

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Олександр ПРИШЛЯК

Василь ТЕРЕЩЕНКО

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ

Основні конструкції на площині

Навчальний посібник

Київ – 2024

УДК 517.9

О.Пришляк, В. Терещенко. Обчислювальна геометрія. Основні конструкції на площині. Навчальний посібник. - К.:, 2024. - 112 с.

Рецензенти:

Максименко С.І., доктор фізико-математичних наук, професор

Петравчук А.П., доктор фізико-математичних наук, професор

В навчальному посібнику розглядаються основні методи обчислювальної геометрії, що використовуються при роботі з багатокутниками та планарними розбиттями, які задаються координатами своїх вершин.

Навчальний посібник розрахований на студентів, що здобувають спеціальність за освітньою програмою "Комп'ютерна математика". Він також буде корисним науковцям, викладачам, аспірантам та студентам вузів, які здобувають спеціальність за освітніми програмами "Математика", "Середня освіта (Математика)" та "Прикладна математика".

Рекомендовано до друку на засіданні Науково-методичної ради Вченої ради Київського національного університету імені Тараса Шевченка 21 листопада 2024 року, протокол No. 10-24.

@ О.Пришляк, В.Терещенко 2024

Зміст

Вступ	7
1 Взаємне розташування точок на площині та у просторі	9
1.1 Дві точки на площині	9
1.2 Три точки на площині	9
1.3 Чотири точки на площині	11
1.4 Три точки у тривимірному просторі	12
1.5 Чотири точки у тривимірному просторі	13
2 Локалізація точки на многокутнику	15
2.1 Рівняння трикутника	16
2.2 Локалізація точки на простому чотирикутнику .	17
2.3 Локалізація точки на опуклому многокутнику .	18
2.3.1 Метод перетину півплощин	18
2.3.2 Метод секторів	18
2.4 Локалізація точки на многокутнику	19
2.4.1 Метод променя	19
2.4.2 Метод трапецій або горизонтальних прямих	20
3 Побудова опуклих оболонок	22
3.1 Наївний алгоритм	22
3.2 Поліпшений метод Грехема (верхньої та нижньої оболонок)	24
3.3 Метод Грехема	26
3.4 Метод Джарвіса (загортання конверта)	28

3.5	Метод розділяй та володарюй	31
3.6	Швидкий метод (Quick Hull)	34
3.7	Інші методи	36
4	Задачі на перетин	38
4.1	Перетин відрізків	38
4.1.1	Взаємне розташування двох відрізків	38
4.1.2	Перетин багатьох відрізків. Наївний алгоритм	40
4.1.3	Метод замітання прямою	40
4.2	Перетини, об'єднання та різниця багатокутників	41
5	Задачі локалізації на планарному розбитті	47
5.1	Плоскі графи	48
5.1.1	Топологічні властивості плоских графів	48
5.1.2	Кодування плоских прямолінійних графів	49
5.1.3	Накладання плоских прямолінійних графів	52
5.2	Триангуляції багатокутників	53
5.2.1	Метод відрізання вух (otectomy)	55
5.2.2	Метод монотонних багатокутників	57
5.3	Метод деталізації триангуляції Кирпатрика	65
5.4	Трапецеїдальні карти	69
6	Задачі на близькість	73
6.1	Задача про найкоротший шлях	73
6.1.1	Граф видимості	73
6.1.2	Карта доріг	75
6.2	Діаграма Вороного	77
6.2.1	Діаграма Вороного скінченного набору точок	78
6.2.2	Комірки Вороного	79
6.2.3	Властивості діаграм Вороного	82
6.2.4	Наївний алгоритм побудови діаграми Вороного	82

6.2.5	Алгоритм Форчуна замітання прямою побудови діаграми Вороного	86
6.2.6	Інші методи	88
6.2.7	Діаграма Вороного для відрізків	90
6.3	Триангуляція Делоне	92
6.3.1	Триангуляція над множиною точок	92
6.3.2	Оптимальні за кутом триангуляції	93
6.3.3	Метод перекидання ребер побудови легальної триангуляції	94
6.3.4	Граф Делоне та триангуляція Делоне	97
6.3.5	Метод "Розділяй та володарюй" побудови триангуляції Делоне	99
7	Додатки	102
7.1	Використання Wolfram mathematica для візуалізації та обчислень	102
7.1.1	Візуалізація	102
7.1.2	Обчислення	103
7.1.3	Локалізація	103
7.1.4	Конструкції	103
7.2	Корисні рівняння	103
7.2.1	Рівняння прямої	103
7.2.2	Рівняння описаного кола	104
7.3	Контрольні питання	106
7.3.1	Приклади завдань модульної роботи 1.	108
7.3.2	Приклади завдань модульної роботи 2.	108
	Список умовних позначень	109
	Предметний покажчик	110
	Література	111

Вступ

Перші роботи з обчислювальної геометрії були присвячені геометричному моделюванню, але з розвитком теорії алгоритмів роботи з обчислювальної геометрії в основному мають справу із застосуванням алгоритмічних методів до геометричних задач, де геометричні образи задаються координатами своїх точок. Зокрема, це роботи Ю.О.Гришка та О.С.Шкільняка [1], В.М.Терещенка [18, 19, 20], І.В.Кравченка та А.В.Анісімова [2], Г.Едельшбруннера [3], С.Деведоса, Дж.Рурка [4, 7, 8], М.Берга, О.Чеонга, М. ван Кревельда та М.Овермарса [5], Ф.Препарата, М.Шеймоса [6].

Методи, які розробляються в обчислювальній геометрії, розраховані на великі об'єми вхідних даних. Для визначення ефективності методу використовуються такі відомі оінки:

- 1) для упорядкування за зростанням набору з n чисел потрібно $O(n \log n)$ операцій;
- 2) для знаходження найменшого з n чисел потрібно $O(n)$ операцій;
- 3) для знаходження в упорядкованому за зростанням списку з n чисел найбільшого числа, що менше заданого числа, потрібно $O(\log n)$ операцій
- 4) для перевірки існування двох однакових чисел в неупорядкованому списку з n чисел потрібно $O(n \log n)$ операцій.

Всі рисунки, що наведені в посібнику використовуються лише для візуалізації тих об'єктів, що розглядаються, для кращого розуміння розв'язків і зовсім не використовуються для побудов чи обґрунтування алгоритмів розв'язання задач.

В навчальному посібнику ми намагаємося давати всі необхідні означення і твердження з інших курсів, проте для кращого розуміння бажано ознайомитися з основними задачами, що розв'язуються в курсах лінійної алгебри та аналітичної геометрії, а також диференціальної геометрії та топології [10, 11, 12, 13, 14].

Навчальний посібник розрахований на студентів механіко-математичних факультетів університетів, що навчаються за освітньою програмою " 014.04 Середня освіта (Математика)". Тому основна увага у ньому приділяється строгому математичному обґрунтуванню та доведенню коректності алгоритмів та методів, які використовуються при розв'язанні поставлених задач.

1 Взаємне розташування точок на площині та у просторі

1.1 Дві точки на площині

Нехай на площині задано дві точки $P_1(x_1, y_1)$ та $P_2(x_2, y_2)$. Можливі два випадки їх розташування:

1. якщо $x_1 \neq x_2$ або $x_1 = x_2$ і $y_1 \neq y_2$, то вони різні;
2. якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$, то вони збігаються.

1.2 Три точки на площині

Нехай на площині задано три точки $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ та $P_3(x_3, y_3)$. Позначимо через

$$\Delta_{123} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Тоді $\Delta_{123} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$. Отже, якщо $\Delta_{123} = 0$, то вектори P_1P_2 і P_1P_3 колінеарні, а якщо $\Delta_{123} > 0$ то вони утворюють базис тієї самої орієнтації, що і система координат, а при $\Delta_{123} < 0$ – протилежної орієнтації.

1 Взаємне розташування точок на площині та у просторі

Означення 1.1. Трикутник $P_1P_2P_3$ називається *лівоповоротним*, якщо при русі від точки P_1 до P_2 і потім до P_3 в точці P_2 відбувається лівий поворот або, що теж саме, поворот від напрямку вектора P_1P_2 до напрямку вектора P_2P_3 на найменший кут здійснюється проти годинникової стрілки. Трикутник, який не є лівоповоротним називається *правоповоротним*.

Можливі такі випадки розташування трьох точок:

1. $\Delta_{123} > 0$ точки утворюють лівоповоротний трикутник;

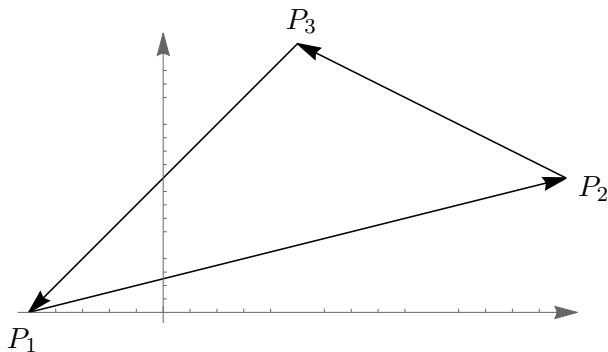


Рис. 1.1: Лівоповоротний трикутник з вершинами $P_1(-1, 0)$, $P_2(3, 1)$ та $P_3(1, 2)$

2. $\Delta_{123} < 0$ точки утворюють правоповоротний трикутник;
3. $\Delta_{123} = 0$ три точки лежать на одній прямій. При цьому,
 - а) якщо $x_i < x_j < x_k$ ($1 \leq i, j, k \leq 3$) або $x_i = x_j = x_k$ і $y_i < y_j < y_k$, то точка P_j лежить між P_i і P_k ;
 - б) якщо $x_i = x_j \neq x_k$ або $x_i = x_j = x_k$ і $y_i = y_j \neq y_k$, то дві точки збігаються, а третя не збігається з ними;
 - в) якщо $x_i = x_j = x_k$ і $y_i = y_j = y_k$, то всі три точки збігаються.

Вправа 1.1. Знайти взаємне розташування трьох точок:

а) $(-1,1)$, $(5,4)$, $(1,2)$,

б) $(-1,1)$, $(5,4)$, $(2,2)$.

1.3 Чотири точки на площині

Нехай на площині задано чотири точки $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ та $P_4(x_4, y_4)$. Як і раніше, введемо позначення

$$\Delta_{ijk} = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}.$$

Розглянемо такі визначники Δ_{123} , Δ_{234} , Δ_{341} , Δ_{412} . В типовій ситуації всі вони не дорівнюють нулю.

Можливі такі типові випадки: 1) всі визначники одного знаку, 2) три визначники одного знаку, а четвертий протилежного, 3) пара визначників одного знаку, а інша пара - протилежного.

- а) Якщо $\Delta_{123} > 0$, $\Delta_{234} > 0$, $\Delta_{341} > 0$, $\Delta_{412} > 0$, то $P_1P_2P_3P_4$ - лівоповоротний опуклий чотирикутник.
б) Якщо $\Delta_{123} < 0$, $\Delta_{234} < 0$, $\Delta_{341} < 0$, $\Delta_{412} < 0$, то $P_1P_2P_3P_4$ - правоповоротний опуклий чотирикутник.
- Якщо $\Delta_{123} < 0$, $\Delta_{234} > 0$, $\Delta_{341} > 0$, $\Delta_{412} > 0$, то $P_1P_2P_3P_4$ - неопуклий чотирикутник в якому точка P_2 лежить всередині лівоповоротного трикутника $P_1P_3P_4$. Інші випадки з трьома визначниками одного знаку можна отримати із цього перейменуванням точок та/або зміною напрямку обходу.
- Якщо $\Delta_{123} < 0$, $\Delta_{234} < 0$, $\Delta_{341} > 0$, $\Delta_{412} > 0$, то $\Delta_{234}\Delta_{341} < 0$. Це означає, що після руху за вектором P_3P_4 повороти на точки P_1 та P_2 відбуваються у різні

1 Взаємне розташування точок на площині та у просторі

боки, тобто точки P_1 та P_2 по різні боки від прямої P_3P_4 . Отже, відрізок P_1P_2 перетинає пряму P_3P_4 . Аналогічно, з того, що $\Delta_{123}\Delta_{412} < 0$ випливає, що відрізок P_3P_4 перетинає пряму P_1P_2 . Тоді відрізки P_1P_2 та P_3P_4 перетинаються у внутрішній точці. Інші випадки у цьому варіанті отримуються циклічною перестановкою точок та зміною їх порядку на протилежний.

Окремо зауважимо, що випадок $\Delta_{123} < 0$, $\Delta_{234} > 0$, $\Delta_{341} < 0$, $\Delta_{412} > 0$ неможливий (при побудові чотирьох точок, які задовольняють першим трьома умовам вийде другий випадок).

Розглянемо тепер вироджені (нетипові) випадки

4. Якщо $\Delta_{123} = 0$, $\Delta_{234} \neq 0$, $\Delta_{341} \neq 0$, $\Delta_{412} \neq 0$, то точки P_1, P_2 та P_3 лежать на одній прямій і не збігаються, а точка P_4 не належить цій прямій.
5. Якщо $\Delta_{123} = 0$, $\Delta_{234} = 0$, $\Delta_{341} \neq 0$, $\Delta_{412} \neq 0$, то точки P_2 та P_3 збігаються, а точки P_1, P_2 та P_4 утворюють трикутник.
6. Якщо $\Delta_{123} = 0$, $\Delta_{234} = 0$, $\Delta_{341} = 0$, $\Delta_{412} = 0$, то всі чотири точки лежать на одній прямій.

Зауважимо, що з рівності нулю трьох визначників випливає рівність нулю четвертого визначника.

Вправа 1.2. Знайти взаємне розташування чотирьох точок:

- а) $(-1,1)$, $(5,4)$, $(1,2)$, $(0,0)$;
- б) $(-1,1)$, $(5,4)$, $(2,2)$, $(0,0)$.

1.4 Три точки у тривимірному просторі

Нехай у тривимірному просторі задано три точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ та $P_3(x_3, y_3, z_3)$. Умову того, що три точки ле-

1 Взаємне розташування точок на площині та у просторі

жать на одній прямій можна записати так:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Дійсно, ця умова рівносильна тому, що всі три координати векторного добутку векторів P_1P_2 і P_1P_3 дорівнюють нулю, що означає колінеарність цих векторів. Збіжність (рівність) точок рівносильна рівності всіх їх координат.

Вправа 1.3. Знайти взаємне розташування трьох точок у тривимірному просторі:

- $(-2,1,0), (1,4,3), (0,3,2),$
- $(-1,1,0), (5,0,4), (2,1,2).$

1.5 Чотири точки у тривимірному просторі

Нехай у тривимірному просторі задано чотири точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ та $P_4(x_4, y_4, z_4)$. Розглянемо визначник

$$\Delta_{1234} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Можливі такі випадки:

- $\Delta_{1234} \neq 0$ – точки P_1, P_2, P_3 і P_4 є вершинами тетраедра.
- $\Delta_{1234} = 0$ – точки P_1, P_2, P_3 і P_4 лежать у одній площині. Тоді задача їх взаємного розміщення зводиться до плоского випадку. Для цього, якщо у них є однакова для всіх координата (наприклад, $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$), то

1 Взаємне розташування точок на площині та у просторі

викреслимо її. Якщо такої координати немає/, то викреслюємо довільну координату, наприклад останню. Отримаємо чотири точки, у яких по дві координати, а цей випадок був розглянутий нами раніше.

Вправа 1.4. Знайти взаємне розташування 4 точок у просторі:

а) $(2,2,0)$, $(2,0,1)$, $(2,1,4)$, $(0,1,0)$

б) $(0,3,0)$, $(0,3,2)$, $(1,3,1)$, $(2,3,4)$.

2 Локалізація точки на многокутнику

Означення 2.1. *Многокутником* (багатокутником, полігоном) називають область площини, яка обмежена замкненою ламаною.

Означення 2.2. Многокутник називається *простим*, якщо ця ламана не має точок самоперетину.

Означення 2.3. Многокутник називається *опуклим*, якщо для довільних двох своїх точок він містить відрізок, що їх з'єднує.

Означення 2.4. Многокутник називається *зірковим*, якщо в ньому існує точка (центр), що для довільної точки многокутника, відрізок між нею і центром належить многокутнику.

Приклад 2.1. Різні типи многокутників зображені на рис.2.1.

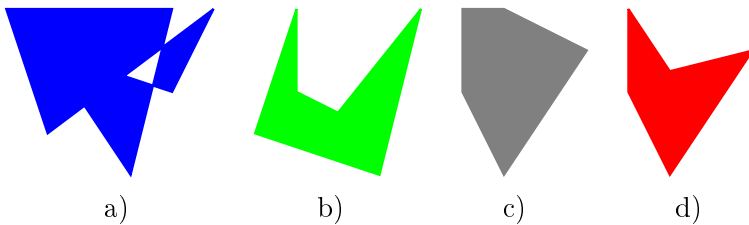


Рис. 2.1: типи многокутників: а) не простий; б) простий; с) опуклий; d) зірковий.

Очевидно, що кожний опуклий багатокутник є зірковим, а кожний зірковий багатокутник є простим.

Означення 2.5. Під *локалізацією* точки ми розуміємо її розміщення. Наприклад, локалізація точки відносно трикутника це відповідь на питання: чи належить точка трикутнику? Якщо множина задана за допомогою рівнянь чи нерівностей, то відповідь на поставлене питання полягає в перевірці відповідних рівнянь та нерівностей для координат точки.

2.1 Рівняння трикутника

Нехай на площині задано три точки $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ та $P_3(x_3, y_3)$, що утворюють лівоповоротний трикутник. Точка $M(x_m, y_m)$ належить трикутнику $P_1P_2P_3$, якщо з кожної орієнтованої сторони напрямок на точку M здійснюється лівим поворотом:

$$\Delta_{12m} \geq 0, \Delta_{23m} \geq 0, \Delta_{31m} \geq 0.$$

Для правоповоротного трикутника знаки будуть протилежні. Отже, в загальному випадку рівнянн трикутник запишеться як система трьох нерівностей:

$$\Delta_{123}\Delta_{12m} \geq 0,$$

$$\Delta_{123}\Delta_{23m} \geq 0,$$

$$\Delta_{123}\Delta_{31m} \geq 0.$$

Вправа 2.1. Перевірити, чи початок координат $(0,0)$ належить трикутнику з вершинами $(-1,1)$, $(3,0)$, $(1,2)$.

2.2 Локалізація точки на простому чотирикутнику

Якщо $P_1P_2P_3P_4$ – опуклий лівоповоротний чотирикутник, то за аналогією з трикутником умова приналежності точки M чотирикутнику запишеться у вигляді

$$\Delta_{12m} \geq 0, \Delta_{23m} \geq 0, \Delta_{34m} \geq 0, \Delta_{41m} \geq 0.$$

Для правоповоротного опуклого чотирикутника всі ці вираження будуть від’ємними.

Для простого не опуклого чотирикутника $P_1P_2P_3P_4$ з вершиною P_4 всередині лівоповоротного трикутника $P_1P_2P_3$ перевірку приналежності точки можна здійснити декількома способами.

Спосіб 1. Розіб’ємо чотирикутник на два лівоповоротних трикутника $P_1P_2P_4$ та $P_2P_3P_4$. Тоді умова приналежності точки чотирикутнику рівносильна приналежності одному з трикутників:

$$\begin{aligned} \Delta_{12m} \geq 0, \Delta_{24m} \geq 0, \Delta_{41m} \geq 0 \quad \text{або} \\ \Delta_{42m} \geq 0, \Delta_{23m} \geq 0, \Delta_{34m} \geq 0. \end{aligned}$$

Спосіб 2. Подамо чотирикутник як різницю трикутників $P_1P_2P_3$ та $P_1P_4P_3$. Тоді умову приналежності точки чотирикутнику можна записати як приналежності першому трикутнику і не приналежності другому. Тобто виконується система

$$\Delta_{12m} \geq 0, \Delta_{23m} \geq 0, \Delta_{31m} \geq 0$$

і не виконується одна з нерівностей системи

$$\Delta_{14m} > 0, \Delta_{43m} > 0.$$

Вправа 2.2. Визначити, чи належать чотирикутнику ABCD,

$A(0,5), B(2,0), C(6,3), D(3,2)$ кожна з трьох точок: $(1,1), (2,2), (4,3)$.

2.3 Локалізація точки на опуклому многокутнику

Нехай задано опуклий лівообертальний n -кутник $P_1P_2P_3 \dots P_n$ з вершинами $P(x_i, y_i)$. *Задача:* визначити приналежність точки $M(x_m, y_m)$ цьому n -кутнику.

2.3.1 Метод перетину півплощин

За аналогією з трикутником та опуклим чотирикутником заданий n -кутник можна подати як перетин півплощин, що проходять через його сторони. Отже, його рівняння запишеться так:

$$\Delta_{12m} > 0, \Delta_{23m} > 0, \dots, \Delta_{(n-1)nm} > 0, \Delta_{n1m} > 0.$$

Перевірка n нерівностей робить швидкість роботи цього методу рівною $O(n)$.

2.3.2 Метод секторів

Виберемо довільну внутрішню точку $P_0(x_0, y_0)$ n -кутника (наприклад центр ваги трикутника $P_1P_2P_3$ з координатами

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right).$$

Зробимо перед-обробку задачі – обчислимо кутові k_i коефіцієнти вершин відносно точки P_0 :

$$k_i = \frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}.$$

Перенумеруємо вершини n -кутника так, що $x_1 \geq x_0$ і k_1

найменший серед вершин, у яких абсциса не менша за x_0 , а P_k має найбільший кутовий коефіцієнт серед таких вершин.

Процес локалізації точки M полягає в обчисленні її кутового коефіцієнта k_m його порівнянні з k_1, k_2, \dots, k_k , якщо $x_m > x_0$ або з k_{k+1}, \dots, k_n в іншому разі.

Нехай $x_m > x_0$ і $k_i \leq k_m < k_{i+1}$, тоді точка M належить n -кутнику, якщо $\Delta_{i(i+1)m} \geq 0$, та не належить йому, якщо $\Delta_{i(i+1)m} < 0$.

Описаний метод потребує $O(n)$ операцій на передобробку задачі, $O(n)$ пам'яті та $O(\log n)$ операцій для конкретної точки.

2.4 Локалізація точки на многокутнику

2.4.1 Метод променя

Нехай задано простий n -кутник $P_1P_2 \dots P_n$ з вершинами $P_i(x_i, y_i)$ і точка $M(x_m, y_m)$. Для визначення того, чи належить точка n -кутнику проведемо довільний промінь з початком в цій точці. Нехай цей промінь не проходить через вершини n -кутника. Тоді точка M буде належати n -кутнику в тому і тільки тому разі, якщо число точок перетину променя, що виходить із цієї точки, зі сторонами n -кутника є парним. Це впливає із того, що многокутник є однією (внутрішньою) з двох областей, на які ламана розбиває площину, і якщо точка рухається вздовж променя, то в кожній точці перетину зі сторонами вона змінює зовнішню область на внутрішню або, навпаки, внутрішню на зовнішню. Якщо промінь не перетинає ламану, то точка зовнішня, а отже для всіх зовнішніх точок маємо парне число перетинів, а для внутрішніх – непарне.

Для спрощення обчислень промінь зручно вибрати горизонтальним і направленим вправо (спів-направленим осі абсцис).

Позначимо

$$x_N = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} + 1, \quad P_N(x_N, y_m).$$

Тоді задача визначення числа точок перетину розбивається на задачі: чи перетинаються відрізки MP_N і P_iP_{i+1} , $1 \leq i \leq n$ ($P_{n+1} = P_1$)? Якщо вони перетинаються, то виконуються дві умови:

1) точки P_iP_{i+1} лежать по різні боки від прямої MP_N (або на ній)

$$(y_i - y_m)(y_{i+1} - y_m) \leq 0;$$

2) точки MP_N лежать по різні боки від прямої P_iP_{i+1} (або на ній)

$$\Delta_{i(i+1)m} \Delta_{i(i+1)N} \leq 0.$$

Зауваження. Метод променя також працює якщо багатокутник задається декількома замкненими ламаними без точок перетинів та самоперетинів. У випадку замкненої ламаної із точками самоперетину цей метод можна використовувати для визначення внутрішніх точок таких багатокутників (крім цього є також інші означення, які дають інші результати).

Вправа 2.3. Визначити, чи належать шестикутнику ABCDEF, $A(0, 5)$, $B(1, 0)$, $C(8,3)$, $D(3,2)$, $E(7,6)$, $F(2,4)$ жодна з трьох точок: $(1,1)$, $(2,2)$, $(5,3)$.

2.4.2 Метод трапецій або горизонтальних прямих

Через кожну вершину багатокутника проведемо горизонтальні прямі. Вони розб'ють площину на стрічки, а багатокутник на частини, які є трапеціями або трикутниками (надалі трикутники будемо також називати трапецією, у якої одна з основ має довжину нуль). Ідея методу полягає у тому, що за другою координатою точки ми спочатку визначаємо в якій стрічці вона знаходиться, а далі користуємось рівняннями сторін

2 Локалізація точки на багатокутнику

визначаємо в якій з областей лежить точка. Цей метод застосовують, якщо задачу треба вирішити не для однієї точки, а для масових запитів. Крім того він може бути використаний для довільних багатокутників з багатьма компонентами межі, а також заданих ламаними з точками самоперетину.

Для перед-обробки задачі (розбиття на трапеції потрібно $O(n \log n)$ операцій. Для виконання одного запиту – $O((\log n)^2)$).

3 Побудова опуклих оболонок

Означення 3.1. *Опуклою оболонкою* (англ. convex hull) над деякою множиною M називається найменша (за включенням) опукла множина, яка містить множину M . Вона позначається $CH(M)$.

Теорема 3.1. *Якщо множина M скінчена, то її опукла оболонка $CH(M)$ є опуклим n -кутником $P_1P_2\dots P_n$, множина вершин якого*

$$\{P_1, P_2, \dots, P_n\} \subset M.$$

Багато із запропонованих далі методів на першому кроці розташовують точки у лексикографічному порядку.

Означення 3.2. Точки $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ розташовані у лексикографічному порядку, якщо для всіх $i, 1 \leq i < n$:

$$x_i < x_{i+1} \text{ або } x_i = x_{i+1} \text{ і } y_i \leq y_{i+1}.$$

3.1 Наївний алгоритм

Цей алгоритм показує, що задачу побудови опуклої оболонки над скінченою множиною точок можна вирішити за скінченний час. Нехай задано скінчену множину $M = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Будемо шукати $CH(M)$, що є опуклим лівоповоротним многокутником. Якщо серед точок множини M є трійки точок, які лежать на одній прямій, то викинемо із множини точок

3 Побудова опуклих оболонок

ті точки трійок, які лежать між двома іншими точками. Отже надалі ми припускаємо, що в множині M жодні три різні точки не лежать на одній прямій. Відрізок P_iP_j є стороною опуклої оболонки $CH(M)$ тоді та тільки тоді, коли для всіх точок $P_m \in M$, $(m \neq i, m \neq j)$ виконується нерівність

$$\Delta_{ijm} > 0.$$

Наївний алгоритм користується цією властивістю опуклої оболонки для її побудови. Отже, для кожної пари точок P_iP_j перевіряємо виконання нерівності $\Delta_{ijm} > 0$. В результаті отримуємо набір сторін, які належать межі опуклої оболонки. Беремо першу сторону, вносимо її кінці в список вершин опуклої оболонки. Далі знаходимо в наборі сторін ту, яка починається в другій вершині списку. Другий кінець цієї сторони вносимо як третю вершину списку. Далі знаходимо сторону, яка в ній починається і її другий кінець вносимо в список четвертою вершиною. Продовжуємо процес поки не вичерпаємо всі сторони опуклої оболонки.

Для побудови опуклої оболонки таким методом потрібно виконати $O(n^3)$ операцій, що значно гірше ніж іншими методами, які ми будемо розглядати далі.

Також до недоліків цього алгоритму можна віднести те, що він не є стійким: у випадку трьох точок, що лежать на одній прямій при округленні значень може вийти так, що всі три визначники між ними додатні або від'ємні і тоді потрібні додаткові міркування для виходу з цієї ситуації. Тому надалі будемо будувати такі алгоритми, які дають відповідь і для таких вироджених випадків.

3.2 Поліпшений метод Грехема (верхньої та нижньої оболонок)

Упорядкуємо точки $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ за допомогою лексикографічного порядку.

Тоді точки P_1 та P_n належать опуклій оболонці і розбивають її на дві частини: верхню та нижню оболонки. Побудуємо спочатку верхню оболонку.

1) Внесемо в список оболонок S перші три точки: $S = \{P_1P_2P_3\}$.

Якщо $\Delta_{123} < 0$, то виконуємо 2).

Якщо $\Delta_{123} \geq 0$, то виконуємо 3).

2) Вносимо в список S наступну точку (яка ще не вносились в нього). Переходимо до 4). Якщо в початковому списку більше немає точок, то верхня оболонка (список S) побудована.

3) Викреслюємо з S передостанню точку і переходимо до 4)

4) Якщо число вершин у списку S дорівнює 2, то переходимо до 2). Якщо число вершин у списку S три або більше, то для останніх трьох вершин $P_iP_jP_k$ обчислюємо Δ_{ijk}

Якщо $\Delta_{ijk} < 0$, то далі виконуємо 2).

Якщо $\Delta_{ijk} \geq 0$, то виконуємо 3).

Для побудови нижньої оболонки виконуємо ті самі процедури, що і для верхньої із заміною знаків у всіх нерівностях на протилежні ($<$ на $>$, \leq на \geq). В результаті отримаємо список T . Шукану опуклу оболонку отримаємо зі списку T додаючи до нього список S' , що отриманий зі списку S виписуванням елементів у зворотному порядку та викреслення першої та останньої вершин.

Для отримання опуклої оболонки цим методом потрібно виконати $O(n \log n)$ операцій.

Приклад 3.1. Знайдемо опуклу оболонку такої множини точок: $(0,0)$, $(4,0)$, $(7,2)$, $(1,3)$, $(3,-3)$, $(2,-1)$, $(6,6)$, $(6,-2)$, $(5,4)$.

3 Побудова опуклих оболонок

Спочатку впорядкуємо їх лексикографічно: $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 3)$, $P_3(2, -1)$, $P_4(3, -3)$, $P_5(4, 0)$, $P_6(5, 4)$, $P_7(6, -2)$, $P_8(6, 6)$, $P_9(7, 2)$.

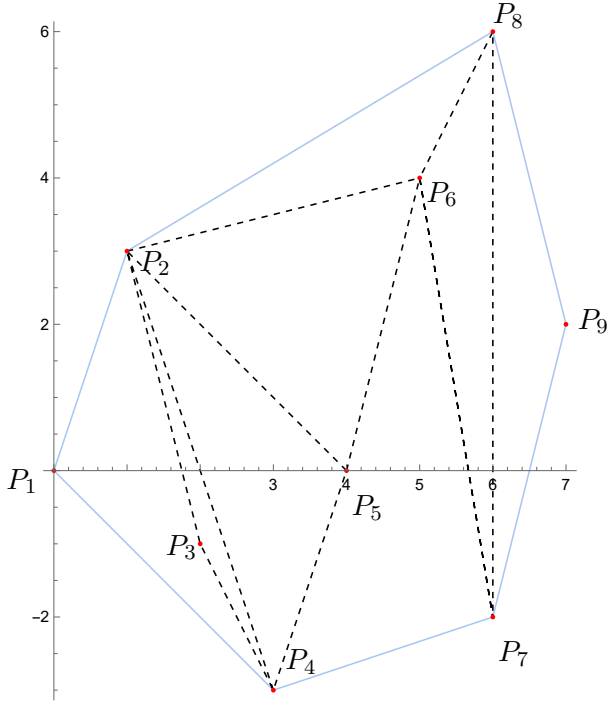


Рис. 3.1: опукла оболонка поліпшеним методом Грехема

Будуємо верхній шлях (всі повороти праві, тобто визначники менші за 0): вносимо в список перші три точки $S = \{P_1, P_2, P_3\}$ і знаходимо $\Delta_{123} = -7 < 0$, тому вносимо до списку наступну точку: $S = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. Для останніх трьох точок $\Delta_{234} = 2 > 0$, тому викреслюємо зі списку середню, отримуємо $S = \{P_1, P_2, P_4\}$. Для останніх трьох точок $\Delta_{124} = -12 < 0$. Вносимо наступну точку $S = \{P_1, P_2, P_4, P_5\}$. $\Delta_{245} = 12 > 0$, викреслюємо P_4 : $S = \{P_1, P_2, P_5\}$. $\Delta_{125} = -12 < 0$, вносимо P_6 : $S = \{P_1, P_2, P_5, P_6\}$. $\Delta_{256} = 15 > 0$,

3 Побудова опуклих оболонок

викреслюємо $P_5: S = \{P_1, P_2, P_6\}$. $\Delta_{126} = -11 < 0$, вносимо $P_7: S = \{P_1, P_2, P_6, P_7\}$. $\Delta_{267} = -25 < 0$, вносимо $P_8: S = \{P_1, P_2, P_6, P_7, P_8\}$. $\Delta_{678} = 8 > 0$, викреслюємо $P_7: S = \{P_1, P_2, P_6, P_8\}$. $\Delta_{268} = 7 > 0$, викреслюємо $P_6: S = \{P_1, P_2, P_8\}$. $\Delta_{128} = -12 < 0$, вносимо $P_9: S = \{P_1, P_2, P_8, P_9\}$. $\Delta_{289} = -23 < 0$, тому верхній шлях буде: $S = \{P_1, P_2, P_8, P_9\}$.

Тепер будуюмо нижній шлях (всі повороти ліві, визначники додатні) з точок, що не належать верхньому шляху (крім першої та останньої). Вносимо в список перші три точки $T = \{P_1, P_3, P_4\}$ і знаходимо $\Delta_{134} = -3 < 0$, викреслюємо P_3 , вносимо $P_5: T = \{P_1, P_4, P_5\}$. $\Delta_{145} = 12 > 0: T = \{P_1, P_4, P_5, P_6\}$. $\Delta_{456} = 1 > 0: T = \{P_1, P_4, P_5, P_6, P_7\}$. $\Delta_{567} = -10 < 0: T = \{P_1, P_4, P_5, P_7\}$. $\Delta_{457} = -8 < 0: T = \{P_1, P_4, P_7\}$. $\Delta_{147} = 12 > 0: T = \{P_1, P_4, P_7, P_9\}$. $\Delta_{479} = 11 > 0$, отже $T = \{P_1, P_4, P_7, P_9\}$ – нижній шлях. Опукла оболонка є нижнім шляхом до якого приєднаний верхній шлях, пройдений в оберненому порядку:

$$CH = \{P_1, P_4, P_7, P_9, P_8, P_2\}.$$

Вправа 3.1. Знайти опуклу оболонку для такого набору точок $(1,1), (2,2), (5,3), (0,5), (1,0), (7,6), (2,4)$.

3.3 Метод Грехема

Для скінченної множини точок M знайдемо найменшу у лексикографічному порядку точку P_1 . Решту точок P_i упорядкуємо за кутом (або, що теж саме, його тангенсом) між віссю абсцис та променем P_1P_i :

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{y_i - y_1}{x_i - x_1}.$$

Якщо декілька точок мають однакові кути, то залишимо серед них ту, яка має найбільшу відстань до P_1 , а решту викреслимо зі списку (бо вони не можуть належати опуклій оболонці).

3 Побудова опуклих оболонок

Далі до отриманого упорядкованого списку застосовуємо процедуру аналогічну модифікованому методу Грехема для побудови нижньої оболонки.

Швидкість роботи методу $O(n \log n)$.

Приклад 3.2. Знайдемо опуклу оболонку такої множини точок: $(0,0)$, $(2,-4)$, $(2,2)$, $(3,-1)$, $(3,5)$, $(4,2)$, $(7,0)$.

Перша точка має найменшу абсцису, тому упорядкуємо точки відносно неї за кутом. Обчислюємо кутові коефіцієнти: $k_2 = -4/2 = -2$, $k_3 = 2/2 = 1$, $k_4 = -1/3$, $k_5 = 5/3$, $k_6 = 2/4 = 1/2$, $k_7 = 0/7 = 0$. Маємо

$$-2 < -1/3 < 0 < 1/2 < 1 < 5/3.$$

Тому вводимо такі позначення (див. рис. 3.2):

$$P_1(0,0), P_2(2,-4), P_6(2,2), P_3(3,-1), P_7(3,5), P_5(4,2), P_4(7,0).$$

Будуємо лівоповоротну опуклу оболонку починаючи з точки P_1 . В список вершин вносимо перші три точки і перевіряємо на лівий поворот в другій точці. $S = \{P_1, P_2, P_3\}$, $\Delta_{123} = 10 > 0$. Вносимо наступну точку: $S = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, $\Delta_{234} = -11 < 0$. Викреслюємо P_3 : $S = \{P_1, P_2, P_4\}$, $\Delta_{124} = 28 > 0$. Вносимо P_5 : $S = \{P_1, P_2, P_4, P_5\}$, $\Delta_{245} = 22 > 0$. Вносимо P_6 : $S = \{P_1, P_2, P_4, P_5, P_6\}$, $\Delta_{456} = 4 > 0$. Вносимо P_7 : $S = \{P_1, P_2, P_4, P_5, P_6, P_7\}$, $\Delta_{567} = -6 < 0$. Викреслюємо P_6 : $S = \{P_1, P_2, P_4, P_5, P_7\}$, $\Delta_{457} = -7 < 0$. Викреслюємо P_5 : $S = \{P_1, P_2, P_4, P_7\}$, $\Delta_{247} = 41 > 0$. Отже, опукла оболонка

$$CH = \{P_1, P_2, P_4, P_7\}.$$

Вправа 3.2. Методом Грехема побудувати опуклу оболонку для такого набору точок $(1,2)$, $(2,1)$, $(5,4)$, $(7,6)$, $(2,4)$, $(8,3)$, $(3,2)$.

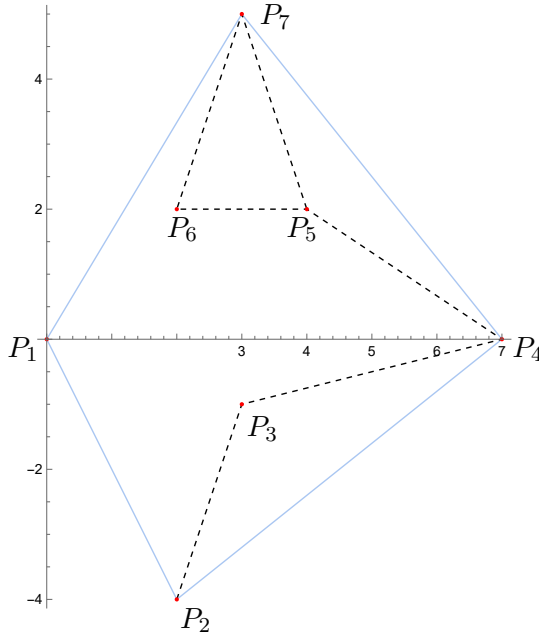


Рис. 3.2: опукла оболонка методом Грехема

3.4 Метод Джарвіса (загортання конверта)

Для скінченної множини точок M знайдемо найменшу у лексикографічному порядку точку. Позначимо її P_{k_1} . Це перша точка опуклої оболонки. Для решти точок знайдемо кутові коефіцієнти k_{i1} відносно точки P_{k_1} :

$$k_{i1} = \frac{y_i - y_1}{x_i - x_1}.$$

Другою точкою P_{k_2} опуклої оболонки буде точка з найменшим кутовим коефіцієнтом. Якщо таких точок декілька, то – та серед них, яка має найбільшу відстань до точки P_{k_1} . Про-

3 Побудова опуклих оболонок

довжимо цей процес за індукцією.

Нехай перші m точок $P_{k_1}, P_{k_2}, \dots, P_{k_m}$ опуклої оболонки побудовані. Наступна точка $P_{k_{m+1}}$ має найменший кутівий коефіцієнт

$$k_{im} = \frac{y_i - y_m}{x_i - x_m}$$

відносно точки P_{k_m} серед всіх точок P_i з

$$k_{im} > \frac{y_m - y_{m-1}}{x_m - x_{m-1}}$$

. Якщо таких точок немає, то $P_{k_{m+1}}$ – точка з найменшим k_{im} . Так само як і раніше, якщо точок з таким коефіцієнтом декілька, то вибираємо ту серед них, яка має найбільшу відстань від точки P_{k_m} .

Процес побудови опуклої оболонки завершиться, якщо наступною точкою, яку треба було б внести до списку є перша точка P_{k_1} .

Швидкість роботи цього методу $O(nk)$, де k – число вершин побудованої опуклої оболонки. Застосування цього методу є ефективним, якщо $k < \log n$.

Приклад 3.3. Знайдемо опуклу оболонку множини точок $P_1(0, 0), P_2(-1, -2), P_3(2, 2), P_4(-3, 2), P_5(2, -3), P_6(5, 0), P_7(4, 4)$.

Знаходимо точку з найменшою абсцисою і вносимо її в список точок опуклої оболонки $S = \{P_4\}$. Відносно цієї точки обчислюємо кутіві коефіцієнти решти точок:

$$k_{14} = -\frac{2}{3}, k_{24} = -2, k_{34} = 0, k_{54} = -1, k_{64} = -\frac{1}{4}, k_{74} = \frac{2}{7}.$$

Найменший серед них найменшим є $k_{24} = -2$, тому наступною точкою в опуклій оболонці буде точка P_2 , яку вносимо в список $S = \{P_4, P_2\}$. Далі обчислюємо кутіві коефіцієнти

3 Побудова опуклих оболонок

відносно P_2 :

$$k_{12} = 2, k_{32} = \frac{4}{3}, k_{52} = -\frac{1}{3}, k_{62} = \frac{1}{3}, k_{72} = \frac{6}{5}.$$

Серед, коефіцієнтів, які більші за $k_{24} = -2$, найменшим є $k_{52} = -\frac{1}{3}$. Тому вносимо P_5 до списку $S = \{P_4, P_2, P_5\}$. Обчислюємо:

$$k_{15} = -\frac{3}{2}, k_{35} = \frac{5}{0}, k_{65} = 1, k_{75} = \frac{7}{2}.$$

Серед, коефіцієнтів, які більші за $k_{52} = -\frac{1}{3}$, найменшим є $k_{65} = 1$. Тому вносимо P_6 до списку $S = \{P_4, P_2, P_5, P_6\}$. Обчислюємо:

$$k_{16} = 0, k_{36} = -\frac{2}{3}, k_{76} = -4.$$

Коефіцієнтів, які більші за $k_{65} = 1$, в цьому списку немає. Тому додаємо до списку ще $k_{46} = -\frac{1}{4}$ і шукаємо найменший коефіцієнт списку. Це $k_{76} = -4$. Далі вносимо P_7 до списку $S = \{P_4, P_2, P_5, P_6, P_7\}$. Обчислюємо:

$$k_{17} = 1, k_{37} = 1, k_{47} = \frac{2}{7}.$$

Найменшим серед цих коефіцієнтів і більшим за $k_{76} = -4$ є коефіцієнт $k_{47} = \frac{2}{7}$. Тому наступною точкою має бути P_4 , але вона є початковою точкою списку, тому

$$CH(P) = \{P_4, P_2, P_5, P_6, P_7\}.$$

Вправа 3.3. Методом Джарвіса побудувати опуклу оболонку для такого набору точок $(1,3), (3,3), (4,2), (0,5), (1,0), (7,6), (2,4)$.

3.5 Метод розділяй та володарюй

Упорядкуємо множину M лексикографічно (за зростанням першої координати): $M = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Розіб'ємо множину вершин на дві приблизно рівні частини: ліву та праву, так що довільна перша координата точки з лівої частини менша довільної першої координати точки з правої частини. Якщо $x_{[n/2]} < x_{[n/2]+1}$, то ліва множина $L = \{P_1, P_2, \dots, P_{[n/2]}\}$, а права множина $R = \{P_{[n/2]+1}, P_{[n/2]+2}, \dots, P_n\}$.

Далі для кожної цих множин будуюмо опуклі оболонки $CH(L)$ та $CH(R)$ та об'єднуємо їх. Для побудови опуклих оболонок $CH(L)$ та $CH(R)$ можна знову застосувати метод розділяй та володарюй, розділивши кожну з цих множин на дві. Процес ділення множини на дві завершиться, якщо в цих множинах не більше ніж по три точки. Опукла оболонка над множиною з двох тоочок є відрізком, з кінцями в цих точках. Для множини N з трьох точок P_i, P_j, P_k :

якщо $\Delta_{ijk} > 0$ опукла оболонка $CH(N) = \{P_i, P_j, P_k\}$,
якщо $\Delta_{ijk} < 0$ опукла оболонка $CH(N) = \{P_i, P_k, P_j\}$,
якщо $\Delta_{ijk} = 0$ та $i < j < k$, опукла оболонка $CH(N) = \{P_i, P_k\}$.

Для об'єднання двох опуклих оболонок лівої $\{P_1, \dots, P_k\}$ та правої Q_1, \dots, Q_m будуюмо для них опорні прямі. Це такі прямі, які містять хоча б по одній вершині з кожної опуклої оболонки і не перетинають внутрішності опуклих оболонок.

Для побудови верхньої опорної кривою проведемо пряму через верхні точки опуклих оболонок $P_k(x_k, y_k)$ та $Q_m(x_m, y_m)$. Якщо $y_k = y_m$, то пряма P_kQ_m є опорною. Якщо ця рівність не виконується, то розглянемо випадок $y_k > y_m$. Тоді, за побудовою, точки $Q_mP_kP_{k+1}$, а також точки $Q_mP_kQ_{m+1}$ утворюють ліві повороти. P_kQ_m буде опорною кривою тільки в тому випадку, якщо точки $Q_mP_kP_{k-1}$, а також точки $Q_mP_kQ_{m-1}$ не утворюють праві повороти. Якщо ж точки $Q_mP_kP_{k-1}$ утворю-

ють правий поворот, то наступним кандидатом в опорні криві є пряма $P_{k-1}Q_m$. Для неї виконуємо ті самі перевірки із сусідніми вершинами і якщо один з поворотів буде правим, то змінюємо відповідну вершину до тих пір поки всі повороти не стануть лівими, а отримана при цьому пряма буде опорною.

Часто при використанні методу "розділяй та володарюй" всю підмножину розділяють на підмножини по три (сусідні за абсцисою) точки і не більше 2 підмножин по 2 точок. Для підмножин по три точки – опуклою оболонкою є трикутник з вершинами в цих точках, якщо вони не лежать на одній прямій, або відрізок в іншому випадку. Опуклими оболонками двоточкових підмножин є відрізки з кінцями в цих точках.

Приклад 3.4. Знайдемо опуклу оболонку лексикографічно упорядкованої множини точок $P_0(0, 0)$, $P_1(1, 4)$, $P_2(2, -1)$, $P_3(3, -4)$, $P_4(4, 3)$, $P_5(5, -3)$, $P_6(6, -1)$, $P_7(7, 5)$, $P_8(8, 2)$, $P_9(9, 1)$.

Розбиваємо множину точок на 4 підмножини і записуємо їх опуклі оболонки:

$$S = P_0P_1P_2, \quad T = P_3P_4P_5, \quad U = P_6P_7, \quad V = P_8P_9.$$

Оскільки $\Delta_{012} = -9 < 0$, то трикутник S правоповоротний. $\Delta_{345} = -13 < 0$, тому трикутник T також правоповоротний. Найвищі точки трикутників P_1 та P_4 , $y_1 = 4 > 3 = y_4$, найнижчі – P_2 та P_3 . Перевіряємо, чи є P_4P_1 верхнім опорним відрізком: $\Delta_{412} = 14 > 0$, $\Delta_{415} = 17 > 0$, отже P_4P_1 верхній опорний відрізок.

Далі проводимо перевірку P_2P_3 на нижній опорний відрізок: $y_2 = -1 > -4 = y_3$, $\Delta_{234} = 10 > 0$, $\Delta_{230} = -5 < 0$, тому P_2P_3 заміняємо на P_0P_3 і знову проводимо перевірки: $\Delta_{031} = 16 > 0$, $\Delta_{034} = 25 > 0$. Тому P_0P_3 – нижній опорний відрізок. Проводимо злиття опуклих оболонок, починаючи з нижнього опорного відрізка, далі за правим трикутником до верхнього опорного відрізка, потім за ним і по лівому трикутнику до

3 Побудова опуклих оболонок

початкової точки:

$$ST = P_0P_3P_5P_4P_1.$$

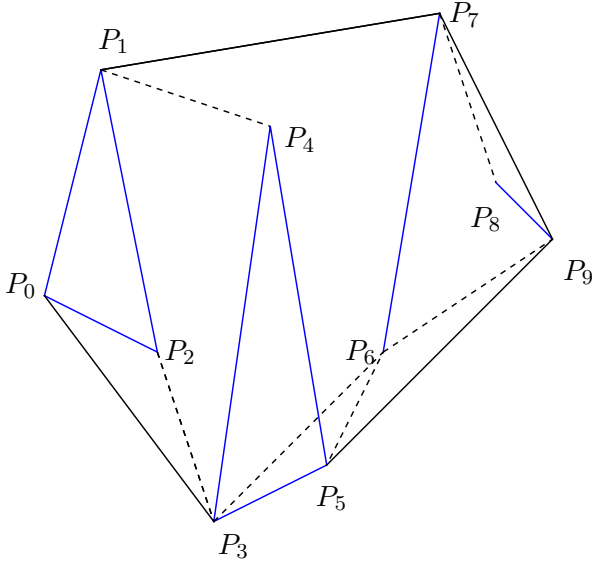


Рис. 3.3: опукла оболонка методом "розділяй та володарюй"

Для U та V верхні точки P_7 та P_8 , нижні – P_6 , P_9 . Перевіряємо P_8P_7 на верхній опорний відрізок: $\Delta_{879} = -2 < 0$, тому заміняємо його на P_9P_7 та перевіряємо: $\Delta_{976} = 16 > 0$. Тому P_9P_7 – верхній опорний відрізок.

Для відрізка P_6P_9 : $\Delta_{697} = 16 > 0$, $\Delta_{698} = 5 > 0$. Тому P_6P_9 – нижній опорний відрізок. В результаті злиття U та V отримуємо трикутник $UV = P_6P_9P_7$.

Далі проводимо злиття ST та UV . Їх найвищі вершини P_1 , P_7 , ($y_1 = 4 < 5 = y_7$), а найнижчі – P_3 , P_6 ($y_3 = -4 < -1 = y_6$).

Для P_7P_1 : $\Delta_{710} = 23 > 0$, $\Delta_{716} = 35 > 0$, тому він верхній опорний відрізок.

3 Побудова опуклих оболонок

Для P_3P_6 : $\Delta_{365} = -3 < 0$, заміняємо його на P_5P_6 . Робимо перевірки для P_5P_6 : $\Delta_{564} = 8 > 0$, $\Delta_{569} = -4 < 0$. Заміняємо на P_5P_9 . Перевіряємо: $\Delta_{593} = 4 > 0$, $\Delta_{597} = 24 > 0$. Отже, P_5P_9 – нижній опорний відрізок. Будуємо опуклу оболонку починаючи з P_0 йдемо по ST до P_5 , далі P_5P_9 , за UV до P_7 , потім P_7P_1 , і нарешті за ST до P_0 . Отримаємо:

$$CH(P) = P_0P_3P_5P_9P_7P_1.$$

Вправа 3.4. Методом розділяй та володарюй побудувати опуклу оболонку для такого набору точок $(1,1)$, $(3,2)$, $(4,3)$, $(0,5)$, $(1,0)$, $(7,6)$, $(2,4)$.

3.6 Швидкий метод (Quick Hull)

Серед всіх точок множини M ми можемо зразу виділити декілька точок, які належать опуклій оболонці – це точки з найменшими та найбільшими координатами. Якщо точок з найменшою першою координатою декілька, то опуклій оболонці будуть належати ті з них, у яких найбільша та найменша друга координата. Припустимо, що $P_1(x_1, y_1)$ – єдина точка з найменшою другою координатою серед точок з M , $P_2(x_2, y_2)$ – єдина точка з найбільшою першою координатою, $P_3(x_3, y_3)$ – єдина точка з найбільшою другою координатою серед точок з M , $P_4(x_4, y_4)$ – єдина точка з найменшою першою координатою. Тоді решта точок P_i з M лежать всередині прямокутника $x_4 < x < x_2$, $y_1 < y < y_3$. Попередній список вершин опуклої оболонки $S = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$.

Розглянемо першу пару точок P_1, P_2 . Можливі такі випадки:

1) Якщо для всіх з решти точок P_i визначник $\Delta_{12i} > 0$, то ребро P_1P_2 належить опуклій оболонці і ми переходимо до наступного ребра (P_2P_3) .

3 Побудова опуклих оболонок

2) Якщо серед точок P_i є такі, для яких $\Delta_{12i} < 0$, знайдемо ту з них, яка має найменше значення Δ_{12i} і внесемо її в список S між точками P_1, P_2 (якщо таких точок декілька, то вносимо дві крайніх з них). Для нового списку повторюємо процедуру, починаючи з першого утвореного ребра.

Продовжуємо ці перевірки з внесенням нових точок в список S поки не дійдемо і перевіримо останнє ребро в множині S , яке закінчується в точці P_1 .

Швидкість роботи цього методу $O(nk)$, де k – число вершин побудованої опуклої оболонки.

Приклад 3.5. Знайдемо опуклу оболонку множини точок $P_1(0, 6)$, $P_2(7, 1)$, $P_3(4, 6)$, $P_4(10, 7)$, $P_5(2, 0)$, $P_6(9, 2)$, $P_7(3, 8)$, $P_8(9, 4)$.

Знаходимо мінімальні та максимальні значення за кожною з координат:

$$x_{\min} = x_1 = 0, \quad y_{\min} = y_5 = 0, \quad x_{\max} = x_4 = 10, \quad y_{\max} = y_7 = 8.$$

Тому $CH(P) \subset [0, 10] \times [0, 8]$. Вносимо відповідні вершини в попередній список опуклої оболонки: $S = \{P_1, P_5, P_4, P_7\}$.

Знаходимо точки, які утворюють правий поворот відносно P_1P_5 . Оскільки точок зі списку, у яких $x_i < x_5 = 2$ і $y_i < y_1 = 6$ не існує, то всі точки списку утворюють лівий поворот. Переходимо до наступного ребра.

Для ребра P_5P_4 точки P_2, P_3, P_6, P_8 лежать в прямокутнику $[2, 10] \times [0, 7]$, тому для них обчислюємо визначники: $\Delta_{542} = -27 < 0, \Delta_{543} = 36 > 0, \Delta_{546} = -33 < 0, \Delta_{548} = -17 < 0$. Найменший серед них у точки P_6 , тому вносимо її у список між P_5 та P_4 : $S = \{P_1, P_5, P_6, P_4, P_7\}$.

Далі перевірки проводимо для ребра P_5P_6 для точок з від'ємними визначниками при попередній перевірці: $\Delta_{562} = -3 < 0, \Delta_{568} = 14 > 0$. Тому вносимо в список P_2 між P_5 та P_6 . Маємо: $S = \{P_1, P_5, P_2, P_6, P_4, P_7\}$.

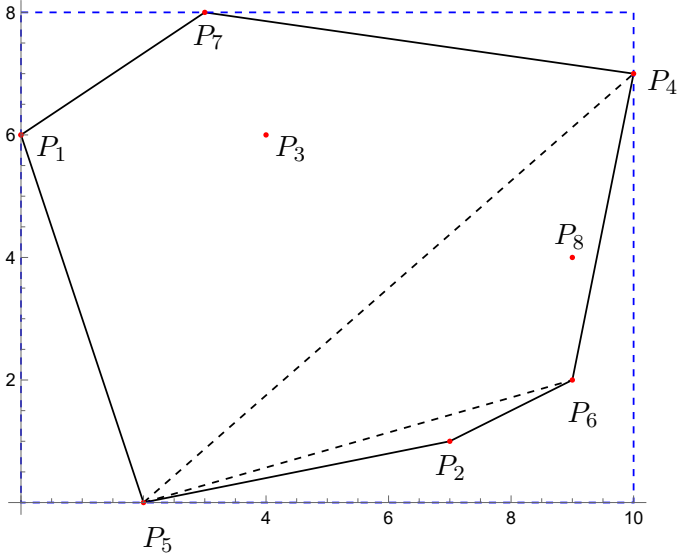


Рис. 3.4: опукла оболонка швидким методом

Робимо перевірки для новостворених ребер: $\Delta_{528} = 13 > 0$, $\Delta_{268} = 4 > 0$, $\Delta_{648} = 2 > 0$. Тому точка P_8 – внутрішня. Аналогічно, пересвідчуємося, що $\Delta_{473} > 0$, $\Delta_{713} > 0$. Отже, точка P_3 також внутрішня. Тому остаточно маємо:

$$CH(P) = P_1P_5P_2P_6P_4P_7.$$

Вправа 3.5. Швидким методом побудувати опуклу оболонку для такого набору точок $(1,2), (3,1), (4,4), (0,5), (1,0), (7,6), (2,4)$.

3.7 Інші методи

Інші методи, в основному, є або частковими випадками або комбінацією тих методів, які ми вже розглянули.

Інкрементний алгоритм схожий до методу розділяй та володарюй, коли одна з множин є точкою. Цей метод застосо-

3 Побудова опуклих оболонок

вується, коли після отриманого розв'язку задачі змінюються початкові дані – додається точка. Якщо точка лежить всередині опуклої оболонки, то опукла оболонка не змінюється, а якщо точка лежить зовні, то ми так само як у методі розділяй та володарюй будуємо дві опорні криві в цій точці, які будуть новими двома сторонами нової опуклої оболонки. Кінці опорних кривих розбивають опуклу оболонку на зовнішню та внутрішню. Нова опукла оболонка складається із зовнішньої частини старої та двох сторін (опорних кривих).

Також, ефективним алгоритмом є такий алгоритм, що поєднує у собі метод Грехема та метод Джарвіса: всі точки розбиваються на декілька груп (не проводячи при цьому жодних упорядкувань), для яких будуються опуклі оболонки методом Грехема, а потім вони об'єднуються так, як у методі Джарвіса.

4 Задачі на перетин

4.1 Перетин відрізків

4.1.1 Взаємне розташування двох відрізків

Нехай задано два відрізки P_1P_2 та P_3P_4 , з кінцями $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$, $P_1 \neq P_2, P_3 \neq P_4$. Можливі такі випадки їх взаємного розташування

1. Якщо $\Delta_{123}\Delta_{124} < 0$ та $\Delta_{341}\Delta_{342} < 0$, то відрізки перетинаються у внутрішній для кожного з них точці.

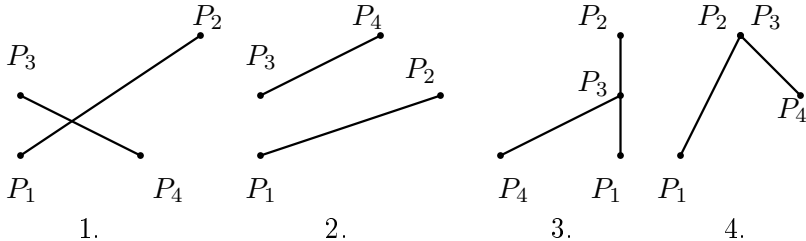


Рис. 4.1: взаємне розташування двох відрізків (не колінарні кінці)

2. Якщо $\Delta_{123}\Delta_{124} > 0$ або $\Delta_{341}\Delta_{342} > 0$, то відрізки не перетинаються.
3. Якщо $\Delta_{123} = 0$ та $\Delta_{341}\Delta_{342} < 0$, то відрізки перетинаються у точці P_3 , що є внутрішньою для P_1P_2 .

4 Задачі на перетин

4. Якщо $\Delta_{123} = 0$, $\Delta_{234} = 0$, $\Delta_{341} \neq 0$, $\Delta_{412} \neq 0$, то відрізки не лежать на одній прямій мають спільний кінець $P_2 = P_3$.
5. Якщо $\Delta_{123} = 0$, $\Delta_{234} = 0$, $\Delta_{341} = 0$, $\Delta_{412} = 0$, то відрізки лежать на одній прямій. В цьому випадку використовуємо лексикографічний порядок вершин для визначення їх взаємного розташування.
- а) Якщо $P_1 < P_3$, $P_2 < P_3$, $P_1 < P_4$ та $P_2 < P_4$, то відрізки не перетинаються. Так само вони не перетинаються, якщо всі знаки одночасно замінити на протилежні.

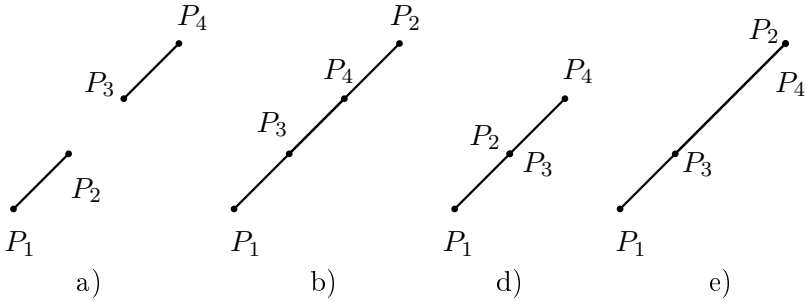


Рис. 4.2: взаємне розташування двох відрізків (колінійні кінці)

- b) Якщо $P_1 < P_3 < P_2 < P_4$, то відрізки перетинаються за відрізком P_2P_3 .
- c) Якщо $P_1 < P_3 < P_4 < P_2$, то $P_3P_4 \subset P_1P_2$.
- d) Якщо $P_1 < P_2 = P_3 < P_4$, то у відрізків одна спільна точка – їх спільний кінець.
- e) $P_1 < P_3 < P_2 = P_4$, то $P_3P_4 \subset P_1P_2$ і відрізки мають спільний кінець.
- f) $P_1 = P_3$ і $P_2 = P_4$ або $P_1 = P_4$ і $P_2 = P_3$ – відрізки збігаються.

4.1.2 Перетин багатьох відрізків. Наївний алгоритм

Нехай маємо n відрізків P_iQ_i , $1 \leq i \leq n$. Для кожної пари відрізків визначимо їх взаємне розташування. Оскільки кожна операція по визначенню взаємного розташування може бути виконана за скінчене число (що менше за 50) операцій, то для розв'язання задачі потрібно $O(n^2)$ операцій.

4.1.3 Метод замітання прямою

Метод замітання прямою (sweep line) або планарного замітання (plane sweeping) є одним з основних методів для багатьох задач обчислювальної геометрії. Основна ідея цього методу полягає у тому, що ми рухаємо горизонтальну або вертикальну пряму в перпендикулярному до неї напрямку. Наприклад, будемо рухати горизонтальну пряму згори донизу. В кожний момент часу пряма перетинає об'єкт, яким ми цікавимося і ми записуємо цю інформацію у вигляді вектора, який називається статусом і позначається S . Ми прослідковуємо як змінюється статус і після того, як пряма пройшла весь об'єкт, то інформація, що міститься в статусах в певні моменти часу дозволяє дати відповідь на поставлену задачу. Ці моменти часу, які ми відображаємо називаються подіями. Ми створюємо чергу подій. При переході від однієї події до іншої ми обробляємо інформацію для визначення зміни статусу. Також при обробці інформації ми можемо додавати нові події. Продемонструємо роботу методу на прикладі задачі перетину відрізків.

Для відрізків P_iQ_i , $1 \leq i \leq n$, без обмеження загальності, будемо вважати, що $P_i(x_i^p, y_i^p)$ – нижні кінці, а $Q_i(x_i^q, y_i^q)$ – верхні кінці, тобто $y_i^p < y_i^q$, а також що другі координати різних кінців різні. Будемо розглядати ситуацію, коли всі перетини – внутрішні точки відрізків. Упорядкуємо всі y_i^p, y_i^q за зростанням та поставимо їх в чергу подій. В початковий момент часу статус S порожній. При проходженні певної події y_j

4 Задачі на перетин

в черзі він змінюється. Якщо ця подія відповідає нижньому кінцю, то в статус вноситься номер відповідного відрізка, а якщо ця подія відповідає верхньому кінцю, то номер відрізка викреслюється. При цьому ми знаходимо абсциси перетинів відрізків, що були до цього у статусі з прямою y_j і упорядковуємо номери відрізків у статусі за зростанням абсцис перетинів. Для кожної пари сусідніх елементів у статусі (один з них лівий, а інший правий) ми перевіряємо, чи змінився їх порядок. 1) Якщо лівий елемент при зміні статусу виявився правіше (з більшою абсцисою) за правий, то між відповідними відрізками існує точка перетину. Ми вносимо її ординату в список подій і обробляємо цю подію так само як і інші. 2) Якщо при зміні статусу всі ліві елементи з пар залишаються лівіше від правих, то між цими подіями перетинів немає і ми переходимо до наступної події.

Швидкість роботи методу $O((n+k) \log n)$, де k – число точок перетину. Отже, цей метод ефективний, якщо число точок перетину невелике, наприклад, якщо кожний відрізок перетинається з не більш ніж m відрізками, де m деяке фіксоване невелике (порівняно з n) число. Якщо k має порядок k^2 (всі відрізки перетинаються один з одним), то наївний алгоритм є більш ефективним.

Вправа 4.1. Модифікувати метод для відрізків, що можуть мати однакові ординати (використовуючи зворотній лексикографічний порядок), а також описати зміну статусу для інших типів перетинів відрізків.

4.2 Перетини, об'єднання та різниця багатокутників

Для знаходження перетинів двох простих багатокутників $L = P_1P_2 \dots P_n$ та $M = Q_1Q_2 \dots Q_m$ будемо знаходити перетини

4 Задачі на перетин

між їх сторонами. Нехай вони перетинаються тільки у внутрішніх точках. Позначимо знайдені точки T_1, T_2, \dots, T_k . Без обмеження загального випадку можемо вважати, що P_1 точка з найменшою абсцисою серед точок обох багатокутників. Тоді вона не належить їх перетину. Також можемо вважати, що точки T_1, T_2, \dots, T_k занумеровані своїми індексами згідно обходу першого багатокутника від точки P_1 . Також, нагадаємо, що за замовченням ми вважаємо, що нумерація вершин і породжений нею обхід багатокутника задані так, що при обході багатокутника локально він залишається справа від кожної своєї сторони. Тоді шлях від вершини P_1 до T_1 по ламаній $P_1P_2 \dots P_n$ не належить перетину, а від точки T_1 до T_2 по ламаній $P_1P_2 \dots P_n$ належить перетину багатокутників. Від точки T_2 по ламаній $Q_1Q_2 \dots Q_m$ рухаємося до найближчої точки перетину. В цій точці змінюємо напрямок руху на ламану $P_1P_2 \dots P_n$ і знову продовжуємо рух. Цей процес завершиться, якщо ми повернулися в початкову точку T_1 . Виписуємо послідовно пройдені точки перетину. Якщо в отриманому списку містяться всі точки перетину T_1, T_2, \dots, T_k , то цей список є перетином багатокутників. Якщо в нього не попали деякі точки, то беремо першу з них. Нехай, це точка T_i . Далі рухаємося по першій ламаній до точки T_{i+1} , далі по другій ламані, потім знову по першій, поки не повернемось до точки T_i . Отже, сформуємо другий список з точок. Якщо всі точки T_1, T_2, \dots, T_k , містяться в цих двох списках, то видаємо їх як два багатокутники, що є перетинами початкових. Якщо ж в ці списки попали не всі точки, то тоді сформуємо наступний список, потім інший. Поки не вичерпаємо всі вершини перетину.

Для знаходження об'єднання $L \cup M$ зауважимо, що точка P_1 , що має найменшу абсцису належить об'єднанню. Тому шлях від точки P_1 до T_1 при обході $P_1P_2 \dots P_n$ належить $L \cup M$. Вносимо його в список і продовжуємо так само як в алгоритмі для знаходження перетину – до тих пір поки не по-

4 Задачі на перетин

вернемося в точку P_1 . При цьому якщо ми не пройшли всі точки перетину, то починаємо з непройденної точки перетину з найменшим номером виписувати наступну компоненту межі. процес закінчиться коли вичерпаємо всі точки перетину.

Для знаходження ламаних, що обмежують різницю багатокутників $L \setminus M$ скористаємось алгоритмом для перетину, оскільки

$$L \setminus M = L \cap (\mathbb{R}^2 \setminus M).$$

Множина $\mathbb{R}^2 \setminus M$ має ту саму межу, що і багатокутник M , але орієнтація (напрямок її обходу) протилежна до стандартної орієнтації межі M . Тому алгоритм знаходження доповнення такий самий, як для об'єднання з тією лише відмінністю, що кожний раз по межі $Q_1 Q_2 \dots Q_m$ ми рухаємось так, що індекси спадають.

Приклад 4.1. Знайдемо перетин, об'єднання та різницю шестикутника $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$ та трикутника $Q_1 Q_2 Q_3$, де $P_1(0, 3)$, $P_2(1, 0)$, $P_3(7, 3)$, $P_4(3, 5)$, $P_5(8, 5)$, $P_6(2, 8)$, $Q_1(5, 1)$, $Q_2(9, 3)$, $Q_3(5, 7)$.

Нехай $P_i(x_i, y_i)$, $Q_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$.

Спочатку пересвідчимося, що шестикутник та трикутник є лівоповоротними. Дійсно, $\Delta_{612} > 0$, $\Delta_{1\tilde{2}\tilde{3}} > 0$.

Послідовно знаходимо перетини сторін трикутника з шестикутником. Почнемо зі сторони $Q_1 Q_2$. Якщо виконується хоча б одна з умов 1) для сторони $P_i P_{i+1}$ $x_i < \tilde{x}_1 = 5$ і $x_{i+1} < \tilde{x}_1 = 5$, 2) $x_i > \tilde{x}_2 = 9$ і $x_{i+1} > \tilde{x}_2 = 9$, 3) $y_i < \tilde{y}_1 = 1$ і $y_{i+1} < \tilde{y}_1 = 1$, 2) $y_i > \tilde{y}_2 = 3$ і $y_{i+1} > \tilde{y}_2 = 3$, то $Q_1 Q_2 \cap P_i P_{i+1} = \emptyset$. Отже, тільки $P_2 P_3$ може перетинати $Q_1 Q_2$. Перевіримо для цих відрізків умови перетину: $\Delta_{\tilde{1}\tilde{1}2} > 0$, $\Delta_{\tilde{1}\tilde{1}3} > 0$ – відрізки не перетинаються.

За аналогією знаходимо точки перетину на відрізку $Q_2 Q_3$. Умовам перетину задовольняють лише відрізки $P_4 P_5$ та $P_5 P_6$.

4 Задачі на перетин

Розв'язуємо такі системи рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_2Q_3 : x + y - 12 = 0 \\ P_4P_5 : y = 5 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_2Q_3 : x + y - 12 = 0 \\ P_5P_6 : x + 2y - 18 = 0 \end{array} \right. .$$

Отримаємо такі точки перетину

$$T_1(7, 5) = Q_2Q_3 \cap P_4P_5, \quad T_2(6, 6) = Q_2Q_3 \cap P_6P_6.$$

За аналогією, знаходимо точки перетинів відрізка Q_3Q_1 (рівняння $x = 5$) зі сторонами шестикутника:

$$T_3(5, 2) = Q_3Q_1 \cap P_2P_3, \quad T_4(5, 4) = Q_3Q_1 \cap P_3P_4,$$

$$T_5(5, 5) = Q_3Q_1 \cap P_4P_5, \quad T_6(5, 6.5) = Q_3Q_1 \cap P_5P_6.$$

При лівоповоротному обході шестикутника отримаємо таку послідовність **P** вершин та точок перетину:

$$P_1P_2T_3P_3T_4P_4T_5T_1P_5T_2T_6P_6.$$

В цій послідовності T_5 стоїть перед T_1 , оскільки абсциса P_4 менша абсциси P_5 ($3 < 8$), отже при русі по цій стороні абсциса зростає, а абсциса T_5 менша абсциси P_1 ($5 < 7$). При русі по стороні P_5P_6 абсциса спадає, тому T_2 передує T_6 . За аналогією отримаємо послідовність **Q** вершин та точок перетину на трикутнику:

$$Q_1Q_2T_1T_2Q_3T_6T_5T_4T_3.$$

Тепер можемо знайти перетин шестикутника з трикутником: оскільки P_1 не належить перетину, то рухаємося від неї по шестикутнику (послідовності **P**) до першої точки перетину. Такою точкою є T_3 . Далі рух по межі шестикутника відбувається як по межі перетину, поки ми не дійдемо до наступної точки перетину. Отже, ми проходимо $T_3P_3T_4$. Точці T_4 ми з послідовності **P** переміщуємося в ту саму вершину послідов-

4 Задачі на перетин

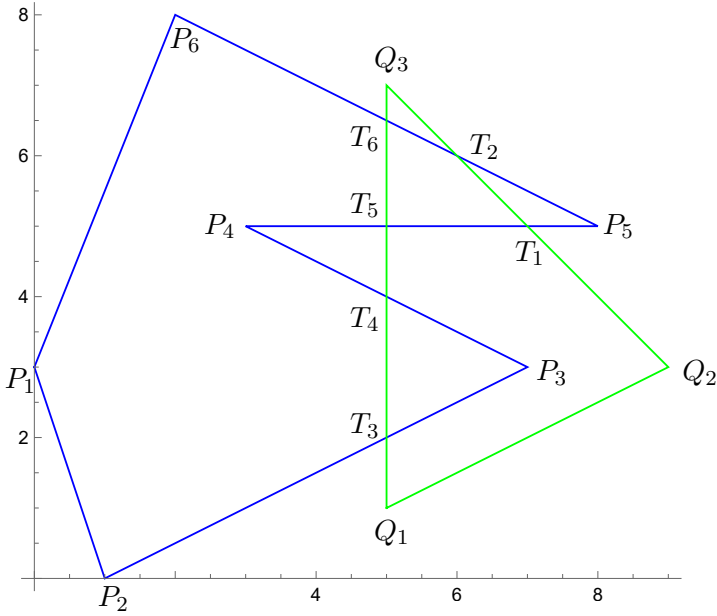


Рис. 4.3: Перетин шестикутника та трикутника

ності \mathbf{Q} і рухаємося за межею трикутника. Наступною точкою в послідовності \mathbf{Q} є точка T_3 , з якої ми починали вписувати вершини перетину. Отже, отримаємо трикутник $T_3P_3T_4$. Оскільки він не містить всіх точок перетину, то ми продовжимо рух від останньої точки перетину T_4 за P (за частиною, що не належить перетину) до наступної точки перетину T_5 . Від цієї точки рухаємося за \mathbf{P} і вписуємо вершини перетину: T_5T_1 , продовжуємо за \mathbf{Q} $T_5T_1T_2$, знову за \mathbf{P} : $T_5T_1T_2T_6$, знову за \mathbf{Q} – повертаємось в точку T_5 . Тому, ця частина перетину є чотирикутником $T_5T_1T_2T_6$. Оскільки в знайденому трикутнику та чотирикутнику містяться всі точки T_i , то ми знайшли всі многокутники перетину. Отже,

$$P_1P_2P_3P_4P_5P_6 \cap Q_1Q_2Q_3 = T_3P_3T_4 \cup T_5T_1T_2T_6.$$

4 Задачі на перетин

Для знаходження об'єднання шестикутника та трикутника послідовність починаємо з P_1 і робимо те саме, як і для перетину: рухаємось за \mathbf{P} : $P_1P_2T_3$, далі за \mathbf{Q} – $P_1P_2T_3Q_1Q_2T_1$ знову змінюємо послідовність, поки не отримаємо багатокутник $P_1P_2T_3Q_1Q_2T_1P_5T_2Q_3T_6P_6$. Він не містить всі T_i тому всередині нього є дірки. Якщо б з вершини T_3 ми продовжили рух за P , то ми рухались би за перетином і в наступній точці T_4 продовжили б рух межею об'єднання: $T_4P_4T_5$. Далі рух за \mathbf{Q} повертає нас в точку T_4 . Тому ця дірка є трикутником. Оскільки ми пройшли всі точки T_i , то інших дірок немає. Отже,

$$P_1P_2P_3P_4P_5P_6 \cup Q_1Q_2Q_3 = P_1P_2T_3Q_1Q_2T_1P_5T_2Q_3T_6P_6 \setminus T_4P_4T_5.$$

Для знаходження доповнення шестикутника та трикутника за послідовністю \mathbf{P} рухаємось як і раніше, а за послідовністю \mathbf{Q} рухаємось у зворотному напрямку. Починаємо від P_1 , отримуємо

$$P_1P_2P_3P_4P_5P_6 \setminus Q_1Q_2Q_3 = P_1P_2T_3T_4P_4T_5T_6P_6 \cup T_1P_5T_2.$$

Тут відрізки T_1T_2 , T_3T_4 та T_5T_6 належать трикутнику, тому вилучаються з меж отриманих багатокутників.

Вправа 4.2. Знайти багатокутники які є перетином, об'єднанням та різницею двох трикутників ABC та DEF , якщо

$$A(0, 0), B(6, 0), C(2, 6), D(1, 4), E(3, 1), F(5, 5).$$

5 Задачі локалізації на планарному розбитті

Для розбиття площини на області ми використовуємо поняття плоского графа. Тому нагадаємо основні означення з теорії графів.

Означення 5.1. Графом називається пара множин $G = \{V, E\}$, де V називається множиною вершин, а E називається множиною ребер і кожне ребро задається парою вершин:

$$e_i \in E : e_i = (v_{i_1}, v_{i_2}), v_{i_1}, v_{i_2} \in V.$$

Вершини $v_{i_1}, v_{i_2} \in V$ називаються кінцями ребра $e_i = (v_{i_1}, v_{i_2})$.

Означення 5.2. Ізоморфізмом графом $G_1 = \{V_1, E_1\}$ на граф $G_2 = \{V_2, E_2\}$ називається пара бієктивних відображень $g : V_1 \rightarrow V_2, h : E_1 \rightarrow E_2$ таких, що для кожного ребра $e = (v, w) \in E_1$ образи кінців є кінцями образу:

$$h(e) = (g(v), g(w)).$$

Означення 5.3. Топологічним графом в евклідовому просторі \mathbb{R}^n (в топологічному просторі X) називається пара $G = \{V, E\}$, де $V \subset \mathbb{R}^n$ ($V \subset X$) – дискретна множина, а E – множина, що складається із шляхів, які починаються та закінчуються в деяких точках з множини V .

5.1 Плоскі графи

Означення 5.4. Плоским графом називається топологічний граф на площині \mathbb{R}^2 .

Означення 5.5. Планарним графом називається граф, для якого існує ізоморфізм на плоский граф.

Теорема 5.1. (Куратовського). *Граф є планарним тоді та тільки тоді, коли він не містить підмножин, гомеоморфних графам K_5 або $K_{3,3}$.*

5.1.1 Топологічні властивості плоских графів

Означення 5.6. Плоским прямолінійним графом називається такий плоский граф, в якому всі ребра є відрізками (інтервалами прямих).

Теорема 5.2. (Фарі). *Кожний планарний граф ізоморфний плоскому прямолінійному графу.*

Формула Ейлера. *Якщо до числа вершин зв'язного плоского графа додати число граней та відняти число ребер, то отримуємо два:*

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

Для незв'язного плоского графа сума числа вершин та граней дорівнює сумі числа ребер компонент зв'язності k та одиниці:

$$|V| + |F| = |E| + k + 1.$$

Триангуляцією площини називається такий зв'язний плоский граф, у якого кожна грань має три ребра. Оскільки кожне ребро міститься в межі двох граней, то $3|F| = 2|E|$. Помножимо формулу Ейлера на 2 і замінимо $2|E|$ на $3|F|$. Отримуємо: $|F| = 2|V| - 4$, $|E| = \frac{3}{2}|F| = 3|V| - 6$.

5.1.2 Кодування плоских прямолінійних графів

Означення 5.7. Для кожного ребра плоского графа з вершинами v_i та v_j розглянемо два направлені відрізки $v_i v_j$ та $v_j v_i$, які будемо називати півребрами. Півребра з однаковими кінцями будемо називати півребрами-близнюками. Якщо ребро потовстити до прямокутника, то півребра будуть відповідати довгим сторонам прямокутника і орієнтовані згідно лівоповоротного обходу прямокутника. Тому для кожній з двох граней, суміжних з даним ребром, буде відповідати лише одне півребро, а півребру відповідає одна суміжна з ним грань.

Структура плоского прямолінійного графа може бути задана за допомогою таких трьох списків:

1. Список вершин. Поряд з кожною вершиною ми вказуємо її координати і одне з півребер, які з неї виходять.
2. Список граней. Разом з кожною гранню ми вказуємо одне з півребер, що належить обходу її зовнішньої компоненти межі, а також по одному півребру для кожної внутрішньої компоненти. Зовнішню грань у списку записуємо останньою.
3. Список півребер. Разом з кожним півребром ми вказуємо ще таку інформацію:
 - вершину, що є початком півребра,
 - півребро-близнюка,
 - інцидентну до півребра грань,
 - попереднє при обході цієї грані півребро,
 - наступне при обході цієї грані півребро.

Приклад 5.1. Знайдемо списки структури для графа G , з вершинами $v_0(0, 0)$, $v_1(7, 0)$, $v_2(9, 2)$, $v_3(8, 6)$, $v_4(1, 7)$, $v_5(3, 4)$,

5 Задачі локалізації на планарному розбитті

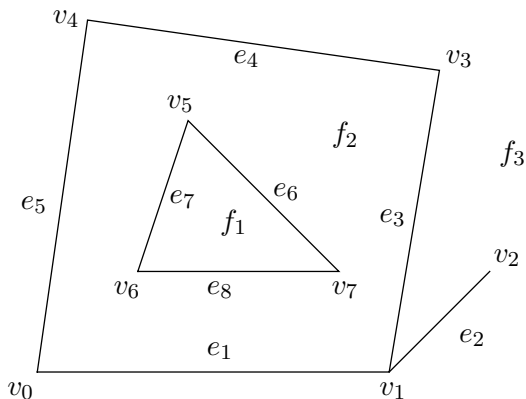


Рис. 5.1: незв'язний граф

$v_6(2, 2)$, $v_7(6, 2)$ та ребрами $e_1(v_0, v_1)$, $e_2(v_1, v_2)$, $e_3(v_1, v_3)$, $e_4(v_3, v_4)$, $e_5(v_0, v_5)$, $e_6(v_5, v_7)$, $e_7(v_5, v_6)$, $e_8(v_6, v_7)$.

Для півребер, що задані як упорядковані пари вище будемо використовувати ті самі позначення, як задані ребра. Півребро близьку до e_i будемо позначати d_i .

Спочатку складемо список вершин (Табл. 5.1). Використовуємо задані координати. Для знаходження півребра, що виходить, знаходимо перше ребро, що містить дану вершину. Якщо ця вершина стоїть в парі на першому місці, то вписуємо це півребро, а якщо на другому, то вписуємо обернене півребро.

Тепер складемо список граней (Табл. 5.2). У списку будемо вибирати півребра з найменшими номерами.

Нарешті випишемо список ребер (Табл. 5.3).

На цьому прикладі покажемо, як за цими списками знайти потрібну інформацію про вершини, ребра чи грані.

Знайти всі півребра, що виходять з вершини v_1 (в порядку обходу проти годинникової стрілки). Починаємо з ребра, що міститься в списку вершин, для вершини v_1 , отримаємо: e_2 . В списку ребер знаходимо, ребро, що попереднє до e_2 : ребро

5 Задачі локалізації на планарному розбитті

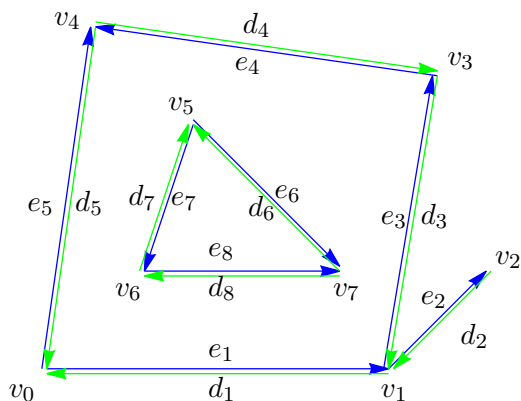


Рис. 5.2: півребра графа

d_3 . Воно входить в v_1 , беремо ребро-близнюк e_2 , яке виходить з v_1 . Отже, попередній список ребер: $\{e_2, e_3\}$. Для останнього ребра списку e_3 знаходимо близнюка до попереднього ребра. Отримаємо: d_1 . Отже, попередній список ребер стає таким: $\{e_2, e_3, d_1\}$. Близнюк до попереднього ребра d_1 є початкове ребро e_2 . Отже, список $\{e_2, e_3, d_1\}$ є остаточним списком ребер.

Знайти всі півребра, що лежать в межі грані f_2 (при лівоповоротному обході). Почнемо із зовнішніх півребер. В списку граней, знаходимо таке ребро для грані f_2 . Це ребро e_1 . Далі в списку ребер знаходимо наступне ребро (next): e_3 . Наступне до e_3 – ребро e_4 . Наступне – d_5 . Оскільки, наступне до d_5 – початкове ребро e_1 , то повний список зовнішніх ребер: $\{e_1, e_3, e_4, d_5\}$. За аналогією, шукаємо внутрішні ребра: $\{e_6, d_8, d_7\}$.

Перевірити, чи вершина v_3 є суміжною до вершини v_1 . Для цього випишемо список всіх ребер, що входять у вершину v_1 : $\{d_2, d_3, e_1\}$. Серед початків цих ребер є вершина v_3 (початок d_3). Це означає що, вершини v_1 та v_3 є суміжними.

Отже, наведені списки дозволяють швидко (за час не більший за $O(n)$), розв'язувати схожі задачі, які виникають при

Табл. 5.1: список вершин

Вершина	координати	півребро
v_0	0,0	e_1
v_1	7,0	e_2
v_2	9,2	d_2
v_3	8,6	e_4
v_4	1,7	d_5
v_5	3,5	e_7
v_6	2,2	d_7
v_7	6,2	d_8

Табл. 5.2: список граней

грань	зовнішнє півребро	внутрішні півребра
f_1	d_6	
f_2	e_1	e_6
f_3	∞	d_1

роботі з графами.

Вправа 5.1. Знайти списочку структуру графа, заданого вершинами $v_0(0, 0)$, $v_1(7, 0)$, $v_2(3, 6)$, $v_3(3, 4)$, $v_4(3, 2)$, $v_5(7, 4)$ та ребрами $e_1(v_0, v_1)$, $e_2(v_1, v_2)$, $e_3(v_2, v_0)$, $e_4(v_3, v_4)$, $e_5(v_1, v_5)$.

5.1.3 Накладання плоских прямолінійних графів

Задача. Нехай на площині є два прямолінійні графи G_1, G_2 . Знайти граф G , вершинами якого є вершини обох графів, а також точки перетину їх сторін. Ребрами графа G є ті частини, на які точки перетину розбивають ребра початкових графів. Сюди також входять ребра початкових графів, що не перетинаються.

Табл. 5.3: список ребер

ребро	вершина	близнюк	грань	prev	next
e_1	v_0	d_1	f_2	d_5	e_3
d_1	v_1	e_1	f_3	d_2	e_5
e_2	v_1	d_2	f_3	d_3	d_2
d_2	v_2	e_2	f_3	e_2	d_1
e_3	v_1	d_3	f_2	e_1	e_4
d_3	v_3	e_3	f_3	d_4	e_2
e_4	v_3	d_4	f_2	e_3	d_5
d_4	v_4	e_4	f_3	e_5	d_3
e_5	v_3	d_5	f_3	d_1	d_4
d_5	v_5	e_5	f_2	e_1	e_4
e_6	v_0	d_6	f_2	d_7	d_8
d_6	v_5	e_6	f_1	e_8	e_7
e_7	v_6	d_7	f_1	d_6	e_8
d_7	v_7	e_7	f_2	d_8	e_6
e_8	v_7	d_8	f_1	e_7	d_6
d_8	v_8	e_8	f_2	e_6	d_7

Для розв'язання цієї задачі можна використати метод плоского замітання (замітання прямою), як при знаходженні перетинів відрізків, треба лише його модифікувати так, щоб в точках перетину він видавав суміжні з цими точками ребра.

5.2 Триангуляції многокутників

Означення 5.8. *Діагоналлю* простого многокутника називається відрізок, кінцями якого є дві вершини многокутника, а його внутрішність лежить у внутрішності многокутника.

Теорема 5.3. *Для любого простого n -кутника з $n \geq 4$ існує діагональ.*

5 Задачі локалізації на планарному розбитті

Доведення. Занумеруємо точки n -кутника $P_1P_2\dots P_n$ так, що точка P_2 є самою лівою. Якщо P_1P_3 – діагональ, то теорему доведено. Припустимо, що цей відрізок не є діагоналлю. Це означає, що у трикутнику $P_1P_2P_3$ містяться інші вершини многокутника. Нехай P_k та з них, яка має найбільшу відстань до прямої P_1P_3 . Тоді P_2P_k – шукана діагональ многокутника.

Означення 5.9. *Триангуляцією* многокутника називається розбиття многокутника на трикутники найбільшим можливим набором діагоналей, що не перетинаються між собою у внутрішніх точках.

Теорема 5.4. *Для любого простого n -кутника існує триангуляція. Кожна триангуляція простого n -кутника задається $n - 3$ діагоналями та містить $n - 2$ трикутника.*

Доведення. Для побудови триангуляції будемо проводити діагоналі розбиваючи многокутник на менші. Потім у утворених многокутників знову будемо проводити діагоналі і розбивати їх на менші поки не отримаємо розбиття на трикутники. Число діагоналей та трикутників триангуляції доводиться за індукцією. Базою індукції є трикутник. Крок індукції – розбиття многокутника довільною діагоналлю. Нехай отримаємо k -кутник та m -кутник. Тоді $k + m = n + 2$ (бо два кінці діагоналі входять у вершини як k -кутника так і m -кутника). Тоді число діагоналей n -кутника (сума чисел діагоналей + одна діагональ, що розбиває) дорівнює

$$k - 3 + m - 3 + 1 = k + m - 5 = n + 2 - 5 = n - 3.$$

Число трикутників є сумою чисел трикутників:

$$k - 2 + m - 2 = k + m - 4 = n + 2 - 4 = n - 2.$$

Отже, теорему доведено.

Наївний алгоритм побудови триангуляції простого багатокутника полягає в переборі всіх можливих пар вершин, які перевіряються на те, чи є вони діагоналлю. Для цього перевіряємо для кожної сторони, чи можлива діагональ її перетинає. Отже, треба виконати приблизно n^3 операцій. Після знаходження діагоналі, багатокутник розбивається на менші і для них потрібно знайти діагоналі, тобто виконати $n - 2$ такі процедури. Тому швидкість роботи такого алгоритму $O(n^4)$.

5.2.1 Метод відрізання вух (otectomy)

Означення 5.10. *Вухом* n -кутника $P_1P_2 \dots P_n$ називається трикутник $P_{i-1}P_iP_{i+1}$, що складається з трьох послідовних вершин, в якому сторона $P_{i-1}P_{i+1}$ є діагоналлю n -кутника.

Означення 5.11. *Двоїстим графом* триангуляції називається граф, двоїстий до триангуляції. Тобто, його вершини відповідають трикутникам, а ребра – спільним сторонам трикутників.

Теорема 5.5. *Двоїстий граф триангуляції є деревом.*

Доведення. Двоїстий граф триангуляції є зв'язним, оскільки з довільну внутрішню точку n -кутника можна з'єднати з іншою шляхом всередині багатокутника. Цей шлях задає шлях на двоїстому графі між відповідними вершинами.

Оскільки, кожна діагональ розбиває n -кутник на два, то відповідне їй ребро розбиває двоїстий граф триангуляції. Це означає, що граф не містить циклів (довільне ребро циклу не розбиває граф). А отже, двоїстий граф триангуляції є деревом. Лемі доведено.

Зауваження. Степінь вершин двоїстого графа триангуляції не більша за 3, оскільки кожний трикутник може мати не більше ніж три сусідні трикутники. Вершини степені 1 відповідають вухам триангуляції.

Наслідок. Кожна триангуляція n -кутника ($n > 3$) має як мінімум два вуха, бо кожна дерево має не менше ніж дві вершини степені 1.

Метод відрізання вух полягає в тому, що ми перебираємо всі можливі трійки послідовних вершин і перевіряємо, чи є вони вухами. Після відрізання вуха нові вуха можуть виникнути тільки в тих трикутниках, що містять вершини відрізаного вуха. Отже, цей метод має швидкість роботи $O(n^2)$.

Теорема 5.6. *Нехай для простого n -кутника задана триангуляція. Тоді вершини n -кутника можна розфарбувати у три кольори так, що для кожного трикутника триангуляції всі його вершини мають різні кольори.*

Доведення. Розфарбуємо вершини довільного трикутника триангуляції в три різні кольори. Для суміжного трикутника дві його вершини вже розфарбовані, а третю розфарбуємо в третій колір. Те саме зробимо з наступним трикутником, який суміжний до вже розфарбованих трикутників. Будемо продовжувати цей процес поки не вичерпаємо всі трикутники. По завершенні отримаємо розфарбування вершин n -кутника. Відсутність циклів двоїстого графа гарантує коректність цієї побудови. Теорему доведено.

Зауваження. З доведення теореми також випливає, що розфарбування вершин триангуляції в три кольори є однозначним, з точністю до перестановки кольорів, а розфарбування вершин многокутника залежить від триангуляції.

Задача про картинну галерею. Підлога приміщенні (картинної галереї) є простим n -кутником P , стіни вертикальні. Скільки потрібно охоронців (відеокамер), які б бачили все приміщення.

Теорема 5.7. *Для охорони n -кутника P достатньо $\lfloor n/3 \rfloor$ охоронців.*

5 Задачі локалізації на планарному розбитті

Доведення. Розглянемо довільну триангуляцію n -кутником P і розфарбуємо її вершини в три кольори. Виберемо колір, в який розфарбовано найменше число вершин і розставимо охоронців в цих вершинах. Отже, їх буде не більше ніж $\lfloor n/3 \rfloor$ і вони будуть бачити всі свої трикутники, а, отже, разом вони будуть бачити весь n -кутник.

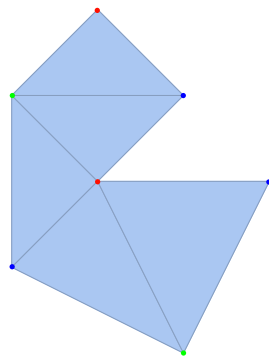


Рис. 5.3: триангуляція многокутника та розфарбування вершин

Приклад 5.2. Код у Wolfram Mathematica для знаходження триангуляції многокутника.

```
R= BoundaryMeshRegion[{{0, 0}, {2, -1}, {3, 1}, {1, 1}, {2, 2}, {1,3}, {0, 2}}, Line[{{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1}}];  
TriangulateMesh[R, MaxCellMeasure -> ∞ ]
```

Вправа 5.2. Знайти триангуляцію шестикутника з вершинами $(0,0)$, $(-1,3)$, $(1,5)$, $(0,2)$, $(4,4)$, $(3,0)$.

5.2.2 Метод монотонних многокутників

Ідея цього методу полягає у тому, щоб розбити многокутник на менші многокутники, триангуляцію яких можна швидко

виконати. Наприклад, для опуклих многокутників триангуляцію можна виконати за час $O(n)$, якщо з довільної вершини провести всі діагоналі.

Означення 5.12. *Y -монотонним многокутником називається многокутник, перетин якого з довільною горизонтальною прямою є зв'язним (тобто порожньою множиною, точкою або відрізком). Многокутник монотонний відносно прямої L , якщо кожна пряма, що перпендикулярна L , перетинає многокутник за зв'язною множиною.*

Теорема 5.8. *Триангуляція монотонного n -кутника може бути виконана за час $O(n)$.*

Доведення. Знаходимо найнижчу та найвищу вершини. Вони розбивають межу n -кутника на ліву та праву ламані. Нумерація вершин n -кутника задає упорядкування списку вершин кожної з ламаних за зростанням координати y . З цих двох списків утворюємо список всіх вершин упорядкованих за зростанням другої координати. Застосовуємо метод вух до трьох преших вершин списку. Після відрізання вуха відповідну вершину викреслюємо зі списку і повторюємо процедуру. Те що трійка не буде вухом можливо лише за умови порушення в ній лівого або правого повороту, що перевіряється за сталий час. Якщо перша трійка не є вухом, то ці три точки лежать або на лівій або на правій ламаній. Переходимо до наступної точки. Якщо ця точка лежить на тій самі ламаній і утворює вуха, то відрізаємо його і продовжуємо процес. Якщо вона не утворює вуха то переходимо до наступної точки. Яку обробляємо так само. Якщо ж наступна точка лежить на іншій ламаній, то з'єднаємо її відрізками з усіма попередніми точками. Викинемо утворені трикутники і відповідні вершини зі списку і продовжимо процес. Оскільки кожна вершина оброблялася не більше ніж 2 рази, то швидкість роботи алгоритму $O(n)$. Теорему доведено.

5 Задачі локалізації на планарному розбитті

Для розбиття багатокутника на Y -монотонні багатокутники будемо використовувати метод плоского замітання, рухаючи горизонтальну пряму знизу догори. Розділимо всі вершини на п'ять типів:

1. *початкові* вершини (start vertex) або V -*вершини* – найнижчі точки для околу багатокутника в цих точках;
2. *кінцеві* вершини (end vertex) або Λ -*вершини* – найвищі точки для околу багатокутника в цих точках;
3. *вершини розщеплення* (split vertex) або Y -*вершини* – найнижчі точки для двох суміжних з нею ребер і не є початковою вершиною;
4. *вершини злиття* (merge vertex) або Λ -*вершини* – найвищі точки для двох суміжних з нею ребер і не є кінцевою вершиною;
5. *регулярні вершини* (regular vertex) – вони є нижнім кінцем однієї сторони і верхнім кінцем іншої сторони.

На рисунках вони позначаються як

Теорема 5.9. *n -кутник є Y -монотонним тоді та тільки тоді, коли в нього немає вершин розщеплення та вершин злиття.*

Доведення. **Необхідність.** Якщо в багатокутнику є вершина розщеплення, то в момент її проходження горизонтальною прямою при русі знизу догори перетин розщеплюється в цій вершині. Отже, після її проходження цей перетин не буде зв'язним. Для вершин злиття відбувається те саме при русі горизонтальної прямої згори донизу.

Достатність. Нехай деяка горизонтальна пряма перетинає багатокутник по більш ніж одному відрізку. Візьмемо правий

кінець самого лівого з відрізків перетину. Почнемо рухатись догори по межі многокутника і продовжимо до першої точки перетину з горизонтальною прямою. Якщо ця точка належить іншій компоненті, то розглянемо найвищу точку цього шляху. Оскільки многокутник локально залишається зліва при вибраному русі, то ця точка є вершиною злиття. Якщо кінцевою точкою шляху є ліва точка самого лівого відрізка, то побудуємо інший шлях, розпочавши рух з попередньої точки донизу. Тоді кінцева точка вже не може бути лівою точкою того самого відрізка, оскільки простий многокутник має зв'язну межу. Отже, для нижнього шляху, за аналогією з верхнім доводимо існування вершини розщеплення. Теорему доведено.

Отже, для розбиття многокутника на Y -монотонні многокутники потрібно з кожної вершини злиття провести діагональ до вершини, що знаходиться вище неї, а для кожної вершини розщеплення до нижньої від неї вершини.

Почнемо з вершин розщеплення. Використовуємо метод плоского замітання: рухаємо горизонтальну пряму знизу до гори. Статус формуємо упорядкованого набору точок перетину. Черга подій формується з вершин, упорядкованих за зростанням другої координати. В момент проходження вершини розщеплення визначаємо в якій компоненті зв'язності вона знаходиться і знаходимо останню вершину (початкову, злиття або регулярну), яка брала участь у формуванні або зміні цієї компоненти. Проводимо діагональ між цією вершиною та вершиною розщеплення. Повторюємо процедуру поки не пройдемо всі вершини розщеплення. Після проведення діагоналей з вершин розщеплення, утворені многокутники не матимуть таких вершин. Застосування методу плоского замітання до утворених многокутників при русі горизонтальної прямої згори донизу дозволяє провести шукані діагоналі до вершин злиття.

Швидкість роботи цього алгоритму $O(n \log n)$.

Означення 5.13. Для розбиття многокутника на монотон-

5 Задачі локалізації на планарному розбитті

ні можна також використовувати графі Ріба функції висоти $h : R \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) = y$. З топологічної точки зору цей граф отримано з многокутника стисканням кожної компоненти перетину горизонтальної прямої з многокутником до точки. По іншому граф Ріба можна визначити як деякий граф (можливо не прямолінійний), який перетинає кожну компоненту лінії рівня $h^{-1}(c)$ в одній точці. При цьому вершини відповідають вершинам многокутника. Тут ми вважаємо що на одному рівні функції лежить не більше ніж одна вершина многокутника. Якщо це не так, то можемо повернути систему координат на досить малий кут, щоб виконувалася ця умова.

Ребра графа орієнтовані згідно напрямку зростання функції (знизу догори). Вершини графа Ріба, так само як вершини многокутника поділяються на 5 типів:

1. *Джерела*, це вершини степені 1, з яких виходить ребро. Вони відповідають початковим вершинам многокутника.
2. *Стоки*, це вершини степені 1, в які входить ребро. Вони відповідають кінцевим вершинам многокутника.
3. *Y-вершини* це вершини степені 3, в які входить одне і виходить два ребра. Вони відповідають вершинам розщеплення.
4. *L-вершини* це вершини степені 3, в які входить два і виходить одне ребра. Вони відповідають вершинам злиття.
5. *регулярні вершини* це вершини степені 2, в які входить одне ребро і одне ребро виходить. Вони відповідають регулярним вершинам многокутника.

Методом замітання прямою граф Ріба будується починаючи із самих нижніх точок. При цьому кожна з вершин і ребра,

що в неї входять, крім Y -вершин, може бути побудована за сталий час. Для Y -вершин треба вирішувати між якими вершинами (ребрами), що вже побудовані, вона знаходиться. На це потрібно $O(\log n)$ часу. Отже, всього потрібно $O(n + k \log n)$ часу, де k – мінімальне з чисел вершин злиття та вершин розщеплення. Це не перевищує швидкість $O(n \log n)$.

Після побудови графа Ріба діагоналі проводяться так: для Y -вершин розглядаємо ребра, що в них входять. Знаходимо на многокутнику пари вершин, що відповідають кінцями цих ребер і з'єднуємо їх відрізками. Аналогічно, для L -вершин і ребер, що з них виходять будуються інші відрізки на многокутнику.

Теорема 5.10. *Так побудований набір відрізків є діагоналями, що не перетинаються між собою та розбивають многокутник на монотонні многокутники.*

Доведення. Розглянемо проекцію многокутника на граф Ріба. За побудовою прообразом кожного ребра є трапеція або трикутник (вироджена трапеція). Одна з вершин многокутника лежить на нижній основі трапеції, а інша – на верхній. Тому відрізок, що їх сполучає, лежить всередині трапеції, а отже і всередині многокутника. Тому він є діагоналлю. Оскільки ми вибирали різні ребра, то побудовані діагоналі лежать в різних трапеціях і, отже, не перетинаються. Після розрізання за діагоналями вершини злиття та розщеплення в утворених многокутниках будуть регулярними вершинами, отже, ці многокутники – монотонні.

Приклад 5.3. Побудуємо граф Ріба, розбиття на Y -монотонні многокутники та триангуляцію многокутника з вершинами $P_1(0, 0)$, $P_2(4, -4)$, $P_3(10, 0)$, $P_4(10, 5)$, $P_5(8, 3)$, $P_6(6, 5)$, $P_7(8, 1)$, $P_8(4, -3)$, $P_9(2, 0)$, $P_{10}(4, -1)$, $P_{11}(6, 1)$, $P_{12}(2, 5)$.

Будемо застосовувати метод замітання прямою для побудови графа Ріба. Спочатку упорядкуємо вершини за другою

5 Задачі локалізації на планарному розбитті

координатою лексикографічно:

$$P_2, P_8, P_{10}, P_1, P_9, P_3, P_{11}, P_7, P_5, P_{12}, P_6, P_4.$$

В такому порядку занесемо ці вершини в чергу подій.

Ребро $P_i P_{i+1}$ позначимо через e_i , якщо $P_i < P_{i+1}$ та через \tilde{e}_i в іншому разі.

Визначаємо тип вершин:

регулярні вершини – P_0, P_3, P_7, P_{11} ;

V-вершини – P_2, P_{10} ;

Λ-вершини – P_4, P_6, P_{12} ;

Υ-вершини – P_8, P_5 ;

Λ-вершина – P_9 .

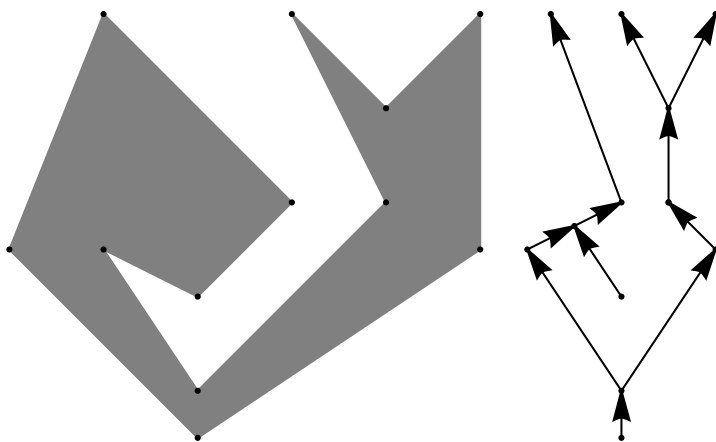


Рис. 5.4: багатокутник та його граф Рібана

Статус S містить упорядкований набір ребер, які перетинає горизонтальна пряма. Після проходження подій будуть такі зміни статусу:

P_2 : $S = \{\tilde{e}_1, e_2\}$, вносимо вершину v_2

P_8 : $S = \{\tilde{e}_1, e_8, \tilde{e}_7, e_2\}$, вносимо ребро $v_2 \rightarrow v_8$,

5 Задачі локалізації на планарному розбитті

- $P_{10}: S = \{\tilde{e}_1, e_8, \tilde{e}_9, e_10, \tilde{e}_7, e_2\}, \quad v_{10}$
 $P_1: S = \{\tilde{e}_{12}, e_8, \tilde{e}_9, e_10, \tilde{e}_7, e_2\}, \quad v_8 \rightarrow v_1,$
 $P_9: S = \{\tilde{e}_{12}, e_10, \tilde{e}_7, e_2\}, \quad v_1 \rightarrow v_9, \quad v_{10} \rightarrow v_9,$
 $P_3: S = \{\tilde{e}_{12}, e_10, \tilde{e}_7, e_3\}, \quad v_8 \rightarrow v_3,$
 $P_{11}: S = \{\tilde{e}_{12}, e_11, \tilde{e}_7, e_3\}, \quad v_9 \rightarrow v_{11},$
 $P_7: S = \{\tilde{e}_{12}, e_11, \tilde{e}_6, e_3\}, \quad v_3 \rightarrow v_7,$
 $P_5: P_7: S = \{\tilde{e}_{12}, e_11, \tilde{e}_6, e_5, \tilde{e}_4, e_3\}, \quad v_7 \rightarrow v_5,$
 $P_{12}: S = \{\tilde{e}_6, e_5, \tilde{e}_4, e_3\}, \quad v_{11} \rightarrow v_{12},$
 $P_6: S = \{\tilde{e}_4, e_3\}, \quad v_5 \rightarrow v_6,$
 $P_4: S = \emptyset, \quad v_5 \rightarrow v_4.$

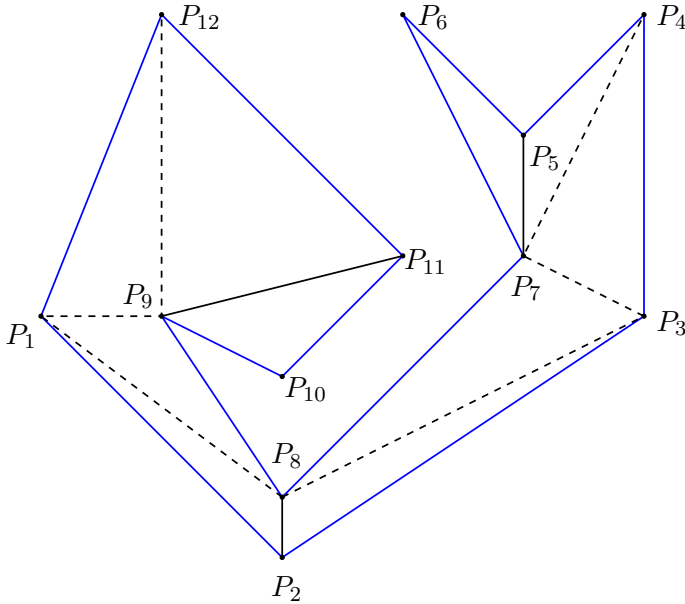


Рис. 5.5: триангуляція многокутника

Далі знаходимо ребра, що входять у Y -вершини: $v_2 \rightarrow v_8$, $v_7 \rightarrow v_5$, та ребро, що виходить з Λ -вершини – $v_9 \rightarrow v_{11}$. Тому проводимо такі діагоналі: P_2P_8 , P_7P_5 , P_9P_{11} . Вони розбивають початковий многокутник на чотири Y -монотонні мно-

гокнутники: 1) $P_1P_2P_8P_9P_{11}P_{12}$, 2) $P_2P_3P_3P_5P_7P_8$, 3) $P_5P_6P_7$, 4) $P_9P_{10}P_{11}$. Триангулюємо ці многокутники відрізанням вух знизу догори, проводимо такі діагоналі: 1) P_8P_1 , P_1P_9 , P_9P_{12} , 2) P_8P_3 , P_3P_7 , P_7P_4 , а в третьому та четвертому діагоналей проводити не потрібно, бо вони вже є трикутниками.

Вправа 5.3. Знайти граф Ріба та триангуляцію многокутника з вершинами $(0,1)$, $(6,0)$, $(8,4)$, $(5,2)$, $(3,3)$, $(2,7)$, $(5,4)$, $(9,8)$, $(2,9)$, $(0,6)$, $(1,4)$.

5.3 Метод деталізації триангуляції Кирпатрика

Ми розв'язуємо задачу про локалізацію точки на триангуляції трикутника. Тут під триангуляцією трикутника ми розуміємо граф, у якого всі грані мають по три ребра. Задача: задано точку, знайти грань, якій вона належить.

Виберемо в триангуляції набір вершин, які мають таку властивість: вершини не належать зовнішньому трикутнику, будь-які дві вершини з цього набору не є суміжними (тобто кінцями одного з ребер триангуляції). Далі видалимо з триангуляції ці вершини та інцидентні до них ребра. Отримаємо новий граф, грані якого – опуклі многокутники. Триангулюємо їх. Отримаємо нову триангуляцію трикутника. До неї знову застосуємо описану процедуру і будемо це робити допоки не отримаємо один трикутник. Триангуляції, що отримані в процесі будемо позначати S_1, S_2, S_3, \dots , а їх трикутники T_1, T_2, \dots . Утворимо орієнтований граф, вершини якого v_i відповідають цим трикутникам T_i , при цьому з вершини v_i виходить ребро в v_j ($v_i \rightarrow v_j$), якщо для відповідних трикутників $T_i \in S_k$ та $T_j \in S_m$ виконуються умови:

$$m = k - 1, \quad T_i \cap T_j \neq \emptyset.$$

На цьому процес перед-обробки задачі завершено. Побудований орієнтований граф, разом з відповідністю його вершин триангуляції будемо називати *діаграмою Курпатрика*.

Для знаходження того, в якому трикутнику початкової триангуляції належить точка, ми перевіряємо спочатку, чи належить вона великому трикутнику. Якщо ні, то відповідь – жодному з трикутників. Якщо так, то це означає що ми знаходимось в останній за номером вершині на графі (яка є джерелом). Розглянемо кінці ребер, які з неї виходять та перевіримо, якому з відповідних трикутників належить точка, перемістимося у відповідну вершину і продовжимо для неї робити те саме. Процес завершиться, коли ми дійдемо до вершини стоку (листа) на графі. Цій вершині відповідає трикутник початкової триангуляції, який буде шуканим. Його видаємо як відповідь задачі локалізації.

Якщо додатково ввести обмеження на те у скільки раз зменшується число трикутників на кожному кроці та на число трикутників у многокутниках, які ми триангулюємо в процесі (ступінь вершин побудованого графа), то процес локалізації займе час $O(\log n)$. Витрати пам'яті $O(n)$. Для виконання цієї умови будемо вимагати, щоб ті вершини, які ми видаляємо мали ступінь не більшу за 12 і щоб їх, з урахуванням всіх вимог, було максимальне число. Доведення існування таких вершин в достатній кількості впливає з оцінок на ступінь вершин, які отримуються з формули Ейлера для графа триангуляції.

Приклад 5.4. Розглянемо триангуляцію з 15 трикутниками ($T_1 - T_{15}$), що зображена на рис. 5.6 а). В цій триангуляції є три (червоні) внутрішні вершини, які не є спільними вершинами жодного трикутника. Витираємо їх, а отримані многокутники триангулюємо. Отримаємо, триангуляцію, що зображена на рис. 5.6 б). В ній знаходимо дві внутрішні вершини без спільних трикутників. Витираємо їх та інцидентні ребра, триангулюємо многокутники. Отримаємо триангуля-

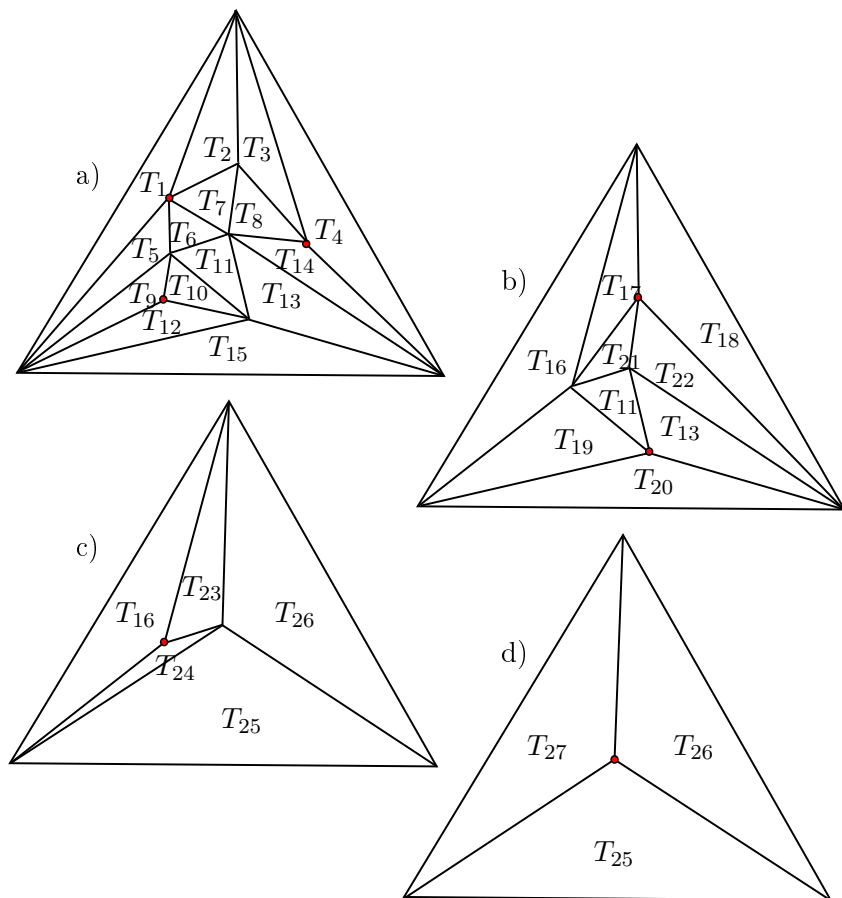


Рис. 5.6: деталізація триангуляції

цію, зображену на рис. 5.6 c) з 5 трикутниками, після витрання однієї з вершин, отримаємо триангуляцію з 3 трикутниками рис. 5.6 d). Після витрання внутрішньої вершини отримаємо один трикутник (T_{28}).

Для побудови діаграми деталізації ми всі рисунки об'єднуємо в один і знаходимо перетини відповідних трикутників. Остан-

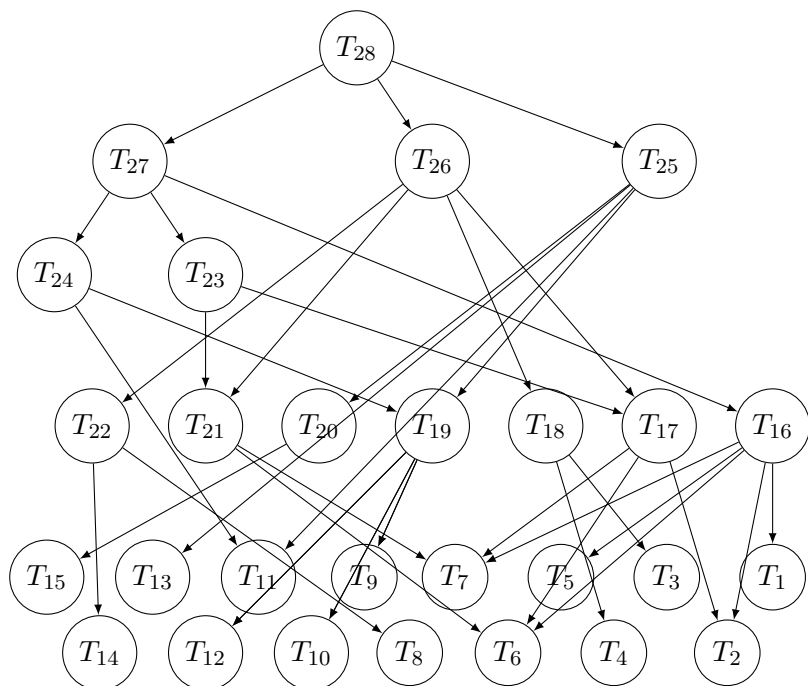


Рис. 5.7: діаграма деталізація Кирпатрика

ній трикутник T_{28} на діаграмі зображуємо на найвищому рівні. Трикутники (T_{25}, T_{26}, T_{27}) , що є на триангуляції рис. 5.6 d) на другому рівні. Нові трикутники (T_{23}, T_{24}) з с) на третьому рівні, тощо. Ті трикутники, що перетинаються з'єднуємо стрілкою зверху донизу.

Отримана в такий спосіб діаграма Кирпатрика зображена на рис. 5.7.

Вправа 5.4. Побудувати яку-небудь триангуляцію трикутника з 11 гранями (трикутниками), для неї зробити деталізацію та побудувати діаграму Кирпатрика.

5.4 Трапецеїдальні карти

Нехай G – плоский прямолінійний граф з набором вершин $V = \{v_i(x_i, y_i), 1 \leq i \leq m\}$ та ребер $E = \{e_j = \{v_j, w_j\}, v_j \in V, w_j \in V, 1 \leq j \leq n\}$.

Означення 5.14. Надалі під трапецеїдом будемо розуміти один з таких многокутників: трапецію, паралелограм, трикутник.

Виберемо достатньо великий прямокутник $S = [a, b] \times [c, d]$, що $V \subset \text{Int } S$, (наприклад, $a = \min x_i - 1$, $b = \max x_i + 1$, $c = \min y_i - 1$, $d = \max y_i + 1$).

Для кожної вершини v_i проведемо горизонтальний промінь вліво до першого перетину з іншим ребром графа або прямою $x = a$. Аналогічно проведемо промінь вправо до першої точки перетину з ребрами графа або прямою $x = b$. Ребра графа разом з проведеними відрізками розбивають S на трапецеїди. Так побудоване розбиття S на трапецеїди називається трапецеїдальною картою. Будемо позначати її через $T(G)$.

Зауважимо, що кожний трапецеїд трапецеїдальної карти належить повністю одній з граней графа.

Лема. Трапецеїдальна карта має не більше ніж $6n + 4$ вершини та не більше ніж $3n + 1$ ребро.

Трапецеїдальні карти корисно використовувати в задачах локалізації точки на планарному розбитті при масових запитах: спочатку визначаємо до якого трапецеїда належить точка і використовуємо інформацію про те, якій грані належить трапецеїд. Робимо висновок, що точка також належить цій грані.

З кожною трапецеїдальною картою можна пов'язати пошукову структуру, яка дає алгоритм пошуку трапецеїда за координатами точки. Продемонструємо його на прикладі.

Приклад 5.5. Побудуємо трапецеїдальну карту та пошуковий алгоритм для двох відрізків P_1P_2 та P_3P_4 , що не пере-

5 Задачі локалізації на планарному розбитті

тинаються, $P_i(x_i, y_i)$, $y_3 < y_1 < y_4 < y_2$, $\Delta_{341} > 0, \Delta_{342} > 0$. трапецеїдальна карта має вигляд як на рис. 5.8.

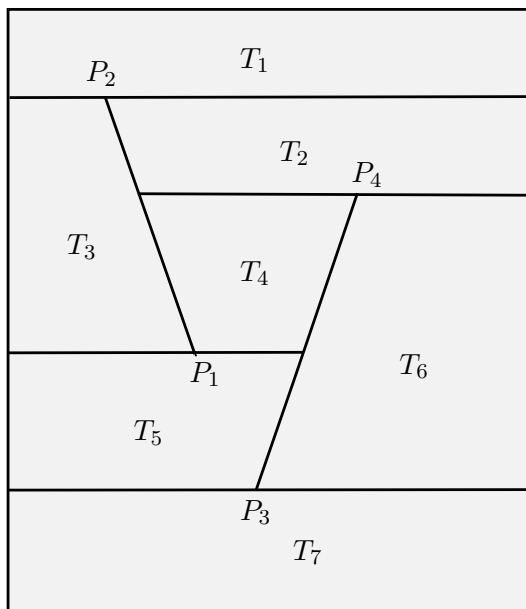


Рис. 5.8: трапецеїдальна карта для двох відрізків P_1P_2 та P_3P_4

Опишемо один з можливих пошукових алгоритмів знаходження трапецоїда для точки $P_m(x_m, y_m)$. Він складається з таких перевірок:

- 1) Якщо $y_m > y_2$, то $P_m \in T_1$, інакше переходимо до 2)
- 2) Якщо $y_m > y_1$, то переходимо до 3), інакше переходимо до 6)
- 3) Якщо $\Delta_{12m} > 0$, то $P_m \in T_3$, інакше переходимо до 4)
- 4) Якщо $y_m > y_4$, то $P_m \in T_2$, інакше переходимо до 5)
- 5) Якщо $\Delta_{34m} > 0$, то $P_m \in T_4$, інакше $P_m \in T_6$
- 6) Якщо $y_m < y_3$, то $P_m \in T_7$, інакше переходимо до 7)
- 7) Якщо $\Delta_{34m} > 0$, то $P_m \in T_5$, інакше $P_m \in T_6$

Цей алгоритм можна зобразити за допомогою схеми на рис. 5.9. В цій схемі якщо відповідна областей знаходиться нижче (лівіше) від ребра, то стрілка також іде вище (лівіше).

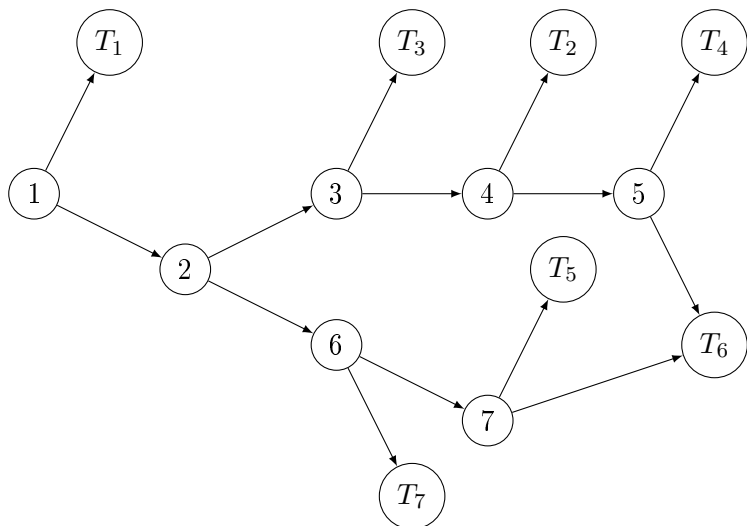


Рис. 5.9: Пошукова структура на трапецеїдальній карті:

1) y_2 , 2) y_1 , 3) Δ_{12m} , 4) y_4 , 5) Δ_{34m} , 6) y_3 , 7) Δ_{34m} .

Слід відзначити, що крім запропонованої структури можна було побудувати інші пошукові структури, починаючи з інших горизонтальних прямих, що проходять через вершини відрізків та вибираючи іншу послідовність горизонтальних прямих та відрізків, відносно яких ми робимо перевірки.

Оскільки пошукові структури залежать від послідовності горизонтальних прямих та ребер, а швидкість роботи алгоритму локалізації для різних точок буде різною, то робота алгоритму оцінюється для конкретної точки відносно всіх пошукових структур.

Теорема 5.11. Час побудови трапецеїдальної карти є $O(n)$. Очікуваний час роботи побудови пошукової структури на

5 Задачі локалізації на планарному розбитті

трапецеїдальній карті дорівнює $O(n \log n)$. Очікуваний об'єм пам'яті є $O(n)$. Очікуваний час роботи алгоритму по локалізації однієї довільної точки є $O(\log n)$.

Зауваження. Трапецеїдальна карта для графа будується неоднозначно. Так замість трапецій з горизонтальними основами можна використовувати трапеції з вертикальними основами, або з основами паралельними до довільного напрямку. В останньому випадку також вимагається, щоб пара сторін граничного прямокутника також була паралельна цьому напрямку. Якщо прямокутник не заданий умовами задачі, то його розміри та положення визначені не однозначно.

Вправа 5.5. Знайти трапецеїдальну карту та побудувати пошукову структуру для трикутника з такими вершинами: $(0, 0)$, $(4, 2)$, $(-1, 3)$.

6 Задачі на близькість

6.1 Задача про найкоротший шлях

Працюємо в обмеженій прямокутній галузі. Вся вона розбита на дві частини – допустиму та заборонену. Заборонена частина – об'єднання багатокутників. Завдання. З однієї точки A допустимої області піти в точку B допустимої області найкоротшим шляхом, який повністю лежить в допустимій області.

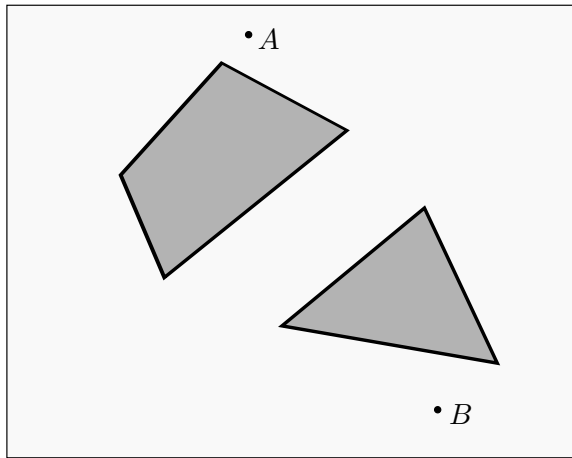


Рис. 6.1: Заборонені багатокутники темного кольору

6.1.1 Граф видимості

Означення 6.1. Графом видимості є граф, вершинами якого є вершини багатокутників, а ребрами – сторони багатокут-

тників і ті відрізки, що з'єднують вершини і не перетинають сторін багатокутників у внутрішніх точках.

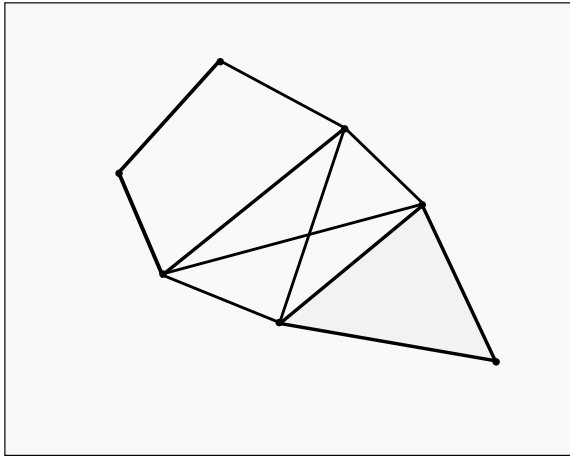


Рис. 6.2: граф видимості

Алгоритм. З точки A рухаємось до найближчої вершини B_1 на графі. Для точки також знаходимо найближчу вершину B_2 . Серед усіх шляхів, що з'єднують вершини B_1 та B_2 на графі видимості вибираємо той, який має найменшу довжину. Будуємо шлях з A в B – спочатку з A в B_1 , потім знайденим шляхом до B_2 , потім до B . Намагаємось оптимізувати знайдений шлях – якщо, крім другий у зоні видимості точки A є інші вершини шляху, то рухаємось в останню з них і далі побудованим раніше шляху. Аналогічно скорочуємо шлях до вершини B . Відповіддю завдання буде шлях, побудований після цих скорочень.

Приклад 6.1. Для графа видимості з попереднього рисунку, всі можливі шляхи з точки A в точку B зображені на рис. 6.3.

Швидкість роботи такого алгоритму залежить від структури графа і може досягати $O(n^2)$.

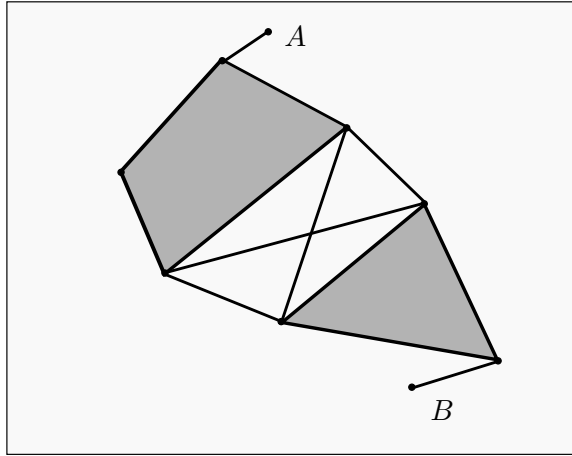


Рис. 6.3: шляхи з А в В

Для побудови графа видимості ефективним методом є метод аналогічний до методу плоского замітання. Тільки в нашому випадку замість прямої, що рухається паралельно ми використовуємо пряму, що обертається навколо точки, з якої ми визначаємо всі видимі для неї вершини.

Практичне використання графа видимості для побудови шляху з однієї точки в іншу вимагає додаткових побудов, пов'язане з тим, що часто бажано рухатись на певній відстані від перешкод. Щоб не робити такі побудови, замість графа видимості можна скористатися картою доріг.

6.1.2 Карта доріг

Побудуємо трапецеїдальну карту з горизонтальними основами. В кожному трапецоїді T_i допустимої області виберемо внутрішню точку C_i (точку перетину медіан трикутника або точку перетину діагоналей чотирикутника). На кожному горизонтальному ребрі (основі трапецоїда) розглянемо його сере-

дину Q_i .

Означення 6.2. Картою доріг називається граф G_R , вершинами якого є точки C_i та Q_i . Дві вершини сполучені ребром, якщо воно повністю належить одному з трапецієдів.

Приклад 6.2. На рис. 6.4 зображена карта доріг для горизонтальної трапецієдальної карти.

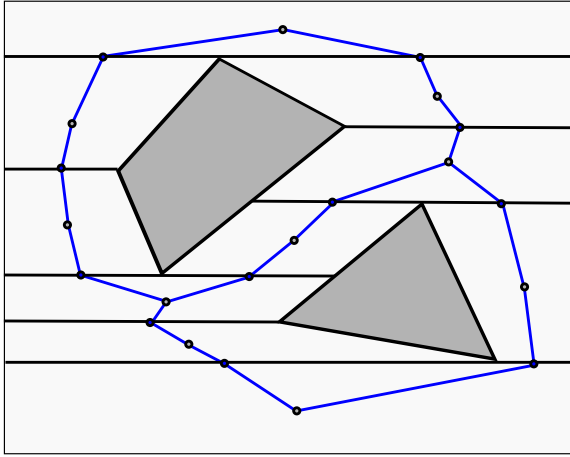


Рис. 6.4: карта доріг (синя) та горизонтальна трапецієдальна карта (чорна)

Алгоритм знаходження шляху з точки A в точку B . Визначаємо в яких трапецієдах знаходяться точки A та B . Нехай це T_k та T_m . Серед усіх шляхів, що з'єднують вершини C_k та C_m на графі G_R вибираємо той, який має найменшу довжину. Будемо шлях з A в B - спочатку з A в C_k , потім знайденим шляхом до C_m , потім у точку B .

Складність побудови карти доріг – $O(n)$. Складність опрацювання одного запиту також $O(n)$.

Приклад 6.3. Зауважимо, що карта доріг залежить від вибору напрямку основ трапецій в трапецеїдальній карті. Для вертикального напрямку карта доріг зображена на рис. 6.5

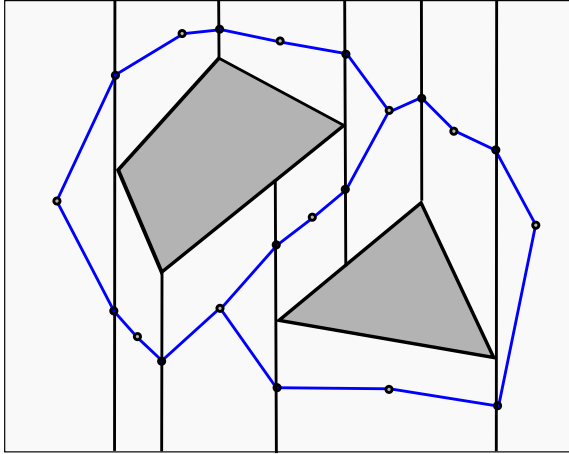


Рис. 6.5: карта доріг (синя) та вертикальна трапецеїдальна карта (чорна)

Зауваження. Між трапецоїдами горизонтальної карти допустимої області та ребрами графа Ріба функції висоти на цій області існує взаємно-однозначна відповідність.

Вправа 6.1. Знайти граф видимості та побудувати карту доріг, якщо заборонені зони це чотирикутники $ABCD$ та $EFGH$, $A(1, 1)$, $B(5, 3)$, $C(4, 7)$, $D(3, 4)$, $E(3, 0)$, $F(8, 1)$, $G(7, 5)$, $H(6, 2)$.

6.2 Діаграма Вороного

В цьому розділі ми розглядаємо конструкцію, що була побудована українським математиком Г.Ф.Вороним (1868-1908).

Діаграми Вороного природно виникають при розв'язанні задачі про поштову скриньку: яка зі скриньок є найближчою

до вибраної точки. Аналог задачі: яка вежа мобільного оператора є найближчою до даного телефону, для встановлення найкращого зв'язку з ним?

6.2.1 Діаграма Вороного скінченного набору точок

Нехай на площині задана множина точок $P = \{P_1, \dots, P_n\}$, всі точки якої різні.

Означення 6.3. Коміркою Вороного $V(P_i)$ точки P_i називається множина, що складається з точок, відстань від яких до точки P_i менша за відстань до інших точок множини P :

$$V(P_i) = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(X, P_i) < d(X, P_j), j \neq i, 1 \leq j \leq n\}.$$

Означення 6.4. Діаграма Вороного $Vor(P)$ – це розбиття площини на комірки Вороного.

Приклад 6.4. Для множини з двох точок $P = \{P_1, P_2\}$ розглянемо серединний перпендикуляр до відрізка P_1P_2 . Він розбиває площину на дві півплощини: $H(P_1, P_2)$ – півплощину, що містить точку P_1 , $H(P_2, P_1)$ – півплощину, що містить точку P_2 . Тоді $V(P_1) = H(P_1, P_2)$, $V(P_2) = H(P_2, P_1)$.

Якщо задані координати $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$. Тоді серединний перпендикуляр проходить через середину відрізка P_1P_2 , що має координати $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$. Вектор $\overrightarrow{P_2P_1} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2\}$ ортогональний до серединного перпендикуляру. Тоді, використовуючи загальне рівняння прямої з курсу аналітичної геометрії, отримаємо рівняння серединного перпендикуляра:

$$(x_1 - x_2)(x - \frac{x_1 + x_2}{2}) + (y_1 - y_2)(y - \frac{y_1 + y_2}{2}) = 0.$$

Це рівняння рівносильне такому рівнянню

$$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y + \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2} = 0. \quad (6.1)$$

6 Задачі на близькість

Тоді півплощина $H(P_1, P_2)$ задається за допомогою нерівності

$$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y + \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2} \geq 0. \quad (6.2)$$

Приклад 6.5. Для множини з трьох точок $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ маємо такі комірки Вороного:

$$V(P_1) = H(P_1, P_2) \cap H(P_1, P_3),$$

$$V(P_2) = H(P_2, P_1) \cap H(P_2, P_3),$$

$$V(P_3) = H(P_3, P_1) \cap H(P_3, P_2).$$

6.2.2 Комірки Вороного

В загальному випадку для множини $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ комірка Вороного є перетин $n - 1$ півплощин:

$$V(P_i) = \bigcap_{j \neq i, 1 \leq j \leq n} H(P_i, P_j).$$

Де

$$H(P_i, P_j) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_i - x_j)x + (y_i - y_j)y + \frac{x_j^2 - x_i^2 + y_j^2 - y_i^2}{2} \geq 0\}. \quad (6.3)$$

Як наслідок маємо такі властивості комірок Вороного:

1. Комірка Вороного є опуклими множинами.
2. Комірка Вороного містить не більше ніж $n - 1$ вершину та не більше ніж $n - 1$ ребро. Тут під ребрами ми розуміємо відрізки, промені або прямі, що складають межу комірки Вороного.

Надалі під діаграмою Вороного будемо розуміти об'єднання меж комірок Вороного. Відповідні відрізки, промені та прямі будемо називати її ребрами, а їх перетини – вершинами.

Наївний алгоритм побудови комірки Вороного полягає у послідовному знаходженні для кожної комірки Вороного її вершин та ребер. Продемонструємо його на прикладі.

Приклад 6.6. Нехай $P = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$, $P_0(0, 0)$, $P_1(6, 8)$, $P_2(2, -6)$, $P_3(4, 2)$, $P_4(0, 6)$. Знайдемо комірку Вороного $V(P_0)$. Середини $Q_i(\frac{x_0+x_i}{2}, \frac{y_0+y_i}{2})$ відрізків P_0P_1 мають координати

$$Q_1(3, 4), Q_2(1, -3), Q_3(2, 1), Q_4(0, 3).$$

Тому $V(P_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3(x-3) + 4(y-4) \leq 0, (x-1) - 3(y+3) \leq 0, 2(x-2) + (y-1) \leq 0, y-3 \leq 0\}$.

Знайдемо її вершини та ребра. Для цього знайдемо ту з середин Q_i , яка має на найменшу відстань до P_0 (вона належить межі комірки бо відрізок з кінцями в ній та точки P_0 не перетинається у внутрішніх точках з іншими прямими, що утворюють межу комірки). Квадрати шуканих відстаней:

$$d_1^2 = 3^2 + 4^2 = 25, d_2^2 = 10, d_3^2 = 5, d_4^2 = 9.$$

Тому $Q_3(2, 1)$ – середина з найменшою відстанню. Знаходимо перетини серединного перпендикуляра, що проходить через неї з іншими. Для цього розв'язуємо системи:

1) $2(x-2) + (y-1) = 0$, $3(x-3) + 4(y-4) = 0$, отримаємо точку $(-1, 7)$,

2) $2(x-2) + (y-1) = 0$, $(x-1) - 3(y+3) = 0$, отримаємо точку $(25/7, -15/7)$,

3) $2(x-2) + (y-1) = 0$, $y-3 = 0$, отримаємо точку $(1, 3)$.

Починаємо лівий обхід з точки $Q_3(2, 1)$. Вектор $\{2, 1\}$ направлений зовні $V(P_0)$, тому повернутий на $\pi/2$ проти годинникової стрілки вектор $\{-1, 2\}$ задає напрямок обходу. Оскільки його перша координата від'ємна, то цей напрямок характеризується спаданням абсциси. Отже, серед цих трьох точок знаходимо точки з абсцисою меншу за 2 і серед них найбільшу. Це точка $V_3(1, 3)$.

Ця точка належить останньому серединному перпендикуляру. Тому знаходимо його перетини з рештою перпендикулярів (крім вже знайденого):

$$1) y - 3 = 0, 3(x - 3) + 4(y - 4) = 0, \text{отримаємо точку } (25/3, 3),$$

$$2) y - 3 = 0, (x - 1) - 3(y + 3) = 0, \text{отримаємо точку } (10, 3)$$

Повертаємо вектор $\{0, 1\}$, отримаємо $\{-1, 0\}$, що означає що при подальшому обході з точки $V_3(1, 3)$ абсциса спадає. Але оскільки у знайдених точок перетину абсциси більші за 1, то вершина $V_3(1, 3)$ є останньою при лівому обході. Останнє ребро, це промінь з початком у $V_3(1, 3)$ та напрямним вектором $\{-1, 0\}$.

Далі знайдемо правий обхід з точки $Q_3(2, 1)$. Серед трьох точок, знайдених на першому етапі, визначаємо ті, у яких абсциса більша за 2. Це єдина точка $(25/7, -15/7)$ (якби таких точок було декілька, то ми вибрали б найменшу з них). Отже, маємо вершину $V_2(25/7, -15/7)$ і далі рухаємося по прямій $(x - 1) - 3(y + 3) = 0$. Правий обхід визначає поворот вектора $\{1, -3\}$ за годинниковою стрілкою, тобто вектор $\{-3, -1\}$. Він характеризує спадання абсциси. Знаходимо точки перетину цієї прямої з іншими, які ще не були занесені в список ребер (залишилась одна така пряма):

$$1) (x - 1) - 3(y + 3) = 0, 3(x - 3) + 4(y - 4) = 0, \text{отримаємо точку } (115/13, -5/13).$$

Оскільки $115/13 > 25/7$, то ця точка не належить межі комірки Вороного. Отже, вершинами комірки $V(P_0)$ є точки $V_2(25/7, -15/7)$, $V_3(1, 3)$, а ребрами: промінь з початком V_2 та напрямним вектором $\{-3, -1\}$; відрізок V_2V_3 ; промінь з початком V_3 та напрямним вектором $\{-1, 0\}$.

Вправа 6.2. Знайти вершини та ребра комірки Вороного точки P_1 набору точок $P = \{P_1(0, 0), P_2(0, 4), P_3(2, 4), P_4(-2, 3), P_5(2, -2)\}$.

6.2.3 Властивості діаграм Вороного

Лема 6.1. *Якщо всі точки множини $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ лежать на одній прямій. Тоді діаграма Вороного складається з паралельних прямих.*

Лема 6.2. *Якщо всі точки множини $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ не лежать на одній прямій. Тоді діаграма Вороного є зв'язною і її ребра – відрізки та промені.*

Лема 6.3. *Якщо $n \geq 4$, то діаграма Вороного містить не більше ніж $2n - 5$ вершин та не більше ніж $3n - 6$ ребер.*

Означення. Максимальне порожнє коло $C_P(X)$ з центром в точці X до множини P називається коло максимального радіусу, яке має центр в точці X та не містить всередині себе точок з множини P . Таке коло проходить принаймні через одну з точок множини P .

Лема 6.4. *Точка Q є вершиною $Vor(P)$ тоді та тільки тоді, коли $C_P(Q)$ проходить принаймні через три точки множини P .*

Лема 6.5. *Серединний перпендикуляр b_{ij} до відрізка P_iP_j задає ребро діаграми Вороного тоді та тільки тоді, коли існує точка $Q \in b_{ij}$, що*

$$C_P(Q) \cap P = P_i \cup P_j.$$

6.2.4 Наївний алгоритм побудови діаграми Вороного

Для кожної трійки точок P_i, P_j, P_k , що не лежать на одній прямій, знаходимо центр описаного навколо трикутника $P_iP_jP_k$ кола. Це точка перетину серединних перпендикулярів. Її координати задовольняють системі рівнянь

$$(x_i - x_j)x + (y_i - y_j)y + \frac{x_j^2 - x_i^2 + y_j^2 - y_i^2}{2} = 0,$$

6 Задачі на близькість

$$(x_i - x_k)x + (y_i - y_k)y + \frac{x_k^2 - x_i^2 + y_k^2 - y_i^2}{2} = 0.$$

Тому координати центра будуть

$$x_c = \frac{-c_{ij}y_i + c_{ik}y_i - c_{ik}y_j + c_{ij}y_k}{x_jy_i - x_ky_i - x_iy_j + x_ky_j + x_iy_k - x_jy_k},$$
$$y_c = \frac{-c_{ij}x_i + c_{ik}x_i - c_{ik}x_j + c_{ij}x_k}{-x_jy_i + x_ky_i + x_iy_j - x_ky_j - x_iy_k + x_jy_k}.$$

Де

$$c_{ij} = \frac{x_j^2 - x_i^2 + y_j^2 - y_i^2}{2}, \quad c_{ik} = \frac{x_k^2 - x_i^2 + y_k^2 - y_i^2}{2}.$$

Радіус R_c описаного кола – це відстань від центру до довільної з трьох вершин:

$$R_c^2 = (x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2.$$

Для розрахунку центра та радіуса описаного кола можна використовувати онлайн калькулятор:

<https://www.wolframalpha.com/input/?i=circle+thru+3+points>

Використовуючи лему 7.4 знаходимо всі вершини діаграми Вороного. Для цього перевіряємо чи лежать інші точки P_m в середині описаних навколо трикутників кіл, тобто чи задовольняють вони нерівностям

$$(x_m - x_c)^2 + (y_m - y_c)^2 < R_c^2.$$

Знайдені вершини (x_c, y_c) розбивають серединні перпендикуляри пар точок на частини. Яка з цих частин є ребром діаграми Вороного перевіряємо за допомогою леми 7.5.

Приклад 6.7. Знайдемо діаграму Вороного $Vor(P)$ множини

6 Задачі на близькість

$P = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$, $P_0(0, 0)$, $P_1(0, 2)$, $P_2(2, 2)$, $P_3(-2, 0)$, $P_4(2, -2)$.

Знаходимо центри та квадрати радіусів описаних кіл:

$C_{012} = (1, 1)$	$R_{012}^2 = 2$
$C_{013} = (-1, 1)$	$R_{013}^2 = 2$
$C_{014} = (3, 1)$	$R_{014}^2 = 10$
$C_{023} = (-1, 3)$	$R_{023}^2 = 10$
$C_{024} = (2, 0)$	$R_{024}^2 = 4$
$C_{034} = (-1, -3)$	$R_{034}^2 = 10$
$C_{123} = (1, -1)$	$R_{123}^2 = 10$
$C_{124} = (1, 0)$	$R_{124}^2 = 5$
$C_{134} = (1/3, -1/3)$	$R_{134}^2 = 50/9$
$C_{234} = (0.5, 0)$	$R_{234}^2 = 6.25$

Для кожної точки P_m ($m \neq i, j, k$) перевіряємо її приналежність дискам

$$D_{ijk} = \{(x, y) | (x - x_{ijk})^2 + (y - y_{ijk})^2 \leq R_{ijk}^2\}.$$

Отримаємо:

$P_0(0, 0)$, $P_1(0, 2)$, $P_2(2, 2)$, $P_3(-2, 0)$, $P_4(2, -2)$

$P_3 \notin D_{012}, P_4 \notin D_{012}$	$C_{012}(1, 1) \in Vor(P)$
$P_2 \notin D_{013}, P_4 \notin D_{013}$	$C_{013}(-1, 1) \in Vor(P)$
$P_2 \in D_{014}$	$C_{014} \notin Vor(P)$
$P_1 \in D_{023}$	$C_{023} \notin Vor(P)$
$P_1 \notin D_{024}, P_3 \notin D_{024}$	$C_{024}(2, 0) \in Vor(P)$
$P_1 \notin D_{034}, P_2 \notin D_{034}$	$C_{034}(-1, -3) \in Vor(P)$
$P_0 \in D_{123}$	$C_{123} \notin Vor(P)$
$P_0 \in D_{124}$	$C_{124} \notin Vor(P)$
$P_0 \in D_{134}$	$C_{134} \notin Vor(P)$
$P_0 \in D_{234}$	$C_{234} \notin Vor(P)$

Отже, маємо чотири вершини, що належать діаграмі Вороно-

го. Всі вершини мають у своєму записі 0. Це означає, що вони лежать в межі клітинки Вороного $V(P_0)$. Почнемо нумерацію з найменшої: $C_{034} = V_1 = (-1, -3)$. Сусідніми до неї будуть вершини, що мають крім 0 ще одну спільний номер: C_{013} та C_{024} . Пересвідчуємося, що трикутник $C_{013}C_{034}C_{024}$ – лівоповоротний, тому наступною вершиною буде $C_{024} = V_2 = (2, 0)$. Наступною вершиною буде $C_{012} = V_3 = (1, 1)$, а останньою – $C_{013} = V_4 = (-1, 1)$. З вершини V_4 повертаємося до V_1 адже C_{013} та C_{034} є кінцями спільного ребра, що лежить на серединному перпендикулярі точок P_0 та P_3 .

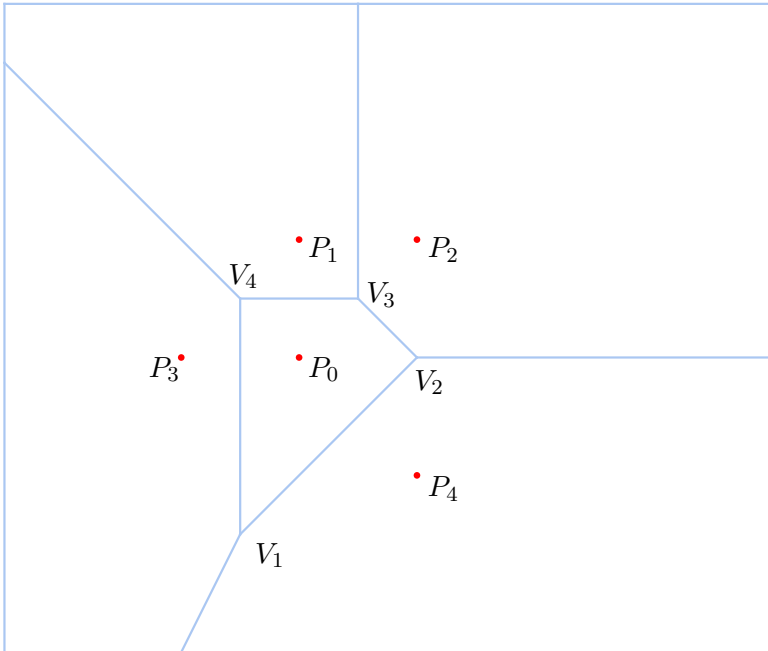


Рис. 6.6: Діаграма Вороного набору

$$P = \{(0, 0), (0, 2), (2, 2), (-2, 0), (2, -2)\}$$

Отже,

$$V(P_0) = V_1V_2V_3V_4,$$

$$V(P_1) = \infty V_4 V_3 \infty,$$

$$V(P_2) = \infty V_3 V_2 \infty,$$

$$V(P_3) = \infty V_1 V_4 \infty,$$

$$V(P_4) = \infty V_2 V_2 \infty.$$

Тут ребра, що ідуть на нескінченність – це промені, що є тими частинами серединних перпендикулярів, які не перетинають внутрішності $V(P_0)$. Наприклад, ребро $V_3\infty$ комірки $V(P_1)$ серединному перпендикуляру до точок P_1 та P_2 та має напрямний вектор перпендикулярний до вектора $\overline{P_1P_2} = \{2, 0\}$. Серед двох таких векторів $\{0, 1\}$ та $\{0, -1\}$ обираємо той, для якого скалярний добуток з вектором $\overline{P_0V_3} = \{1, 1\}$ є додатнім. Це вектор $\{0, 1\}$. Отже,

$$V_3\infty = \{(1, 1 + t), t \geq 0\}.$$

Вправа 6.3. Знайти діаграму Вороного набору точок

$$P = \{P_1(0, 0), P_2(0, 4), P_3(2, 4), P_4(-2, 3), P_5(2, -2)\}.$$

6.2.5 Алгоритм Форчуна замітання прямою побудови діаграми Вороного

Будемо рухати пряму згори донизу і так само поступово будувати діаграму Вороного. В чергу подій занесемо всі точки, упорядкувавши їх за спаданням другої координати. Якщо пряма задається рівнянням $y = c$, то для кожної точки $P_i(x_i, y_i)$ з $y_i > c$, множина точок $N_i(c)$, відстань яких до P_i менша відстані до прямої описується нерівністю

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 < (y - c)^2,$$

тобто множиною, над параболою

$$(x - x_i)^2 = 2(y_i - c)y + c^2 - y_i^2.$$

Тоді в момент часу c ми маємо побудовану діаграму Вороного на множині

$$M(c) = \bigcup_{y_i > c} N_i(c).$$

Межу цієї множини називають береговою лінією. Кутами берегової лінії називають точки перетину парабол (точніше дуг парабол), що в неї входять. Зауважимо, що кути берегової лінії належать діаграмі Вороного. Отже, діаграму Вороного можна отримати як множину всіх кутів в різні моменти часу c . Проте, оскільки ребра є відрізками, то нам потрібно прослідкувати лише появу та зникнення їх кінців, тобто вершин діаграми.

В статусі ми відображаємо інформацію про послідовність дуг берегової лінії, що задається послідовністю відповідних до дуг вершин.

Події бувають двох типів:

1) події-точки, які відповідають внесеним в чергу подій точкам,

2) події-кола, які додаються в чергу подій, в той момент коли виникають три послідовні точки, для яких центр кола, що через них проходить, лежить під береговою лінією. В черзі подій ця подія буде розташована по другій координаті найнижчої точки на колі. Якщо до настання цієї події трійка послідовних вершин в статусі розпадеться, то цю подію викреслюємо з черги подій.

В подіях-точках виникає нова парабола, яка відповідає додаванню вершини у статус. В подіях-колах одна з парабол щезає, що відповідає викреслюванню вершини зі статусу.

Після проходження всіх подій отримаємо діаграму Вороного. Час побудови діаграми Вороного цим методом $O(n \log n)$.

6.2.6 Інші методи

Метод "розділяй та володарюй" полягає у тому, що вертикальною (або горизонтальною) прямою всю множину точок ділимо на дві приблизно рівні частини. Для кожної з них будемо діаграму Вороного і добудовуємо (уточнюємо) діаграму на сусідніх до злиття точках. Цей метод буде детальніше розглянутий далі для побудови триангуляції Делоне, що рівносильне побудові діаграми Вороного. Швидкість роботи такого методу $O(n \log n)$.

Діаграма Вороного як проекції дотичних площин параболоїда. Для множини $P = \{P_1(x_1, y_1), \dots, P_n(x_n, y_n)\}$ на параболоїді $z = x^2 + y^2$ розглянемо точки $P'_i(x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2)$. Проведемо в них дотичні площини. Оскільки дві площини перетинаються за прямою, то кожна з дотичних площин розіб'ється прямими перетину на опуклі області. Ту з них, яка містить точку дотику, спроекуємо на площину $z = 0$. Далі покажемо, що отримана область буде коміркою Вороного.

Рівняння дотичної площини, що відповідає точці $P_i(x_i, y_i)$ запишемо як

$$z = 2x_i x + 2y_i y - x_i^2 - y_i^2.$$

Приклад 6.8. Для набору точок $P = \{(-1, 0), (5, -1), (2, 4), (2, 2), (1, -1)\}$ рівняння дотичних площин будуть:

$$z = -x - 1, z = 5x - y - 26, z = 2x + 4y - 20,$$

$$z = 2x + 2y - 8, z = x - y - 2.$$

Діаграма Вороного та графіки цих площин зображені на рис.6.7.

Верхньою обвідною множини площин будемо називати межу тієї області, на які дотичні площини розбивають простір, що містить нескінченно віддалену точку на додатному напрямку осі Oz , тобто точку $(0, 0, a)$ з достотно великим a .

6 Задачі на близькість

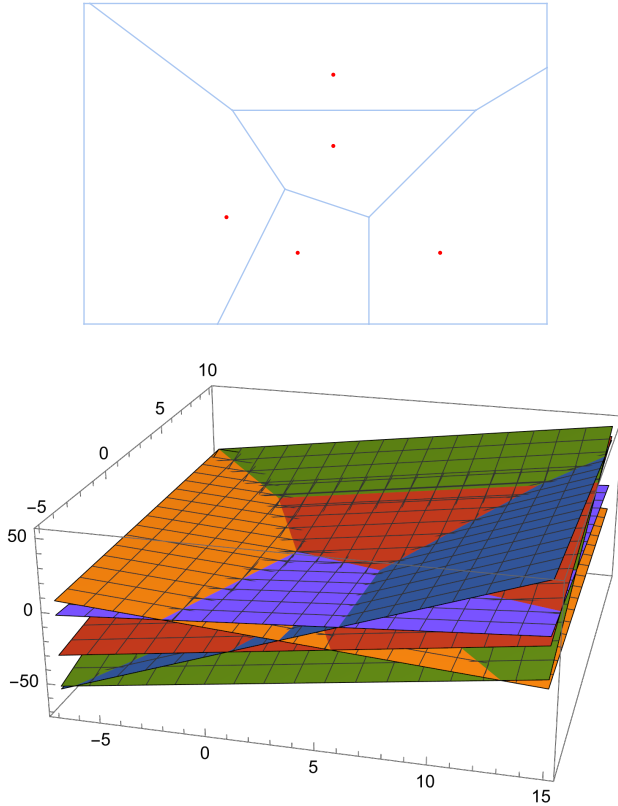


Рис. 6.7: Діаграма Вороного та графіки дотичних площин

Теорема 6.1. *Діаграма Вороного є проекцією верхньої обвідної дотичних площин на горизонтальну площину.*

Доведення. Знайдемо проекцію перетину двох дотичних площин на горизонтальну площину. Оскільки у точок перетину площин однакові координати, то прирівнявши праві частини рівнянь дотичних площин отримаємо рівняння проекції:

$$2x_i x + 2y_i y - x_i^2 - y_i^2 = 2x_j x + 2y_j y - x_j^2 - y_j^2.$$

Перетворимо це рівняння, перенісши все в ліву частину:

$$(x_i - x_j)x + (y_i - y_j)y + \frac{x_j^2 - x_i^2 + y_j^2 - y_i^2}{2} = 0.$$

Отримане рівняння є рівнянням серединного перпендикуляру між точками $P_i(x_i, y_i)$ та $P_j(x_j, y_j)$ (див. рівняння 7.1). Оскільки точка дотику належить верхній обвідній, то проекції меж її грані утворюють комірку Вороного.

6.2.7 Діаграма Вороного для відрізків

Побудуємо діаграму Вороного для множини, що складається з точки P та відрізка AB . Як ми вже обговорювали раніше, множина точок рівновіддалена від двох точок є серединний перпендикуляр між ними, а рівновіддалена від точки та прямої – парабола. Тому діаграма Вороного для точки і відрізка буде складатися з трьох частин: дуги параболи, що рівновіддалена від точки P та прямої AB , та двох променів, з початками в кінцевих точках цієї дуги. Один з променів лежить на серединному перпендикулярі до AP , а інший – на серединному перпендикулярі до BP .

Якщо маємо дві прямі, що перетинаються, то множина точок рівновіддалена від них, складається з бісектрис кутів, що утворені цими двома прямими.

Використовуючи ці міркування можемо побудувати діаграму Вороного двох відрізків. Вона розбивається своїми точками на частини, які лежать на серединних перпендикулярах до кінців, параболах між кінцем і прямою, та бісектрисами кутів між прямими. За аналогією можна побудувати діаграму Вороного для більшого числа відрізків.

Приклад 6.9. Знайдемо множину точок рівновіддалену від відрізків AB та CD , де $A(0, 0)$, $B(0, 4)$, $C(2, 2)$, $D(6, 4)$.

Будемо множину рівновіддалених точок будувати за зро-

6 Задачі на близькість

станням абсциси. Якщо абсциса точки від'ємна, то вона рівновіддалена від самих лівих точок відрізків, а це значить, що вона лежить на серединному перпендикулярі до AC . Його рівняння

$$y = 2 - x, \quad x \leq 0.$$

В кінцевій точці $E(0, 2)$ відстань до точки A дорівнює відстані до прямої AB (Рис. 6.8). При збільшенні абсциси ($x > 0$)

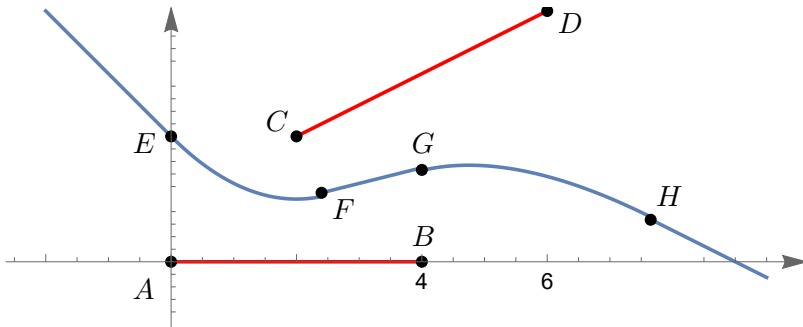


Рис. 6.8: Діаграма Вороного множини $\{[A, B], [C, D]\}$.

відстань до прямої AB стає меншою відстані до точки A . Тому надалі записуємо умову, що відстань до точки C дорівнює відстані до прямої AB . Отримаємо рівняння параболи

$$y = (2 - x)^2/4 + 1, \quad x \geq 0.$$

Розглянемо точку F , що є перетином параболи з прямою CF , перпендикулярної до CD . Відстань в ній до точки C дорівнює відстані до прямої CD . Тому надалі при зростанні абсциси будемо записувати умову рівності відстаней до прямих AB та CD . Отримаємо рівняння бісектриси кута між ними:

$$y = 0.25x + 0.5.$$

В точці $G(4, 3/2)$ відстань до прямої AB дорівнює відстані до точки B . Далі записуємо рівність відстані до точки B відстані до прямої CD . Отримаємо рівняння параболи.

$$\frac{(2y - x - 2)^2}{5} = x^2 + (y - 4)^2, x \geq 4.$$

Розглянемо точку $H(23/3, 2/3)$, що є точкою перетину цієї параболи з прямою DH ($2(x - 6) + (y - 4) = 0$), перпендикулярною до CD . Тоді при зростанні абсциси за точкою H отримаємо рівняння серединного перпендикуляра до BD :

$$2y + x - 9 = 0, x \geq 23/3.$$

Вправа 6.4. Знайти множину точок, рівновіддалених від відрізків AB та CD , де $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, -2)$, $D(0, 6)$.

6.3 Триангуляція Делоне

6.3.1 Триангуляція над множиною точок

Означення 6.5. Триангуляція $Triang(P)$ над множиною точок $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ – максимальний (за числом ребер) прямолінійний плоский граф, множина вершин якого дорівнює P .

Для побудови $Triang(P)$ можемо застосувати такий алгоритм:

а) внесемо в $Triang(P)$ всі точки з P як вершину; б) послідовно для всіх точок, починаючи з першої точки P_1 з'єднуємо ребрами з усіма іншими точками, при умові що ці ребра у внутрішніх точках не перетинаються з побудованими раніше вершинами та ребрами.

Триангуляція $Triang(P)$ над множиною $P = \{P_1, \dots, P_n\}$, всі точки якої не лежать на одній прямій, має такі властивості:

1. Кожне внутрішнє ребро $Triang(P)$ є трикутником. Дійсно, якщо це багатокутник, що не є трикутником, то в нього існує діагональ, що суперечить максимальності графа.

2. Внутрішність зовнішньої грані є доповненням до опуклої оболонки $CH(P)$. Дійсно, це випливає з того, що відрізки між кожною парою сусідніми точками з P на межі $CH(P)$, не перетинаються з іншими ребрами, тому вони належать $Triang(P)$.

3. Якщо k – це число вершин, що лежать на $CH(P)$, то число ребер триангуляції

$$|E(Triang(P))| = 3n - k - 3,$$

а число внутрішніх граней (трикутників)

$$|F(Triang(P))| = 2n - k - 2.$$

Доведення цих формул випливає з формули Ейлера.

6.3.2 Оптимальні за кутом триангуляції

Для кожної триангуляції T розглянемо всі кути всіх трикутників, що в неї входять. Упорядкуємо їх за зростанням – отримаємо вектор $A(T) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{3m}\}$, де m – число трикутників.

Означення 6.6. Триангуляція T над P називається оптимальною за кутом, якщо для довільної триангуляції T' над P виконується нерівність $A(T) \geq A(T')$, де для порівняння використовується лексикографічний порядок: $A(T) > A(T')$, якщо

$$\exists i \geq 1 : \alpha_1 = \alpha'_1, \alpha_2 = \alpha'_2, \dots, \alpha_{i-1} = \alpha'_{i-1}, \alpha_i > \alpha'_i.$$

Для оптимізації триангуляції за кутом використовуємо теорему Фалеса:

Якщо точки C, D, E, F лежать по один бік від прямої AB , то

1) $\angle ADB = \angle ACB$, якщо точка D лежить на колі, описаного навколо трикутника ABC ,

2) $\angle AEB < \angle ACB$, якщо точка E лежить зовні кола, описаного навколо трикутника ABC ,

3) $\angle AFB > \angle ACB$, якщо точка F лежить всередині кола, описаного навколо трикутника ABC .

6.3.3 Метод перекидання ребер побудови легальної триангуляції

Операція перекидання ребра (edge flip). Якщо два трикутника триангуляції, що мають спільне ребро утворюють опуклий чотирикутник, то триангуляція цього чотирикутника даним ребром замінюється на триангуляцію іншою діагоналлю.

Означення 6.7. Ребро триангуляції називається нелегальним, якщо операція перекидання ребра, застосована до нього збільшує вектор кутів триангуляції. Якщо ребра не є нелегальним, то воно є легальним.

Лема 6.6. (критерій легальності ребра). *Спільне ребро P_iP_j двох трикутників триангуляції $P_iP_jP_k$ та $P_iP_jP_m$ є нелегальним тоді та тільки тоді, коли точка P_m лежить всередині кола, описаного навколо трикутника $P_iP_jP_k$, або якщо всі чотири точки P_i, P_j, P_k, P_m лежать на одному колі і відстань від центра кола до P_iP_j більша відстані до P_kP_m .*

Доведення випливає з теореми Фалеса.

Означення 6.8. Триангуляція називається легальною, якщо всі її ребра є легальними.

Алгоритм побудови легальної триангуляції. Довільно упорядковуємо всі ребра і по черзі перевіряємо їх на легальність.

Якщо натрапимо на нелегале ребро, то перекидаємо його і повторюємо процедуру спочатку. Оскільки всіх можливих триангуляцій скінчене число, то і можливих векторів кутів тільки скінчене число. Кожного разу ми збільшуємо цей вектор. Отже, за скінчене число ітерацій ми отримуємо максимальний вектор. Відповідна триангуляція буде легальною.

Приклад 6.10. Нехай задано набір точок

$$P = \{P_1(0, 0), P_2(0, 2), P_3(2, 1), P_4(-2, 1), P_5(1, -2), P_6(1, 1)\}.$$

Побудуємо для нього легальну триангуляцію.

Спочатку швидким методом знаходимо опуклу оболонку:

$$CH(P) = P_5P_3P_2P_4.$$

Точки, що залишилися, упорядковуємо за зростанням ординати: P_1, P_6 і з'єднуємо сусідні ребрами: P_1P_6 . Найменшу точку P_1 сполучаємо ребром з найменшою точкою опуклої оболонки P_5 . А найбільшу P_6 з найвищою точкою опуклої оболонки P_2 . Отримаємо два Y-монотонні многокутники: $P_5P_1P_6P_2P_4$ та $P_5P_3P_2P_6P_1$. Триангулюємо їх відрізанням вух знизу. Отже, проводимо такі діагоналі: $P_4P_1, P_4P_6, P_1P_3, P_3P_6$.

Перевіряємо легальність ребра P_4P_1 . Воно є спільною стороною трикутників $P_5P_4P_1$ та $P_2P_4P_1$. Рівняння круга D_{541} , що описане навколо трикутника $P_5P_4P_1$:

$$(x + 5/2)^2 + (y + 5/2)^2 \leq 25/2.$$

Координати точки $P_2(0, 3)$ йому не задовольняють, тому це ребро легальне.

Перевіримо наступне ребро P_4P_6 . Воно є спільним для трикутників $P_4P_6P_1$ та $P_4P_6P_2$. Рівняння круга D_{461} :

$$(x + 1/2)^2 + (y - 3/2)^2 \leq 5/2.$$

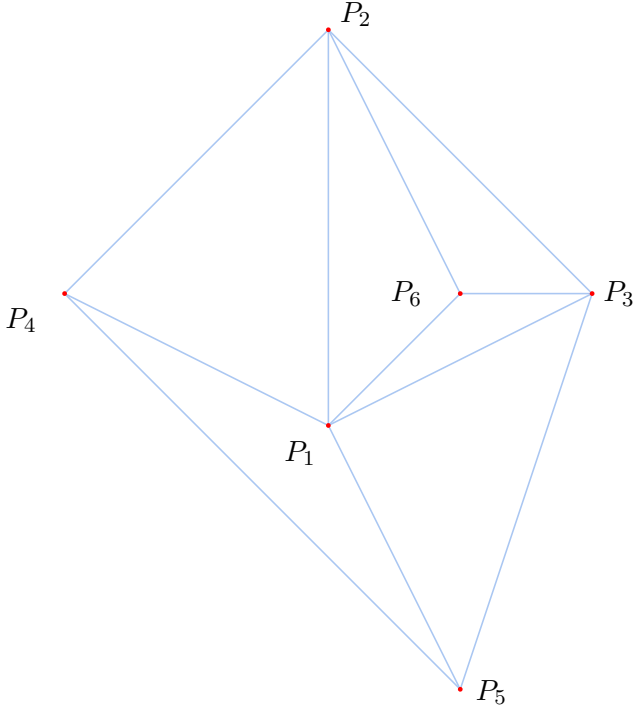


Рис. 6.9: Легальна триангуляція набору
 $P = \{(0, 0), (0, 2), (2, 1), (-2, 1), (1, -2), (1, 1)\}$

Координати точки $P_2(0, 2)$ задовольняють цій нерівності, тому ребро P_4P_6 не є легальним. Ми його викреслюємо і заміняємо на ребро P_1P_2 (Рис.6.9).

Після заміни знову перевіряємо на легальність всі ребра. Ця перевірка показує, що всі вони легальні. Отже, повний список ребер триангуляції буде мати такий вигляд:

зовнішні – $P_5P_3, P_3P_2, P_2P_4, P_4P_5,$

внутрішні – $P_5P_1, P_1P_6, P_6P_2, P_4P_1, P_0P_2, P_1P_3, P_3P_6.$

6.3.4 Граф Делоне та триангуляція Делоне

Означення 6.9. *Граф Делоне*, це граф двоїстий до діаграми Вороного з вершинами в точках множини P .

Лема 6.7. *Граф Делоне може бути реалізований як прямо-лінійний плоский граф.*

Доведення. Для ребра діаграми Вороного розглянемо відповідне ребро P_iP_j графа Делоне. Згідно властивостей діаграми Вороного існує коло c_{ij} з центром Q_{ij} на ребрі діаграми Вороного, яке не містить всередині себе точок з P і проходить через P_i та P_j . Якщо припустити, що P_iP_j перетинає якесь інше ребро P_kP_m , то ми отримаємо суперечність через те, що або одна з вершин лежить в порожньому колі c_{ij} або c_{km} або те, що у трикутників $Q_{ij}P_iP_j$ та $Q_{km}P_kP_m$ перетинаються ще інші сторони, наприклад $Q_{ij}P_i$ та $Q_{km}P_k$, що не можливо, бо вони лежать в різних комірках Вороного, які не перетинаються.

Кожна грань графа Делоне є опуклим багатокутником, бо його вершини лежать на порожньому колі, що проходить через них.

Означення 6.10. *Триангуляція Делоне*, це триангуляція, що отримана з графа Делоне триангуляцією кожної його грані.

Точки з P знаходяться в загальному положенні, якщо жодні чотири з них не лежать на одному колі.

Якщо точки з P знаходяться в загальному положенні, то триангуляція Делоне є графом Делоне.

Якщо точки з P знаходяться в загальному положенні, то вона може містити грані, що не є трикутниками. В цьому випадку для даного набору точок існує декілька різних триангуляцій Делоне.

Отже, з властивостей діаграм Вороного випливає

Теорема 6.2. *Нехай $T(P)$ – триангуляція довільного набору точок P . $T(P)$ є триангуляцією Делоне тоді та тільки тоді, коли для кожного її трикутника, коло описане навколо нього, не містить всередині себе точок з P .*

Теорема 6.3. *Кожна легальна триангуляція є триангуляцією Делоне. Якщо множина точок P є множиною загального положення, то її триангуляція Делоне є легальною.*

Доведення. Нехай триангуляція є легальною $P_iP_jP_k$ її трикутник і нехай точка P_m лежить всередині кола, описаного навколо $P_iP_jP_k$ і нехай P_k та P_m лежать по різні боки від прямої P_iP_j . Якщо таких трикутників та точок P_m декілька, то будемо розглядати ті з них, для яких кут $P_iP_mP_j$ є максимальним. Крім грані $P_iP_jP_k$, ребро P_iP_j входить в іншу грань $P_iP_jP_l$. При цьому $P_l \neq P_m$. Оскільки $\angle P_iP_mP_j > \angle P_iP_lP_j$, то P_m лежить всередині кола, описаного навколо трикутника $P_iP_jP_l$. Тоді $\angle P_iP_mP_l > \angle P_iP_kP_j$, що суперечить вибору пари трикутник – точка. Отримана суперечність доводить, що легальна триангуляція є триангуляцією Делоне.

Доведення другої частини теореми впливає з попередньої теореми та леми.

Вправа 6.5. Довести, що всі триангуляції Делоне однієї і тієї самої множини мають однаковий мінімальний кут.

Запропонований у цьому розділі алгоритм побудови триангуляції Делоне на основі перекидання ребер не є оптимальним. Оптимальним є побудова розбиття Вороного і двоїстого графа до нього, що можна реалізувати зі швидкістю $O(n \log n)$.

Також популярним алгоритмом є побудова триангуляцій за допомогою послідовного з'єднань ребрами точок, відстань між якими найменша, за умови, що це ребро не перетинає раніше побудованих ребер. Оскільки при цьому треба обчислювати відстані для всіх пар точок, то швидкість роботи такого алгоритму не менше за $O(n^2)$.

6.3.5 Метод "Розділяй та володарюй" побудови триангуляції Делоне

Вся множина точок розбивається на дві приблизно рівні множини горизонтальною або вертикальною прямою (якщо $x_{\max} - x_{\min} > y_{\max} - y_{\min}$, то вибираємо вертикальну пряму, інакше – горизонтальну). Отримані множини знову розбиваються на дві, поки не отримаємо множини, які легко триангулювати – що містять не більше 4 точок (триангуляція пари точок – відрізок, трійки точок – трикутник, 4 точок – два або три трикутника). Отримані триангуляції зливаємо в порядку оберненому до розбиття.

Злиття триангуляцій. Нехай права та ліва триангуляції Делоне розділені вертикальною прямою. Побудуємо триангуляцію їх об'єднання. Для цього знаходимо верхню та нижню опорні прямі. Їх відрізки обмежують Y-монотоний багатокутник між лівою та правою триангуляціями. Триангулюємо цей багатокутник методом відрізання вух знизу догори. Отримані в результаті триангуляції трикутники перевіряємо на легальність ребер і, якщо потрібно, робимо заміну ребер.

Швидкість роботи цього методу складає $O(n \log n)$.

Приклад 6.11. Побудуємо триангуляцію Делоне набору точок

$$P = \{P_1(0, 3), P_2(1, 0), P_3(2, 7), P_4(3, 4), P_5(5, 1), P_6(8, 6)\}.$$

Спочатку розбиваємо весь набір на два набори за координатою x . До лівого входять точки P_1, P_2, P_3 , до правого – P_4, P_5, P_6 . Отже, ліва і права триангуляції – це трикутники. Нижні точки трикутників P_2, P_5 утворюють нижню опорну пряму, оскільки $\Delta_{253} > 0$, $\Delta_{254} > 0$ та $\Delta_{256} > 0$. Аналогічно P_3P_6 є верхньою опорною прямою. Оскільки, $\Delta_{123} > 0$ та $\Delta_{456} > 0$, то область між лівою та правою триангуляцією є багатокутником $P_2P_5P_4P_6P_3$. Триангулюємо його знизу до

гори. Три точки з найменшою ординатою P_2, P_5, P_4 . Відрізок P_2P_4 не перетинає ребер многокутника, тому він є його діагоналлю. Відрізаємо вухо $P_2P_5P_4$. Отримаємо новий лівообертальний многокутник $P_2P_4P_6P_3$. Для трьох точок P_2, P_4, P_6 з найменшими ординатами $\Delta_{246} < 0$, тому P_2P_6 не є діагоналлю. Тоді діагоналлю є P_4P_3 . Отже, отримаємо такий набір трикутників в триангуляції многокутника: $P_2P_5P_4, P_2P_4P_3, P_4P_6P_3$.

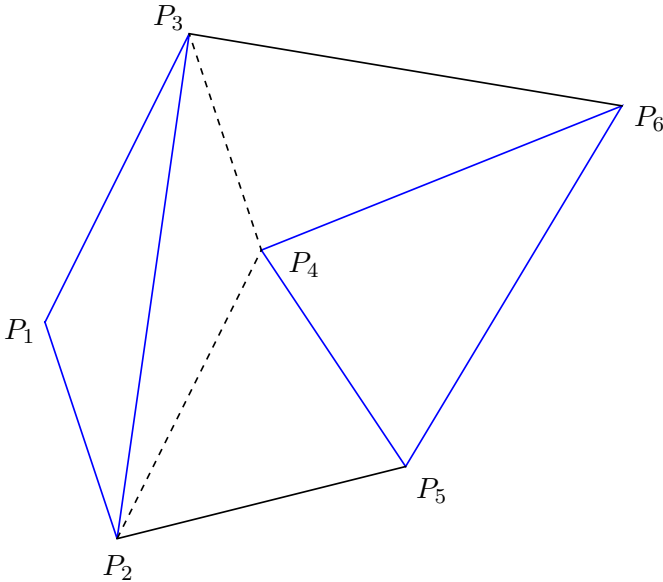


Рис. 6.10: триангуляція набору з шести точок

Перевіряємо легальність ребер отриманих трикутників. Скористаємося рівнянням кола D_{ijk} описаного навколо вершин трикутника (див. додаток).

Маємо:

$P_3 \notin D_{254}$ – ребро P_2P_4 легальне.

$P_6 \notin D_{254}$ – ребро P_5P_4 легальне.

$P_1 \in D_{243}$ – ребро P_2P_3 нелегальне. Тому замінюємо його ре-

бром P_1P_4 . Тоді замість трикутників $P_1P_2P_3$ та $P_2P_4P_3$ будуть трикутники $P_1P_2P_4$ та $P_1P_4P_3$.

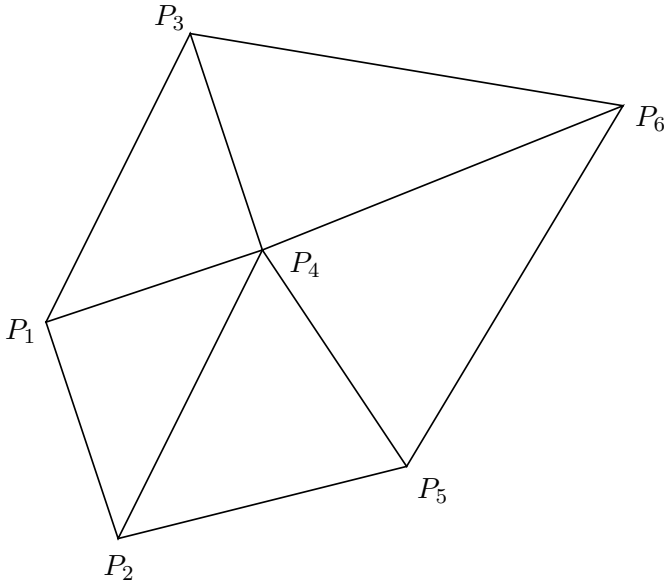


Рис. 6.11: триангуляція Делоне набору з шести точок

Ребро P_1P_4 є легальним за побудовою. Перевіряємо легальність P_2P_4 :

$P_1 \notin D_{254}$ – ребро P_2P_4 легальне.

$P_1 \notin D_{463}$ – ребро P_4P_3 легальне.

$P_5 \notin D_{463}$ – ребро P_4P_6 легальне.

Отже, всі внутрішні ребра легальні, тому побудована триангуляція є триангуляцією Делоне. Її ребра:

зовнішні – $P_1P_2, P_2P_5, P_5P_6, P_6P_3, P_3P_1$;

внутрішні – $P_1P_4, P_2P_4, P_5P_4, P_6P_4, P_3P_4$.

Вправа 6.6. Знайти триангуляцію Делане набору точок

$$P = \{P_1(0, 0), P_2(0, 4), P_3(2, 4), P_4(-2, 3), P_5(2, -2), P_6(4, 1)\}.$$

7 Додатки

7.1 Використання Wolfram mathematica для візуалізації та обчислень

Для детального описання застосування відповідної функції, чи об'єкта набираємо знак питання перед ним і так викликаємо довідку для нього.

Аргумент кожної функції(команди) розміщуємо після неї у квадратних дужках. Координати вектора записуємо у фігурних дужках. Елементи списків також записуються у фігурних дужках. Матриця записується як список векторів, наприклад $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.

7.1.1 Візуалізація

Для візуалізації графіків багатокутників використовуємо команду Graphics[Графічний об'єкт].

Найпоширеніші графічні об'єкти:

Triangle – трикутник,

Polygon – багатокутник,

Rectangle – прямокутник,

Disk – круг,

Circle – коло,

Line – відрізок

Arrow – вектор, стрілка

Circumsphere – коло, що проходить через три точки

7.1.2 Обчислення

Det – визначник

Circumsphere[$\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}\}$] – коло, що проходить через три точки (обчислюється центр та радіус)

Solve[$\{A x + B y + C == 0, a x + b y + c == 0\}, \{x, y\}$] – знаходження точки перетину прямих (розв’язок системи рівнянь)

7.1.3 Локалізація

Приналежність до зазначених раніше об’єктів перевіряється за допомогою символу \in (набирається як `Esc` elem `Esc`)

Приклад 1. Приналежність точки до многокутника:

$\{1, 1\} \in \text{Polygon}[\{\{0, 0\}, \{5, 0\}, \{0, 5\}\}]$

Приклад 2. Приналежність точки до диску, граничне коло якого проходить через три точки:

In[1]:= Circumsphere[$\{\{0, 0\}, \{2, 0\}, \{0, 1\}\}$]

Out[1]= Sphere[$\{1, \frac{1}{2}\}, \frac{\sqrt{5}}{2}$]

In[2]:= $\{1, 1\} \in \text{Disc}[\{1, \frac{1}{2}\}, \frac{\sqrt{5}}{2}]$

Out[1]= True

7.1.4 Конструкції

ConvexHullMesh – опукла оболонка

VoronoiMesh – діаграма Вороного

DelaunayMesh – триангуляція Делоне

7.2 Корисні рівняння

7.2.1 Рівняння прямої

Загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0.$$

7 Додатки

Параметричні рівняння прямої з параметром $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt. \end{cases}$$

Пряма, що проходить через точки $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$:

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1),$$

або у вигляді визначника:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Рівняння бісектрис між прямими $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Рівняння бісектриси кута $P_1P_2P_3$ з параметром $t \geq 0$:

$$\begin{cases} x = x_2 + \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} + \frac{x_3 - x_2}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \right) t, \\ y = y_2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} + \frac{y_3 - y_2}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \right) t. \end{cases}$$

Рівняння серединного перпендикуляра до відрізка P_1P_2 :

$$(x_2 - x_1)(2x - x_1 - x_2) + (y_2 - y_1)(2y - y_1 - y_2) = 0.$$

7.2.2 Рівняння описаного кола

Теорема 7.1. *Нехай три точки $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$ не лежать на одній прямій. Тоді рівняння кола, що про-*

дить через них, має вигляд

$$\begin{vmatrix} x & y & x^2 + y^2 & 1 \\ x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. Розкривши дужки і виділяючи повні квадрати пересвідчуємося, що рівняння теореми є рівнянням кола. Нехай (x_0, y_0) – центр, а R – радіус кола, описаного навколо $P_1P_2P_3$. Визначник не зміниться, якщо до третього стовпчика додати останній помножений на $x_0^2 + y_0^2 - R^2$, відняти перший стовпчик помножений на $2x_0$ та відняти другий стовпчик помножений на $2y_0$. Тоді другий, третій та четвертий елемент третього стовпчика перетворюються на 0 (оскільки точки P_1, P_2, P_3 належать колу). Розкривши визначник за третім стовпчиком, отримаємо:

$$(x^2 + y^2 + x_0^2 + y_0^2 - R^2 - 2x_0x + 2y_0y)\Delta_{123} = 0.$$

З того, що P_1, P_2, P_3 не лежать на одній прямій випливає: $\Delta_{123} \neq 0$. Отже, точка (x, y) лежить на колі з центром (x_0, y_0) і радіусом R . \square

З того, що в рівнянні кола коефіцієнт при $x^2 + y^2$ дорівнює Δ_{123} випливає

Наслідок 1. Рівняння диску (кругу) D_{ijk} , який обмежений колом, що проходить через три точки $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$, має вигляд

$$\Delta_{123} \begin{vmatrix} x & y & x^2 + y^2 & 1 \\ x_i & y_i & x_i^2 + y_i^2 & 1 \\ x_j & y_j & x_j^2 + y_j^2 & 1 \\ x_k & y_k & x_k^2 + y_k^2 & 1 \end{vmatrix} \leq 0.$$

7.3 Контрольні питання

1. Які можливі типи взаємного розташування двох та трьох точок на площині та як їх визначити за координатами точок?
2. Які можливі типи взаємного розташування чотирьох точок на площині та як їх визначити за координатами точок?
3. Які можливі типи взаємного розташування чотирьох точок у просторі та як їх визначити за координатами точок?
4. Запишіть рівняння області, обмеженої трикутником із заданими координатами вершин.
5. Як визначити приналежність точки чотирикутнику, заданому координатами своїх вершин?
6. Які є методи визначення того, чи належить точка опуклому многокутнику?
7. Як у методі променя обробляється ситуація, коли промінь проходить через дві вершини многокутника?
8. У яких випадках метод трапецій локалізації точки на многокутнику є ефективним?
9. Як побудувати опуклу оболонку скінченного числа точок найвним алгоритмом?
10. Як побудувати опуклу оболонку скінченного числа точок методом верхньої та нижньої оболонок?
11. Як побудувати опуклу оболонку скінченного числа точок методом Грехема?

7 Додатки

12. Як побудувати опуклу оболонку скінченного числа точок методом загортання конверта?
13. Як побудувати опуклу оболонку скінченного числа точок методом розділяй та володарюй?
14. Як побудувати опуклу оболонку скінченного числа точок швидким методом?
15. Яка формула пов'язує числа вершин, ребер та граней плоского графа?
16. Які списки потрібно скласти для ефективного кодування плоских прямолінійних графів?
17. Як знайти вухо на многокутнику?
18. Як триангулювати монотоний многокутник?
19. В яких задачах застосовується метод деталізації?
20. Як будуються трапецеїдальні карти?
21. Як визначаються вершини та ребра графа видимості?
22. Чи залежить карта доріг від вибору трапецеїдальної карти?
23. Якою буде діаграма Вороного для чотирьох вершин прямокутника?
24. Які властивості має діаграма Вороного скінченного числа точок?
25. Які є алгоритми побудови діаграми Вороного?
26. Як побудувати триангуляцію скінченного набору точок на площині?
27. Чим триангуляція Делоне відрізняється від триангуляції оптимальної за кутом?

7.3.1 Приклади завдань модульної роботи 1.

1. Знайти взаємне розташування таких чотирьох точок у просторі: $(1,2,0)$, $(1,0,1)$, $(2,1,1)$, $(0,1,0)$.

2. Знайти многокутники які є перетином, об'єднанням та різницею двох трикутників ABC та DEF , якщо

$$A(1, 0), B(5, 0), C(2, 5), D(0, 4), E(3, 1), F(5, 4).$$

3. Знайти опуклу оболонку для такого набору точок $(2,1)$, $(2,3)$, $(0,5)$, $(1,0)$, $(2,4)$.

4. Перевірити, чи належить точка $(0,0)$ чотирикутнику з вершинами $(-3,1)$, $(1,0)$, $(5,-1)$, $(-2,-3)$.

7.3.2 Приклади завдань модульної роботи 2.

1. Знайти найкоротший шлях з точки $(-5,5)$ до точки $(5,4)$, що оминає чотирикутник в вершинами $(-2,-2)$, $(2,-3)$, $(3,3)$, $(-2,2)$.

2. Скласти рівняння множини точок, що знаходяться ближче до точки $(1,1)$ ніж до кожної з таких точок: $(1, 7)$, $(5,5)$, $(-3, -5)$, $(-5,1)$.

3. Знайти триангуляцію многокутника з вершинами $(-3,0)$, $(1,-4)$, $(7,0)$, $(7,5)$, $(5,3)$, $(3,5)$, $(5,1)$.

4. Знайти триангуляцію Делоне множини точок $(3, 5)$, $(4,5)$, $(-3, -5)$, $(-5,1)$, $(-5,-1)$.

Список умовних позначень

∂M – межа M

$CH(M)$ – опукла оболонка множини M

G_f – граф Ріба функції f

Δ_{ijk} – визначник $\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}$.

Предметний покажчик

- вуха многокутника, 55
- граф Делоне, 97
- граф Ріба, 60
- граф видимості, 73
- діагональ, 53
- діаграма Вороного, 78
- зірковий многокутник, 15
- карта доріг, 76
- комірка Вороного, 78
- легальна триангуляція, 94
- легальне ребро, 94
- лексикографічний порядок,
22
- локалізація, 16
- лівоповоротний трикутник,
9, 10
- многокутник, 15
- монотонний многокутник, 58
- оптимальна за кутом три-
ангуляція, 93
- опукла оболонка, 22
- опуклий многокутник, 15
- простий многокутник, 15
- півребро, 49
- трапеційд, 69
- триангуляція Делоне, 97
- триангуляція многокутника,
54
- триангуляція над множиною
точок, 92

Бібліографія

- [1] Ю.О.Гришко, О.С.Шкільняк. Алгоритми обчислювальної геометрії: Навч. Пос.-К., КНУ, 2020.
- [2] В.М.Терещенко, І.В.Кравченко, А.В.Анісімов. Основні алгоритми обчислювальної геометрії.-К., 2002.
- [3] H. Edelsbrunner. A Short Course in Computational Geometry and Topology. Springer. 2014
- [4] S.L.Devadoss, J. O'Rourke. Discrete and Computational Geometry. Princeton University Press, 2011.
- [5] M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, M. Overmars. Computational Geometry: Algorithms and Applications. 3rd edition. – Springer, 2008.
- [6] F.Preparata, M.Shamos. Computational Geometry: An Introduction. Springer, 1985.
- [7] J. O'Rourke. Computational Geometry in C. Cambridge University Press, Second Edition, 1998.
- [8] Goodman J.E., O'Rourke J. , C. D. Toth. Handbook of discrete and computational geometry. CRC, Press, - 3ed. – 2018. - 1927 p
- [9] В.М.Бабич, С.В.Білун, В.М.Журавльов, В.В.Кириченко, А.П.Петравчук, В.О.Пехтерев, О.О.Пришляк, І.М.Циганівська, Ж.Т.Черноусова. Збірник задач з

Бібліографія

- аналітичної геометрії. — Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2005. — 228 с.
- [10] В.М. Кузаконь, В.Ф. Кириченко, О.О. Пришляк. Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти. *Праці Інституту математики НАН України*, 97:1–500, 2013.
- [11] О.О.Пришляк. Диференціальна геометрія. — К., 2004.
- [12] О.О. Пришляк. Основи сучасної топології: Навчальний посібник К.: Видавничо-поліграфічний центр Київський університет, 2006.
- [13] О.Пришляк. Гладкі многовиди та тензори. Київ, 2022.- 50с. [Електронний ресурс] URL: <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2022/09/tensor.pdf>
- [14] О.Пришляк, Н.Лукова-Чуйко. Диференціальна геометрія та топологія. Курс лекцій. Вид-во Зовнішня торгівля, Київ, 2012. 80 с.
- [15] О.О.Пришляк. Топологія многовидів. Навчальний посібник. ВПЦ Київський Університет, Київ, 2015. — 96с.
- [16] О.О.Пришляк. Алгоритмічні та комп'ютерні методи в топології та теорії динамічних систем. Навчальний посібник - К.:, 2023. - 212 с.
- [17] Станжицький О.М., Собчук В.В., Капустян О.В., Федоренко Ю.В., Цань В.Б. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина IV «Методика вивчення геометрії» для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету, 2023. — 110 с.

Бібліографія

- [18] V. N. Tereshchenko, A. V. Anisimov. Recursion and parallel algorithms in geometric modeling problems. *Journal: Cybernetics and Systems Analysis*: Vol. 46, N 2 (2010), Page 173 - 184.
- [19] Терещенко В.М. Аналіз методів розв'язання оптимізаційних задач обчислювальної геометрії. Навчальний посібник. - ВПЦ Київський університет. – 2022. -112 с.
- [20] Терещенко В. Аналіз методів розв'язання задач геометричного пошуку. Навчальний посібник. - ВПЦ Київський університет. – 2023. -61 с. https://csc.knu.ua/media/filer_public/c7/83/c783a9ff-5591-4b2c-8ebf-2dce9bd4cb28/analiz_optim_240521_tereshchenko.pdf
- [21] Vasyl Tereshchenko, Yaroslav Tereshchenko. Triangulating a region between arbitrary polygons / *International Journal of Computing*.- 2017.- Vol. 16, Issue 3.- P 160-165.
- [22] Kotsur D., Tereshchenko V. Optimization Heuristics for Computing the Voronoi Skeleton. *Computational Science. ICCS 2019*. Springer. Volume 11536. 2019. P.96-111. <https://link.springer.com/chapter/10.1007>
- [23] Tereshchenko, V., Chudakov, S. Application of concatenable queue for parallel computational geometry algorithms / *Journal of WSCG* 28(1-2):56-62 DOI: 10.24132/CSRN.2020.3001.7 *Computer Science Research Notes*, 2020, P. 56-62.
- [24] Vasyl Tereshchenko, Maksim Kovalchuk and Yaroslav Tereshchenko. Optimization of Algorithms for Simple Polygonizations//*Lecture Notes in Networks and Systems: Communication and Intelligent Systems*. – Springer. -2021, vol. 467. -P. 603-617