КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник. Частина 1

Г.М. Зражевський

Київ 2024

УДК 514.742.2+514.742/531+514.742/532+514.742/533
ББК 22.151.51+22.2я73

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол № 11 від 15 лютого 2024 року)

В посібнику викладаються теоретичні відомості курсу "Аналітична механіка". Посібник містить приклади та вправи для самостійного опрацювання. Головна мета посібника - спростити оволодіння основними математичними підходами та формалізмами Лагранжевої та Гамільтонової механіки як невід'ємними розділами прикладної математики.

Навчальний посібник призначений для студентів математичних та механічних спеціальностей класичних університетів, аспірантів та викладачів спеціальностей, споріднених з фундаментальною та прикладною математикою.

Передмова

Навчальний посібник підготовлено на основі курсів ”Теоретична механіка: динаміка та аналітична механіка” (ДВС 5.05.02, ОП ”Математика”) та ”Теоретична механіка: динаміка, аналітична механіка, механіка та прикладні задачі” (ОК 12, ОП ”Комп’ютерна механіка”), що викладаються на механіко-математичному факультеті в межах першого освітнього рівня (бакалавр).

Посібник має на меті спростити опанування основною методологією Лагранжевої та Гамільтонової класичної механіки Ньютона студентами математичних спеціальностей, що вже володіють основними розділами математики, такими, як ”Диференціальна геометрія”, ”Лінійна алгебра”, ”Математичний аналіз”, ”Теорія звичайних диференціальних рівнянь”. Таким чином, читач може універсалізувати вже отримані дещо розрізнені (через традиційність методологій різних дисциплін) знання та підходи до розв’язання багатопланових задач та проблем, що ставляться в прикладній математиці. Посібник не містить елементарних математичних відомостей, які, як вважається, вже знайомі читачу з попереднього досвіду навчання на першому освітньому рівні.

В Посібник не включені розрахункові задачі. Вся увага приділена теоретичному аналізу та розв’язанню проблем та задач, що потребують формального математичного підходу та використання знань та навичок, отриманих під час проходження основних математичних курсів. Хоча кожний розділ Посібника починається з викладення теоретичного матеріалу, головна увага зосереджена на прикладах, в яких демонструється застосування математичних методів при розв’язанні теоретичних прикладних задач. Серед розглянутих задач є як прості, класичні задачі, так і достатньо комплексні, що можуть покласти початок нових наукових досліджень.

Всі задачі, розглянуті в Посібнику мають строге математичне доведення чи обґрунтування, що вимагається також і при самостійному розв’язанні запропонованих задач. Водночас автор намагався уникнути надмірної формалізації, узагальнення та використання математичних понять, які хоча і корисні для дослідників, але виходять за мінімально достатні межі теорії, необхідної для постановки та розв'язання більшості прикладних задач та не включені до освітньої програми.

Вправи, що включені до Посібника, мають на меті не лише закріплення знань та методології, а також розвинення творчого математичного мислення, оскільки не всі вони можуть бути виконані по аналогії з Прикладами.

Посібник призначений для студентів першого рівня освіти (магістрів), аспірантів та викладачів спеціальностей, споріднених з прикладною математикою. Його частини можуть бути використані при розробці нових теоретичних курсів, формулюванні завдань для кваліфікаційних робіт здобувачів освіти.

1. Основні поняття та означення.

1.1. Поняття вільних та невільних систем. В'язі. Класифікація в'язей та матеріальних систем.

Означення. Геометричні чи кінематичні обмеження, накладені на розташування чи рух в просторі матеріальних систем, називаються **в'язями**.

Означення. Матеріальні системи з накладеними в'язями називаються **невільними системами**. Матеріальні системи, на положення та рух яких не накладено в'язей, називаються **вільними системами**.

Означення. **Аналітичним виразом в'язі** називається рівняння чи нерівність виду, $f(t,\boldsymbol{r}_\nu,\dot{\boldsymbol{r}}_\nu)=0$, $f(t,\boldsymbol{r}_\nu,\dot{\boldsymbol{r}}_\nu)\geq 0$, які повинні задовольнятись для всіх точок матеріальної системи. M_ν - точки матеріальної системи, $\boldsymbol{r}_\nu$ - радіус вектори точок , $\boldsymbol{r}_\nu$ - швидкості руху точок.

Означення. В'язь називається **двосторонньою (утримуючою)**, якщо її аналітичний вираз є рівністю та **односторонньою (не утримуючою)**, якщо її аналітичний вираз є нерівністю.

Зауваження. Надалі в більшій частині випадків розглядаються двосторонні в'язі, оскільки еволюцію системи з односторонніми в'язями можна розбити на проміжки (за часом), на кожному з яких система є або вільною, або обмеженою двосторонніми в'язями.

Означення. В'язь називається **нестаціонарною**, якщо її аналітичний вираз явно залежить від часу: $f(t,\boldsymbol{r}_\nu,\dot{\boldsymbol{r}}_\nu)=0$ та **стаціонарною**, якщо її аналітичний вираз явно не залежить від часу: $f(\boldsymbol{r}_\nu,\dot{\boldsymbol{r}}_\nu)=0$.

Означення. Невільна матеріальна система називається **реономною**, якщо , на неї накладена хоча б одна нестаціонарна в'язь, та **склерономною**, якщо всі в'язі, накладені на систему є стаціонарними.

Означення. В'язь називається **геометричною (скінченною)**, якщо вона обмежує лише положення точок матеріальної системи в просторі. Тобто аналітичний вираз в'язі не утримує швидкості руху точок, що входять в склад системи: $f=f(t,\boldsymbol{r}_\nu)$ ..

Означення. В'язь називається **кінематичною (диференціальною)**, якщо вона обмежує також швидкості руху точок матеріальної системи. Тобто аналітичний вираз в'язі утримує швидкості руху точок, що входять в склад системи: $f = f(t, \boldsymbol{r}_\nu, \dot{\boldsymbol{r}}_\nu)$.

Означення. Кінематична в'язь називається **лінійною**, якщо її аналітичний вираз є лінійною функцією швидкостей точок: $f(t, \boldsymbol{r}_\nu, \dot{\boldsymbol{r}}_\nu) \equiv \sum\limits_k l_k(t, \boldsymbol{r}_\nu)\dot{\boldsymbol{r}}_k + D(t, \boldsymbol{r}_\nu)$.

Зауваження. Надалі будуть розглядатись лише лінійні кінематичні в'язі.

Зауваження. Будемо вважати лінійні кінематичні в'язі стаціонарними в тому випадку, коли її лінійні коефіцієнти явно не залежать від часу та вільний член тотожно рівний нулю: $f(\boldsymbol{r}_\nu, \dot{\boldsymbol{r}}_\nu) \equiv \sum\limits_k l_k(\boldsymbol{r}_\nu)\dot{\boldsymbol{r}}_k$.

Означення. Невільна матеріальна система називається **неголономною**, якщо на неї накладена хоча б одна кінематична в'язь, та **голономною**, якщо на неї накладено лише геометричні в'язі.

Твердження. Кожній геометричній в'язі можна поставити у відповідність кінематичну в'язь.

Доведення. Продиференціювавши аналітичний вираз геометричної в'язі за часом та беручи до уваги, що $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t)$, отримаємо: $\dfrac{df(t, \boldsymbol{r}_\nu)}{dt} \equiv \sum\limits_k \dfrac{\partial f(t, \boldsymbol{r}_\nu)}{\partial \boldsymbol{r}_k}\dot{\boldsymbol{r}}_k + \dfrac{\partial f(t, \boldsymbol{r}_\nu)}{\partial t}$. Отже, кожній геометричній в'язі $f(t, \boldsymbol{r}_\nu) = 0$ відповідає кінематична в'язь з $l_k(t, \boldsymbol{r}_\nu) = \dfrac{\partial f(t, \boldsymbol{r}_\nu)}{\partial \boldsymbol{r}_k}$, $D(t, \boldsymbol{r}_\nu) = \dfrac{\partial f(t, \boldsymbol{r}_\nu)}{\partial t}$.

Означення. Кінематична в'язь $\sum\limits_k l_k(t, \boldsymbol{r}_\nu)\dot{\boldsymbol{r}}_k + D(t, \boldsymbol{r}_\nu) = 0$ називається **інтегровною кінематичною в'яззю**, якщо існує геометрична в'язь, якій вона відповідає. Тобто, існує така $f = f(t, \boldsymbol{r}_\nu)$, що $l_k(t, \boldsymbol{r}_\nu) = \dfrac{\partial f(t, \boldsymbol{r}_\nu)}{\partial \boldsymbol{r}_k}$, $D(t, \boldsymbol{r}_\nu) = \dfrac{\partial f(t, \boldsymbol{r}_\nu)}{\partial t}$.

Зауваження. Інтегровна кінематична в'язь відповідає одно параметричному сімейству геометричних в'язей. Дійсно, якщо покласти $l_k(t, \boldsymbol{r}_\nu) = \dfrac{\partial f(t, \boldsymbol{r}_\nu)}{\partial \boldsymbol{r}_k}$, $D(t, \boldsymbol{r}_\nu) = \dfrac{\partial f(t, \boldsymbol{r}_\nu)}{\partial t}$, то геометрична в'язь з аналітичним виразом $f(t, \boldsymbol{r}_\nu) = 0$ відповідає кінематичній в'язі з аналітичним виразом $\sum\limits_k l_k(t, \boldsymbol{r}_\nu)\dot{\boldsymbol{r}}_k + D(t, \boldsymbol{r}_\nu) = 0$. Тоді, очевидно, що геометрична в'язь з аналітичним виразом $f(t, \boldsymbol{r}_v) = C$, (де C - довільна стала) також є відповідною до цієї кінематичної в’язі.

Приклади.

Приклад 1.1. Чи є система двох матеріальних точок, з’єднаних між собою нерозтяжним, невагомим стрижнем довжини l голономною та склерономною?

Розв’язання. Нехай закони руху в просторі матеріальних точок задаються як $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(t), i = \overline{1,2}$. Аналітичний вираз в’язі, що накладена на цю систему, має вигляд: $\left(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\right)^2 - l^2 = 0$. Ліва частина рівності не залежить від швидкостей руху точок та явно не залежить від часу. Отже, така в’язь є двосторонньою, геометричною та стаціонарною, а система є голономною та склерономною.

Приклад 1.2. Розглянемо циліндр, що може котитись без проковзування по деякій нерухомій площині. Чи є такий циліндр голономною та склерономною системою? Чи зміниться класифікація такої системи при паралельному проковзуванні циліндру?

Розв’язання. Циліндр, прокочуючись по площині без проковзування, рухається плоскопаралельним чином, та закон руху такого циліндра визначається законом руху полюса та законом зміни кута повороту: $\begin{cases} x_O = x_O(t) \\ y_O = y_O(t) \end{cases}, \varphi = \varphi(t),\ t > 0$. Умовою відсутності проковзування є рівність нулю швидкості точки C контакту циліндру та площини $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{0}$, тобто дві кінематичні в’язі з аналітичними виразами $\dot{x}_C = 0, \dot{y}_C = 0$ [1]. Окрім таких кінематичних в’язей, на систему накладено геометричну в’язь: $y_O = R$, де R - радіус циліндра. Нехай в Лагранжевій системі координат $O\xi\eta$ точка C має координати (ξ_C, η_C). Тоді легко бачити, що Ейлерові координати точки C (x_C, y_C) мають вигляд:

$$\begin{cases} x_C = x_O + \xi_C \cos\varphi - \eta_C \sin\varphi \\ y_C = y_O + \xi_C \sin\varphi + \eta_C \cos\varphi \end{cases}.$$

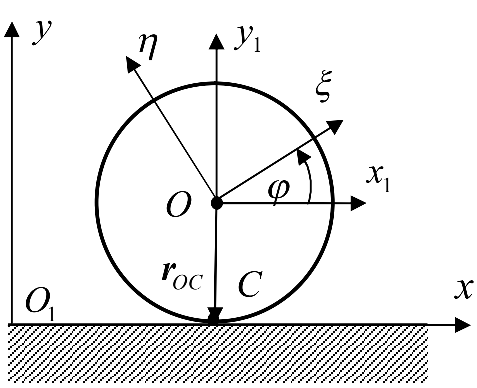

Рис. 1

Водночас, $x_C = x_O, y_C = 0$. При плоско-паралельному русі швидкості руху точок плоскої фігури розподілені лінійним чином відносно полюса:

$$\begin{cases} v_x = v_{Ox} - \omega(\xi \sin\varphi + \eta\cos\varphi) \\ v_y = v_{Oy} + \omega(\xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi) \end{cases}, \text{ де } \omega = \dot{\varphi} \ .$$

Для точки C ці вирази набудуть вигляду: $\begin{cases} \dot{x}_O + \dot{\varphi}R = 0 \\ \dot{y}_O = 0 \end{cases}$. Записані в такому вигляді, в'язі є кінематичними, але вони можуть бути проінтегровані за часом: $\begin{cases} x_O + \varphi r = C_1 \\ y_O = C_2 \end{cases}$, де C_1, C_2 - довільні сталі. Отже, в'язі накладені умовою кочення циліндру без проковзування є інтегровними та стаціонарними кінематичними в'язями, а циліндр описується як голономна склерономна невільна система.

Якщо циліндр при коченні проковзує, на його рух накладена одна кінематична в'язь: $\dot{y}_C = 0$ та одна геометрична в'язь: $y_O = R$. Аналітичний вираз кінематичної в'язі, як було показано, зводиться до виду $\dot{y}_O = 0$, що є інтегровним виразом ($y_O = C$). Отже, паралельне проковзування циліндру не змінює його класифікацію.

Приклад 1.3. Показати, що склерономна матеріальна система, рух якої описується одним скалярним параметром, завжди є голономною.

Розв'язання. Нехай законом руху системи є функціональна залежність $q = q(t)$, та на її рух накладена кінематична в'язь (лінійна) виду: $l(q)\dot{q} = 0$. Розглянемо сімейство геометричних в'язей з аналітичними виразами: $f(q) = \int l(q)dq + C = 0$. Очевидно, що $\dfrac{df(q)}{dt} = l(q)\dot{q}$. Отже, така в'язь є інтегровною.

Приклад 1.4. Куля з радіусом R котиться без проковзування по нерухомій площині. Показати, що така система є неголономною.

Розв'язання . Закон руху вільного твердого тіла відносно Ейлерової системи координат O_1xyz може бути заданий у вигляді закону руху полюса $\begin{cases} x_O = x_O(t) \\ y_O = y_O(t) \\ z_O = z_O(t) \end{cases}$ та законів зміни кутів Ейлера $\begin{cases} \psi = \psi(t) \\ \theta = \theta(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}, t > 0$. При коченні кулі без проковзування по нерухомій площині на кулю накладається векторна кінематична в'язь з аналітичним виразом $\boldsymbol{v}_C = 0$ ($v_{Cx} = 0, v_{Cy} = 0, v_{Cz} = 0$), де C - точка кулі, що контактує з нерухомою площиною, та геометрична в'язь $z_O = R$.

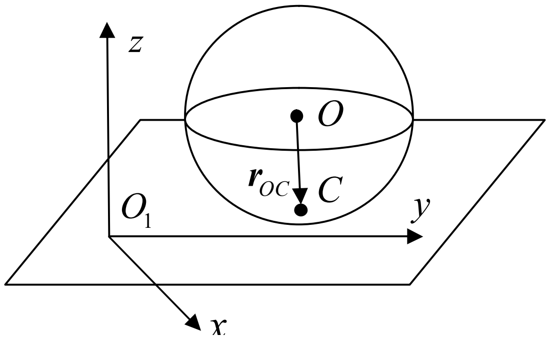

Рис.2

Швидкість руху довільної точки вільного твердого тіла знаходиться за формулою Ейлера: $\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{OM}$, де $\boldsymbol{v}_O$ - швидкість руху полюса, $\boldsymbol{\omega}$ - миттєва кутова швидкість руху вільного тіла (вектор з компонентами $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$), $\boldsymbol{r}_{OM}$ - радіус-вектор точки M відносно полюса (точки O). Оскільки в системі координат O_1xyz $\boldsymbol{r}_{OC} = (0, 0, -R)$, то кінематичні в'язі мають покомпонентні вирази: $\begin{cases} \dot{x}_O + \omega_y R = 0 \\ \dot{y}_O - \omega_x R = 0 \\ \dot{z}_O = 0 \end{cases}$. Останнє рівняння є інтегровною кінематичною в'яззю з еквівалентною геометричною в'яззю: $z_O = const$. Доведемо, що перші два аналітичних вирази кінематичних в'язей не є інтегровними. Дійсно, згідно з кінематичними формулами Ейлера: $\begin{cases} \omega_x = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta \\ \omega_y = \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta \end{cases}$, отже, аналітичний вираз першої кінематичної в'язі має вигляд $\dot{x}_O + (\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta)R = 0$. Доведемо, що функція $A(\psi, \theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta$ не є інтегровною за t . Доведення проведемо від протилежного. Нехай існує така $B = B(\psi, \theta, \varphi)$, що $\frac{dB}{dt} = A(\psi, \theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$. Очевидно, $\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial \psi}\dot{\psi} + \frac{\partial B}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial B}{\partial \varphi}\dot{\varphi}$ та $\frac{\partial B}{\partial \theta} = \sin\psi$, $\frac{\partial B}{\partial \varphi} = -\cos\psi\sin\theta$, $\frac{\partial B}{\partial \psi} = 0$, що неможливо, оскільки вирази $\frac{\partial B}{\partial \theta}$ та $\frac{\partial B}{\partial \varphi}$ залежать від ψ . Аналогічно, показується, що в'язь з аналітичним виразом $\dot{x}_O + \omega_y R = 0$ також не є інтегровною. Отже, система є неголономною.

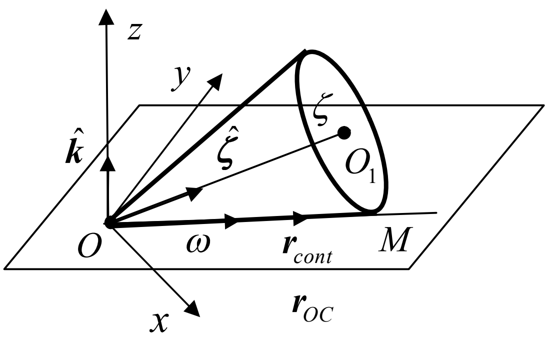

Рис.3

Приклад 1.5. Конус може котитися без проковзування по шорсткій площині. Чи є така система голономною?

Розв'язання. Очевидно, при відсутності проковзування, вершина конуса (точка O на Рис. 3) є нерухомою. Нехай точки контакту конуса та площини лежать на прямій OM . Позначимо через $\boldsymbol{r}_{cont}$ точки конуса, що в деякий момент часу лежать на OM . Для визначеності розташуємо Ейлерову декартову систему координат $Oxyz$ так, що Oz - перпендикулярна до площини. За умови відсутності проковзування, миттєві швидкості $\boldsymbol{v}_{cont}$ точок з $\boldsymbol{r}_{cont}(x_{cont}, y_{cont}, 0)$ рівні нулю. Якщо $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ вектор миттєвої кутової швидкості конуса, то за формулою Ейлера: $\boldsymbol{v}_{cont} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{cont} = (-y\omega_z, x\omega_z, y\omega_x - x\omega_y) = \boldsymbol{0}$. Звідси отримуємо, що OM є миттєвою віссю обертання конуса $\boldsymbol{\omega} = \hat{\boldsymbol{r}}_{cont}\omega$ ($\omega_z = 0$). Опишемо рух конуса через кути Ейлера $\psi = \psi(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t), t > 0$, направивши Лагранжеву вісь $O\zeta$ вздовж осі конуса. Згідно з кінематичними формулами Ейлера: $\begin{cases} \omega_x = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta \\ \omega_y = \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases}$. На точки конуса накладено геометричну в'язь $\theta = \theta_c = const$ (оскільки θ - кут між $\hat{\boldsymbol{\zeta}}$ та $\hat{\boldsymbol{k}}$). Отже, аналітичний вираз кінематичної в'язі $\boldsymbol{v}_{cont} = \boldsymbol{0}$ має вигляд: $\begin{cases} y_{cont}\dot{\varphi}\sin\theta_c\sin\psi - x_{cont}\dot{\varphi}\sin\theta_c\cos\psi = 0 \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta_c = 0 \end{cases}$. Така в'язь є інтегровною кінематичною в'яззю. Дійсно, після простих перетворень отримаємо: $\begin{cases} \dot{\psi}(y_{cont}\sin\psi - x_{cont}\cos\psi) = 0 \\ \dot{\psi} = -\dot{\varphi}\cos\theta_c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d(y_{cont}\cos\psi + x_{cont}\sin\psi) = 0 \\ d(\psi + \varphi\cos\theta_c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y_{cont}\cos\psi + x_{cont}\sin\psi = C_1 \\ \psi + \varphi\cos\theta_c + C_2 \end{cases}$ Отже, така система є голономною.

Приклад 1.6. Масивне тіло розташовується на горизонтальній площині, яка починає рухатись зі стану спокою вертикально вниз з прискоренням $a = a(t), t \ge 0$, що є монотонно зростаючою функцією часу. Чи є таке тіло невільною матеріальною системою? Якщо так, прокласифікувати її.

Розв'язання . Так, тіло є невільною матеріальною системою. Оскільки тіло ”покладено” на площину, а не ”прикріплено” до площини, то в'язь є односторонньою та її аналітичний вираз: $\xi \ge 0$ де вісь ξ з'язана з площиною та напрямлена вертикально вгору. Таку в'язь можна перетворити, якщо розбити проміжок часу еволюції системи: $\begin{cases} \xi = 0, t : a(t) \le g \\ \textit{тіло вільне}, \ t : a(t) > g \end{cases}$. Окрім того, система є реономною та голономною.

Вправи.

Вправа 1.1. Записати аналітичні вирази в'язей, накладених на систему матеріальних точок, що утворюють вільне абсолютно тверде тіло. Прокласифікувати їх. Прокласифікувати також невільну систему матеріальних точок, що утворюють вільне абсолютно тверде тіло.

Вправа 1.2. Нехай два тіла з гладкими границями рухаються плоскопаралельним чином та знаходяться в стані точкового контакту без проковзування. Чи є така матеріальна система голономною? Чи є така матеріальна система склерономною? Чи зміниться класифікація, якщо тіла можуть проковзувати?

Вправа 1.3. Нехай два тіла з гладкими границями рухаються плоскопаралельним чином та знаходяться в стані точкового контакту без проковзування (як і в **Вправі 1.2**). Вважається, що рух одного з тіл задано. Чи є друге тіло голономною системою? Чи є друге тіло склерономною системою? Чи зміниться класифікація, якщо тіла можуть проковзувати?

Вправа 1.4. Показати, що реономна матеріальна система, рух якої описується одним скалярним параметром на відміну від склерономної (див **Приклад 1.3**) не завжди є голономною.

Вправа 1.5. Розглянути постановку задачі з **Прикладу 1.4.** вважаючи, що куля котиться по площині з проковзуванням. Чи є така матеріальна система голономною?

Вправа 1.6. Конус, розглянутий в **Прикладі 1.5** може котитися по площині з проковзуванням так, що його вершина є нерухомою. Чи є така система голономною?

Вправа 1.7. Два тіла з гладкими границями рухаються в просторі в умовах точкового нерозривного контакту без проковзування. Чи є така матеріальна система (складена з двох тіл) голономною? Чи є така система склерономною?

Вправа 1.8. Нескінченно тонкий диск рухається в тривимірному просторі та невідривно і без проковзування контактує з нерухомою площиною. Чи є диск голономною та склерономною невільною матеріальною системою?

Вправа 1.9. Дві матеріальні точки з'єднані невагомою та нерозтяжною ниткою. Прокласифікувани таку невільну матеріальну систему.

Вправа 1.10. Нехай при русі твердого тіла накладено обмеження на вектор миттєвої кутової швидкості. Чи є така в'язь кінематичною?

1.2 Можливі та віртуальні переміщення.

Означення. **Можливими швидкостями** називаються швидкості точок матеріальної системи, які сумісні з в'язями.

Поняття " сумісні з в'язями " може бути формалізованим. Дійсно, кінематична в'язь з аналітичним виразом $f(t,\boldsymbol{r}_\nu,\dot{\boldsymbol{r}}_\nu)\equiv\sum_k \boldsymbol{l}_k(t,\boldsymbol{r}_\nu)\dot{\boldsymbol{r}}_k+D(t,\boldsymbol{r}_\nu)$ накладає обмеження на швидкості точок системи. Геометрична в'язь $f=f(t,\boldsymbol{r}_\nu)$, також накладає обмеження на швидкості, оскільки її кінематичне представлення має вигляд: $\frac{df(t,\boldsymbol{r}_\nu)}{dt}\equiv\sum_k\frac{\partial f(t,\boldsymbol{r}_\nu)}{\partial \boldsymbol{r}_k}\dot{\boldsymbol{r}}_k+\frac{\partial f(t,\boldsymbol{r}_\nu)}{\partial t}=0$. Отже, при накладанні на вільну матеріальну систему d геометричних та g кінематичних в'язей, швидкості руху точок системи мають задовольняти $d+g$ векторних рівнянь, лінійних щодо векторів швидкостей:

$$\begin{cases}\sum_k\frac{\partial f_\alpha(t,\boldsymbol{r}_\nu)}{\partial \boldsymbol{r}_k}\dot{\boldsymbol{r}}_k+\frac{\partial f_\alpha(t,\boldsymbol{r}_\nu)}{\partial t}=0,\ \alpha=\overline{1,d}\\ \sum_k \boldsymbol{l}_{\beta k}(t,\boldsymbol{r}_\nu)\dot{\boldsymbol{r}}_k+D_\beta(t,\boldsymbol{r}_\nu)=0,\ \beta=\overline{1,g}\end{cases}. \tag{1.1}$$

Зауваження. Можливі швидкості - це ті швидкості, які можуть реалізуватись при актуальній еволюції матеріальної системи. Швидкості, яких набувають точки системи при заданні сил, що діють на точки системи, початкових положень та швидкостей в фіксований момент часу (початкові умови, що задаються при складанні другої основної задачі динаміки) є підмножиною множини можливих швидкостей.

В класичній механіці швидкості руху довільної матеріальної точки $\boldsymbol{v}$ ставиться у відповідність елементарне переміщення $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}\,dt$, що виконується за елементарний проміжок часу dt .

Означення. Елементарні переміщення, що відповідають можливим швидкостям за заданий елементарний проміжок часу, називають **можливими переміщеннями**.

Таким чином, елементарні переміщення $d\boldsymbol{r}_\nu=\boldsymbol{v}_\nu\,dt\ \ \nu=\overline{1,N}$, як і можливі швидкості, не залежать від сил, що діють на точки системи, та початкових умов, в яких знаходиться система, і повністю визначаються в'язями, накладеними на систему.

Згідно з (1.1), для системи $N \ (\nu = \overline{1,N})$ матеріальних точок, елементарні переміщення мають задовольняти лінійну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{\partial f_\alpha(t,\boldsymbol{r}_\nu)}{\partial \boldsymbol{r}_k} d\boldsymbol{r}_k + \dfrac{\partial f_\alpha(t,\boldsymbol{r}_\nu)}{\partial t} dt = 0, \ \alpha = \overline{1,d} \\ \sum\limits_{k=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta k}(t,\boldsymbol{r}_\nu) d\boldsymbol{r}_k + D_\beta(t,\boldsymbol{r}_\nu) dt = 0, \ \beta = \overline{1,g} \end{cases}. \tag{1.2}$$

Згідно з означенням, дійсна система елементарних переміщень в кожен момент часу є елементом системи можливих переміщень в цей момент часу та за той же елементарний проміжок часу.

Тобто, елементарні переміщення є параметризованою системою класичних елементарних переміщень, і дозволяють будувати закони руху точок системи.

Означення. Різниця двох систем можливих переміщень $d\boldsymbol{r}_\nu^{(1)} = \boldsymbol{v}_\nu^{(1)} dt$ та $d\boldsymbol{r}_\nu^{(2)} = \boldsymbol{v}_\nu^{(2)} dt$, $\nu = \overline{1,N}$ з синхронізованим часом називають **віртуальними переміщеннями**:

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = d\boldsymbol{r}_\nu^{(1)} - d\boldsymbol{r}_\nu^{(2)} \tag{1.3}$$

Згідно з (1.2), віртуальні переміщення повинні задовольняти систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{N} \dfrac{\partial f_\alpha(t,\boldsymbol{r}_k)}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0, \ \alpha = \overline{1,d} \\ \sum\limits_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta k}(t,\boldsymbol{r}_k) \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0, \ \beta = \overline{1,g} \end{cases}. \tag{1.4}$$

Віртуальні переміщення на відміну від можливих переміщень неможливо трактувати як різновид класичних переміщень оскільки, вони не ставляться у відповідність до елементарного проміжку часу.

Для склерономної системи, при заданні деякого елементарного проміжку часу dt , рівняння для визначення віртуальних та можливих переміщень збігаються:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{\partial f_\alpha(\boldsymbol{r}_\nu)}{\partial \boldsymbol{r}_k} d\boldsymbol{r}_k = 0, \ \alpha = \overline{1,d} \\ \sum\limits_{k=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta k}(\boldsymbol{r}_\nu) d\boldsymbol{r}_k = 0, \ \beta = \overline{1,g} \end{cases}. \tag{1.5}$$

Водночас, для реономних систем, в загальному випадку це не так (див. (1.2) та (1.4)).

Як приклад, розглянемо рух матеріальної точки по нерухомій та рухомій поверхні, що задаються рівняннями $\Phi(\boldsymbol{r}) = 0$ та $\Phi(\boldsymbol{r}, t) = 0$ відповідно. Рівняння поверхонь водночас є аналітичними виразами стаціонарної та нестаціонарної геометричних в'язей. Отже, у випадку нерухомої поверхні матеріальна точка є голономною , склерономною системою, та віртуальні і можливі переміщення мають задовольняти рівняння: $\dfrac{\partial \Phi(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}} \delta \boldsymbol{r} = 0$, $\dfrac{\partial \Phi(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r} = 0$. В цьому випадку, віртуальні і можливі переміщення збігаються та повинні бути дотичні до поверхні ($\dfrac{\partial \Phi(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}$ визначає нормальний напрямок до поверхні). У випадку рухомої поверхні матеріальна точка є голономною, реономною системою та віртуальні і можливі переміщення мають задовольняти рівняння: $\dfrac{\partial \Phi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial \boldsymbol{r}} \delta \boldsymbol{r} = 0$, $\dfrac{\partial \Phi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial \boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r} + \dfrac{\partial \Phi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} dt = 0$. Отже, як бачимо, віртуальні і можливі переміщення не можуть збігатись. Перш за все, можливі переміщення залежать від проміжку часу, окрім того, хоча віртуальні переміщення, як і у випадку нерухомої поверхні, розташовані в дотичній площині, можливі переміщення мають напрямок, що залежить від швидкості руху точки поверхні, в якій розташовується матеріальна точка.

Одним з фундаментальних понять аналітичної механіки є кількість ступенів вільності невільної механічної системи.

Означення. **Кількістю ступенів вільності невільної матеріальної системи** називають кількість лінійно-незалежних компонентів векторів віртуальних переміщень сумісних з в'язями, накладених на систему.

Якщо на рух матеріальної системи, що складається з N матеріальних точок, накладено d геометричних та g кінематичних в'язей, то така невільна матеріальна система має $3N - d - g$ степенів вільності. Дійсно, для вільної системи, що складається з N матеріальних точок допустимі довільні (незалежні) N векторні віртуальні переміщення $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, $\nu = \overline{1, N}$, тобто $3N$ незалежних декартових компонентів віртуальних переміщень $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$, $\nu = \overline{1, N}$. Якщо на таку систему матеріальних точок накладені d геометричних та g кінематичних в'язей, векторні віртуальні переміщення $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ мають задовольняти $d + g$ векторних лінійних по відношенню до $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ рівнянь (1.4).

Отже, незалежними є $3N-d-g$ декартових компонентів $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$ векторів $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, $\nu=\overline{1,N}$, які повинні задовольняти $d+g$ скалярних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k}\delta x_k+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_k}\delta y_k+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_k}\delta z_k\right)=0,\ \alpha=\overline{1,d} \\ \sum_{k=1}^{N}\left(A_{\beta k}\delta x_k+B_{\beta k}\delta y_k+C_{\beta k}\delta z_k\right)=0,\ \beta=\overline{1,g} \end{cases}. \tag{1.6}$$

де $\delta \boldsymbol{r}_\nu=(\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu)$, $f_\alpha(t,\boldsymbol{r}_\nu)\equiv f_\alpha(t;x_\nu,y_\nu,z_\nu)$, $\boldsymbol{l}_{\beta k}(t,\boldsymbol{r}_\nu)\equiv(A_{\beta k}(t;x_\nu,y_\nu,z_\nu),B_{\beta k}(t;x_\nu,y_\nu,z_\nu),C_{\beta k}(t;x_\nu,y_\nu,z_\nu))$ $\nu,k=\overline{1,N}$, $\alpha=\overline{1,d}$, $\beta=\overline{1,g}$.

Приклади.

Приклад 1.7 Показати, що система матеріальних точок, що складає вільне абсолютно тверде тіло має 6 ступенів вільності.

Розв'язання. Побудуємо абсолютно тверде тіло за наступною рекурентною процедурою. Розглянемо 3 вільні матеріальні точки з масами m_ν, та радіус-векторами $\boldsymbol{r}_\nu$ $\nu=\overline{1,3}$, що не лежать на одній прямій. Очевидно, що така вільна система має $3\cdot 3=9$ ступенів вільності. Накладемо на таку систему 3 в'язі, що забезпечує незмінність відносного розташування точок: $|\boldsymbol{r}_\nu-\boldsymbol{r}_k|=const$, $\nu,k=\overline{1,3},\nu\neq k$. Така система є голономною, склерономною, незмінною та має $9-3=6$ ступенів вільності. Під'єднаємо до системи четверту точку з масою m_4 і радіус-вектором $\boldsymbol{r}_4$ та накладемо на систему 3 додаткові в'язі, що забезпечує незмінність системи: $|\boldsymbol{r}_\nu-\boldsymbol{r}_4|=const$, $\nu=\overline{1,3}$. Система з чотирьох точок знову має $3\cdot 4-3-3=6$ ступенів вільності. Очевидно, пробивши останню процедуру N разів, ми отримаємо незмінну систему з $3+N$ матеріальних точок з тими ж $3\cdot(N+3)-3-3\cdot N=6$ ступенями вільності. Спрямувавши $N\to\infty$ та забезпечивши виконання умов $\sum_{\nu=1}^{3+N} m_\nu \underset{N\to\infty}{\to} m$, $\max\limits_{\nu\neq k=\overline{1,3+N}}|\boldsymbol{r}_\nu-\boldsymbol{r}_k| \underset{N\to\infty}{\to} d<\infty$, отримаємо вільне абсолютно тверде тіло з масою m, як незмінну систему матеріальних точок, що неперервним чином заповнює обмежений об'єм в просторі та має скінченну масу. Як показано, кількість ступенів вільності такого тіла є 6.

Приклад 1.8 Скільки ступенів вільності має тверде тіло, що може рухатись лише поступальним чином?

Розв'язання. Розглянемо вільне абсолютно тверде тіло, яке має (див. **Приклад 1.7**) 6 степенів вільності та проведемо через довільні дві різні точки такого тіла з радіус-векторами $\boldsymbol{r}_1$ та $\boldsymbol{r}_2$ пряму. За означенням поступального руху така пряма не може змінювати свого напрямку. Абсолютно тверде тіло є незмінною системою, отже, відстань між обраними точками є також незмінною. Отже, умова поступальності руху накладає на рух таких точок обмеження: $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{const}$, що є трьома аналітичними виразами геометричних в'язей. Оскільки в абсолютно твердому тілі взаємне розташування точок є незмінним, а точки можуть обиратись довільним чином, виконання цієї умови забезпечує виконання такої умови для довільної пари інших точок тіла. Отже, таке тіло є голономною склерономною системою з 3 степенями вільності.

Приклад 1.9 Скільки ступенів вільності має матеріальна точка, приєднана до невагомого лінійно пружного тіла (лінійний тривимірний осцилятор)?

Розв'язання. Приєднання невагомого лінійно пружного тіла до матеріальної точки не накладає умов на її рух. В класичній механіці таке приєднання зводиться до прикладання до точки сили пружності, яка залежить від положення точки в просторі. Отже, така матеріальна точка є вільною та має 3 ступені вільності.

Приклад 1.10 Скільки ступенів вільності має система матеріальних точок, що утворюють рідкий об'єм?

Розв'язання. Згідно з положеннями гідромеханіки, єдиною кінематичною умовою, що накладається на рух точок рідкого об'єму (що не контактують з твердими тілами), є рівняння нерозривності $m = const$ (де m - сумарна маса точок, що складають рідкий об'єм). Але ця умова жодним чином не обмежує рух точок об'єму. Отже, оскільки кількість точок є необмеженою, то такий рідкий об'єм має нескінченну кількість ступенів вільності.

Вправи.

Вправа 1.11. В **Прикладі 1.7** абсолютно тверде тіла за технікою побудови є зліченною сукупністю матеріальних точок. Водночас Лагранжеві координати для абсолютно твердого тіла передбачають, що сукупність точок, що складають таке тіло є незліченною, оскільки Лагранжеві координати оперують числами з множини дійсних чисел. Чи є це колізією в межах основ класичної механіки? Чи може абсолютно тверде тіло, побудоване за технікою з **Прикладу 1.7,** мати фрактальну геометрію?

Вправа 1.12. Скільки ступенів вільності має тверде тіло з нерухомою точкою?

Вправа 1.13. Скільки ступенів вільності має тверде тіло з нерухомою віссю?

Вправа 1.14. Скільки ступенів вільності має тверде тіло, що рухається плоскопаралельним чином?

1.3. Ідеальні системи. Основна задача динаміки невільної матеріальної системи. Загальне рівняння динаміки.

Одним з узагальнень класичної механіки є те, що аналітична механіка дозволяє оперувати невільними системами матеріальних точок. Але насправді це стосується не всіх в'язей, що можуть накладатись на рух системи. Основи аналітичної механіки полягають в тому, що статична рівновага систем є частинним випадком динамічної рівноваги, в основі якої лежать закони Ньютона (які фактично є аксіомами як класичної, так і аналітичної механіки). Згідно з принципом Даламбера, сили інерції природним чином включені в рівняння рівноваги матеріальних систем. А отже, прискорення точок, що складають систему, мають бути незалежними. Але для невільних систем це не так. Дійсно, якщо розглядається невільна матеріальна система, складена з N матеріальних точок, на які накладені $d+g$ в'язей (1.2), то прискорення точок не є незалежними. На них накладені обмеження (їх можна отримати, шляхом подвійного диференціювання аналітичних виразів в'язей за часом):

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_k}\boldsymbol{w}_k+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_k}\right)\boldsymbol{v}_k+\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}=0,\ \alpha=\overline{1,d} \\ \sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{l}_{\beta k}\boldsymbol{w}_k+\sum_{k=1}^{N}\frac{d\boldsymbol{l}_{\beta k}}{dt}\boldsymbol{v}_k+\frac{dD_\beta}{dt}=0,\ \beta=\overline{1,g} \end{cases}. \tag{1.7}$$

Водночас, згідно з другим законом Ньютона, прискорення точок системи (звичайно звільнених від в'язей) є незалежними та визначаються силами, що діють на точки: $\boldsymbol{w}_k=\frac{1}{m_k}\boldsymbol{F}_k$. Тобто, для того, щоб відповідати другому закону Ньютона, матеріальні точки, що входять в склад системи, мають знаходитись під дією деяких додаткових (суто формальних в загальному випадку) сил $\boldsymbol{R}_\nu$. В класичній механіці це є реакції в'язей. Аналітична механіка узагальнює класичну механіку та не може їй суперечити. Отже, як і в класичній механіці, для точок матеріальної системи, рівняння динамічної рівноваги мають вигляд:

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \ , \ \nu = \overline{1,N}, \tag{1.8}$$

де $\boldsymbol{R}_\nu$ - деякі додаткові складові, які мають розмірність сили та в межах класичної механіки визначаються як реакції в'язей, що вводяться згідно з аксіомою про звільнення від в'язей. Звичайно, в загальних межах аналітичної механіки вони можуть втрачати фізичний сенс, який завжди має місце в класичній механіці.

Означення. **Основна задача динаміки невільної матеріальної системи**, що складена з N точок полягає в наступному:

- задані активні сили $\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{v}_k)$ $\nu = \overline{1,N}$, що діють на точки системи,
- задані сумісні з в'язями (тобто такі, що задовольняють рівняння в'язей (1.2)) початкові положення $\boldsymbol{r}_\nu{}^0$ та початкові швидкості $\boldsymbol{v}_\nu{}^0$ точок системи (в деякий момент часу t_0 , що вважається початковим).

Результатом розв'язання задачі має бути визначення законів руху точок $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t), t > 0$, $\nu = \overline{1,N}$ та узагальнених реакцій в'язей $\boldsymbol{R}_\nu$, $\nu = \overline{1,N}$.

Таке визначення основної задачі динаміки невільної матеріальної системи є коректним з точки зору основ класичної механіки (узагальнює другу основну задачу динаміки класичної механіки), але потребує додаткових досліджень з точки зору коректності математичної постановки задачі.

Дійсно, рівняння динамічної рівноваги (1.8) та рівняння в'язей (1.2) включає $3N + d + g$ незалежних рівнянь та містить $6N$ невідомих залежностей від часу: $3N$ декартових (в декартовій системі координат, що характеризує деяку інерціальну систему відліку) компонентів векторів прискорень точок $(w_{\nu x}, w_{\nu e}, w_{\nu z})$ та $3N$ декартових компонентів узагальнених реакцій в'язей $(R_{\nu x}, R_{\nu e}, R_{\nu z})$. Отже, для коректності математичної постановки основної задачі динаміки невільної матеріальної системи необхідно сформулювати $6N - 3N - d - g = 3N - d - g = n$ додаткових умов (що звісно, є лише необхідною умовою коректності задачі (1.8) - (1.2)). Такі додаткові умови в аналітичній механіці формулюються у вигляді поняття ідеальних в'язей.

Означення. **Віртуальною роботою сили** називають елементарну роботу сили на довільній системі віртуальних переміщень: $\delta A = \boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r}$.

Означення. **Ідеальними в'язями** називаються такі в'язі, віртуальні роботи реакцій яких рівні нулю:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_{\nu} \delta \boldsymbol{r}_{\nu} = 0. \tag{1.9}$$

Означення. **Ідеальними матеріальними системами** називаються системи, на які накладено лише ідеальні в’язі.

. Основна задача динаміки невільної матеріальної системи, сформульована для ідеальної невільної матеріальної системи, задовольняє необхідним умовам коректності математичної постановки задачі. Дійсно, нехай система має n ступенів вільності та є ідеальною. Тоді, (1.6) накладає в точності $n = 3N - d - g$ додаткових умов. Дійсно, n (кількість ступенів вільності системи) дорівнює кількості лінійно незалежних компонентів віртуальних переміщень. Отже, виразивши лінійно залежні компоненти віртуальних переміщень (згідно з (1.6)) через незалежні та прирівнявши до нуля коефіцієнти при незалежних компонентах, отримаємо в точності n додаткових рівнянь.

Твердження. Будь - яку неідеальну матеріальну систему можна привести до ідеальної системи.

Дійсно, нехай не ідеальність матеріальної системи обумовлюється в’яззю з узагальненою реакцією $\boldsymbol{R}$. Звільнимось від такої в’язі згідно з аксіомою про звільнення від в’язі та вважатимемо $\boldsymbol{R}$ активною силою. При цьому, кількість ступенів вільності системи збільшиться на кількість параметрів, що визначають силу $\boldsymbol{R}$.

Приклади

Приклад 1.11. Матеріальна точка рухається, залишаючись на рухомій гладкій поверхні. Чи є вона ідеальною системою?

Розв’язання. Так, при гладкому контакті, реакція в’язі має лише нормальну до поверхні складову (сила нормальної реакції). Водночас віртуальне переміщення буде розташовуватись в дотичній до рухомої поверхні (в кожний момент часу) площині. Отже, скалярний добуток реакції та віртуального переміщення в кожний момент часу рівний нулю. Зауважимо, що в цьому випадку робота сили нормальної реакції на можливому переміщенні (і звичайно, на дійсному переміщенні) відмінна від нуля в загальному випадку.

Приклад 1.12. Матеріальна точка рухається, залишаючись на нерухомій шорсткій поверхні. Чи є вона ідеальною системою?

Розв’язання. Згідно з аксіомою про звільнення від в’язей класичної механіки, реакція шорсткої поверхні має окрім нормальної складової (сила нормальної реакції) також дотичну складову - силу тертя. Оскільки віртуальні переміщення (що збігаються з можливими переміщеннями для склерономної системи) також розташовуються в дотичній до поверхні площині, віртуальна робота реакції в'язі відмінна від нуля. Отже, така система не є ідеальною. Вона може бути ідеалізована, якщо вважати силу тертя активною силою.

Приклад 1.13. Дві матеріальні точки рухаються з'єднаними невагомим нерозтяжним стрижнем довжини l . Чи є така система ідеальною?

Розв'язання. Нехай після звільнення від в'язей (точок M_1 та M_2) на стрижень діють сили реакцій $\tilde{\boldsymbol{R}}_1$ та $\tilde{\boldsymbol{R}}_2$ (Рис. 4). Згідно з теоремою про рух центру інерції стрижня $\tilde{\boldsymbol{R}}_1 + \tilde{\boldsymbol{R}}_2 = 0$ (оскільки маса стрижня рівна нулю). За третім законом Ньютона сили реакції, прикладені до точок $\boldsymbol{R}_1 = -\tilde{\boldsymbol{R}}_1$, $\boldsymbol{R}_2 = -\tilde{\boldsymbol{R}}_2$ мають спільну лінію дії, що проходить через точки: $\boldsymbol{R}_i = \hat{\boldsymbol{r}}_{12} R_i, i = 1,2$, $\hat{\boldsymbol{r}}_{12} = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)/|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$, $R_1 = -R_2$.

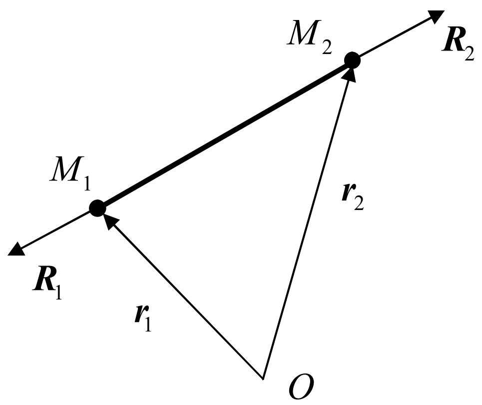

Рис. 4

Рівняння заданої геометричної стаціонарної в'язі має вигляд: $(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 = l^2$, де $\boldsymbol{r}_1$ та $\boldsymbol{r}_2$ - радіус - вектори матеріальних точок . Оскільки система склерономна, віртуальні переміщення збігаються з можливими переміщеннями. Тоді:

$$0 = d(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 = 2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)(d\boldsymbol{r}_1 - d\boldsymbol{r}_2) = 2|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|\hat{\boldsymbol{r}}_{12}(\delta\boldsymbol{r}_1 - \delta\boldsymbol{r}_2) = 2l\,\hat{\boldsymbol{r}}_{12}(\delta\boldsymbol{r}_1 - \delta\boldsymbol{r}_2).$$

А отже,

$$\delta A = \boldsymbol{R}_1\delta\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2\delta\boldsymbol{r}_2 = R_1\hat{\boldsymbol{r}}_{12}(\delta\boldsymbol{r}_1 - \delta\boldsymbol{r}_2) = 0 .$$

Отже, згідно з означенням, така система є ідеальною.

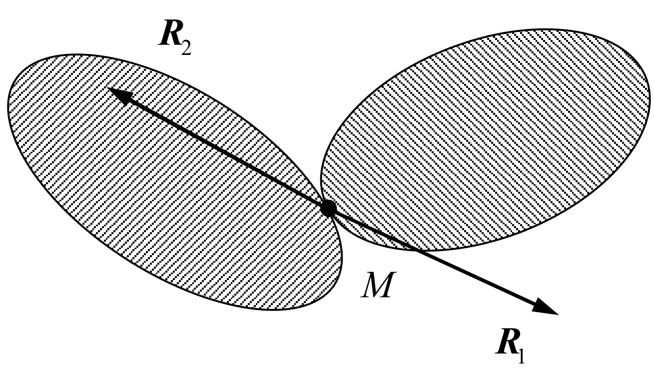

Рис.5

Приклад 1.14. Два твердих тіла з'єднані в деякій спільній точці ідеальним шарніром. Чи є така система двох тіл ідеальною системою?

Розв'язання. Нехай після звільнення від в'язей реакціями є сили $\boldsymbol{R}_1$ та $\boldsymbol{R}_2$ (Рис. 5). Згідно з третім законом Ньютона, $\boldsymbol{R}_1 = -\boldsymbol{R}_2$.

Окрім того, точка M (шарнір) є спільною точкою для тіл. Отже, віртуальні переміщення точок тіла 1 та тіла 2, ($\delta \boldsymbol{r}_1 = \delta \boldsymbol{r}_2 = \delta \boldsymbol{r}$), що геометрично знаходяться в точці M , однакові. Отже,
$\delta A = \boldsymbol{R}_1 \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 \delta \boldsymbol{r}_2 = (\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2)\delta \boldsymbol{r} = 0$ та система є ідеальною.

Приклад 1.15. Два твердих тіла знаходяться в точковому ідеально гладкому контакті без відриву. Чи є така система ідеальною?

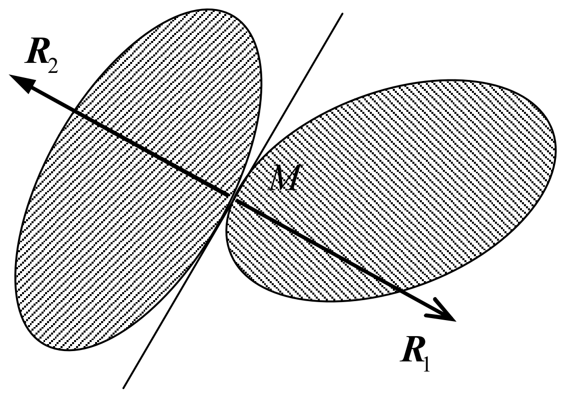

Рис.6

Розв'язання. Згідно з третім законом Ньютона $\boldsymbol{R}_1 = -\boldsymbol{R}_2$ які згідно з умовою гладкості мають напрямок, нормальний до поверхонь тіл в точці контакту. (Рис. 6). Дана система є склерономною. Отже, віртуальні переміщення збігаються з можливими переміщеннями. Згідно з умовою контакту з проковзуванням, стрибок швидкостей точок тіл, що геометрично розташовані в точці контакту, лежить в дотичній площині до поверхонь, проведеній в точці контакту, отже,
$\delta A = \boldsymbol{R}_1 \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 \delta \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_1 d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 d\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_1 (d\boldsymbol{r}_1 - d\boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{R}_1 (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) dt = 0$.

Приклад 1.16. Два твердих тіла знаходяться в точковому ідеально шорсткому контакті без відриву. Чи є така система ідеальною?

Розв'язання. Як і в **Прикладі 1.13**, $\boldsymbol{R}_1 = -\boldsymbol{R}_2$ та система є склерономною. Лише в цьому випадку напрямок сил реакції не має значення, оскільки стрибок швидкостей точок тіл, що геометрично розташовані в точці контакту, рівний нулеві. Отже,

$$\delta A = \boldsymbol{R}_1 \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 \delta \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_1 d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 d\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_1 (d\boldsymbol{r}_1 - d\boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{R}_1 (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) dt = 0$$

і система є ідеальною.

Вправи.

Вправа 1.15. Матеріальна точка рухається, залишаючись на нерухомій гладкій поверхні. Чи є вона ідеальною системою?

Вправа 1.16. Матеріальна точка рухається, залишаючись на рухомій шорсткій поверхні. Чи є вона ідеальною системою?

Вправа 1.17. В **Прикладі 1.14** показано, що система двох твердих тіл, з'єднаних ідеальним шарніром, є ідеальною системою. Розглянемо тепер одне з цих двох тіл, вважаючи друге тіло разом з шарніром в'яззю. Чи є воно ідеальною системою?

Вправа 1.18. В **Прикладі 1.15** показано, що система двох твердих тіл, що знаходяться в точковому ідеально гладкому контакті без відриву, є ідеальною системою. Якщо вважати, що проковзування відбувається в умовах присутності тертя, чи буде така система ідеальною?

Вправа 1.19. Чи є система, розглянута в **Прикладі 1.4** ідеальною?

1.4. Загальне рівняння динаміки. Рівняння Лагранжа першого роду. Центральне рівняння Лагранжа.

Як було показано вище, для точок матеріальної системи в самому загальному випадку має місце рівняння (1.8). Обмежимось розглядом ідеальних систем, оскільки будь-яка неідеальна система може бути приведена до ідеальної шляхом зміни статусу реакцій неідеальних в'язей до активних сил. В цьому випадку, згідно з означенням ідеальних в'язей (1.9), маємо:

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu)\delta\boldsymbol{r}_\nu = 0\,. \tag{1.10}$$

Означення. Рівняння (1.10) називається **загальним рівнянням динаміки**. Тобто: сумарна робота активних сил, прикладених до точок ідеальної матеріальної системи, та сил інерції на довільній системі віртуальних переміщень в кожен момент часу рівна нулеві.

Твердження. Загальне рівняння динаміки є необхідною та достатньою умовою для того, щоб сумісний з в'язями рух точок ідеальної матеріальної системи відповідав активним силам, прикладеним до точок системи.

Доведення. Необхідність (1.10) випливає з (1.8) та (1.9). Нехай матеріальні точки системи рухаються під дією активних сил $\boldsymbol{F}_\nu$ з прискореннями $\boldsymbol{w}_\nu$, $\nu=\overline{1,N}$ так, що для довільної системи віртуальних переміщень $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ $\nu=\overline{1,N}$ виконується рівняння (1.10). Тоді реакції в'язей , що знаходяться згідно з (1.8) як $\boldsymbol{R}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu$, $\nu=\overline{1,N}$ повинні згідно з (1.10) задовольняти умову (1.9). Отже система є ідеальною.

Модифікацією загального рівняння динаміки є рівняння Лагранжа першого роду. Воно передбачає введення в диференціальне рівняння аналітичних виразів в'язей за методом Лагранжа.

Покажемо, що можливість представлення реакцій в'язей у вигляді лінійних комбінацій градієнтів аналітичних виразів в'язей є достатньою умовою ідеальності в'язей. Дійсно, ввівши представлення виду:

$$\boldsymbol{R}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \ . \tag{1.11}$$

де $\lambda_\alpha, \alpha = \overline{1,d}$, $\mu_\beta, \beta = \overline{1,g}$ - множники Лагранжа, перевіримо умову ідеальності (1.9). В силу (1.4):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\sum_{\alpha=1}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \right) \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{d} \lambda_\alpha \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \delta \boldsymbol{r}_\nu + \sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \tag{1.12}$$

Необхідність доводиться наступним чином. Вирази (1.4) є лінійними та шляхом обернення дозволяють виразити $d+g$ компонентів віртуальних переміщень $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$, $\nu = \overline{1,N}$ через інші $n = 3N - (d+g)$ компоненти , які є лінійно незалежними. Підберемо $d+g$ множників Лагранжа таким чином, щоб у виразі (1.12) коефіцієнти при залежних $d+g$ компонентах були рівні нулю. В силу лінійності (1.12) це можна зробити єдиним чином. Через лінійну незалежність $n = 3N - (d+g)$ незалежних компонентів віртуальних переміщень, їхні коефіцієнти також мають бути рівні нулю, що випливає з (1.12). Отже, з необхідністю та достатністю має виконуватись (1.11).

Скористаємось (1.8), взявши до уваги (1.11):

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \sum_{\alpha=1}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \ , \ \nu = \overline{1,N}. \tag{1.13}$$

Означення. Рівняння (1.13) називаються **рівняннями Лагранжа першого роду**. Для замкненості рівнянь (1.13) вони мають бути доповнені рівняннями в'язей:

$$f_\alpha = 0, \ \alpha = \overline{1,d}, \ \sum_\nu \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \dot{\boldsymbol{r}}_\nu + D_\beta = 0, \ \beta = \overline{1,g} \ . \tag{1.14}$$

(1.13) разом з (1.14) представляють замкнену систему $3N+d+g$ рівнянь з $3N+d+g$ невідомими ($3N$ компонентів прискорень системи матеріальних точок та $d+g$ множників Лагранжа). де (1.15???)

Загальне рівняння динаміки (1.10) можна також подати у вигляді центрального рівняння Лагранжа.
Очевидно:

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = m_\nu \dot{\boldsymbol{v}}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = \frac{d}{dt}(m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu) - m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \frac{d}{dt}\delta \boldsymbol{r}_\nu =$$

$$= \frac{d}{dt}(m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu) - m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{v}_\nu + m_\nu(\delta \boldsymbol{v}_\nu - d(\delta \boldsymbol{r}_\nu)/dt).$$

За означенням, віртуальне переміщення інваріантне щодо зміни часу (ізохронна варіація в термінах варіаційного числення), отже, $\delta \dot{\boldsymbol{r}}_\nu = d(\delta \boldsymbol{r}_\nu)/dt$. Окрім того: $m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{v}_\nu = \frac{1}{2}\delta(\boldsymbol{v}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu) = \frac{1}{2}\delta(v_\nu^2)$. Згідно з цим, (1.10) можна записати у вигляді: $\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = \delta \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu$ або:

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = \delta T + \delta A \ , \qquad (1.15)$$

де δT - ізохронна варіація кінетичної енергії системи, δA - віртуальна робота активних сил, прикладених до точок системи.

Означення. Рівняння (1.15) називаються **центральними рівняннями Лагранжа**.

Приклади

Приклад 1.17. Застосувавши загальне рівняння динаміки отримати рівняння динамічної рівноваги вільного твердого тіла.

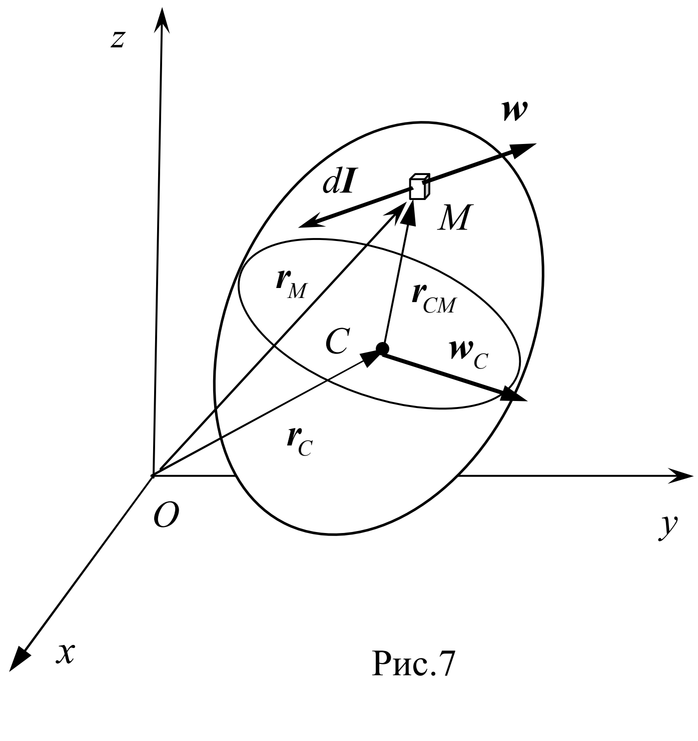

Рис.7

Розв'язання. Нехай до вільного абсолютно твердого тіла, що є голономною, склерономною та ідеальною системою матеріальних точок, прикладена довільна система сил $\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{v}_k)$, $\nu = \overline{1, N}$. Згідно з положеннями класичної механіки, така система сил еквівалентна силі $\boldsymbol{F} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu$, прикладеній в центрі приведення O та парі сил з моментом $\boldsymbol{M}_O = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{M}_{O\nu}$ де $\boldsymbol{M}_{O\nu}$,

$\nu = \overline{1,N}$ - момент сили $\boldsymbol{F}_\nu$ відносно центру приведення. Згідно з склерономністю системи, віртуальна робота активних сил визначається як елементарна робота:

$$\delta A_{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}\delta\boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{M}_O\delta\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{M}_O d\boldsymbol{\varphi} = d'A_{\boldsymbol{F}} \ , \tag{1.16}$$

де $d\boldsymbol{r}_O = \boldsymbol{v}_O dt$ - можливе переміщення полюса O, $d\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega} dt$ - можливий кут повороту тіла ($\boldsymbol{v}_O$, $\boldsymbol{\omega}$ - швидкість полюса та миттєва кутова швидкість тіла в даний момент часу відповідно).

Визначимо віртуальну роботу сил інерції, прийнявши за полюс центр інерції тіла точку C, для чого знайдемо головний вектор та головний момент сил інерції відносно точки C. Нехай тіло масою М рухається відносно інерціальної Ейлерової системи відліку, що характеризується декартовою системою координат $Oxyz$ (Рис. 7). Згідно з принципом Даламбера класичної механіки, до кожного субфізичного елементу тіла з масою dm та геометричною точкою M прикладена сила інерції $d\boldsymbol{I} = -dm\boldsymbol{w}$ ($\boldsymbol{w}$ - прискорення точки M в даний момент часу). Представимо рух тіла згідно з підходом полюса у вигляді суперпозиції поступального руху разом з полюсом та обертового руху відносно полюса $\boldsymbol{r}_M = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_{CM}$. Прискорення точки M , очевидно, дорівнює: $\boldsymbol{w}_M = \boldsymbol{w}_C + \boldsymbol{w}_{CM}$, де $\boldsymbol{w}_C$ - прискорення полюса, а $\boldsymbol{w}_{CM} = \boldsymbol{w}_{CM}^{(об)} + \boldsymbol{w}_{CM}^{(до)}$, тобто прискорення M відносно C є сумою обертового $\boldsymbol{w}_{CM}^{(об)} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_{CM}$ та доосьового $\boldsymbol{w}_{CM}^{(до)} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{CM})$ прискорень ($\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varepsilon}$ - миттєві кутова швидкість та кутове прискорення тіла відповідно). Отже, головний вектор сил інерції, прикладених до тіла, згідно з класичним принципом Даламбера дорівнює:

$$\boldsymbol{I} = -\int_{\mathrm{M}} (\boldsymbol{w}_C + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{CM}))dm \, .$$

Водночас, очевидно, справедливі рівності: $\int_{\mathrm{M}} \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_{CM} dm = \boldsymbol{\varepsilon} \times \int_{\mathrm{M}} \boldsymbol{r}_{CM} dm = 0$ та $\int_{\mathrm{M}} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{CM}))dm = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \int_{\mathrm{M}} \boldsymbol{r}_{CM} dm) = 0$, оскільки C - центр інерції тіла. Отже:

$$\boldsymbol{I} = -\int_{\mathrm{M}} \boldsymbol{w}_C dm = -\mathrm{M}\,\boldsymbol{w}_C \, . \tag{1.17}$$

Аналогічно, головний момент сил інерції відносно центру інерції визначається як:

$$\boldsymbol{M}_{IC} = -\int_{\mathrm{M}} \boldsymbol{r}_{CM} \times (\boldsymbol{w}_C + \boldsymbol{w}_{CM})dm = \boldsymbol{w}_C \times \int_{\mathrm{M}} \boldsymbol{r}_{CM} dm \ - \int_{\mathrm{M}} \boldsymbol{r}_{CM} \times \boldsymbol{w}_{CM} dm = -\int_{\mathrm{M}} \boldsymbol{r}_{CM} \times \boldsymbol{w}_{CM} dm.$$

Водночас $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_{CM} \times \boldsymbol{v}_{CM}) = \frac{d\boldsymbol{r}_{CM}}{dt} \times \boldsymbol{v}_{CM} + \boldsymbol{r}_{CM} \times \frac{d\boldsymbol{v}_{CM}}{dt} = \boldsymbol{r}_{CM} \times \boldsymbol{w}_{CM}$. Отже,

$$\boldsymbol{M}_{IC} = -\int\limits_{\mathrm{M}} \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_{CM} \times \boldsymbol{v}_{CM})dm = -\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathrm{M}} \boldsymbol{r}_{CM} \times \boldsymbol{v}_{CM} dm = -\frac{d\boldsymbol{L}_C}{dt}, \tag{1.18}$$

де $\boldsymbol{L}_C$ - за означенням кінетичний момент тіла відносно центру інерції.

Таким чином, основне рівняння динаміки для вільного твердого тіла має вигляд:

$$d'A_{\boldsymbol{F}} + d'A_{\boldsymbol{I}} = 0, \tag{1.19}$$

або:

$$(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{I})d\boldsymbol{r}_C + (\boldsymbol{M}_C + \boldsymbol{M}_{IC})d\boldsymbol{\varphi} = 0, \tag{1.20}$$

де $\boldsymbol{F}$ та $\boldsymbol{M}_C$ - головні вектор та момент сил, що діють на вільне тверде тіло відносно центру інерції, а $\boldsymbol{I}$ та $\boldsymbol{M}_{IC}$ - головні вектор та момент сил інерції відносно центру інерції, що визначаються як (1.17) та (1.18).

З (1.20) можна отримати рівняння динамічної рівноваги вільного твердого тіла. Дійсно, вільне тверде тіло має 6 ступенів вільності, $d\boldsymbol{r}_C$ та $d\boldsymbol{\varphi}$ є лінійно незалежними, а отже, (1.20) виконується тоді та лише тоді, коли $\begin{cases} \boldsymbol{F} + \boldsymbol{I} = 0 \\ \boldsymbol{M}_C + \boldsymbol{M}_{IC} = 0 \end{cases}$.

Враховуючи (1.17) та (1.18), отримуємо класичні результати теорем про рух центру інерції та зміни кінетичного моменту відносно центру інерції: $\begin{cases} \mathrm{M}\,\boldsymbol{w}_C = \boldsymbol{F} \\ \dfrac{d\boldsymbol{L}_C}{dt} = \boldsymbol{M}_C \end{cases}$.

Приклад 1.18. За методом рівняння Лагранжа першого роду скласти рівняння руху матеріальної точки з масою m за інерцією по поверхні ідеально гладкої нерухомої кулі з радіусом R та дослідити її рух.

Розв'язання. Система, що складається з однієї невільної матеріальної точки є голономна, склерономна та ідеальна. Аналітичний вираз в'язі має вигляд: $r = R$ ($r = |\boldsymbol{r}|$). Оскільки $\dfrac{\partial r}{\partial \boldsymbol{r}} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$, то рівняння Лагранжа першого роду має вигляд: $\begin{cases} m\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{r} \\ r = R \end{cases}$. При цьому, реакція в'язі $\boldsymbol{R} = \lambda \boldsymbol{r}$. Домноживши скалярним чином перше рівняння на $\dot{\boldsymbol{r}}$, отримаємо: $m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \lambda \boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}$, або $m\dfrac{d\dot{\boldsymbol{r}}^2}{dt} = \lambda \dfrac{d\boldsymbol{r}^2}{dt} = 0$, оскільки $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = r^2 = R^2 = const$. Отже, точка рухається з постійною за величиною швидкістю $\dot{\boldsymbol{r}}^2 = v^2 = C^2 = const$. Домноживши векторним чином перше рівняння системи на $\boldsymbol{r}$, отримаємо: $m\ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{r} = \lambda \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = 0$. Очевидно,

$\frac{d(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{r})}{dt}=\ddot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{r}+\dot{\boldsymbol{r}}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\ddot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{r}$, отже, $\frac{d(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{r})}{dt}=0$, звідки слідує, що $\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{C}=\boldsymbol{const}$. Оскільки $(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{r}=0$, то точка рухається в фіксованій площині, ортогональній до сталого вектора $\boldsymbol{C}$, що проходить через центр кулі. Отже, точка завжди рухається по колу великого радіуса (R) з постійною за величиною швидкістю v. При цьому, реакція в'язі рівна $\boldsymbol{R}=mv^2/R$.

Приклад 1.19. Матеріальна точка з масою m рухається за інерцією по ідеально гладкій поверхні, що задається рівнянням $\Phi(\boldsymbol{r})=0$. Записати рівняння Лагранжа першого роду для такої системи та дослідити його.

Розв'язання. Система, що складається з однієї невільної матеріальної точки, є голономною, склерономною та ідеальною. Аналітичний вираз в'язі має вигляд: $\Phi(\boldsymbol{r})=0$. Рівняння Лагранжа першого роду має вигляд: $\begin{cases} m\boldsymbol{w}=\lambda\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}} \\ \Phi(\boldsymbol{r})=0 \end{cases}$.

Як випливає з результатів диференціальної геометрії, $\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}}=\left|\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}}\right|\boldsymbol{n}$, де $\boldsymbol{n}$ - нормаль до поверхні $\Phi(\boldsymbol{r})=0$. Нехай матеріальна точка рухається по деякій траєкторії, що лежить на поверхні, та задається рівнянням $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, де s - натуральна координата. При натуральному описі руху матеріальної точки по такій траєкторії: $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{\tau}\ddot{s}+\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\dot{s}^2$ ($\boldsymbol{\tau}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ - орт дотичної до кривої). Спроєктуємо рівняння $m\boldsymbol{w}=\lambda\left|\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}}\right|\boldsymbol{n}$ на напрямки нормалі до поверхні $\boldsymbol{n}$ та геодезичної бінормалі $\boldsymbol{\beta}_g=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$: $\begin{cases} m\ddot{s}=m\dot{v}_\tau=0 \\ m\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\boldsymbol{\beta}_g\dot{s}^2=mk_g\dot{s}^2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dot{s}=v_\tau=const \\ k_g=0 \end{cases}$,

де k_g - геодезична кривина траєкторії. Отже, при русі матеріальної точки за інерцією по гладкій поверхні, точка рухається з постійною за величиною швидкістю по геодезичній кривій до поверхні.

Приклад 1.20. Неоднорідна куля з масою m та радіусом R котиться без проковзування по шорсткій нерухомій горизонтальній площині. Скласти диференціальні рівняння руху кулі, вважаючи, що центр інерції кулі збігається з її геометричним центром.

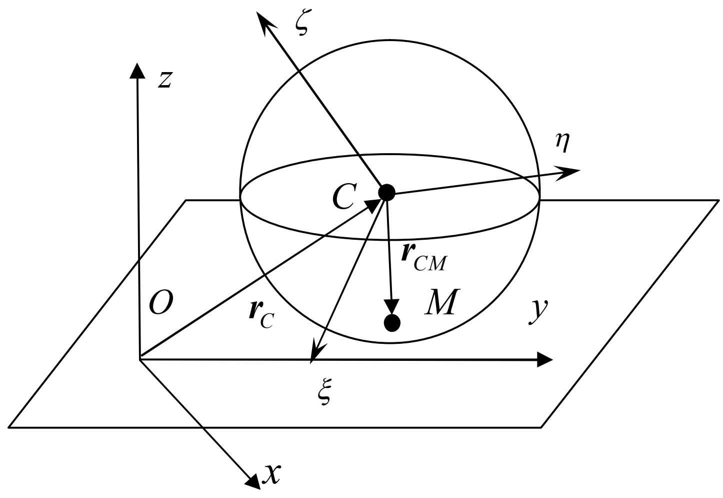

Рис.8

Розв'язання. Така система є склерономною та ідеальною, але не голономною. Введемо дві системи координат. Ейлерова система координат $Oxyz$ з відповідними ортами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, що розташовується в площині Oxy, та орт $\boldsymbol{k}$ напрямлений протилежно до істинної вертикалі. Лагранжева система координат $O\xi\eta\zeta$ з ортами $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ та осями, які є центральними головними осями інерції кулі (Рис. 8). Нехай M - миттєве геометричне положення точки кулі, яка контактує з площиною. Обмеженнями, накладеними на рух кулі, є нерухома площина: $\boldsymbol{r}_{CM} = -R\boldsymbol{k}$ ($z_C = R$) та відсутність проковзування: $\boldsymbol{v}_M = 0$. Нехай $\boldsymbol{\omega} = \omega_\xi \boldsymbol{\xi} + \omega_\eta \boldsymbol{\eta} + \omega_\zeta \boldsymbol{\zeta} = \omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j} + \omega_z \boldsymbol{k}$ - вектор миттєвої кутової швидкості кулі та $\boldsymbol{r}_{CM} = -R\boldsymbol{k} = -R(k_\xi \boldsymbol{\xi} + k_\eta \boldsymbol{\eta} + k_\zeta \boldsymbol{\zeta})$, де k_ξ, k_η, k_ζ компоненти орта $\boldsymbol{k}$ в Лагранжевій системі координат. Згідно з підходом полюса, умова відсутності проковзування запишеться як $\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{CM} = 0$. Проєктуючи останнє рівняння на осі Ейлерової системи координат, отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{x}_C - R\omega_y = 0 \\ \dot{y}_C + R\omega_x = 0 \end{cases}.$$

Проєкція на вісь Oz дає тотожне рівняння.

Активною силою, що діє на кулю, є сила тяжіння $m\boldsymbol{g}$ ($-mg\boldsymbol{k}$), прикладена в точці C, що за умовою знаходиться в геометричному центрі кулі. Реакція має прикладатись в точці M кулі та мати 3 компоненти: $\boldsymbol{R} = R_x \boldsymbol{i} + R_y \boldsymbol{j} + R_z \boldsymbol{k}$. Згідно з результатом **Прикладу 1.15,** рівняннями динамічної рівноваги вільного твердого тіла є рівняння $\begin{cases} m\boldsymbol{w}_C = \boldsymbol{F} \\ \dfrac{d\boldsymbol{L}_C}{dt} = \boldsymbol{M}_C \end{cases}$, де $\boldsymbol{F}$ та $\boldsymbol{M}_C$ - головний вектор та головний момент відносно центру інерції активних сил, прикладених до тіла, відповідно. Скориставшись технікою Лагранжа, складемо рівняння Лагранжа першого роду, врахувавши в'язі, накладені на кулю:

$$\begin{cases} m\boldsymbol{w}_C = \mathrm{m}\boldsymbol{g} + (\mu_1\boldsymbol{i} + \mu_2\boldsymbol{j} + \mu_3\boldsymbol{k}) \\ \dfrac{d\boldsymbol{L}_C}{dt} = \boldsymbol{M}_C(\mathrm{m}\boldsymbol{g}) + \boldsymbol{r}_{CM} \times (\mu_1\boldsymbol{i} + \mu_2\boldsymbol{j} + \mu_3\boldsymbol{k}) \end{cases}$$

. Враховуючи, що $\boldsymbol{M}_C(\mathrm{m}\boldsymbol{g}) = 0$ та $\boldsymbol{r}_{CM} \times \boldsymbol{k} = 0$, маємо рівняння:

$$\begin{cases} m\boldsymbol{w}_C = \mathrm{m}\boldsymbol{g} + \mu_1\boldsymbol{i} + \mu_2\boldsymbol{j} + \mu_3\boldsymbol{k} \\ \dfrac{d\boldsymbol{L}_C}{dt} = R\mu_2\boldsymbol{i} - R\mu_1\boldsymbol{j} \end{cases}$$

. Спроєктувавши перше рівняння на осі Ейлерової системи координат, а друге рівняння - на осі Лагранжевої системи координат (пам’ятаючи, що $\dfrac{d\boldsymbol{L}_C}{dt} = \dfrac{d'\boldsymbol{L}_C}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L}_C$), отримаємо рівняння:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = \mu_1 \\ m\ddot{y}_C = \mu_2 \\ 0 = m\ddot{z}_C = \mu_3 - mg \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} J_\xi\,\dot{\omega}_\xi + \omega_\eta\omega_\zeta(J_\xi - J_\eta) = R(-\mu_1 j_\xi + \mu_2 i_\xi) \\ J_\eta\,\dot{\omega}_\eta + \omega_\zeta\omega_\xi(J_\eta - J_\zeta) = R(-\mu_1 j_\eta + \mu_2 i_\eta) \\ J_\zeta\,\dot{\omega}_\zeta + \omega_\xi\omega_\eta(J_\zeta - J_\xi) = R(-\mu_1 j_\zeta + \mu_2 i_\zeta) \end{cases}$$

, де J_ξ, J_η, J_ζ - головні осьові моменти інерції неоднорідної кулі відносно Лагранжевих осей, а $i_\xi = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{\xi}$, $i_\eta = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{\eta}$, $i_\zeta = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{\zeta}$, $j_\xi = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\xi}$, $j_\eta = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\eta}$, $j_\zeta = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\zeta}$. Отже, рівняння Лагранжа 1-го роду для кулі мають вигляд:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = \mu_1 \\ m\ddot{y}_C = \mu_2 \\ J_\xi\,\dot{\omega}_\xi + \omega_\eta\omega_\zeta(J_\xi - J_\eta) = R(-\mu_1 j_\xi + \mu_2 i_\xi) \\ J_\eta\,\dot{\omega}_\eta + \omega_\zeta\omega_\xi(J_\eta - J_\zeta) = R(-\mu_1 j_\eta + \mu_2 i_\eta) \\ J_\zeta\,\dot{\omega}_\zeta + \omega_\xi\omega_\eta(J_\zeta - J_\xi) = R(-\mu_1 j_\zeta + \mu_2 i_\zeta) \\ \dot{x}_C - R\omega_y = 0 \\ \dot{y}_C + R\omega_x = 0 \end{cases}.$$

Кінематичні формули Ейлера дозволяють визначити компоненти вектора миттєвої кутової швидкості через кути Ейлера (ψ, θ, φ) та їхні похідні по часу. Використавши матрицю афінного зв’язку Ейлерової та Лагранжевої систем координат, можна також записати явні вирази для i_ξ , i_η , i_ζ , j_ξ , j_η , j_ζ через кути Ейлера. Отже, отримано 7 рівнянь відносно 7 невідомих функцій часу: $x_C, y_C, z_C, \psi, \theta, \varphi, \mu_1, \mu_2$.

Приклад 1.21. Використавши центральне рівняння Лагранжа, записати рівняння динамічної рівноваги твердого тіла, що обертається відносно нерухомої осі.

Розв'язання. Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі з ортом $\boldsymbol{k}$ (3 - м ортом Ейлерової інерціальної системи координат $Oxyz$) з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{k}\omega$ ($\omega = \dot{\varphi}$) під дією системи активних сил $\boldsymbol{F}_i$, $i = \overline{1,I}$, що мають моменти відносно осей системи $Oxyz$: M_{ix}, M_{iy}, M_{iz}, $i = \overline{1,I}$. Обмеженнями, накладеними на рух тіла, є умова того, що деяка довільна точка тіла, що лежить на осі обертання, є нерухомою. Приймемо, що такою точкою є точка O ($\boldsymbol{v}_O = 0$). Окрім того, вектор кутової швидкості не змінює напрямок ($\omega_x = \omega_y = 0$). Така в'язь є інтегровною кінематичною в'яззю. Дійсно, розглянемо тіло з двома нерухомими точками O та A так, що $\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{v}_A = 0$. Тоді $0 = \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OA} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \lambda\boldsymbol{\omega} \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega} = \omega\widehat{OA}$, тобто напрямок вектора кутової швидкості є незмінним та будь-яка точка, що лежить на прямій OA, є нерухомою. Таким чином, система є голономною, склерономною та ідеальною. Центральне рівняння Лагранжа (1.15) має вигляд: $\dfrac{d}{dt}\int\limits_m \boldsymbol{v}\delta\boldsymbol{r}dm = \delta T + \delta A$, де δT - ізохронна варіація кінетичної енергії тіла, δA - віртуальна робота активних сил, прикладених до тіла. В силу склерономності системи, маємо $\delta\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}dt$, отже, $\int\limits_m \boldsymbol{v}\delta\boldsymbol{r}dm = \int\limits_m \boldsymbol{v}^2 dm\,dt = 2Tdt$ та $\delta A = d'A = \boldsymbol{M}_O d\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{M}_O\boldsymbol{\omega}\,dt = \boldsymbol{M}_O\boldsymbol{k}\omega\,dt = \sum\limits_{i=1}^{I} M_{iz}\omega\,dt$, $\delta T = dT$. Таким чином, центральне рівняння Лагранжа набуває вигляду: $dT = \sum\limits_{i=1}^{I} M_{iz}dt$. Оскільки для твердого тіла з нерухомою віссю $T = \dfrac{1}{2}J\omega^2$, де $J = const$ - момент інерції тіла відносно осі обертання, то за центральним рівнянням Лагранжа отримаємо рівняння динамічної рівноваги: $J\dot{\omega} = \sum\limits_{i=1}^{I} M_{iz}$.

Вправи.

Вправа 1.20. Застосувавши загальне рівняння динаміки, отримати рівняння динамічної рівноваги твердого тіла з нерухомою точкою.

Вправа 1.21. Виконати завдання **Вправи 1.20**., застосувавши центральне рівняння Лагранжа.

Вправа 1.22. Скласти рівняння Лагранжа першого роду руху матеріальної точки з масою m за інерцією по ідеально гладкій кривій, що задається рівнянням: $\begin{cases} \Phi_1(\boldsymbol{r}) = 0 \\ \Phi_2(\boldsymbol{r}) = 0 \end{cases}$ та проаналізувати такий рух.

Вправа 1.23. Використавши рівняння Лагранжа першого роду, визначити рух матеріальної точки за інерцією по однопорожнинному гіперболоїду.

Вправа 1.24. Матеріальна точка рухається по нерухомій поверхні $\Phi_1(\boldsymbol{r}) = 0$ (шорсткій чи гладкій) під дією сили $\boldsymbol{F}$. Вважаємо, що в'язь є односторонньою (якщо $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ - закон руху точки, то аналітичний вираз в'язі: $\Phi_1(\boldsymbol{r}(t)) \geq 0$). Які умови треба накласти на $\boldsymbol{F}$, щоб точка завжди залишалась на поверхні ($\Phi_1(\boldsymbol{r}(t)) = 0$) ?

Вправа 1.25. Диск маси m та радіуса R котиться без проковзування по шорсткій горизонтальній площині. Скласти для нього рівняння динамічної рівноваги. Метод обрати самостійно.

Вправа 1.26. Для задачі з **Вправи 1.25**,, вважаючи, що площина диску залишається вертикальною, знайти закон руху диска та визначити величину горизонтальної реакції.

1.5. Принцип віртуальних переміщень. Принцип Даламбера.

Означення. **Положенням рівноваги системи матеріальних точок** з законом руху: $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t), t \geq t_0, \nu = \overline{1, N}$ називається така конфігурація системи $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu^0, \nu = \overline{1, N}$, що при умові $\boldsymbol{r}_\nu(t_0) = \boldsymbol{r}_\nu^0, \dot{\boldsymbol{r}}_\nu(t_0) = 0, \nu = \overline{1, N}$ має місце: $\boldsymbol{r}_\nu(t) = \boldsymbol{r}_\nu^0, t > t_0, \nu = \overline{1, N}$.

Якщо матеріальна система перебуває в стані спокою, то, очевидно, для її точок виконується: $\boldsymbol{w}_\nu(t) = 0, t > t_0, \nu = \overline{1, N}$. Отже, загальне рівняння динаміки набуває вигляду:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{1.21}$$

Означення. Рівняння (1.21) визначає **принцип віртуальних переміщень**: ідеальна матеріальна система знаходиться в стані рівноваги тоді та лише тоді, коли віртуальна робота активних сил на довільній системі віртуальних переміщень рівна нулю.

Зауваження. У тому випадку, коли принцип віртуальних переміщень застосовується до склерономних систем, кінематичні в’язі можна не брати до уваги, оскільки при $\boldsymbol{v}_\nu(t)=0, \nu=\overline{1,N}$ рівняння кінематичних в’язей $\sum_k l_k(\boldsymbol{r}_\nu)\dot{\boldsymbol{r}}_k=0$ задовольняються тотожно. Якщо система реономна, то при визначенні віртуальних переміщень, співвідношення (1.4) мають виконуватись для довільного моменту часу.

Приклади

Приклад 1.22. За принципом віртуальних переміщень визначити необхідні та достатні умови статичної рівноваги вільного абсолютно твердого тіла.

Розв’язання. Нехай до вільного абсолютно твердого тіла прикладена довільна система сил $\boldsymbol{F}_\nu=\boldsymbol{F}_\nu(t,\boldsymbol{r}_k,\boldsymbol{v}_k)$, $\nu=\overline{1,N}$. Згідно з положеннями класичної механіки, така система сил еквівалентна силі $\boldsymbol{F}=\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu$, прикладеній в центрі приведення O (довільній точці абсолютно твердого тіла), та парі сил з моментом $\boldsymbol{M}_O=\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{M}_{O\nu}$, де $\boldsymbol{M}_{O\nu}$, $\nu=\overline{1,N}$ - момент сили $\boldsymbol{F}_\nu$ відносно центру приведення. Згідно з склерономністю системи, віртуальна робота активних сил визначається як елементарна робота: $\delta A_{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{F}\delta\boldsymbol{r}_O+\boldsymbol{M}_O\delta\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}_O+\boldsymbol{M}_O d\boldsymbol{\varphi}=d'A_{\boldsymbol{F}}$, де $d\boldsymbol{r}_O=\boldsymbol{v}_O dt$ - можливе переміщення полюса O , $d\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\omega}dt$ - можливий кут повороту тіла ($\boldsymbol{v}_O$, $\boldsymbol{\omega}$ - швидкість полюса та миттєва кутова швидкість тіла в даний момент часу). Отже, рівняння (1.21) має вигляд: $\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}_O+\boldsymbol{M}_O d\boldsymbol{\varphi}=0$. Оскільки вільне тверде тіло має 6 ступенів вільності, $d\boldsymbol{r}_O$ та $d\boldsymbol{\varphi}$ є лінійно незалежними, а отже, останнє рівняння виконується тоді та лише тоді, коли $\begin{cases}\boldsymbol{F}=0\\ \boldsymbol{M}_O=0\end{cases}$. Тобто вільне абсолютно тверде тіло знаходиться в стані статичної рівноваги тоді і лише тоді, коли головний вектор та головний момент відносно довільної точки твердого тіла активних сил, прикладених до тіла, рівні 0.

Приклад 1.23. Скориставшись принципом віртуальних переміщень, довести принцип Торічеллі, згідно з яким невільна ідеальна матеріальна система, що знаходиться в полі сил тяжіння, знаходиться в стані рівноваги, коли її центр тяжіння знаходиться в найнижчому чи найвищому положенні щодо істинної вертикалі.

Розв'язання. Якщо невільна ідеальна матеріальна система знаходиться в полі сил тяжіння з напрямком $\hat{\boldsymbol{g}}$, сили тяжіння (єдині активні сили, прикладені до системи) мають рівнодійну, прикладену в центрі тяжіння системи $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_C$. Отже, застосувавши принцип віртуальних переміщень, отримаємо: $\delta A = m\boldsymbol{g} \cdot \delta \boldsymbol{r}_C = mg\hat{\boldsymbol{g}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_C = mg\delta(\hat{\boldsymbol{g}} \cdot \boldsymbol{r}_C) = 0$. Таким чином, необхідна та достатня умова рівноваги такої системи має вигляд: $\delta(\hat{\boldsymbol{g}} \cdot \boldsymbol{r}_C) = 0$. Тобто, варіація координати центру тяжіння в напрямку істинної вертикалі рівна нулю, а отже, така координата приймає стаціонарне значення (мінімум чи максимум).

Приклад 1.24. Тверде тіло, повністю чи частково занурено в спокійну рідину та знаходиться в стані спокою. Визначити орієнтацію тіла щодо істинної вертикалі.

Розв'язання. При зануренні (повному чи частковому) тіла у важку рідину на тіло окрім сили тяжіння $\boldsymbol{P}$, напрямленої по істинній вертикалі і прикладеної в центрі тяжіння тіла $\boldsymbol{r}_C$, діє також сила Архімеда $\boldsymbol{F}_A$. Сила Архімеда рівна силі тяжіння об'єму рідини, що фіктивно розташовується в об'ємі тіла, зануреному в рідину V_{in} . Її напрямок є протилежним напрямку істинної вертикалі. Оскільки рідина вважається однорідною, то сила Архімеда прикладена в центрі об'єму V_{in} $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_V(V_{in})$. Згідно з результатом **Прикладу 1.20**. маємо : $\begin{cases} \boldsymbol{P}_A + \boldsymbol{F} = 0 \\ \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{P}_A) + \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}) = 0 \end{cases}$. Отже, при умові рівноваги такого тіла, його орієнтація має бути такою, щоб виконувалось $(\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_V(V_{in})) \times \boldsymbol{g} = 0$, тобто, центр тяжіння тіла та центри зануреного об'єму знаходились на одній істинній вертикалі.

Приклад 1.25. Важка однорідна мотузка знаходиться в полі сил тяжіння та закріплена в точках $A(x_A, y_A, z_A)$ і $B(x_B, y_B, z_B)$ (орт осі Oz $\hat{\boldsymbol{k}}$ напрямлений по істинній вертикалі). Вважаємо, що мотузка знаходиться в стані рівноваги. Яка форма мотузки, вважаючи, що A та B не розташовуються на одній вертикалі ?

Розв'язання. Згідно з результатом **Прикладу 1.23**., $\delta z_C = 0$, де $\boldsymbol{r}_C(x_C, y_C, z_C)$ - положення центру ваги мотузки. Згідно з принципом симетрії класичної механіки, мотузка розташовується у вертикальній площині, в якій лежать точки A та B . Для спрощення викладок, розташуємо систему координат так, щоб точки лежали в площині $y=0$: $A(x_A,z_A)$, $B(x_B,z_B)$ та $\boldsymbol{r}_C(x_C,z_C)$. Нехай рівняння кривої, що задає форму мотузки, має вигляд: $x=x(z)$ ($x_A=x(z_A)$, $x_B=x(z_B)$). Тоді за означенням центру тяжіння через умови однорідності мотузки: $z_C=\int_A^B z(x)ds\,/\int_A^B ds=\int_{z_A}^{z_B} z\sqrt{1+(dx/dz)^2}dz\,/\,l$ ($l=const$ - довжина мотузки між точками A та B). Умова $\delta z_C=0$ може бути реалізована у вигляді рівняння Ейлера, що є необхідною умовою стаціонарності функціонала з густиною $F(z)=z\sqrt{1+(dx/dz)^2}$: $\frac{d}{dz}\frac{\partial F}{\partial x'}-\frac{\partial F}{\partial x}=0,\ (x'=dx/dz)$. Звідси отримуємо рівняння для знаходження $x=x(z)$: $z\frac{dx}{dz}/\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}=C$ (C - довільна стала величина), звідки: $z\frac{dx}{dz}=\frac{C}{\sqrt{z^2-C^2}}$. Розв'язком такого диференціального рівняння з відокремленими змінними є рівняння ціпної лінії: $z=C\operatorname{ch}\frac{x-\alpha}{C}$. Сталі α та C знаходяться з умов: $x_A=x(z_A)$, $x_B=x(z_B)$.

Приклад 1.26. Матеріальна точка може рухатись по гладкій поверхні, що задається рівнянням $f(\boldsymbol{r})=0$ під дією сили $\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{r}$, $k=const$. Якій умові має задовольняти функція f, щоб кожна точка такої поверхні була положенням рівноваги матеріальної точки?

Розв'язання. Рівняння принципу віртуальних переміщень для такої голономної, склерономної та ідеальної системи має вигляд: $\delta A=-k\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}=-k\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=-\frac{k}{2}d\boldsymbol{r}^2==-\frac{k}{2}dr^2=0$, або $dr=0$. Тобто поверхня має бути такою, щоб в кожній її точці виконувалось рівняння $dr=0$. Доведемо, що функція такої поверхні повинна мати вигляд $f(\boldsymbol{r})=\Phi(r)+C$, де $r=|\boldsymbol{r}|$, Φ - довільна гладка функція одного аргументу, C - довільна стала.

Достатність: очевидно, з $\Phi(r)+C=0$ слідує: $d\Phi(r)=\Phi' dr=0 \Leftrightarrow dr=0$.

Необхідність: нехай $\boldsymbol{r}=\hat{\boldsymbol{r}}r$ ($|\hat{\boldsymbol{r}}|=1$) . Тоді $d\boldsymbol{r}=rd\hat{\boldsymbol{r}}+\hat{\boldsymbol{r}}dr$. За умови $dr=0$, $d\boldsymbol{r}=rd\hat{\boldsymbol{r}}$ та $df(\boldsymbol{r})=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot d\boldsymbol{r}=r\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot d\hat{\boldsymbol{r}}=0$. Оскільки $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot d\hat{\boldsymbol{r}}=0$ то $\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{r}}=\lambda(r)\hat{\boldsymbol{r}}=\lambda(r)\frac{\partial r}{\partial\boldsymbol{r}}$, а отже, за відомим результатом векторного аналізу: $f(\boldsymbol{r})=\Phi(r)+C$ ($\Phi'(r)=\lambda(r)$).

Приклад 1.27. Мотузка нагортається на шорсткий циліндр так, що повний кут нагортання рівний Θ (Рис. 9). До кінців мотузки прикладені сили з величинами F_1 та F_2. Яке між ними має бути співвідношення для того, щоб система знаходилась в рівновазі? Визначити також розподіл локальної сили тертя в граничному стані рівноваги.

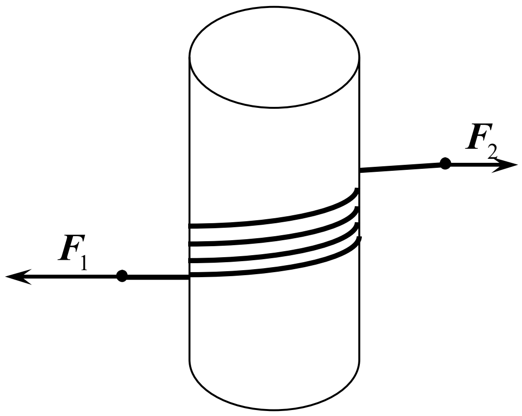

Рис. 9

Розв'язання. Розглянемо елемент мотузки $d\theta$. Оскільки система є неідеальною, вважаємо силу тертя активною силою. Отже, до елемента мотузки (Рис. 10) прикладені такі активні сили: сила тертя $\boldsymbol{F}_{тр}$ та сили натягу мотузки $\boldsymbol{T}(\theta + d\theta)$, $\boldsymbol{T}(\theta)$, які теж є реакціями в'язей, оскільки введені після уявного виділення елементу $d\theta$. Умова рівноваги елементу мотузки передбачає виконання закону Кулона, отже, доведеться також звільнитись від в'язі, що запобігає відділенню мотузки від циліндра в нормальному напрямку $\hat{\boldsymbol{\nu}}$, ввівши еквівалентну реакцію в'язі - силу нормальної реакції $\boldsymbol{N} = N\hat{\boldsymbol{\nu}}$, $N \ge 0$. Елемент мотузки має 2 степені вільності, які відповідають незалежним віртуальним переміщенням (які в силу склерономності системи збігаються з можливими переміщеннями): проковзування мотузки по поверхні циліндра на кут $\delta\vartheta$ та переміщенню вздовж напрямку $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ - $\delta\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{\nu}}\delta r$. Застосуємо принцип віртуальних переміщень:

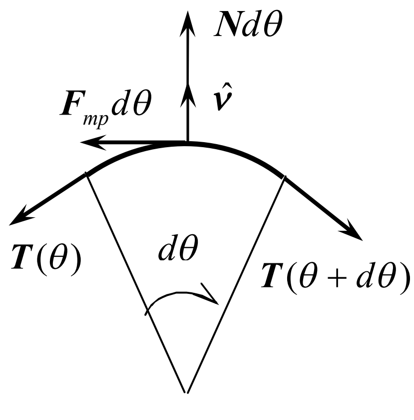

Рис. 10

- надамо елементу мотузки віртуальної зміни у вигляді проковзування на кут $\delta\vartheta$. Очевидно:

$$\delta A_\theta = (T(\theta + d\theta) - T(\theta))R\delta\vartheta - F_{тр}R\delta\vartheta = \left(\frac{dT}{d\theta} - F_{тр}\right)R\delta\vartheta$$

, де R - радіус циліндра. Отже, згідно з принципом віртуальних переміщень: $F_{тр} = \dfrac{dT}{d\theta}$.

- надамо елементу мотузки віртуальної зміни у вигляді переміщення вздовж напрямку $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ - $\delta\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{\nu}}\delta r$. В цьому випадку:

$$\delta A_r = Nd\theta\delta r - (T(\theta + d\theta) + T(\theta))\sin\frac{d\theta}{2}\delta r = (N - T(\theta))d\theta\delta r$$

. Отже, згідно з принципом віртуальних переміщень: $N = T(\theta)$. Згідно із законом Кулона (сухого тертя): $F_{тр} \le fN$. Отримаємо нерівність: $\dfrac{dT}{d\theta} \le fT$. Її інтегральна форма має вигляд: $T \le Ce^{f\theta}$ де C - стала інтегрування. Поклавши $\theta = 0$, $\theta = \Theta$ та взявши до уваги, що $T(0) = F_1$ та $T(\Theta) = F_2$, отримаємо: $T \le F_1 e^{f\theta}$ та $F_2 \le F_1 e^{f\Theta}$. Отже, розв'язком задачі є твердження: $F_2 \le F_1 e^{f\Theta}$ та $F_{тр} \le f\, F_1 e^{f\theta}$. Остання нерівність не дає можливості отримати локальний розподіл сил тертя, а лише його верхню оцінку (або локальний розподіл сил тертя в граничному стані проковзування).

Приклад 1.28. Знайти рівняння вільної поверхні ідеальної нестисливої рідини в циліндричній посудині, що обертається відносно центральної осі з кутовою швидкістю ω.

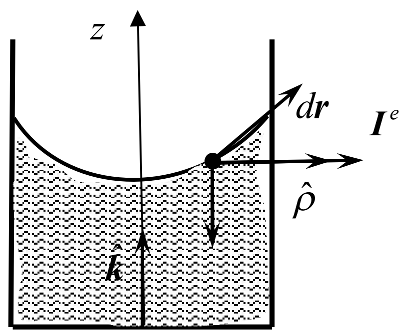

Рис.11

Розв'язання. Нехай де $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ та $\hat{\boldsymbol{k}}$ - орти центральної (стосовно циліндричної посудини) циліндричної системи координат, вмороженої в посудину, а (ρ, φ, z) - відповідні циліндричні координати. Ідеальна нестислива рідина є склерономною ідеальною системою з нескінченною кількістю ступенів вільності. Розглянемо субфізичний елемент рідини з масою dm, що розташований на вільній поверхні (Рис. 11) та має координати (ρ, φ, z). Активна сила, що діє на такий елемент - сила тяжіння - дорівнює $-dm\, g\, \hat{\boldsymbol{k}}$. Оскільки в даному випадку досліджується рівновага системи відносно не інерціальної системи відліку (яка обертається разом з посудиною), згідно з принципом Даламбера до активної сили слід додати силу інерції переносного руху (сила інерції Коріоліса рівна нулю, оскільки субфізичний елемент знаходиться в стані відносного спокою) $\boldsymbol{I}^e = dm\omega^2 \rho\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$, Згідно з результатами гідромеханіки ідеальної нестисливої рідини, частинка рідини, що знаходиться на вільній поверхні в початковий момент часу, завжди буде знаходитись на ній. Отже, надамо субфізичному елементу віртуального (можливого) переміщення $d\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{\rho}} d\rho + \hat{\boldsymbol{\varphi}} d\varphi + \hat{\boldsymbol{k}} dz$ в дотичній площині до вільної поверхні у відносній системі відліку. Згідно з принципом віртуальних переміщень має виконуватись: $\delta A = dA = (-dm\, g\, \hat{\boldsymbol{k}} + \omega^2 \rho\, \hat{\boldsymbol{\rho}} dm)(\hat{\boldsymbol{\rho}} d\rho + \hat{\boldsymbol{\varphi}} d\varphi + \hat{\boldsymbol{k}} dz) = 0$, або: $\omega^2 \rho\, d\rho = -g dz$.

Звідси отримаємо форму вільної поверхні в циліндричних координатах: $z = z_0 + \dfrac{\omega^2}{2g}\rho^2$. Це рівняння еліптичного параболоїда.

Приклад 1.29. Матеріальна точка може ковзати без тертя по нерухомій поверхні, що задається рівнянням $\Phi(x, y, z) = 0$ в полі сил земного тяжіння. Визначити можливі положення рівноваги точки, якщо сила тяжіння напрямлена вздовж осі z.

Розв'язання. Система є склерономною та ідеальною. Активна сила - сила тяжіння - має вигляд $\boldsymbol{P} = mg\hat{\boldsymbol{k}}$. Згідно зі склерономністю системи $\delta\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r}$ та рівнянням в'язі $d\Phi = \nabla\Phi\cdot d\boldsymbol{r} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}dz = 0$. Рівняння зважених нев'язок має вигляд: $\hat{\boldsymbol{k}}\cdot d\boldsymbol{r} = dz = 0$. Отже, має виконуватись: $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}dy = 0$ при довільних незалежних dx та dy. Таким чином, необхідною та достатньою умовою рівноваги точки є умова: $\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \end{cases}$.

Приклад 1.30. Використавши принцип віртуальних переміщень, довести необхідну та достатню умову рівноваги твердого тіла під дією двох сил, прикладених в різних точках твердого тіла: тверде тіло під дією системи двох сил знаходиться в стані рівноваги тоді та лише тоді, коли сили мають спільну лінію дії, однакові за величиною та протилежно напрямлені (аксіома про абсолютно тверде тіло з класичної механіки твердого тіла).

Розв'язання. Нехай до точок твердого тіла $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ та прикладені сили $\boldsymbol{F}_1$ та $\boldsymbol{F}_2$. (Рис.12) Введемо позначення: $\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$. Надамо тілу (ідеальна та склерономна система) віртуальної зміни так, що точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ та $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ набувають переміщень $d\boldsymbol{r}_1$ та $d\boldsymbol{r}_2$ відповідно. Оскільки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ - точки незмінної системи,

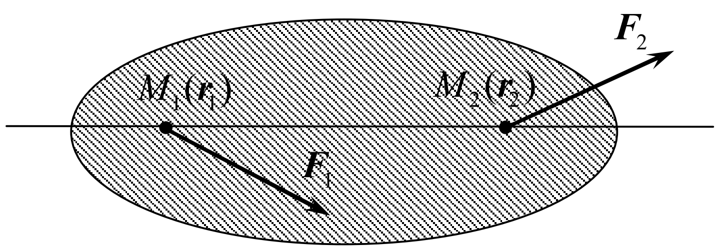

Рис. 12

то $\boldsymbol{r}_{12}^2 = const$, а отже, $\boldsymbol{r}_{12} \cdot (d\boldsymbol{r}_1 - d\boldsymbol{r}_2) = 0$. Розв'яжемо це рівняння відносно $d\boldsymbol{r}_1$: $d\boldsymbol{r}_1 = d\boldsymbol{r}_2 + d\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{r}_{12}$, де $d\boldsymbol{p}$ - довільний вектор. Рівняння принципу віртуальних переміщень має вигляд: $\delta A = dA = \boldsymbol{F}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_2 \cdot d\boldsymbol{r}_2 = 0$. Враховуючи вираз для $d\boldsymbol{r}_1$, отриманий з рівняння в'язі, матимемо: $\boldsymbol{F}_1 \cdot (d\boldsymbol{r}_2 + d\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{r}_{12})_1 + \boldsymbol{F}_2 \cdot d\boldsymbol{r}_2 = (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) \cdot d\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{F}_1 \cdot (d\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{r}_{12}) = 0$. Але $d\boldsymbol{r}_2$ та $d\boldsymbol{p}$ - лінійно незалежні вектори, отже, отримане рівняння виконуватиметься тоді та лише тоді, коли $\begin{cases} \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0 \\ \boldsymbol{F}_1 \cdot (d\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{r}_{12}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 \\ \boldsymbol{F}_1 \| \boldsymbol{r}_{12} \end{cases}$, що і доводить аксіому про абсолютно тверде тіло.

Приклад 1.31. Однорідний важкий ціп знаходиться на гладкій поверхні в полі сил тяжіння. Вважається, що ціп розташовується у вертикальній площині та його кінці мають однакові вертикальні координати. Довести, що ціп знаходиться в стані рівноваги

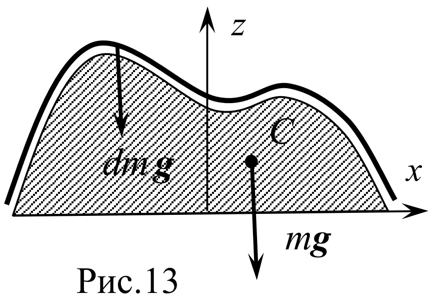

Рис.13

Розв'язання. Система є склерономною та ідеальною (Рис.13). Нехай поверхня в площині *Oxz* задається рівнянням, параметризованим відносно натуральної координати s : $z = f(z),\ s \in [s_0, s_0 + l]$ де , l - довжина ланцюга. Розподілена система сил тяжіння, прикладених до точок ланцюга, зводиться до рівнодійної сили $m\boldsymbol{g} = \gamma l \boldsymbol{g}$ ($\gamma = const$ - погонна густина), прикладеної в центрі тяжіння C , вертикальна координата якої визначається як: $z_C = \dfrac{1}{l} \int\limits_{s_0}^{s_0+l} z(s) ds$. Надамо системі віртуальної зміни, сумісної з в'яззю: $\delta s = ds$ (ланцюг, залишаючись на поверхні в вертикальній площині, переміщується так, що його лівий кінець змінює натуральну координату з s_0 на $s_0 + ds_0$). Віртуальна робота сили тяжіння, прикладеної в точці C , має вигляд: $\delta A_{mg} = -mg\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_C = -mg \delta z_C$. Згідно з принципом віртуальних переміщень: $\delta z_C = 0 \Leftrightarrow \delta \int\limits_{s_0}^{s_0+l} f(s) ds = (f(s_0 + l) - f(s_0)) \delta s = 0$, що має місце тоді та лише тоді, коли $f(s_0 + l) = f(s_0)$ ($z(s_0 + l) = z(s_0)$). Отже, незалежно від форми поверхні ціп буде знаходитись в стані рівноваги тоді та лише тоді, коли початкова точка ціпу та його кінцева точка знаходяться на спільній горизонталі.

Інше розв'язання цієї задачі. Розглянемо субфізичний елемент ціпу ds масою γds з координатою s. До нього прикладена активна сила тяжіння $d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}dm = \hat{\boldsymbol{k}}\gamma g ds$. Надамо системі (всьому ланцюгу) віртуальної зміни, сумісної з в'яззю $\delta s = ds$. Тоді, елемент ціпа ds набуде віртуального (можливого) переміщення $d\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{\tau}}ds = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}ds$, де $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ - орт дотичної до кривої (на якій лежить серединна лінія ланцюга). За принципом віртуальних переміщень: $\left(\int\limits_{s_0}^{s_0+l} \boldsymbol{g}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}ds\right)\delta s = \left(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \dfrac{dz}{ds}\right) = \left(g\int\limits_{s_0}^{s_0+l}\dfrac{dz}{ds}ds\right)\delta s = 0$. Отже, $\int\limits_{s_0}^{s_0+l}\dfrac{dz}{ds}ds = f(s)\Big|_{s_0}^{s_0+l} = f(s_0+l) - f(s_0) = 0$.

Приклад 1.32. Труба з зовнішнім радіусом r та з масою m покладена на дві однакові труби з зовнішнім радіусом R, що розташовуються на горизонтальній площині та знаходяться в контакті (Рис. 14). Які горизонтальні сили $\boldsymbol{F}$, розташовані вздовж горизонталі, що проходить через центри перерізів нижніх труб, треба прикласти, щоб система знаходилась в рівновазі, вважаючи, що труби є ідеально гладкими?

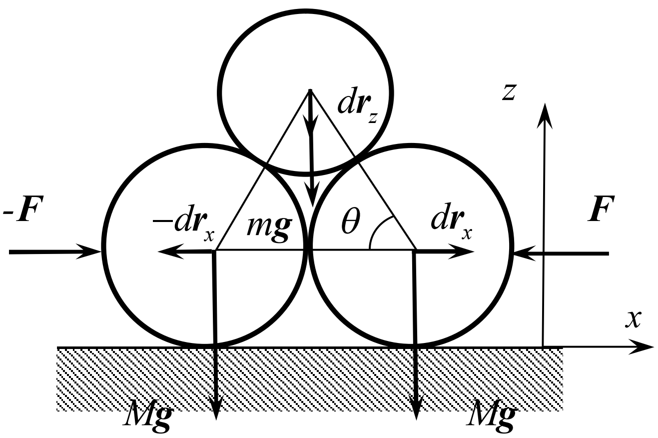

Рис. 14

Розв'язання. Система є голономною, склерономною, ідеальною та має одну ступінь вільності. На систему діють сили тяжіння. Вважаємо, що нижні циліндри контактують без зусиль. Надамо системі віртуальної зміни конфігурації такої, що центр тяжіння верхньої труби набуває вертикального віртуального переміщення $\delta\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r} = -\hat{\boldsymbol{k}}dz$. Через симетрію задачі, центри перерізів нижніх труб набувають віртуальних (можливих) переміщень $d\boldsymbol{r}_x = \hat{\boldsymbol{i}}dx$ та $-d\boldsymbol{r}_x$. Згідно з накладеними в'язями має місце: $z = R + (R+r)\cos\theta$, $x = C + (R+r)\sin\theta$. Отже, $dz = -(R+r)\sin\theta d\theta$, $dx = (R+r)\cos\theta d\theta$. Сили тяжіння прикладені до нижніх труб виконують нульову віртуальну роботу. Згідно з принципом віртуальних переміщень, має місце рівняння:

$\delta A = 2\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}_x + m\boldsymbol{g}\cdot d\boldsymbol{r}_z = -2Fdx + mgdz = (R+r)(-2F\cos\theta + mg\sin\theta)d\theta = 0$. Отже, $F = mg\,tg\theta/2$, де $\sin\theta = R/(r+R)$.

Вправи.

Вправа 1.27. Використавши результат **Прикладу 1.23**., обґрунтувати принцип сполучених посудин, згідно з яким рівень рідини в посудинах, сполучених між собою, однаковий.

Вправа 1.28. Скориставшись принципом віртуальних переміщень (чи результатом **Прикладу 1.23**), довести, що вільна поверхня рідини, що частково заповнює посудину, є площиною, ортогональною до істинної вертикалі.

Вправа 1.29. За принципом віртуальних переміщень визначити необхідні та достатні умови статичної рівноваги абсолютно твердого тіла з нерухомою точкою та нерухомою віссю.

Вправа 1.30. Ланцюг, складений з N шарнірно скріплених однакових ланок довжиною l та масою m, на кінцях закріплений в точках $A(x_A, y_A, z_A)$ та $B(x_B, y_B, z_B)$, розташований в вертикальній площині. Вісь Oz напрямлена вертикально вгору. Визначити кути нахилу ланок ланцюга до вертикалі при умові, що система знаходиться в стані спокою.

Вправа 1.31. Важкий однорідний стрижень з довжиною l поміщено в гладку сферу з радіусом R ($2R > l$) , що знаходиться в полі сил тяжіння. Визначити орієнтацію стрижня в положенні рівноваги.

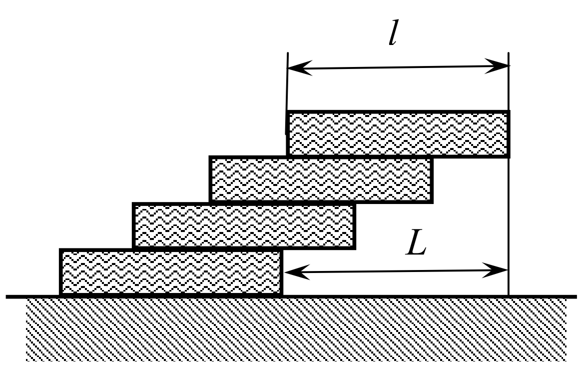

Рис. 15

Вправа 1.32. N однакових блоків довжиною l кожний вкладаються один на інший зі зсувом (Рис.15). Знайти L - максимально можливий зсув останнього блоку по відношенню до першого.

Вправа 1.33. Однорідний стрижень з довжиною l та масою m може рухатись у вертикальній площині Oxy так, що один його кінець ковзає по прямій Oy , а другий - по кривій $y = f(x)$. Площина обертається відносно нерухомої осі Oy з постійною кутовою швидкістю ω . Тертя відсутнє.

Якою має бути функція $f(x)$, щоб довільне положення стрижня було положенням відносної рівноваги, якщо $f(0)=0$?

Вправа 1.34. При умовах **Прикладу 1.29**. визначити умови рівноваги матеріальної точки, беручи до уваги сили сухого тертя з коефіцієнтом f .

Вправа 1.35. Розглянемо систему з **Прикладу 1.30**, вважаючи, що в точці ціпа з натуральною координатою $s=l_1,(l_1<l)$ розташована матеріальна точка з масою M . Визначити умову рівноваги ціпа. Чи буде ця умова залежати від форми поверхні? Визначити систему умов при яких така рівновага можлива.

Вправа 1.36. Використавши принцип віртуальних переміщень, довести теорему про три сили, прикладені до абсолютно твердого тіла: якщо тверде тіло під дією трьох непаралельних сил, принаймні дві з яких лежать в одній площині, знаходиться в стані рівноваги, то сили утворюють збіжну систему сил, що еквівалентна нулю.

Вправа 1.37. Космічна станція обертається в космічному просторі з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі Oy, що залишається незмінною в часі та просторі. Знайти форму рівноваги нерозтяжного масивного троса, що розташований в нерухомій відносно станції площині Oxy , якщо кінці троса закріплені в точках $A(x_1,y_1)$ та $B(x_2,y_2)$.

Вправа 1.38. Кінець важкого троса рухається в полі сил тяжіння з заданим постійним прискоренням $\boldsymbol{w}_O$. Знайти форму троса.

Вправа 1.39. Розглянемо ідеальну склерономну систему, на яку накладено утримуючі (двосторонні) та неутримуючі (односторонні) геометричні в'язі, під дією деякої системи сил Довести наступне твердження: для того, щоб положення такої системи було положенням рівноваги, необхідно та достатньо, щоб в цьому положенні віртуальна робота при довільній віртуальній (можливій) зміні конфігурації системи була недодатною.

Вправа 1.40. Повернувшись до **Прикладу 1.32**., довести, що значення утримуючої в рівновазі сили F є мінімально можливим.

Список літератури

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: – К. : Техніка, 2002. – 512 с.
2. Calkin M.G. Lagrangian and Hamiltonian Mechanics. Word Scientific. 1998. pp. 212.
3. Morin D. Introduction to Classical Mechanics with problems and solutions. Cambridge Univ. Press. 2007. 720 p.
4. Іро Г. Класична механіка. За редакцією Вакарчука І. Львівський національний університет ім. Івана Франка. Львів. - 1999. 462 с.
5. Goldstein H. Classical Mechanics. 3-rd edition. Addison Wesley. 2002. 638 p.
6. Теоретична механіка: Збірник задач. За редакцією Павловського М. А. – К. : Техніка, 2007. – 400 с.
7. Spiegel M.R. Theory and Problems of Theoretical Mechanics. McGRAW-HILL BOOK COMPANY. 1982. - 368 pp.
8. Arnold V.I. Mathematical Methods of Classical Mechanics. Second Edition. Springer-Verlag. 536 pp.
9. Зражевський Г.М., Зражевська В.Ф. Прикладний векторний аналіз. Методичний посібник. Кафедра Теоретичної та прикладної механіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка., Київ 2023. Електронна версія. 144 стор. https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2023/01/applied_vector_analysis.pdf

Зміст