 Достатня умова збіжності методу Якобі?

### Завдання лабораторної роботи:

- 1) Обрати СЛАР згідно з власним варіантом.
- 2) Отримати розв'язок СЛАР за допомогою формул Крамера.

- 3) Методом простої ітерації отримати розв'язок СЛАР з точністю 0,001.
- 4) Методом Зейделя отримати розв'язок СЛАР з точністю 0,001.
- 5) Методом Якобі отримати розв'язок СЛАР з точністю 0,001.
- 6) Вказати кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності в методах із завдань 3-5.

### Варіанти завдань:

$$1) \begin{cases} 17x - 3y - 11z = -38 \\ -3x + 17y - 10z = 4 \\ -11x - 10y + 24z = 46 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 15x - 2y - 10z = -20 \\ -2x + 9y - 4z = 1 \\ -10x - 4y + 17z = 28 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 19x - 2y - 6z = -5 \\ -2x + 12y - 3z = 4 \\ -6x - 3y + 14z = 30 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 13x - 2y + 4z = -18 \\ -2x + 10y - z = 18 \\ 4x - y + 9z = 20 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 20x + 2y - 3z = 28 \\ 2x + 17y - 10z = -6 \\ -3x - 10y + 17z = 20 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 20x + 2y - 3z = 23 \\ 2x + 10y - z = 10 \\ -3x - y + 8z = 18 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 12x + y + 2z = 1 \\ x + 12y - 2z = 30 \\ 2x - 2y + 9z = 14 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 6x - y - z = -2 \\ -x + 10y - 6z = -3 \\ -x - 6y + 10z = 10 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 16x + y + 6z = 2 \\ x + 12y - 6z = 20 \\ 6x - 6y + 17z = 28 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 16x + 2y - 8z = 1 \\ 2x + 9y - 2z = 20 \\ -8x - 2y + 13z = 26 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 9x - y + 4z = -6 \\ -x + 9y - 4z = 1 \\ 4x - 4y + 11z = 14 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 16x - y - 4z = 26 \\ -x + 17y + 5z = 12 \\ -4x + 5y + 12z = 21 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} 12x - 4y - z = -9 \\ -4x - 12y + z = 8 \\ -x + y + 6z = 10 \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} -15x - 3y - 6z = -20 \\ -3x + 18y + 7z = 2 \\ -6x + 7y + 19z = 24 \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} -13x + 4y - 3z = 12 \\ 4x + 16y - 3z = -8 \\ -3x - 3y + 11z = 11 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} -6x + 2y - 2z = -3 \\ 2x + 17y + 6z = 20 \\ -2x + 6y + 11z = 15 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 15x - 6y - 2z = -10 \\ -6x + 16y - 3z = -9 \\ -2x - 3y + 10z = 4 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} 19x - 6y + 2z = -20 \\ -6x + 12y - z = -14 \\ 2x - y + 8z = 5 \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} 15x + 6y - 2z = -14 \\ 6x + 16y - z = 16 \\ -2x - y + 8z = 14 \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} 15x + 4y - 2z = -9 \\ 4x - 13y + 2z = 18 \\ -2x + 2y + 9z = 10 \end{cases}$$

# Лабораторна робота 2

## Розв'язування СЛАР методами факторизації матриць

### Контрольні запитання:

- 2.1 Що таке факторизація матриці?
- 2.2 Що таке верхня трикутна та нижня трикутна матриці?
- 2.3 Наведіть алгоритм методу LU-факторизації.
- 2.4 Яка матриця називається унітарною?
- 2.5 Що таке матриця відбиття та матриця обертання?
- 2.6 Наведіть алгоритм методу QR-факторизації.
- 2.7 Яка матриця називається ермітовою?
- 2.8 Наведіть алгоритм методу Холеського.
- 2.9 Наведіть алгоритм методу квадратного кореня.
- 2.10 Коли є ефективним метод квадратного кореня?
- 2.11 Що таке число обумовленості матриці?
- 2.12 Яка матриця називається погано обумовленою?
- 2.13 Як значення числа обумовленості матриці впливає на результат розв'язування СЛАР?
- 2.14 Яка практична оцінка числа обумовленості матриці для надійного обчислення розв'язку СЛАР?
- 2.15 Які є норми матриці? Як вони визначаються?

### Завдання лабораторної роботи:

- 1) Обрати СЛАР згідно з власним варіантом.

- 2) Для матриці  $A$  коефіцієнтів СЛАР обчислити норму  $\|A\|$  та число обумовленості  $\text{cond}(A)$ .
- 3) Отримати розв'язок СЛАР за допомогою формул Крамера.
- 4) Для матриці  $A$  коефіцієнтів СЛАР виконати LU-факторизацію та факторизацію згідно методу Холеського.
- 5) Отримати розв'язок СЛАР методом LU-факторизації.
- 6) Отримати розв'язок СЛАР методом QR-факторизації.
- 7) Отримати розв'язок СЛАР методом Холеського.
- 8) Отримати розв'язок СЛАР методом квадратного кореня.
- 9) Виконати порівняння результатів, отриманих різними методами. Оцінити нев'язку отриманих наближених розв'язків.

### Варіанти завдань:

$$1) \begin{cases} -13x + 4y - 3z = 12 \\ 4x + 16y - 3z = -8 \\ -3x - 3y + 11z = 11 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 15x + 4y - 2z = -9 \\ 4x - 13y + 2z = 18 \\ -2x + 2y + 9z = 10 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} -15x - 3y - 6z = -20 \\ -3x + 18y + 7z = 2 \\ -6x + 7y + 19z = 24 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 15x + 6y - 2z = -14 \\ 6x + 16y - z = 16 \\ -2x - y + 8z = 14 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 12x - 4y - z = -9 \\ -4x - 12y + z = 8 \\ -x + y + 6z = 10 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 19x - 6y + 2z = -20 \\ -6x + 12y - z = -14 \\ 2x - y + 8z = 5 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 16x - y - 4z = 26 \\ -x + 17y + 5z = 12 \\ -4x + 5y + 12z = 21 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 15x - 6y - 2z = -10 \\ -6x + 16y - 3z = -9 \\ -2x - 3y + 10z = 4 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 9x - y + 4z = -6 \\ -x + 9y - 4z = 1 \\ 4x - 4y + 11z = 14 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} -6x + 2y - 2z = -3 \\ 2x + 17y + 6z = 20 \\ -2x + 6y + 11z = 15 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 16x + y + 6z = 2 \\ x + 12y - 6z = 20 \\ 6x - 6y + 17z = 28 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 16x + 2y - 8z = 1 \\ 2x + 9y - 2z = 20 \\ -8x - 2y + 13z = 26 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 12x + y + 2z = 1 \\ x + 12y - 2z = 30 \\ 2x - 2y + 9z = 14 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 6x - y - z = -2 \\ -x + 10y - 6z = -3 \\ -x - 6y + 10z = 10 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} 20x + 2y - 3z = 28 \\ 2x + 17y - 10z = -6 \\ -3x - 10y + 17z = 20 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} 20x + 2y - 3z = 23 \\ 2x + 10y - z = 10 \\ -3x - y + 8z = 18 \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} 19x - 2y - 6z = -5 \\ -2x + 12y - 3z = 4 \\ -6x - 3y + 14z = 30 \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} 13x - 2y + 4z = -18 \\ -2x + 10y - z = 18 \\ 4x - y + 9z = 20 \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} 17x - 3y - 11z = -38 \\ -3x + 17y - 10z = 4 \\ -11x - 10y + 24z = 46 \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} 15x - 2y - 10z = -20 \\ -2x + 9y - 4z = 1 \\ -10x - 4y + 17z = 28 \end{cases}$$

# Лабораторна робота 3

## Наближені методи розв'язування задачі на власні значення

### Контрольні запитання:

- 3.1 В чому полягає задача знаходження власних значень квадратної матриці?
- 3.2 Що таке власні числа та власні вектори квадратної матриці?
- 3.3 Яке застосування власних чисел та відповідних власних векторів у прикладних задачах?
- 3.4 Як виглядає характеристичне рівняння для визначення власних чисел матриці?
- 3.5 Скільки власних чисел та власних векторів може мати матриця заданої розмірності?
- 3.6 Що таке спектр матриці?
- 3.7 Чому є важливими наближені методи розв'язування задачі на власні значення?
- 3.8 Яку задачу називають частковою/повною проблемою власних значень?
- 3.9 Наведіть алгоритм степеневого методу знаходження власних значень.
- 3.10 Який критерій зупинки ітераційного процесу пошуку найбільшого за модулем власного числа?
- 3.11 Який зв'язок між найменшим за модулем власним числом матриці  $A$  та найбільшим за модулем власним числом матриці  $A^{-1}$ ?

- 3.12 Наведіть алгоритм методу зворотніх ітерацій знаходження найменшого за модулем власного числа матриці.
- 3.13 Яка швидкість збіжності степеневого методу?
- 3.14 Наведіть алгоритм методу скалярного добутку.
- 3.15 Яка швидкість збіжності методу скалярного добутку?
- 3.16 Якими є власні числа для ермітової матриці?
- 3.17 Наведіть алгоритм методу Віландта (метод зворотніх ітерацій зі зсувом).
- 3.18 Наведіть алгоритм методу Леверрьє-Фаддєєва наближеного розв'язування повної проблеми власних значень.
- 3.19 Наведіть алгоритм методу Данилевського.
- 3.20 Опишіть алгоритм методу Якобі.
- 3.21 Наведіть алгоритм QR-методу. Чи можна за допомогою QR-методу знайти комплексні власні значення?
- 3.22 Наведіть алгоритм методу Крилова.

### **Завдання лабораторної роботи:**

- 1) Обрати матриці  $A$ ,  $\tilde{A}$  та число  $\mu$  згідно з власним варіантом.
- 2) За допомогою степеневого методу та методу скалярного добутку знайти найменше та найбільше за модулем власні числа матриці  $A$  та відповідні власні вектори з точністю 0,001.
- 3) Використовуючи метод Віландта, отримати власне число матриці  $A$ , яке знаходиться найближче до заданого числа  $\mu$ . Обчислення виконати з точністю 0,001.
- 4) Порівняти розв'язки, отримані методами із завдання 2.

- 5\*) За допомогою методів Леверрьє-Фаддєєва, Данилевського та Якобі знайти всі власні числа та власні вектори матриці  $\tilde{A}$  з точністю 0,001.
- 6\*) За допомогою QR-методу та методу Крилова знайти всі власні числа та власні вектори матриці  $\tilde{A}$  з точністю 0,001.
- 7) Обчислити числа обумовленості матриць  $A$  та  $\tilde{A}$ .
- 8) Зробити порівняння розв'язків, отриманих методами із завдань 5\* та 6\*.

### Варіанти завдань:

$$1) A = \begin{pmatrix} 17 & -3 & -11 \\ -3 & 17 & -10 \\ -11 & -10 & 24 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 & 2,6 & 3,6 \\ 1,6 & 1 & 2,1 & 1,7 \\ 2,6 & 2,1 & 1 & 1,8 \\ 3,6 & 1,7 & 1,8 & 2 \end{pmatrix}, \mu = 17$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 15 & -2 & -10 \\ -2 & 9 & -4 \\ -10 & -4 & 17 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1,1 & 1,9 & 0,4 \\ 1,1 & 2 & 0,5 & 1,1 \\ 1,9 & 0,5 & 2 & 1,4 \\ 0,4 & 1,1 & 1,4 & 1 \end{pmatrix}, \mu = 15$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 19 & -2 & -6 \\ -2 & 12 & -3 \\ -6 & -3 & 14 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1,3 & 2 & 0,6 \\ 1,3 & 1 & 0,6 & 1 \\ 2 & 0,6 & 2 & 1,6 \\ 0,6 & 1 & 1,6 & 0,6 \end{pmatrix}, \mu = 10$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 13 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -1 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2,4 & 1 & -0,4 & 2 \\ 1 & 2 & 1,1 & 0,3 \\ -0,4 & 1,1 & -2 & 1,4 \\ 2 & 0,3 & 1,4 & 1 \end{pmatrix}, \mu = 12$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 20 & 2 & -3 \\ 2 & 17 & -10 \\ -3 & -10 & 17 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1,1 & 1,5 & 0,6 \\ 1,1 & 1 & 0,6 & 1,1 \\ 1,5 & 0,6 & 1 & 1,3 \\ 0,6 & 1,1 & 1,3 & 2 \end{pmatrix}, \mu = 6$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 20 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & -1 \\ -3 & -1 & 8 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1,3 & -0,9 & 0,9 \\ 1,3 & 0,4 & 1,9 & 0,9 \\ -0,9 & 1,9 & -1,4 & 0,1 \\ 0,9 & 0,9 & 0,1 & 1,4 \end{pmatrix}, \mu = 20$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 2 \\ 1 & 12 & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1,6 & 3,6 & 4,6 \\ 1,6 & 2 & 2,1 & 1,7 \\ 3,6 & 2,1 & 2 & 1,8 \\ 4,6 & 1,7 & 1,8 & 2 \end{pmatrix}, \mu = 14$$

$$8) A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & -6 & 10 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 1,1 & 0,9 \\ 0,4 & -1 & -0,4 & -1,9 \\ 1,1 & -0,4 & -0,9 & 1,3 \\ 0,9 & -1,9 & 1,3 & 1 \end{pmatrix}, \mu = 9$$

$$\mathbf{9)} \quad A = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 6 \\ 1 & 12 & -6 \\ 6 & -6 & 17 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1,3 & 0,6 & 2,1 & 1,1 \\ 0,6 & 1 & 0,9 & 2,1 \\ 2,1 & 0,9 & 1 & 1,1 \\ 1,1 & 2,1 & 1,1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mu = 9$$

$$\mathbf{10)} \quad A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & -8 \\ 2 & 9 & -2 \\ -8 & -2 & 13 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0,4 & 1,1 & 0,9 & 0,8 \\ 1,1 & 2 & 0,4 & 1,1 \\ 0,9 & 0,4 & 2 & 0,9 \\ 0,8 & 1,1 & 0,9 & 2,1 \end{pmatrix}, \quad \mu = 15$$

$$\mathbf{11)} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 4 \\ -1 & 9 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1,4 & 4,4 & 5,4 \\ 1,4 & 2 & 1,9 & 1,5 \\ 4,4 & 1,9 & 2 & 1,6 \\ 5,4 & 1,5 & 1,6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mu = 22$$

$$\mathbf{12)} \quad A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 \\ 2 & 17 & 6 \\ -2 & 6 & 11 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1,7 & 1,1 & 1,5 & 1,1 \\ 1,1 & 1 & 0,6 & 2,1 \\ 1,5 & 0,6 & 2 & 1,4 \\ 1,1 & 2,1 & 1,3 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad \mu = 13$$

$$\mathbf{13)} \quad A = \begin{pmatrix} 16 & -1 & -4 \\ -1 & 17 & 5 \\ -4 & 5 & 12 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2,3 & 0,4 & 1,9 & 0,9 \\ 0,4 & 1 & 0,7 & 1,9 \\ 1,9 & 0,7 & 2 & 0,4 \\ 0,9 & 1,9 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = 17$$

$$14) A = \begin{pmatrix} 15 & -6 & -2 \\ -6 & 16 & -3 \\ -2 & -3 & 10 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0,6 & 1,3 & 2,1 & 1,1 \\ 1,3 & 2,1 & 0,6 & 1,3 \\ 2,1 & 0,6 & 1 & 0,6 \\ 1,1 & 1,3 & 0,6 & 1,7 \end{pmatrix}, \mu = 11$$

$$15) A = \begin{pmatrix} 12 & -4 & -1 \\ -4 & -12 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1,7 & 1,5 & 1,6 & 1,7 \\ 1,5 & 2,7 & 1,4 & 1,2 \\ 1,6 & 1,4 & 3,7 & 1,3 \\ 1,7 & 1,2 & 1,3 & 4,5 \end{pmatrix}, \mu = 21$$

$$16) A = \begin{pmatrix} 19 & -6 & 2 \\ -6 & 12 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1,1 & 1,6 & 1,3 & 0,6 \\ 1,6 & 2,1 & 0,5 & 2,1 \\ 1,3 & 0,5 & 1,6 & 1,5 \\ 0,6 & 2,1 & 1,5 & 1,4 \end{pmatrix}, \mu = 10$$

$$17) A = \begin{pmatrix} -15 & -3 & 6 \\ -3 & 18 & 7 \\ 6 & 7 & 19 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 & 0,5 & 2,1 \\ 1,6 & -1,3 & 1,1 & 0,6 \\ 0,5 & 1,1 & 2,1 & 1,3 \\ 2,1 & 0,6 & 1,3 & 2,6 \end{pmatrix}, \mu = 14$$

$$18) A = \begin{pmatrix} 15 & 6 & -2 \\ 6 & 16 & -1 \\ -2 & -1 & 8 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1,7 & 1,8 & 1,9 \\ 1,7 & 3 & 1,7 & 1,4 \\ 1,8 & 1,7 & 4 & 1,5 \\ 1,9 & 1,4 & 1,5 & 5 \end{pmatrix}, \mu = 7$$

$$\mathbf{19)} \quad A = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -3 \\ 4 & 16 & 3 \\ -3 & 3 & 11 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,9 & 1,1 & 1,9 \\ 0,9 & 1,1 & 0,4 & 0,5 \\ 1,1 & 0,4 & 0,9 & -0,9 \\ 1,9 & 0,5 & -0,9 & 1,1 \end{pmatrix}, \quad \mu = 16$$

$$\mathbf{20)} \quad A = \begin{pmatrix} 15 & 4 & -2 \\ 4 & -13 & 2 \\ -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2,1 & 1,7 & 1,8 & 1,9 \\ 1,7 & 3,1 & 1,8 & 1,4 \\ 1,8 & 1,8 & 4,1 & 1,5 \\ 1,9 & 1,4 & 1,5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mu = 12$$

## Лабораторна робота 4

### Наближені методи розв'язування нелінійних рівнянь

#### Контрольні запитання:

- 4.1 Яке рівняння називається нелінійним?
- 4.2 Які є етапи наближеного розв'язування нелінійних рівнянь?
- 4.3 Що таке збіжність за аргументом та збіжність за значенням функції в ітераційному процесі знаходження наближеного значення кореня нелінійного рівняння?
- 4.4 Що таке локальна та глобальна збіжність ітераційних послідовностей?
- 4.5 Які ітераційні процеси називаються лінійно збіжними, квадратично збіжними та кубічно збіжними?
- 4.6 Наведіть алгоритм методу бісекції (дихотомії чи поділу відрізка навпіл).
- 4.7 Яка збіжність методу бісекції?
- 4.8 Яка швидкість збіжності методу бісекції?
- 4.9 Наведіть алгоритм методу простих ітерацій.
- 4.10 Яка швидкість збіжності методу простих ітерацій?
- 4.11 Яка геометрична інтерпретація методу простих ітерацій?
- 4.12 Наведіть алгоритм вдосконаленого методу ітерацій.
- 4.13 Який зміст методу Ньютона (методу дотичних)?
- 4.14 За якої умови метод Ньютона збігається?
- 4.15 Яка збіжність та швидкість збіжності методу Ньютона?
- 4.16 Який зміст модифікованого методу Ньютона?
- 4.17 Наведіть алгоритм методу січних.
- 4.18 Наведіть алгоритм методу хорд.

### **Завдання лабораторної роботи:**

- 1) Обрати нелінійне рівняння згідно з власним варіантом.
- 2) За допомогою графічного методу визначити відрізки, що містять корені рівняння.
- 3) На одному з отриманих відрізків знайти корінь рівняння методами бісекції, простих ітерацій та Ньютона з точністю до 0,001.
- 4) На вибраному відрізку знайти корінь рівняння за допомогою модифікованого методу Ньютона, методу січних та методу хорд з точністю до 0,001.
- 5) Виконати порівняння результатів, отриманих різними методами в завданнях 3 та 4.

### **Варіанти завдань:**

- |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $5^x + 2x - 4 = 0$ ,               | 2) $\arctg(x - 2) + 4x = 0$ ,         |
| 3) $\arctg x - \frac{5}{6x^3} = 0$ ,  | 4) $(x - 3)^2 \cdot 3^x = 2$ ,        |
| 5) $(x - 2)^2 \cdot \ln(x + 8) = 2$ , | 6) $x^2 - 2 \sin 2x = 0$ ,            |
| 7) $\cos(x + 1) = 2x^3$ ,             | 8) $3 \arctg x - 5x + 8 = 0$ ,        |
| 9) $4 \sin x = 3x$ ,                  | 10) $5 \lg x - \frac{x}{4} + 2 = 0$ , |
| 11) $x^4 - 10x^3 + 5 = 0$ ,           | 12) $2x^3 - 8x^2 - 11x + 1 = 0$ ,     |
| 13) $e^{-3x} - x + 5 = 0$ ,           | 14) $x \cdot \lg(x + 2) = 3$ ,        |
| 15) $x^4 + 2x^3 - 10 = 0$ ,           | 16) $x^2 - 3 \sin x = 0$ ,            |
| 17) $2^x - 3 = (x + 4)^2$ ,           | 18) $x^2 \cdot \cos 3x = -2$ ,        |
| 19) $x^2 \cdot \sin 2x = -1$ ,        | 20) $x \cdot \log_3(x + 2) = 2$ .     |

## Лабораторна робота 5

### Наближені методи розв'язування систем нелінійних рівнянь

#### Контрольні запитання:

- 5.1 Яка система рівнянь називається нелінійною?
- 5.2 Що таке матриця Якобі? Який вигляд вона має?
- 5.3 Що таке матриця Гессе?
- 5.4 Наведіть алгоритм методу Ньютона розв'язування систем нелінійних рівнянь.
- 5.5 Яка оцінка виконується для наближеного розв'язку в методі Ньютона?
- 5.6 Яка збіжність методу Ньютона? Які умови повинні виконуватися для досягнення цієї збіжності?
- 5.7 В яких випадках виникає необхідність модифікації методу Ньютона?
- 5.8 Що таке квазіньютонівські методи розв'язування систем нелінійних рівнянь? Які методи до них відносять?
- 5.9 Наведіть алгоритм методу Бroyдена.
- 5.10 Наведіть алгоритм модифікованого методу Бroyдена.
- 5.11 Опишіть відмінність методу Пірсона від методу Бroyдена.
- 5.12 Наведіть алгоритм симетричного методу першого рангу.
- 5.13 Який зміст модифікації методу Ньютона з використанням методу лінійного пошуку?
- 5.14 Наведіть алгоритм методу продовження по параметру.
- 5.15 Наведіть алгоритм методу диференціювання по параметру.
- 5.16 Який зміст методу простих ітерацій для розв'язування систем нелінійних рівнянь?

- 5.17 Які достатні умови збіжності методу простих ітерацій?
- 5.18 Наведіть алгоритм методу Брауна. Яка його збіжність?
- 5.19 Який зміст підходу до розв'язування систем нелінійних рівнянь як задач оптимізації (екстремальних задач)?
- 5.20 Які переваги та недоліки градієнтних методів розв'язування систем нелінійних рівнянь?

### **Завдання лабораторної роботи:**

- 1) Обрати систему нелінійних рівнянь згідно з власним варіантом.
- 2) Знайти розв'язки відповідної системи нелінійних рівнянь графічним методом.
- 3) За допомогою методу Ньютона та методу простих ітерацій отримати розв'язок системи нелінійних рівнянь з точністю до 0,001.
- 4) За допомогою методу Бroyдена та методу Пірсона отримати розв'язок системи нелінійних рівнянь з точністю до 0,001.
- 5\*) Розв'язати систему нелінійних рівнянь методом продовження по параметру з точністю до 0,001.
- 6\*) Розв'язати систему нелінійних рівнянь методом Брауна з точністю до 0,001.
- 7) Порівняти результати, отримані різними методами в завданнях 3-6\*.

### **Варіанти завдань:**

$$1) \begin{cases} \sin^2 x + \cos 2y = 1 \\ \cos x - \sin y = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} e^{3x} + \sqrt{2y} = 1 \\ e^x - \sqrt{y} = -2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \sqrt{x} + \sin y = 3 \\ 2\sqrt{x} + \cos y = 2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2\cos x + y^2 = 3 \\ \cos x - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x + e^{2y} = 1 \\ x - 2e^y = 2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \cos x + e^y = 4 \\ e^x + \cos y = 3 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x + \cos y = 1 \\ x - \sqrt{y} = 0 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} e^{2x} + e^{2y} = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \sin x + e^y = 2 \\ e^{2x} + \sin y = 1 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} e^x + e^{2y} = 2 \\ \sin x + \sin 2y = 1 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} e^{2x} + e^y = 4 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} \sin x + \operatorname{tg} y = 2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} \operatorname{tg} x + \sin y = 2 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} e^x + \operatorname{tg} y = 1 \\ \sqrt{x} + e^y = 2 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 5 \\ e^{2x} + e^{3y} = 3 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} \operatorname{tg} x + \sqrt{y} = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} xe^{2y} = 4 \\ \cos x + y = 2 \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} \cos x + y^2 = 1 \\ x + e^y \cos y = 1 \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} \operatorname{tg} x + e^{2y} = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} x + ye^y = 1 \\ \operatorname{tg}^2 x + y = 2 \end{cases}$$

# Лабораторна робота 6

## Інтерполяція функцій

### Контрольні запитання:

- 6.1 В чому полягає задача інтерполяції?
- 6.2 Який геометричний зміст інтерполяції? Що таке вузли інтерполяції?
- 6.3 Яка інтерполяція називається поліноміальною? Яка інтерполяція називається тригонометричною?
- 6.4 Що таке кусково-поліноміальна інтерполяція?
- 6.5 Який вигляд має інтерполяційний многочлен Лагранжа?
- 6.6 Що таке барицентрична форма запису інтерполяційного многочлена Лагранжа?
- 6.7 Як визначається похибка інтерполяційного многочлена Лагранжа?
- 6.8 Який основний недолік інтерполяційного многочлена Лагранжа?
- 6.9 Що таке розділені різниці 1-го, 2-го та 3-го порядків? Як рахуються розділені різниці  $k$ -го порядку?
- 6.10 Який вигляд має інтерполяційний многочлен Ньютона у випадку інтерполювання вперед?
- 6.11 Який вигляд має інтерполяційний многочлен Ньютона у випадку інтерполювання назад?
- 6.12 Яка оцінка похибки поліноміальної інтерполяції?
- 6.13 Що таке сплайн?
- 6.14 В чому полягає сплайн-інтерполяція?
- 6.15 Які умови використовуються для знаходження коефіцієнтів сплайн-інтерполяції у випадках

інтерполяції лінійними, параболічними та кубічними сплайнами?

**Завдання лабораторної роботи:**

- 1) Обрати таблично задану функцію згідно з власним варіантом.
- 2) Для таблично заданої функції побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа.
- 3) Для таблично заданої функції побудувати інтерполяційний многочлен Ньютона.
- 4) Для таблично заданої функції виконати кубічну сплайн-інтерполяцію.
- 5) Побудувати графіки функцій, отриманих у завданнях 2-4. Зобразити на рисунку вузли інтерполяції. Порівняти результати інтерполяції.

**Варіанти завдань:**

1)

|       |      |    |      |    |     |
|-------|------|----|------|----|-----|
| $x_i$ | -3   | -2 | 0    | 2  | 3   |
| $y_i$ | -4,5 | -2 | -1,5 | -5 | -12 |

2)

|       |     |      |    |      |    |
|-------|-----|------|----|------|----|
| $x_i$ | -3  | -2   | 1  | 2    | 3  |
| $y_i$ | -10 | -7,5 | -5 | -7,5 | -4 |

3)

|       |    |     |     |   |   |
|-------|----|-----|-----|---|---|
| $x_i$ | -3 | -2  | 0   | 1 | 2 |
| $y_i$ | 8  | 6,5 | 2,5 | 4 | 9 |

4)

|       |    |      |    |    |   |
|-------|----|------|----|----|---|
| $x_i$ | -3 | -2   | 0  | 1  | 3 |
| $y_i$ | -4 | -1,5 | -5 | -2 | 6 |

5)

|       |      |    |    |    |   |
|-------|------|----|----|----|---|
| $x_i$ | -3   | -2 | -1 | 1  | 3 |
| $y_i$ | -8,5 | -5 | -1 | -3 | 2 |

6)

|       |    |     |    |    |     |
|-------|----|-----|----|----|-----|
| $x_i$ | -3 | -2  | -1 | 2  | 3   |
| $y_i$ | 10 | 7,5 | 4  | -3 | -10 |

7)

|       |    |    |     |    |   |
|-------|----|----|-----|----|---|
| $x_i$ | -3 | -2 | -1  | 0  | 3 |
| $y_i$ | 7  | 2  | 0,5 | -2 | 6 |

8)

|       |    |    |     |     |   |
|-------|----|----|-----|-----|---|
| $x_i$ | -3 | -2 | -1  | 1   | 2 |
| $y_i$ | 12 | 8  | 4,5 | 1,5 | 6 |

9)

|       |     |      |    |    |    |
|-------|-----|------|----|----|----|
| $x_i$ | -3  | -2   | -1 | 0  | 1  |
| $y_i$ | -10 | -6,5 | -2 | -3 | -5 |

10)

|       |    |     |    |   |      |
|-------|----|-----|----|---|------|
| $x_i$ | -3 | -2  | -1 | 0 | 2    |
| $y_i$ | 8  | 5,5 | 3  | 6 | -0,5 |

11)

|       |    |     |   |   |    |
|-------|----|-----|---|---|----|
| $x_i$ | -3 | -2  | 0 | 2 | 3  |
| $y_i$ | 9  | 6,5 | 3 | 0 | -2 |

12)

|       |    |    |     |    |    |
|-------|----|----|-----|----|----|
| $x_i$ | -3 | -2 | 1   | 2  | 3  |
| $y_i$ | 8  | 5  | 1,5 | -2 | -5 |

13)

|       |    |    |   |     |   |
|-------|----|----|---|-----|---|
| $x_i$ | -3 | -2 | 0 | 1   | 2 |
| $y_i$ | -2 | 0  | 3 | 1,5 | 8 |

14)

|       |     |    |    |     |   |
|-------|-----|----|----|-----|---|
| $x_i$ | -3  | -2 | 0  | 1   | 3 |
| $y_i$ | -15 | -8 | -2 | 2,5 | 6 |

15)

|       |    |      |    |    |   |
|-------|----|------|----|----|---|
| $x_i$ | -3 | -2   | -1 | 1  | 3 |
| $y_i$ | -4 | -6,5 | -5 | -2 | 3 |

16)

|       |     |    |    |     |   |
|-------|-----|----|----|-----|---|
| $x_i$ | -3  | -2 | -1 | 2   | 3 |
| $y_i$ | -12 | -6 | -2 | 1,5 | 4 |

17)

|       |     |      |    |   |   |
|-------|-----|------|----|---|---|
| $x_i$ | -3  | -2   | -1 | 0 | 2 |
| $y_i$ | -10 | -5,5 | 2  | 4 | 8 |

18)

|       |     |      |      |   |   |
|-------|-----|------|------|---|---|
| $x_i$ | -3  | -2   | -1   | 1 | 2 |
| $y_i$ | -10 | -3,5 | -1,5 | 2 | 5 |

19)

|       |    |    |   |   |     |
|-------|----|----|---|---|-----|
| $x_i$ | -3 | -1 | 0 | 1 | 3   |
| $y_i$ | -4 | -1 | 2 | 5 | 8,5 |

20)

|       |    |    |   |   |   |
|-------|----|----|---|---|---|
| $x_i$ | -3 | -2 | 0 | 1 | 3 |
| $y_i$ | 12 | 5  | 1 | 6 | 4 |

# Лабораторна робота 7

## Апроксимація функцій

### Контрольні запитання:

- 7.1 В чому полягає задача апроксимації функції?
- 7.2 Яка відмінність між інтерполяцією та апроксимацією функцій?
- 7.3 В чому полягає задача про рівномірне наближення функцій?
- 7.4 В чому полягає задача про середньоквадратичне наближення функцій?
- 7.5 Який зміст методу найменших квадратів?
- 7.6 Що таке апроксимуюча функція? Який вигляд вона має в задачі про середньоквадратичне наближення?
- 7.7 Що таке визначник Грама?
- 7.8 Як будується нормальна система рівнянь в методі найменших квадратів для таблично заданих та неперервних функцій?
- 7.9 Чи має нормальна система рівнянь методу найменших квадратів єдиний розв'язок?
- 7.10 Які є переваги та недоліки апроксимації функцій методом найменших квадратів?

### Завдання лабораторної роботи:

- 1) Обрати із лабораторної роботи 6 таблично задану функцію згідно з власним варіантом.
- 2) Апроксимувати таблично задану функцію за допомогою методу найменших квадратів функцією вигляду  $f(x, c_1, c_2, c_3) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$ .

- 3) Побудувати графік апроксимуючої функції  $f(x, c_1, c_2, c_3)$  та зобразити точки з таблиці. Порахувати відхилення для кожної точки з таблиці, скласти вектор відхилень та знайти його норму.
- 4) Обрати аналітично задану функцію  $y(x)$  згідно власного варіанту та апроксимувати її на заданому відрізку многочленом 1-го степеня  $f(x, c_1, c_2) = c_1x + c_2$ .
- 5) Побудувати графіки функцій  $y(x)$  та  $f(x, c_1, c_2)$ .

### Варіанти завдань:

- 1)  $y(x) = \frac{2x}{x+5}, \quad x \in [-3, -2],$
- 2)  $y(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 5, \quad x \in [2, 3],$
- 3)  $y(x) = \frac{(x-5)^2}{x}, \quad x \in [-3, -2],$
- 4)  $y(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x - 2, \quad x \in [3, 4],$
- 5)  $y(x) = 2x^2 - \frac{3}{x^2} + 5x - 2, \quad x \in [2, 4],$
- 6)  $y(x) = \frac{x+5}{x-3}, \quad x \in [6, 8],$
- 7)  $y(x) = -2x^3 + \frac{1}{x+4} + 2, \quad x \in [3, 5],$
- 8)  $y(x) = \frac{1}{(x-4)^3} - 10x + 2, \quad x \in [1, 3],$
- 9)  $y(x) = 3x^3 + 3x^2 - 2x - 4, \quad x \in [1, 3],$

$$10) y(x) = \frac{x-6}{x+2}, \quad x \in [1, 3],$$

$$11) y(x) = x^4 - 5x^2 + 2x + 3, \quad x \in [2, 4],$$

$$12) y(x) = \frac{10}{(8-x)^2} - 4x^2, \quad x \in [3, 5],$$

$$13) y(x) = \frac{4-x}{3x}, \quad x \in [5, 7],$$

$$14) y(x) = \frac{(x-2)^3}{2x}, \quad x \in [-5, -3],$$

$$15) y(x) = \frac{5}{x^3} - 3x^2 + x - 1, \quad x \in [2, 5],$$

$$16) y(x) = \frac{(x-5)^4}{2x}, \quad x \in [1, 3],$$

$$17) y(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 10}{x^2}, \quad x \in [2, 4],$$

$$18) y(x) = \frac{(x+2)^3}{4} - \frac{1}{(x-2)^2} + 2, \quad x \in [-5, -3],$$

$$19) y(x) = \frac{x^5}{6} + \frac{1}{2x^3} - x^2 + \frac{x}{2} - 2, \quad x \in [2, 5],$$

$$20) y(x) = -\frac{x^3}{2} + \frac{1}{x^2} - 2x + 4, \quad x \in [-5, -2].$$

## Лабораторна робота 8

# Наближене диференціювання функцій

### Контрольні запитання:

- 8.1 Коли постає задача наближеного диференціювання функцій?
- 8.2 В чому полягає наближене диференціювання функцій?
- 8.3 Чому дорівнює похибка похідної інтерполюючої функції?
- 8.4 Яка операція є менш точною: інтерполяція чи наближене диференціювання? Чому?
- 8.5 Як апроксимується похідна 1-го порядку від функції в точці за допомогою скінченних різниць вперед, назад та центральної скінченної різниці?
- 8.6 Яка похибка обчислення похідної 1-го порядку за допомогою скінченних різниць?
- 8.7 Як обчислюється похідна 2-го порядку від функції в точці за допомогою скінченних різниць?
- 8.8 Яка похибка обчислення похідної 2-го порядку за допомогою скінченних різниць?
- 8.9 В чому полягає підхід до отримання формул наближеного диференціювання за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа?
- 8.10 Який вигляд мають обрахункові формули похідної 1-го та 2-го порядків для різної кількості вузлів (три, чотири, п'ять вузлів), отримані диференціюванням

інтерполяційного многочлена Лагранжа? Які похибки цих формул?

- 8.11** В чому полягає підхід до отримання формул наближеного диференціювання за допомогою інтерполяційного многочлена Ньютона у випадку рівновіддалених вузлів?
- 8.12** Який вигляд мають обрахункові формули похідної 1-го та 2-го порядків, отримані диференціюванням інтерполяційного многочлена Ньютона? Який вигляд цих формул у вузлах інтерполяції? Як оцінюється їх похибка?
- 8.13** В чому полягає некоректність задачі наближеного диференціювання? Як знаходиться оптимальне значення кроку  $h$  наближеного диференціювання?

### **Завдання лабораторної роботи:**

- 1) Обрати функцію  $f(x)$  згідно з власним варіантом.
- 2) Порахувати аналітично значення похідних  $f'(x)$  та  $f''(x)$  функції  $f(x)$  при  $x = x_0$ .
- 3) Використовуючи скінченні різниці вперед, назад та центральну скінченну різницю, наближено порахувати значення похідних  $f'(x_0)$  та  $f''(x_0)$  для різних значень кроку  $h$ : 0,5; 0,25; 0,1.
- 4) Використовуючи обрахункові формули похідної для різної кількості вузлів (три, чотири, п'ять вузлів), отримані диференціюванням інтерполяційного многочлена Лагранжа, наближено порахувати значення похідних  $f'(x_0)$  та  $f''(x_0)$  для різних значень кроку  $h$ : 0,5; 0,25; 0,1. Обирати одну розрахункову формулу для заданої кількості вузлів.

- 5) Використовуючи обчислювальні формули похідної, отримані диференціюванням інтерполяційного многочлена Ньютона, наближено порахувати значення похідних  $f'(x_0)$  та  $f''(x_0)$  для різних значень кроку  $h$ : 0,5; 0,25; 0,1. В обчислювальних формулах використати скінченні різниці до 4-го порядку включно.
- 6) Порівняти значення похідних  $f'(x_0)$  та  $f''(x_0)$ , отримані чисельно в завданнях 3-5 для різних значень кроку  $h$ , із значеннями, отриманими аналітично в завданні 2. Порахувати відносні похибки отриманих наближених значень похідних  $f'(x_0)$  та  $f''(x_0)$ .

### Варіанти завдань:

- 1)  $f(x) = \cos(x^2 + 3x)$ ,  $x_0 = 1,5$ ,
- 2)  $f(x) = e^{x \sin x}$ ,  $x_0 = 0,8$ ,
- 3)  $f(x) = \ln(x^2 + 2)$ ,  $x_0 = 2$ ,
- 4)  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x + 3}$ ,  $x_0 = 1$ ,
- 5)  $f(x) = \cos(e^x + x^2)$ ,  $x_0 = 0,5$ ,
- 6)  $f(x) = \sin(e^{2x} + x^3)$ ,  $x_0 = -1$ ,
- 7)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + \cos x}$ ,  $x_0 = 1,2$ ,
- 8)  $f(x) = (2x^2 + x + 3)^{4/3}$ ,  $x_0 = 0$ ,
- 9)  $f(x) = e^{\operatorname{tg} x} + \sin(x^2)$ ,  $x_0 = -0,8$ ,

$$10) f(x) = \ln(\sin x + 5x^2), \quad x_0 = 0,9,$$

$$11) f(x) = \sin(e^x + x^4), \quad x_0 = 1,2,$$

$$12) f(x) = \frac{x^2 + e^x}{\sqrt{x+6}}, \quad x_0 = 1,4,$$

$$13) f(x) = e^{x^2} \sin(x+2), \quad x_0 = -0,6,$$

$$14) f(x) = \ln(x^2 + e^{3x}), \quad x_0 = 1,5,$$

$$15) f(x) = (x + \sin(x^3))^{\frac{2}{3}}, \quad x_0 = 0,5,$$

$$16) f(x) = \frac{x^3}{e^{x+2} + x^2}, \quad x_0 = -1,3,$$

$$17) f(x) = e^{x \cos(x^2)}, \quad x_0 = 1,8,$$

$$18) f(x) = \ln(x^4 + 2x^2 + 1), \quad x_0 = 0,5,$$

$$19) f(x) = e^{x^3 + \sin x}, \quad x_0 = -0,6,$$

$$20) f(x) = \frac{x^2 + 4}{e^{x^2+2}}, \quad x_0 = 2.$$

## Лабораторна робота 9

### Наближене інтегрування функцій

#### Контрольні запитання:

- 9.1 Коли виникає необхідність наближеного обчислення інтегралів?
- 9.2 В чому полягає задача наближеного інтегрування?
- 9.3 Що таке квадратурна формула наближеного інтегрування?
- 9.4 Що називається порядком точності квадратурної формули?
- 9.5 Як визначається загальна похибка наближеного інтегрування?
- 9.6 На чому базуються методи Ньютона – Котеса наближеного інтегрування?
- 9.7 Який загальний вигляд формули прямокутників наближеного інтегрування? Яка геометрична інтерпретація формули прямокутників?
- 9.8 Який вигляд мають часткові випадки формули прямокутників: формули лівих, правих та середніх прямокутників?
- 9.9 Як визначаються похибки методів лівих, правих та середніх прямокутників? Які порядки точності цих методів?
- 9.10 Який вигляд має формула трапецій (формула Ньютона – Котеса 1-го порядку) наближеного інтегрування? Як визначається похибка формули трапецій та який її порядок точності?
- 9.11 Яка геометрична інтерпретація формули трапецій?

- 9.12** Який вигляд має формула Сімпсона (формула Ньютона – Котеса 2-го порядку) наближеного інтегрування? Як визначається похибка формули Сімпсона та який її порядок точності?
- 9.13** Яка геометрична інтерпретація формули Сімпсона?
- 9.14** Який вигляд має формула Сімпсона “трьох восьмих” (формула Ньютона – Котеса 3-го порядку)?
- 9.15** Як будуються квадратурні формули Ньютона – Котеса?
- 9.16** Який вигляд має квадратурна формула Ньютона – Котеса  $m$ -го порядку? Як визначається похибка формули Ньютона – Котеса?
- 9.17** Як обчислюються сталі Котеса для квадратурної формули Ньютона – Котеса?
- 9.18** В чому полягає наближене інтегрування за допомогою квадратурних формул Чебишова?
- 9.19** Який порядок точності квадратурних формул Чебишова?
- 9.20** В чому полягає наближене інтегрування за допомогою квадратурних формул Гауса?
- 9.21** Як обчислюються вузли та вагові коефіцієнти для квадратурних формул Гауса?
- 9.22** Як визначаються поліноми Лежандра?
- 9.23** Який порядок точності мають квадратурні формули Гауса?
- 9.24** В чому полягають перше та друге правило Рунге?
- 9.25** Що таке екстраполяція Річардсона?

### **Завдання лабораторної роботи:**

- 1)** Обрати визначений інтеграл згідно з власним варіантом.
- 2)** Обчислити значення інтегралу аналітично.

- 3) Обчислити значення інтегралу наближено з кроком  $h = 0,25$ , використовуючи формули середніх прямокутників, трапецій та Сімпсона.
- 4) Наближено обчислити значення інтегралу за допомогою квадратурної формули Ньютона – Котеса 4-го порядку з точністю до 0,001.
- 5) За допомогою екстраполяції Річардсона виконати уточнення значення інтегралу, отриманого в завданні 4.
- 6) Наближено обчислити значення інтегралу за допомогою квадратурної формули Чебишова 4-го порядку з точністю до 0,0001.
- 7) Наближено обчислити значення інтегралу за допомогою квадратурної формули Гауса 4-го порядку з точністю до 0,0001.
- 8) Порівняти значення інтегралу, отримане аналітично в завданні 2, із наближеними значеннями із завдань 3–7.

### Варіанти завдань:

$$1) \int_1^2 (e^x + 3x^2 - 2) dx,$$

$$2) \int_1^2 (x^2 + 2) \sin(3x) dx,$$

$$3) \int_2^3 x^2 \ln x dx,$$

$$4) \int_2^3 (x^2 + 2) \cos(2x) dx,$$

$$5) \int_1^2 e^{2x} \cos 3x dx,$$

$$6) \int_1^2 x^3 e^{2x} dx,$$

$$7) \int_1^2 e^{3x} \sin 2x dx,$$

$$8) \int_2^3 x^3 e^{5x} dx,$$

$$9) \int_0^1 (e^{2x} - 3x^3 + 1) dx,$$

$$10) \int_2^3 (5x^3 + \cos^2 x) dx,$$

$$11) \int_2^3 x^3 \ln x dx,$$

$$12) \int_1^2 (2x^5 + \sin^2 x) dx,$$

$$13) \int_1^2 x \cos(x^2) dx,$$

$$14) \int_2^3 (2x + 4) \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx,$$

$$15) \int_1^2 x \sin(x^2) dx,$$

$$16) \int_1^2 (3x + 2) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx,$$

$$17) \int_2^3 \cos x e^{\sin x} dx,$$

$$18) \int_2^3 \frac{\ln(x+2)}{x+2} dx,$$

$$19) \int_2^3 \sin x e^{\cos x} dx,$$

$$20) \int_3^4 \frac{\ln^2(x+3)}{x+3} dx.$$

## Лабораторна робота 10

### Наближені методи безумовної оптимізації функції 1-ї змінної

#### Контрольні запитання:

- 10.1 В чому полягає задача оптимізації функції 1-ї та багатьох змінних?
- 10.2 Що таке безумовна та умовна оптимізація функцій?
- 10.3 Що таке цільова функція?
- 10.4 Яка задача оптимізації називається задачею лінійного програмування? Яка задача оптимізації називається задачею нелінійного програмування?
- 10.5 Які методи безумовної оптимізації належать до методів одновимірного пошуку?
- 10.6 Яка функція називається унімодальною? Що таке інтервал невизначеності?
- 10.7 Наведіть алгоритм методу дихотомії (половинного поділу).
- 10.8 Наведіть алгоритм методу золотого перерізу.
- 10.9 Наведіть алгоритм методу Фібоначчі.
- 10.10 Який алгоритм методу квадратичної інтерполяції для безумовної оптимізації функції 1-ї змінної?

#### Завдання лабораторної роботи:

- 1) Обрати цільову функцію  $f(x)$  згідно з власним варіантом.
- 2) Визначити відрізки унімодальності цільової функції  $f(x)$ .

- 3) На відрізку унімодальності знайти мінімум (максимум) цільової функції  $f(x)$  методами золотого перерізу та Фібоначчі з точністю до 0,01.
- 4) На відрізку унімодальності знайти мінімум (максимум) цільової функції  $f(x)$  методами дихотомії та квадратичної інтерполяції з точністю до 0,01.
- 5) Виконати порівняння результатів, отриманих в завданнях 3 та 4.

### Варіанти завдань:

- |                                    |                                         |
|------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5$ ,      | 2) $f(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^2 + 1}$ , |
| 3) $f(x) = 5x^5 - x + 3$ ,         | 4) $f(x) = (x - 3)^2 e^{-x}$ ,          |
| 5) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 2}$ ,   | 6) $f(x) = x^2 + \sin x$ ,              |
| 7) $f(x) = 3e^{-x} \cos x$ ,       | 8) $f(x) = 2x + \cos x$ ,               |
| 9) $f(x) = -2e^{-x^2}$ ,           | 10) $f(x) = \sin x + x^3$ ,             |
| 11) $f(x) = x^2 - 5 \ln x$ ,       | 12) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ ,             |
| 13) $f(x) = e^x - 2x$ ,            | 14) $f(x) = x^4 + 2x^2 - x + 5$ ,       |
| 15) $f(x) = e^{-x^2} + x^4$ ,      | 16) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 2$ ,       |
| 17) $f(x) = xe^{-x}$ ,             | 18) $f(x) = x^4 - x^2 + x + 1$ ,        |
| 19) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ , | 20) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 2$ .       |

# Лабораторна робота 11

## Наближені методи безумовної оптимізації функції багатьох змінних

### Контрольні запитання:

- 11.1 Яка точка називається точкою локального та глобального мінімуму функції багатьох змінних?
- 11.2 Яка множина називається опуклою?
- 11.3 Яка функція називається опуклою на опуклій множині?
- 11.4 В чому полягає критерій опуклості функції багатьох змінних?
- 11.5 Який зміст аналітичного методу розв'язування задачі безумовної оптимізації функції багатьох змінних?
- 11.6 Наведіть алгоритм методу покоординатного спуску.
- 11.7 Яка геометрична інтерпретація методу покоординатного спуску?
- 11.8 Яка умова зупинки ітераційного процесу в методі покоординатного спуску?
- 11.9 Що таке вектор градієнт? Які його властивості?
- 11.10 Який вигляд має ітераційна формула для градієнтних методів?
- 11.11 Наведіть алгоритм методу градієнтного спуску.
- 11.12 Яка геометрична інтерпретація методів градієнтного спуску?
- 11.13 Наведіть алгоритм методу найшвидшого градієнтного спуску.
- 11.14 Які вектори називаються спряженими відносно матриці?

- 11.15 Наведіть алгоритм методу спряжених градієнтів (метод Флетчера – Рівса).
- 11.16 Яка геометрична інтерпретація методу спряжених градієнтів?
- 11.17 Наведіть алгоритми модифікацій методу спряжених градієнтів: методів Полака – Райбера та Хестенса – Штифеля.
- 11.18 Яка швидкість збіжності методу спряжених градієнтів?
- 11.19 Наведіть алгоритм методу Ньютона розв’язування задачі безумовної оптимізації функції багатьох змінних.
- 11.20 Які недоліки має метод Ньютона?
- 11.21 Наведіть алгоритм модифікованого методу Ньютона розв’язування задачі безумовної оптимізації функції багатьох змінних.
- 11.22 Яка основна ідея методів змінної метрики (квазіньютонівські методи)?
- 11.23 Наведіть алгоритм методу Девідона – Флетчера – Пауелла.
- 11.24 Наведіть алгоритм методу Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шенно.
- 11.25 Наведіть алгоритм методу Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шенно з обмеженою пам’яттю.

**Завдання лабораторної роботи:**

- 1) Обрати цільову функцію  $f(x, y)$  згідно з власним варіантом.
- 2) Знайти мінімум цільової функції  $f(x, y)$  методами покоординатного та градієнтного спусків з точністю до 0,01.

- 3) Знайти мінімум цільової функції  $f(x, y)$  методами найшвидшого градієнтного спуску та спряжених градієнтів з точністю до 0,01.
- 4) Знайти мінімум цільової функції  $f(x, y)$  методом Ньютона з точністю до 0,01.
- 5\*) Знайти мінімум цільової функції  $f(x, y)$  квазіньютонівськими методами: Девідона – Флетчера – Пауелла та Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шенно з точністю до 0,01.
- 6) Виконати порівняння результатів обчислень методами із завдань 2 – 5.

### Варіанти завдань:

- 1)  $f(x, y) = (x - y - 4)^4 + (x + y - 1)^2$ ,
- 2)  $f(x, y) = (x - y + 2)^4 + (x + y - 3)^2$ ,
- 3)  $f(x, y) = (x - 2y + 3)^2 + \left( \frac{x+2}{y+4} - 3 \right)^2$ ,
- 4)  $f(x, y) = (4x + y + 2)^2 + \left( \frac{y+1}{x-3} + 2 \right)^2$ ,
- 5)  $f(x, y) = (xy + 5)^2 + (4x + y + 3)^2$ ,
- 6)  $f(x, y) = (x + 3y - 2)^2 + (2x - y^2 - 4)^2$ ,
- 7)  $f(x, y) = (xy + 4x + 1)^2 + (x - y - 2)^2$ ,
- 8)  $f(x, y) = (x^2 - y + 5)^2 + 0,5 \cdot (x + y - 5)^2$ ,

- 9)  $f(x, y) = (x - y - 5)^4 + (x + y + 3)^2$ ,
- 10)  $f(x, y) = (x - y + 5)^2 + \left(\frac{2y}{x-4} + 5\right)^2$ ,
- 11)  $f(x, y) = (2x - y - 5)^2 + \left(\frac{3x}{y+5} + 2\right)^2$ ,
- 12)  $f(x, y) = (2x - y - 4)^4 + (2x + y + 5)^2$ ,
- 13)  $f(x, y) = (x^2 - 2y - 3)^2 + (x - 2y - 3)^2$ ,
- 14)  $f(x, y) = (x - 2y^2 + 6)^2 + (x + y - 3)^2$ ,
- 15)  $f(x, y) = (xy - x + 4)^2 + (2x + 5y - 3)^2$ ,
- 16)  $f(x, y) = (x - y - 3)^4 + (x + 0,5 \cdot y + 2)^2$ ,
- 17)  $f(x, y) = (x + y + 5)^2 + \left(\frac{y+5}{x+2} - 3\right)^2$ ,
- 18)  $f(x, y) = (2x - y - 5)^4 + (x + y - 1)^2$ ,
- 19)  $f(x, y) = (x - 2y^2 + 5)^2 + (x - y - 5)^2$ ,
- 20)  $f(x, y) = (x + 3y - 2)^2 + (4 - xy)^2$ .

## Лабораторна робота 12

### Наближені методи розв'язування задач лінійного програмування

#### Контрольні запитання:

- 12.1 В чому полягає задача лінійного програмування (ЗЛП)?
- 12.2 Що таке цільова функція (критерій оптимальності) в ЗЛП?
- 12.3 Що таке оптимальний розв'язок системи обмежень в ЗЛП?
- 12.4 Наведіть алгоритм графічного методу розв'язування ЗЛП.
- 12.5 Наведіть алгоритм симплекс – методу розв'язування ЗЛП.
- 12.6 В чому полягає критерій оптимальності ЗЛП?
- 12.7 Що таке модифікований симплекс – метод (М-метод)?
- 12.8 Що таке двоїста задача?
- 12.9 Сформулюйте першу теорему двоїстості?
- 12.10 В чому полягає двоїстий критерій оптимальності?
- 12.11 Наведіть алгоритм двоїстого симплекс – методу.
- 12.12 Яка економічна інтерпретація двоїстої задачі?

#### Завдання лабораторної роботи:

- 1) Обрати задачу лінійного програмування згідно з власним варіантом.

- 2) Розв'язати першу ЗЛП (пункт а) графічним методом і знайти найбільше та найменше значення цільової функції  $F(x_1, x_2)$ .
- 3) Розв'язати другу ЗЛП (пункт б) симплекс – методом.
- 4) Для другої ЗЛП записати відповідну їй двоїсту задачу та розв'язати останню симплекс – методом.

### Варіанти завдань:

$$\begin{aligned}
 &F(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2, \\
 1) \text{ а)} \quad &\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -4, \\ -2x_1 + x_2 \geq -5, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq -10, \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &F(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 - > \max, \\
 б) \quad &\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 + 15x_3 \leq 1170, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 \leq 1053, \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 325, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &F(x_1, x_2) = -5x_1 + 2x_2, \\
 2) \text{ а)} \quad &\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 8, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + 3x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq -3, \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 - 3x_3 - > \min,$$

$$6) \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ 3x_1 + x_3 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = -3x_1 - x_2,$$

$$3) \text{ a) } \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 2x_2 \geq -4, \\ 2x_1 - x_2 \geq -6, \\ -4x_1 - 3x_2 \geq -10, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 - > \max,$$

$$6) \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 160, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 240, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2,$$

$$4) \text{ a) } \begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq -5, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 - 3x_3 - > \min,$$

$$6) \begin{cases} 3x_1 + x_3 \leq 15, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -6, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = -x_1 - x_2,$$

$$5) \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ 3x_1 - x_2 \leq 2, \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \geq -6, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - > \max,$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 80, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 240, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = -x_1 + 3x_2,$$

$$6) \text{ a) } \begin{cases} 5x_1 - x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 \geq -2, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = 27x_1 + 70x_2 + 2x_3 - > \min,$$

$$6) \begin{cases} -x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ 5x_1 + 13x_2 - x_3 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = 10x_1 - x_2,$$

$$7) \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ 2x_1 - x_2 \leq 3, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq -5, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 7x_2 + 6x_3 - > \max,$$

$$6) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq -2, \\ -3x_1 - 4x_2 + 4x_3 \leq 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = -x_1 + 4x_2,$$

$$8) \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5, \\ 3x_1 - x_2 \leq 9, \\ -x_1 - 2x_2 \leq 10, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = 25x_1 + 20x_2 + 18x_3 - > \min,$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \geq 5, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 9, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = x_1 + 6x_2,$$

$$9) \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - x_2 \leq 3, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \geq -2, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 5x_2 + 9x_3 - > \max,$$

$$6) \begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 20, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 25, \\ 4x_1 + 3x_3 \leq 18, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2,$$

$$10) \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq -5, \\ x_1 - 2x_2 \geq -8, \\ -2x_1 + x_2 \geq -5, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - > \min,$$

$$6) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 3, \\ x_1 + 3x_3 \geq 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2,$$

$$11) \text{ a) } \begin{cases} -x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ x_1 - 2x_2 \geq -3, \\ -2x_1 + 3x_2 \geq -5, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - > \max,$$

$$6) \begin{cases} 10x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 200, \\ 5x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 300, \\ 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 400, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2,$$

$$12) \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 9, \\ -x_1 - 3x_2 \leq 5, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 10, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + 6x_2 + 6x_3 - > \max,$$

$$6) \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 325, \\ 10x_1 + 15x_2 + 9x_3 \leq 1170, \\ 3x_1 + 9x_2 + 3x_3 \leq 1053, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2,$$

$$13) \text{ a) } \begin{cases} x_1 - x_2 \geq -6, \\ -2x_1 + x_2 \geq -3, \\ x_1 + x_2 \geq -7, \\ -x_1 - 2x_2 \geq -3, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 - > \max,$$

$$6) \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 325, \\ 15x_1 + 9x_2 + 10x_3 \leq 1170, \\ 9x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 1053, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = -x_1 + 4x_2,$$

$$14) \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 2x_1 - x_2 \leq 5, \\ -3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq -2, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - > \max,$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 80, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 240, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2,$$

$$15) \text{ a) } \begin{cases} -3x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 - 3x_2 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 8, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 6x_2 + 7x_3 - \rightarrow \max,$$

$$6) \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - 4x_3 \leq 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = -4x_1 + x_2,$$

$$16) \text{ a) } \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ -x_1 - 2x_2 \leq 5, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + 3x_3 - \rightarrow \max,$$

$$6) \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ 3x_2 + x_3 \leq 5, \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq -2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = -4x_1 - 3x_2,$$

$$17) \text{ a) } \begin{cases} 6x_1 + x_2 \leq 6, \\ -x_1 - x_2 \leq 2, \\ 4x_1 - x_2 \leq 5, \\ -2x_1 + x_2 \leq 5, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \rightarrow \max,$$

$$6) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 80, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 100, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 240, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2,$$

$$18) \text{ a) } \begin{cases} -x_1 - x_2 \leq 5, \\ 3x_1 - x_2 \leq -3, \\ x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ -2x_1 + x_2 \geq 8, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \max,$$

$$6) \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 8, \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = -2x_1 - 3x_2,$$

$$19) \text{ a) } \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + x_2 \geq -5, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max,$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 6x_3 \leq 10, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = -2x_1 + 7x_2,$$

$$20) \text{ a) } \begin{cases} 6x_1 - x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ -2x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \geq -3, \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 - x_3 - > \min,$$

$$б) \begin{cases} -2x_1 + 6x_2 - 7x_3 \geq 10, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

## Лабораторна робота 13

### Наближені методи розв'язування задач нелінійного програмування

#### Контрольні запитання:

- 13.1 В чому полягає задача нелінійного програмування (ЗНП)?
- 13.2 Що таке допустимий та оптимальний розв'язки ЗНП?
- 13.3 Яка точка називається внутрішньою та граничною для множини допустимих розв'язків ЗНП?
- 13.4 Наведіть алгоритм методу множників Лагранжа та для яких задач він використовується.
- 13.5 Які умови є необхідними та достатніми для умовного екстремуму функції багатьох змінних?
- 13.6 Яка геометрична інтерпретація методу множників Лагранжа?
- 13.7 В чому полягає задача опуклого програмування?
- 13.8 Яка функція називається опуклою?
- 13.9 Чи співпадає локальний мінімум з глобальним в задачі опуклого програмування?
- 13.10 Що таке умова Слейтера (достатня умова регулярності)?
- 13.11 Що таке сідлова точка функції Лагранжа для задачі опуклого програмування?
- 13.12 В чому полягає теорема Каруша – Куна – Таккера?
- 13.13 Який вигляд мають умови Каруша – Куна – Таккера (умови визначення сідлової точки)?
- 13.14 В чому полягає задача квадратичного програмування?

- 13.15 Що таке квадратична форма функції багатьох змінних?
- 13.16 Що таке додатньо визначена та додатньо напіввизначена квадратична форма?
- 13.17 В чому полягає критерій Сільвестра?
- 13.18 Які достатні умови мінімуму квадратичної форми?
- 13.19 Які наближені методи використовуються для розв'язування ЗНП?
- 13.20 Наведіть алгоритм модифікованого методу Хука – Дживса.
- 13.21 Який зміст методу можливих напрямків?
- 13.22 Який зміст методу умовного градієнта (метод Франка – Вульфа)?
- 13.23 Наведіть алгоритм методу проекції градієнта.
- 13.24 Наведіть алгоритм методу бар'єрних функцій (метод внутрішніх штрафів).
- 13.25 Наведіть алгоритм методу штрафних функцій (метод зовнішніх штрафів).
- 13.26 Що таке послідовність штрафних функцій на деякій множині?
- 13.27 Які є приклади штрафних функцій?
- 13.28 Наведіть алгоритм методу Фіакко – Маккорміка.

### **Завдання лабораторної роботи:**

- 1) Обрати задачу нелінійного програмування згідно з власним варіантом.
- 2) За допомогою методу множників Лагранжа отримати розв'язок першої ЗНП (пункт а) та встановити тип екстремуму.
- 3) Розв'язати другу ЗНП (пункт б) аналітично методом Каруша – Куна – Таккера.

- 4) Розв'язати другу ЗНП чисельно методом умовного градієнта.
- 5\*) Розв'язати другу ЗНП чисельно методом штрафних функцій.
- 6) Порівняти результати розв'язування завдань 3 – 5.

### Варіанти завдань:

$$f(\vec{x}) = 6x_1^2 + x_1x_2 - 3x_1x_3 + 2x_2^2 - 4x_3^2 - > extr,$$

$$1) \text{ а) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 6, \\ 7x_1 + x_2 + x_3 = -6, \end{cases}$$

$$f(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 12x_1 - 16x_2 - > min,$$

$$б) \begin{cases} x_1 + x_2 - 6 \leq 0, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \end{cases}$$

$$f(\vec{x}) = 2x_1^2 + 4x_2 + 5x_1x_3 - x_2^2 + 3x_3^2 + x_2x_3 - > extr,$$

$$2) \text{ а) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ 4x_1 + x_2 = 5, \end{cases}$$

$$f(\vec{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2 - > min,$$

$$б) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 24 \leq 0, \\ x_1 + x_2 - 6 \leq 0, \end{cases}$$

$$f(\vec{x}) = 4x_1 + 5x_1x_2 - 2x_2^2 + 3x_1x_3 - 2x_3^2 - > extr,$$

$$3) \text{ а) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 8, \end{cases}$$

- $$f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 - > \min,$$
- 6) 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 8 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 - 10 \leq 0, \end{cases}$$
- $$f(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 - > \text{extr},$$
- 4) a) 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 8, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$
- $$f(\vec{x}) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 18x_1 - 16x_2 - > \min,$$
- 6) 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 10 \leq 0, \\ x_1 + x_2 - 7 \leq 0, \end{cases}$$
- $$f(\vec{x}) = 3x_1^2 + 5x_1 + x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 - 4x_3^2 - > \text{extr},$$
- 5) a) 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 16, \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 9, \end{cases}$$
- $$f(\vec{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 14x_1 - 18x_2 - > \min,$$
- 6) 
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 15 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 - 12 \leq 0, \end{cases}$$
- $$f(\vec{x}) = x_1^2 - x_1x_3 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + x_2x_3 + 5 - > \text{extr},$$
- 6) a) 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -10, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 7, \end{cases}$$
- $$f(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 - 10x_1 - 18x_2 - > \min,$$
- 6) 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \end{cases}$$

- 7) а)  $f(\vec{x}) = 6x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 + x_2x_3 + 4x_3^2 - > \text{extr},$   

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 = 8, \end{cases}$$
- б)  $f(\vec{x}) = 4x_1^2 + x_2^2 - 16x_1 - 4x_2 - > \min,$   

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \end{cases}$$
- 8) а)  $f(\vec{x}) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 + x_2x_3 - 3x_3^2 - > \text{extr},$   

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 16, \end{cases}$$
- б)  $f(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 - > \min,$   

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \end{cases}$$
- 9) а)  $f(\vec{x}) = 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - > \text{extr},$   

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -2, \end{cases}$$
- б)  $f(\vec{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 - > \min,$   

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases}$$
- 10) а)  $f(\vec{x}) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_2x_3 - x_3^2 - > \text{extr},$   

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 = 12, \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 = -8, \end{cases}$$

- $f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 - 14x_2 - > \min,$   
 6)  $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \end{cases}$   
 $f(\vec{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 - x_2x_3 - 4x_3^2 - > extr,$   
 11) a)  $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 16, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 22, \end{cases}$   
 $f(\vec{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 15x_1 - 12x_2 - > \min,$   
 6)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 9, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \end{cases}$   
 $f(\vec{x}) = 4x_1^2 + x_1 + 5x_2^2 + x_1x_3 - 4x_3^2 + x_2x_3 - > extr,$   
 12) a)  $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = -6, \end{cases}$   
 $f(\vec{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 10x_1 - 8x_2 - > \min,$   
 6)  $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$   
 $f(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - x_2x_3 + 3x_3^2 - > extr,$   
 13) a)  $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -6, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 8, \end{cases}$   
 $f(\vec{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 6x_2 - > \min,$   
 6)  $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7, \\ 2x_1 - x_2 \leq 4, \end{cases}$

- 14) a)  $f(\vec{x}) = 2x_1^2 + x_2x_3 + x_2^2 - x_2x_3 - 3x_3^2 - > extr,$   

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 8, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 16, \end{cases}$$
- b)  $f(\vec{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2 - > min,$   

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \end{cases}$$
- 15) a)  $f(\vec{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_2x_3 + x_3^2 - > extr,$   

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 15, \\ 4x_2 + x_3 = 8, \end{cases}$$
- b)  $f(\vec{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 12x_1 - 15x_2 - > min,$   

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases}$$
- 16) a)  $f(\vec{x}) = 6x_1^2 + 5x_1x_3 + 3x_2^2 + x_2x_3 - 4x_3^2 - > extr,$   

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -8, \\ 4x_2 + 5x_3 = 18, \end{cases}$$
- b)  $f(\vec{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 18x_1 - 14x_2 - > min,$   

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \end{cases}$$
- 17) a)  $f(\vec{x}) = 3x_1^2 + x_1x_3 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 3x_3^2 - > extr,$   

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 16, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 20, \end{cases}$$

- $f(\vec{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 10x_2 - > \min,$   
 6)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \end{cases}$   
 $f(\vec{x}) = 2x_1^2 + x_1x_3 - 4x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 - > extr,$   
 18) a)  $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -12, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 18, \end{cases}$   
 $f(\vec{x}) = 4x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 4x_2 - > \min,$   
 6)  $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \end{cases}$   
 $f(\vec{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3 - > extr,$   
 19) a)  $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \end{cases}$   
 $f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 6x_2 - > \min,$   
 6)  $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \end{cases}$   
 $f(\vec{x}) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_2x_3 - 4x_3^2 - > extr,$   
 20) a)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4, \end{cases}$   
 $f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 - > \min,$   
 6)  $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 1. \end{cases}$

## Лабораторна робота 14

### Наближені методи інтегрування звичайних диференціальних рівнянь

#### Контрольні запитання:

- 14.1 Що таке звичайне диференціальне рівняння (ЗДР)?
- 14.2 В чому полягає задача Коші для ЗДР 1-го та старших порядків?
- 14.3 Яка система ЗДР називається нормальною?
- 14.4 Що таке локальна похибка розв'язку задачі Коші?
- 14.5 Що таке збіжність в точці та збіжність на відрітку чисельного методу розв'язування ЗДР?
- 14.6 Що таке порядок точності чисельного методу розв'язування ЗДР?
- 14.7 Наведіть алгоритм чисельного методу Ейлера. Чому дорівнює локальна похибка цього методу та який його порядок точності?
- 14.8 Наведіть алгоритм модифікованого методу Ейлера (метод Ейлера – Коші, варіант методу Рунге – Кутти 2-го порядку точності).
- 14.9 Який зміст неявного методу Ейлера? Яка в нього локальна похибка та порядок точності?
- 14.10 Який вигляд має рекурентна формула методу Рунге – Кутти порядку точності  $p$  ?
- 14.11 Наведіть алгоритм методу Рунге – Кутти 2-го порядку точності (  $p = 2$  ).
- 14.12 Наведіть алгоритм методу Хойна (варіант методу Рунге – Кутти 2-го порядку точності).
- 14.13 Наведіть алгоритм найпоширенішої модифікації методу Рунге – Кутти 4-го порядку точності.

- 14.14 Наведіть алгоритми методів Рунге – Кутти з адаптивним кроком.
- 14.15 Який зміст методу Рунге – Кутти – Фелберга? Що таке формули Фелберга?
- 14.16 Що таке формули Кеша – Карпа?
- 14.17 В чому полягають формули Кутти – Мерсона?
- 14.18 Який вигляд у загальному випадку має лінійний m-кроковий різницевий метод зі сталим кроком?
- 14.19 Який вигляд має рекурентна формула методів Адамса?
- 14.20 Наведіть алгоритми явних методів Адамса (методи Адамса – Башфорта) 2-го та 4-го порядків точності.
- 14.21 Наведіть алгоритми неявних методів Адамса (методи Адамса – Мултона) 2-го та 4-го порядків точності.
- 14.22 Який зміст методів прогнозу – корекції?
- 14.23 Який зміст неявного методу Гіра?

### **Завдання лабораторної роботи:**

- 1) Обрати задачі Коші згідно з власним варіантом.
- 2) Розв'язати одновимірну задачу Коші явним та неявним методом Ейлера з похибкою не більше 1%.
- 3) Розв'язати одновимірну задачу Коші методом Рунге – Кутти 4-го порядку точності з похибкою не більше 1%.
- 4) Розв'язати одновимірну задачу Коші явним методом Адамса 4-го порядку з похибкою не більше 1%.
- 5\*) Розв'язати одновимірну задачу Коші методом Гіра 4-го порядку точності з похибкою не більше 1%.
- 6) Виконати порівняння результатів із завдань 2 – 5.
- 7) Розв'язати двовимірну задачу Коші явним методом Ейлера та методом Рунге – Кутти 4-го порядку точності. Оцінити похибку отриманого розв'язку.

### **Варіанти завдань:**

$$\frac{dy}{dt} = y(1-t),$$

1) а)  $y(0) = 1,$   
 $t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = t^2 - 3y,$$

2) а)  $y(0) = 1,$   
 $t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = ty - t,$$

3) а)  $y(0) = 0,$   
 $t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = 4t^2 - y,$$

4) а)  $y(0) = 0,$   
 $t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = \cos(2t) + y,$$

5) а)  $y(0) = -0,5,$   
 $t \in [0;1],$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y}{2}, \\ \frac{dy}{dt} = -x, \end{cases}$$

$x(0) = 1, y(0) = 1, t \in [0;1],$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = xy, \end{cases}$$

$x(0) = 1, y(0) = 1, t \in [0;1],$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \end{cases}$$

$x(0) = 1, y(0) = 0, t \in [0;1],$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -t, \end{cases}$$

$x(0) = 0, y(0) = 1, t \in [0;1],$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x, \\ \frac{dy}{dt} = t, \end{cases}$$

$x(0) = 1, y(0) = 0, t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = \sin(t-1) + y,$$

6) а)  $y(0) = 0,5,$   
 $t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = \sin t - y,$$

7) а)  $y(0) = 0,$   
 $t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = \cos t - y,$$

8) а)  $y(0) = 0,$   
 $t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = t\sqrt{y},$$

9) а)  $y(0) = 1,$   
 $t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = ty,$$

10) а)  $y(0) = 1,$   
 $t \in [0;1],$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = t, \end{cases}$$

б)  $x(0) = 1, y(0) = 0, t \in [0;1],$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x, \\ \frac{dy}{dt} = -t^2, \end{cases}$$

б)  $x(0) = 0, y(0) = 1, t \in [0;1],$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + t, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2t, \end{cases}$$

б)  $x(0) = 0, y(0) = 0,5, t \in [0;1],$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + t^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - t^2, \end{cases}$$

б)  $x(0) = 0,5, y(0) = -1, t \in [0;1],$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = t - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - t, \end{cases}$$

б)  $x(0) = 0, y(0) = 1, t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = -y^2,$$

11) a)  $y(0) = 1,$   
 $t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = -ty^2,$$

12) a)  $y(0) = 1,$   
 $t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = t^2 y,$$

13) a)  $y(0) = 1,$   
 $t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = y + e^t,$$

14) a)  $y(0) = 0,$   
 $t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = e^t - y,$$

15) a)  $y(0) = 0,$   
 $t \in [0;1],$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = x + t, \end{cases}$$

б)  $x(0) = -1, y(0) = 0, t \in [0;1],$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = x + t, \end{cases}$$

б)  $x(0) = -1, y(0) = 0, t \in [0;1],$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + t, \end{cases}$$

б)  $x(0) = 1, y(0) = 0, t \in [0;1],$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = x + t, \end{cases}$$

б)  $x(0) = 1, y(0) = 0, t \in [0;1],$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - e^t, \\ \frac{dy}{dt} = t - x, \end{cases}$$

б)  $x(0) = 1, y(0) = 0, t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{t}y^2,$$

**16) a)**  $y(0) = 1,$   
 $t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = t^2 \sqrt{y},$$

**17) a)**  $y(0) = 1,$   
 $t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{t}y,$$

**18) a)**  $y(0) = 1,$   
 $t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = -t^2 y^2,$$

**19) a)**  $y(0) = 1,$   
 $t \in [0;1],$

$$\frac{dy}{dt} = -t^3 y,$$

**20) a)**  $y(0) = 1,$   
 $t \in [0;1],$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = t - x, \end{cases}$$

$x(0) = -1, y(0) = -1, t \in [0;1],$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = t + x, \end{cases}$$

$x(0) = -1, y(0) = 0, t \in [0;1],$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + t, \end{cases}$$

$x(0) = 1, y(0) = 0, t \in [0;1],$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - t, \\ \frac{dy}{dt} = t - x, \end{cases}$$

$x(0) = 1, y(0) = 1, t \in [0;1],$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases}$$

$x(0) = -1, y(0) = -1, t \in [0;1].$

## Лабораторна робота 15

### Наближені методи розв'язування інтегральних рівнянь

#### Контрольні запитання:

- 15.1 Який вигляд має інтегральне рівняння в загальному випадку?
- 15.2 Який вигляд мають лінійні інтегральні рівняння Фредгольма 1-го та 2-го роду?
- 15.3 Який вигляд мають лінійні інтегральні рівняння Вольтерри 1-го та 2-го роду?
- 15.4 Наведіть алгоритм методу квадратур для розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду.
- 15.5 Наведіть алгоритм методу розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду за допомогою резольвенти.
- 15.6 Наведіть алгоритм методу послідовних наближень (метод ітерованих ядер).
- 15.7 Який зміст методу моментів (Бубнова – Галеркіна)?
- 15.8 Який зміст методу колокацій?
- 15.9 Які особливості розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду?
- 15.10 Наведіть алгоритм методу регуляризації Тихонова для розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду.
- 15.11 Наведіть алгоритм аналітичного методу послідовних наближень (метод ітерацій Неймана, метод простих ітерацій) для розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду.
- 15.12 Яким чином можна звести інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду до часткового випадку інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду?

- 15.13** Який зв'язок між задачею Коші для ЗДР та інтегральними рівняннями Вольтерри?
- 15.14** Наведіть алгоритм методу розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду за допомогою резольвенти.
- 15.15** Наведіть алгоритми чисельних методів розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду: квадратур, Ністрема, колокацій, прогонки.
- 15.16** Яким чином інтегральне рівняння Вольтерри 1-го роду зводиться до інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду?
- 15.17** Які особливості застосування аналітичних методів до розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри 1-го роду?
- 15.18** Наведіть алгоритми чисельних методів без регуляризації розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри 1-го роду: квадратур, Ністрема, прогонки.

### **Завдання лабораторної роботи:**

- 1)** Обрати інтегральні рівняння згідно з власним варіантом.
- 2)** Розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду (пункт а) методом квадратур.
- 3)** Розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду методом моментів.
- 4)** Розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду методом колокацій.
- 5\*)** Розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду методом послідовних наближень.
- 6)** Виконати порівняння результатів, отриманих в завданнях 2 – 5.
- 7)** Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду (пункт б) методом послідовних наближень.
- 8)** Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду методом квадратур.

- 9\*) Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду методом знаходження резольвенти.
- 10) Виконати порівняння результатів, отриманих в завданнях 7 – 9.

### Варіанти завдань:

$$1) \text{ а) } \varphi(x) = \sin x + \int_0^1 (x+t)\varphi(t)dt,$$

$$\text{б) } \varphi(x) = \sin x + \int_0^x xt\varphi(t)dt,$$

$$2) \text{ а) } \varphi(x) = x^2 + \int_0^1 (x^2t + xt^2)\varphi(t)dt,$$

$$\text{б) } \varphi(x) = e^x + \int_0^x (x^2 + t)\varphi(t)dt,$$

$$3) \text{ а) } \varphi(x) = e^x + \int_0^1 (\cos x \sin t + xt)\varphi(t)dt,$$

$$\text{б) } \varphi(x) = \cos x + \int_0^x (x + \sin t)\varphi(t)dt,$$

$$4) \text{ а) } \varphi(x) = 1 + \int_0^1 (1+x)(1+t)\varphi(t)dt,$$

$$\text{б) } \varphi(x) = x^2 + \int_0^x (xt^2 + x^2t)\varphi(t)dt,$$

$$5) \text{ a) } \varphi(x) = x + \int_0^1 xt^2 \varphi(t) dt,$$

$$6) \text{ } \varphi(x) = x + \int_0^x (x \cos t + \sin x) \varphi(t) dt,$$

$$6) \text{ a) } \varphi(x) = \ln(1+x) + \int_0^1 (x^2 + 1)(t^2 + 1) \varphi(t) dt,$$

$$6) \text{ } \varphi(x) = \ln(1+x) + \int_0^x (1+xt) \varphi(t) dt,$$

$$7) \text{ a) } \varphi(x) = \cos x + \int_0^1 (x^3 + \sin t) \varphi(t) dt,$$

$$6) \text{ } \varphi(x) = x^3 + \int_0^x (x^2 + t^2) \varphi(t) dt,$$

$$8) \text{ a) } \varphi(x) = x^2 + \int_0^1 (x+1)(t^2 - 1) \varphi(t) dt,$$

$$6) \text{ } \varphi(x) = 1 + \int_0^x (e^x + t) \varphi(t) dt,$$

$$9) \text{ a) } \varphi(x) = x + \int_0^1 (\sqrt{x} + t) \varphi(t) dt,$$

$$6) \text{ } \varphi(x) = \sqrt{x} + \int_0^x \sin x \cos t \varphi(t) dt,$$

$$10) \text{ a) } \varphi(x) = x^3 + \int_0^1 (x-t)^2 \varphi(t) dt,$$

$$6) \varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x (x^2 \cos t + t) \varphi(t) dt,$$

$$11) a) \varphi(x) = 1 + \int_0^1 (x+t) \varphi(t) dt,$$

$$6) \varphi(x) = \cos x + \int_0^x (x+1)(t^2+1) \varphi(t) dt,$$

$$12) a) \varphi(x) = x^2 + \int_0^1 (x^2 + t^2) \varphi(t) dt,$$

$$6) \varphi(x) = x^2 + \int_0^x (x+t)(x-t) \varphi(t) dt,$$

$$13) a) \varphi(x) = \sin x + \int_0^1 (\cos x + \cos t) \varphi(t) dt,$$

$$6) \varphi(x) = 1 + \int_0^x (x^2 \sin t + e^t) \varphi(t) dt,$$

$$14) a) \varphi(x) = e^x + \int_0^1 (xt + x + t) \varphi(t) dt,$$

$$6) \varphi(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \int_0^x (x + \ln(1+t)) \varphi(t) dt,$$

$$15) a) \varphi(x) = \ln(1+x) + \int_0^1 \ln(1+x) \ln(1+t) \varphi(t) dt,$$

$$6) \varphi(x) = \cos^2 x + \int_0^x (x^2 + t^2)^2 \varphi(t) dt,$$

$$16) \text{ a) } \varphi(x) = x + \int_0^1 (x^2 - t^2) \varphi(t) dt,$$

$$\text{б) } \varphi(x) = x + \int_0^x (x^2 - 2xt + t^2) \varphi(t) dt,$$

$$17) \text{ a) } \varphi(x) = \cos x + \int_0^1 (x \cos t + \sin x) \varphi(t) dt,$$

$$\text{б) } \varphi(x) = e^{-x} + \int_0^x (\cos x + t^2) \varphi(t) dt,$$

$$18) \text{ a) } \varphi(x) = 1 + \int_0^1 (1+x)(1-t) \varphi(t) dt,$$

$$\text{б) } \varphi(x) = x^2 + \int_0^x (x^3 + \cos t) \varphi(t) dt,$$

$$19) \text{ a) } \varphi(x) = x^2 + \int_0^1 (x+1)^2 (t^2 + 1) \varphi(t) dt,$$

$$\text{б) } \varphi(x) = \ln(1+x^2) + \int_0^x (x^2 t + x \cos t) \varphi(t) dt,$$

$$20) \text{ a) } \varphi(x) = x + \int_0^1 (x^3 + \sqrt{t}) \varphi(t) dt,$$

$$\text{б) } \varphi(x) = \cos x + \int_0^x (x \cos t + x^2 \sin t) \varphi(t) dt.$$

## Список джерел

1. **Гаврилюк І.П., Макаров В.Л.** Методи обчислень. Ч. 1. – Київ: Вища школа, 1995. – 367 с.
2. **Гаврилюк І.П., Макаров В.Л.** Методи обчислень. Ч. 2. – Київ: Вища школа, 1995. – 431 с.
3. **Демиденко М.А.** Математичне програмування: навч. посібник. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2005. – 110 с.
4. **Довгий Б.П.** Методи обчислень: лекції для студентів механіко-математичного ф-ту. – Київ, 2021. – 81 с.
5. **Довгий Б.П., Ловейкін А.В.** Методичні вказівки і учбові завдання для аудиторної та самостійної роботи з навчальної дисципліни “Методи обчислень”. – Київ, 2019. – 84 с.
6. **Довгий Б.П., Ловейкін А.В.** Учбові завдання для аудиторної та самостійної роботи з навчальної дисципліни “Методи обчислень” для студентів механіко-математичного ф-ту. – Київ, 2020. – 122 с.
7. **Дякон В.М., Ковальов Л.Є.** Математичне програмування: навчальний посібник / за заг. ред. В.М. Міхайленка. – 3-є вид., випр. і допов. – Київ: Вид-во Європейського університету, 2007. – 497 с.
8. **Костюшко І.А., Любашенко Н.Д., Третиник В.В.** Методи обчислень: підручник. – Київ: КПП ім. Ігоря Сікорського, Вид-во “Політехніка”, 2021. – 243 с.
9. **Моклячук М.П., Ямненко Р.Є.** Дослідження операцій: навч. посібник. – Київ: ВПЦ “Київський університет”, 2018. – 282 с.

10. **Попов В.В.** Методи обчислень. Частина І: конспект лекцій для студентів механіко-математичного факультету. – Київ, 2009. – 112 с.
11. **Попов В.В.** Методи обчислень. Частина ІІ: конспект лекцій для студентів механіко-математичного факультету. – Київ, 2009. – 99 с.
12. **Попов В.В.** Методи обчислень: конспект лекцій для студентів механіко-математичного факультету. – Київ: ВПЦ “Київський університет”, 2012. – 303 с.
13. **Прокопенко Ю.В., Татарчук Д.Д., Казміренко В.А.** Обчислювальна математика: навчальний посібник. – Київ : Політехніка, 2013. – 224 с.
14. **Atkinson K.E.** An Introduction to Numerical Analysis. – 2nd ed. – New York: Wiley, 1989. – 712 p.
15. **Burden R.L., Faires J.D., Burden A.M.** Numerical Analysis. – 10th ed. – Boston: Cengage Learning, 2015. – 872 p.
16. **Chapra S.C., Canale R.P.** Numerical Methods for Engineers. – 8th ed. – New York: McGraw-Hill Education, 2020. – 960 p.
17. **Isaacson E., Keller H.B.** Analysis of Numerical Methods. – New York: Dover Publications, 1994. – 541 p.
18. **Quarteroni A., Sacco R., Saleri F.** Numerical Mathematics. – 2nd ed. – New York: Springer, 2007. – 655 p.
19. **Sauer T.** Numerical Analysis. – 3rd ed. – Boston: Pearson, 2017. – 816 p.
20. **Stoer J., Bulirsch R.** Introduction to Numerical Analysis. – 3rd ed. – New York: Springer, 2002. – 744 p.