Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

М.О. Денисьєвський

Конспект лекцій з математичного аналізу

Інтеграли. Ряди

Навчальний посібник для студентів першого курсу

Київ 2024

Зміст

Передмова

Пропонований навчальний посібник є конспектом лекцій з математичного аналізу, прочитаних автором у 2018 – 2024 роках студентам першого курсу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка спеціальності "статистика". Зважаючи на особливості математичної підготовки студентів указаної спеціальності, базові твердження доведені за типових припущень, не завжди найбільш загальних. Водночас, розглянуті важливі для застосування в теорії ймовірностей інтегральні нерівності, конструкція і граничні теореми для інтеграла Рімана – Стілтьєса.

Теоретичні положення курсу проілюстровані численими прикладами. Корисним і необхідним доповненням до цього конспекту є "Збірник задач з математичного аналізу. Частина І. Функції однієї змінної"[1] колективу авторів за редакцією М.О.Денисьєвського, який містить багато вправ спрямованих на вироблення відповідних математичних навичок. Докладний виклад навчального матеріалу можна знайти в [2, 3, 4]

Розділ 1

Невизначені інтеграли

1.1 Первісна. Невизначений інтеграл

Означення первісної та невизначеного інтеграла

Для функції $f : J \to \mathbb{R}$, визначеної на деякому проміжку J, розглядаються задачі:

- чи існує така функція $F : J \to \mathbb{R}$, що

$$\forall\, x \in J \;\exists\, F'(x) = f(x);$$

- якщо така функція F існує, то чи єдина вона;
- як описати усі такі функції;
- як знайти усі такі функції.

Означення 1.1 *Первісною або примітивною функції $f : J \to \mathbb{R}$ називається така функція $F : J \to \mathbb{R}$, що*

$$\forall\, x \in J \;\exists\, F'(x) = f(x).$$

Наприклад, функції $F_1(x) = \sin^2 x$ і $F_2(x) = -\cos^2 x$ є первісними функції $f(x) = \sin 2x$ на проміжку $J = \mathbb{R}$. Це перевіряється диференціюванням. Функція

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1; 0), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0; 1), \end{cases}$$

не має первісної на проміжку $J = (-1;\, 1)$. Справді, якщо б первісна G існувала, то за наслідком з теореми Лагранжа мала б виконуватися рівність

$$0 = g(0) = G'(0) = G'_+(0) = \lim_{x \to 0+} G'(x) = 1.$$

Теорема 1.1 (опис множини первісних) • *Нехай функція F є первісною функції f на проміжку J. Тоді для довільного числа $C \in \mathbb{R}$ функція $G(x) = F(x) + C$, $x \in J$, також є первісною.*

- *Нехай функції F і G – первісні функції f на проміжку J. Тоді для деякого числа $C \in \mathbb{R}$*
$$G(x) = F(x) + C, \ x \in J.$$

◀ Перше твердження перевіряється диференціюванням, друге є наслідком теореми Лагранжа. ▶

Означення 1.2 *Невизначеним інтегралом від функції $f : J \to \mathbb{R}$ називається вираз*
$$\int f(x)\,dx := F(x) + C, \ x \in J,$$
де F – деяка первісна функції f, C – довільне число. Операція відшукання первісної називається інтегруванням.

Далі буде доведено існування первісних неперервних функцій. Слід зауважити, що первісна не обов'язково виражається з допомогою арифметичних дій та суперпозиції через елементарні функції.

Елементарні властивості невизначеного інтеграла

Безпосередньо з означення випливають такі властивості.

- Нехай функція $F : \ J \to \mathbb{R}$ має похідну. Тоді
$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C, \ x \in J;$$

- Нехай функція $f : \ J \to \mathbb{R}$ має первісну. Тоді
$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x), \ x \in J.$$

Таким чином, інтегрування і диференціювання є взаємно оберненими операціями. Властивості інтегрування є прочитаними у зворотному напрямку властивостями диференціювання.

- (Лінійність) Нехай функції f, $g : \ J \to \mathbb{R}$ мають первісні. Тоді для будь-яких чисел α, $\beta \in \mathbb{R}$ функція $(\alpha f(x) + \beta g(x))$ теж має первісну і
$$\int \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx, \quad x \in J.$$

- (Лінійна заміна змінної) Нехай функція $f : \ J \to \mathbb{R}$ має первісну F. Тоді для $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ і проміжка $J' = \{t \in \mathbb{R} | \, at + b \in J\}$
$$\int f(at + b)\,dt = \frac{1}{a}F(at + b) + C, \quad t \in J'.$$

Таблиця основних невизначених інтегралів

Наступні рівності виконуються на довільному інтервалі, який належить множині визначення підінтегральної функції і перевіряються диференціюванням.

1. $\int x^\alpha \, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1.$ Зокрема, $\int e^x \, dx = e^x + C.$

4. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C.$

9. $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

12. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

13. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0.$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, \quad a \neq 0.$

1.2 Інтегрування частинами. Формула заміни змінної

1. Інтегрування частинами

Теорема 1.2 ***(формула інтегрування частинами)***
Нехай функції $f, g :\ J \to \mathbb{R}$ диференційовні на J, а функція fg' має первісну на J. Тоді функція $f'g$ також має первісну на J та виконується рівність

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx,\ x \in J.$$

Останню формулу можна записати у вигляді $\int g\,df = fg - \int f\,dg$.
◀ Доведення випливає з формул для інтеграла від похідної, похідної добутку і властивості лінійності інтеграла. ▶

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int x^2 e^x\,dx$.
◀ Двічі застосовуємо формулу інтегрування частинами

$$\int x^2 e^x\,dx = \int x^2\,d(e^x) = x^2 e^x - \int e^x\,d(x^2) = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx = x^2 e^x -$$
$$- 2\int x\,d(e^x) = x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

▶

2. Заміна змінної

Теорема 1.3 ***(формула заміни змінної)***
Нехай $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, $x \in J$, функція $\varphi : \tilde{J} \to J$ диференційовна на проміжку $\tilde{J}$. Тоді

$$\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C,\ t \in \tilde{J}.$$

◀ Доведення випливає з ланцюгового правила обчислення похідної складеної функції та означення інтеграла. ▶

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \dfrac{\ln^2 x}{x}\,dx$.
◀ Використаємо формулу заміни змінної, поклавши $\varphi(x) = \ln x$, $f(z) = z^2$, або в короткому записі

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int (\ln x)^2\,d(\ln x) = \frac{1}{3}\ln^3 x + C,\ x > 0.$$

▶

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx, \quad a > 0.$
◀ Використаємо формулу заміни змінної у спосіб, який називається інтегруванням підстановкою $x = \varphi(t)$. Особливість цього прийому пов'язана з необхідним

існуванням оберненої функції $t = \varphi^{-1}(x)$.

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} x = a \operatorname{sh} t,\ \ t \in \mathbb{R},\ \ dx = a \operatorname{ch} t\, dt \\ t = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{a^2(1 + \operatorname{sh}^2 t)}\, a \operatorname{ch} t\, dt = a^2 \int \operatorname{ch}^2 t\, dt = \frac{a^2}{2} \int (\operatorname{ch} 2t + 1)\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} + t \right) + C = \frac{a^2}{2} (\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + t) + C =$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

►

1.3 Інтегрування раціональних дробів

1. Раціональні функції

Нехай P і Q – алгебраїчні многочлени з дійсними коефіцієнтами, що не мають спільних коренів.

Означення 1.3 *Функція* $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$, *називається раціональною (раціональним дробом).*

Далі розглядається алгоритм інтегрування раціональних функцій. Якщо $\deg P \geq \deg Q$, то діленням із залишком раціональну функцію можна подати у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу, степінь чисельника якого строго менше за степінь знаменника. Саме правильні раціональні дроби розглядаються в подальшому.

За основною теоремою алгебри многочлен Q степеня $n \geq 1$ має n взагалі кажучи комплексних коренів з урахуванням їхньої кратності. При цьому для кожного його комплексного кореня $z = \alpha + i\beta$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, комплексно спряжене до нього число $\overline{z} = \alpha - i\beta$ також є коренем многочлена Q, оскільки $Q(\overline{z}) = \overline{Q(z)} = \overline{0} = 0$. Добуток

$$(x - z)(x - \overline{z}) = x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2)$$

є таким квадратним тричленом відносно x, що не має дійсних коренів, для його дискримінанта D правильна нерівність

$$\frac{D}{4} = \alpha^2 - (\alpha^2 + \beta^2) = -\beta^2 < 0.$$

Таким чином, знаменник правильного раціонального дробу – многочлен Q зі старшим коефіцієнтом 1 – єдиним чином з точністю до перестановки множників розкладається у добуток множників вигляду $(x - a)^m$, де a – дійсний корінь кратності $m \geq 1$, і степенів квадратних тричленів $(x^2 + px + q)^m$, що не мають дійсних коренів, $\{p, q\} \subset \mathbb{R}$, $p^2 - 4q < 0$, $m \geq 1$.

Можна довести, що такому розкладу знаменника

$$Q(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x - a_k)^{m_k} \cdot \\ \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{n_1}(x^2 + p_2 x + q_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_s x + q_s)^{n_s},$$

$a_1, \ldots, a_k,\ p_1, \ldots, p_s,\ q_1, \ldots, q_s \in \mathbb{R},\ m_1, \ldots, m_k,\ n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N};\ x \in \mathbb{R}$, відповідає єдиний з точністю до перестановки доданків розклад правильного раціонального дробу в суму

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^{(1)}}{x - a_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x - a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{m_1}^{(1)}}{(x - a_1)^{m_1}} + \ldots + \\ & + \frac{A_1^{(k)}}{x - a_k} + \frac{A_2^{(k)}}{(x - a_k)^2} + \ldots + \frac{A_{m_k}^{(k)}}{(x - a_k)^{m_k}} + \ldots + \\ & + \frac{B_1^{(1)}x + D_1^{(1)}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{B_2^{(1)}x + D_2^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \ldots + \frac{B_{n_1}^{(1)}x + D_{n_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{n_1}} + \ldots + \\ & + \frac{B_1^{(s)}x + D_1^{(s)}}{x^2 + p_s x + q_s} + \frac{B_2^{(s)}x + D_2^{(s)}}{(x^2 + p_s x + q_s)^2} + \ldots + \frac{B_{n_s}^{(s)}x + D_{n_s}^{(s)}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{n_s}}.\end{aligned} \tag{1.1}$$

У цьому розкладі коефіцієнти $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots, A_{m_k}^{(k)}, B_1^{(1)}, D_1^{(1)}, \ldots, B_{n_s}^{(s)}, D_{n_s}^{(s)}$ – деякі дійсні числа. Раціональні дроби у правій частині рівності (1.1) називаються елементарними. Для їх побудови використовують метод невизначених коефіцієнтів: праву частину рівності (1.1) зводять до спільного знаменника і після цього прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях x у чисельниках лівої і правої частин. Таким чином, інтегрування довільної раціональної функції зводиться до інтегрування многочлена і елементарних дробів.

2. Інтегрування елементарних раціональних дробів

Розглянемо інтегрування елементарних раціональних дробів.

1. Відповідною заміною змінної $t = x - a$ або $t = x^2 + a^2$ встановлюються наступні рівності.

   (а) Нехай $a \in \mathbb{R}$.
   $$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$$
   на кожному з інтервалів $(-\infty, a),\ (a, \infty)$.

   (б) Нехай $a \in \mathbb{R}, \quad m \geq 2$.
   $$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C$$
   на кожному з інтервалів $(-\infty, a),\ (a, \infty)$.

   (в) Нехай $a \neq 0$.
   $$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (г) Нехай $a \neq 0, \quad m \geq 2$.
   $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)(x^2+a^2)^{m-1}} + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Нехай $a \neq 0$. Інтеграл
   $$K_m(x) = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m},\ m \geq 1,$$
   обчислюється за допомогою рекурентної формули:
   $$K_1(x) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$
   $$K_{m+1}(x) = \frac{1}{2ma^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^m} + (2m-1)K_m\right),\ m \geq 1.$$
   ◀ Використаємо формулу інтегрування частинами.
   $$K_m(x) = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m} = \frac{x}{(x^2+a^2)^m} - \int x\,d\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^m}\right) =$$
   $$= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2m\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{m+1}}\,dx =$$
   $$= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2mK_m(x) - 2ma^2K_{m+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$
   ▶

3. Нехай $p^2 - 4q < 0$, $m \geq 1$, $\{B,\, D\} \subset \mathbb{R}$.

$$\int \frac{Bx + D}{(x^2 + px + q)^m}\,dx = \int \frac{Bx + D}{\left((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^m}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x + \frac{p}{2},\ dx = dt, \\ a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0 \end{array} \right| = B\int \frac{t\,dt}{(t^2 + a^2)^m} + \left(D - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}.$$

Останні інтеграли обчислені в п.п. 1 в), г); 2.

3. Інтегрування раціональних дробів від $\sin$ і $\cos$

Інтеграли від тригонометричних функцій часто обчислюються із застосуванням тригонометричних формул пониженння степеня, перетворення добутку в суму та інших.

Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, де R – раціональна функція двох змінних, тобто відношення двох многочленів, зводяться до інтегрування раціональної функції однієї змінної за допомогою так званої <u>універсальної тригонометричної підстановки</u> $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\tfrac{2t}{1+t^2},\ \tfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\,\tfrac{2\,dt}{1+t^2} = \int \widetilde{R}(t)\,dt,$$

де $\widetilde{R}$ – раціональна функція однієї змінної.

Якщо виконується одна з тотожностей

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \text{ або } R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то раціоналізація підінтегрального виразу досягається також підстановками $t = \cos x$ та $t = \sin x$ відповідно. Якщо ж

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то для раціоналізації підінтегрального виразу можна застосувати підстановку $t = \operatorname{tg} x$.

4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Нехай R – раціональна функція двох змінних.

1°. Нехай $m \in \mathbb{N}$, числа $\{a,\, b,\, c,\, d\} \subset \mathbb{R}$ задовольняють нерівність $ad \neq bc$. Тоді

$$\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right)\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ x = \frac{b - d\cdot t^m}{ct^m - a}, \\ dx = \left(\frac{b-d\cdot t^m}{ct^m - a}\right)'\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{b - d\cdot t^m}{ct^m - a},\, t\right)\cdot\left(\frac{b - d\cdot t^m}{ct^m - a}\right)'\,dt.$$

Маємо інтеграл від раціональної функції однієї змінної.

2°. Для чисел $\{a,\, b,\, c\} \subset \mathbb{R}$, $a \neq 0$, заміною $x + \frac{b}{2a} = d \cdot t$ при деякому d інтеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

зводиться до інтеграла одного з типів

$$\int \widetilde{R}(t,\, \sqrt{t^2-1})\,dt, \quad \int \widetilde{R}(t,\, \sqrt{t^2+1})\,dt, \quad \int \widetilde{R}(t,\, \sqrt{1-t^2}).$$

Останні інтеграли зводяться до інтегралів від раціональної функції як в п. 1°, або тригонометричною чи гіперболічною підстановкою.

За допомогою підстановок Ейлера

1. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$, якщо $a > 0$,
2. $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$, якщо $c > 0$,
3. $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$, якщо x_1, x_2 – дійсні корені,

інтеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

також зводиться до інтеграла від раціональної функції.

3°. Інтеграл від диференціального бінома

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

де m, n, p – раціональні числа, зводиться до інтегрування раціональних функцій лише в таких трьох випадках (теорема Чебишова):

Випадок 1. $p \in \mathbb{Z}$. Застосовується підстановка $x = t^N$, де N – спільний знаменник дробів m і n.

Випадок 2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$. Застосовується підстановка $a + bx^n = t^N$, де N – знаменник дробу p.

Випадок 3. $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$. Застосовується підстановка $ax^{-n} + b = t^N$, де N – знаменник дробу p.

Розділ 2

Інтеграл Рімана

2.1 Означення інтеграла Рімана

Нехай $[a;\, b] \subset \mathbb{R}$. Множина точок

$$\lambda = \lambda([a;\, b]) := \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

називається розбиттям відрізка $[a;\, b]$. Позначимо

$$\Delta x_k := x_{k+1} - x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1; \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a.$$

Число $|\lambda| := \max\limits_{k=0,1,\ldots,n-1} \Delta x_k$ називається діаметром розбиття λ.

Розглянемо обмежену функцію $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$. Для довільного розбиття $\lambda = \lambda([a;\, b])$ утворимо

- нижню суму Дарбу $\quad L(f, \lambda) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} \inf\limits_{[x_k;\, x_{k+1}]} f \cdot \Delta x_k$;
- верхню суму Дарбу $\quad U(f, \lambda) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sup\limits_{[x_k;\, x_{k+1}]} f \cdot \Delta x_k$.

Виберемо довільним чином відмічені точки $\xi_k \in [x_k;\, x_{k+1}], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$, і утворимо

- інтегральну суму $\quad S(f, \lambda, \{\xi_k\}) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$.

Властивості

1. $\forall\, \lambda = \lambda([a;\, b]) := \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}\ \forall\, \{\xi_k\}$:

$$\inf_{[a;\, b]} f \cdot (b-a) \le L(f, \lambda) \le S(f, \lambda, \{\xi_k\}) \le U(f, \lambda) \le \sup_{[a;\, b]} f \cdot (b-a).$$

◀ При кожному $k = 0, 1, \ldots, n-1$ нерівність

$$\inf_{[a;\, b]} f \le \inf_{[x_k;\, x_{k+1}]} f \le f(\xi_k) \le \sup_{[x_k;\, x_{k+1}]} f \le \sup_{[a;\, b]} f$$

домножимо на додатне число Δx_k і підсумуємо отримані нерівності. ▶

2. Нехай $\lambda = \lambda([a;\, b])$, $\lambda_1 = \lambda \cup \{z\}$. Тоді

$$L(f, \lambda) \le L(f, \lambda_1), \qquad U(f, \lambda) \ge U(f, \lambda_1).$$

◀ Якщо $z \in (x_k;\, x_{k+1})$, то

$$\inf_{[x_k;\, x_{k+1}]} f \cdot \Delta x_k = \inf_{[x_k;\, x_{k+1}]} f \cdot ((z - x_k) + (x_{k+1} - z)) \le$$
$$\le \inf_{[x_k;\, z]} f \cdot (z - x_k) + \inf_{[z;\, x_{k+1}]} f \cdot (x_{k+1} - z).$$

▶

Розбиття $\lambda_2([a;\, b])$ називається <u>підрозбиттям</u> (або <u>подрібненням</u>) розбиття $\lambda_1([a;\, b])$, якщо $\lambda_1 \subset \lambda_2$. Таким чином, при переході до підрозбиття нижня сума Дарбу може хіба що зрости, а верхня – хіба що зменшитися.

3. Для будь-яких розбиттів $\lambda_1([a;\, b])$, $\lambda_2([a;\, b])$

$$L(f, \lambda_1([a;\, b])) \le U(f, \lambda_2([a;\, b]).$$

◀ Для розбиття $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$ за властивостями 2 і 1 маємо нерівності

$$L(f, \lambda_1([a;\, b])) \le L(f, \lambda([a;\, b])) \le U(f, \lambda([a;\, b]) \le U(f, \lambda_2([a;\, b]).$$

▶

1. Означення інтеграла Рімана

Означення 2.1 *<u>Нижнім інтегралом</u> від обмеженої функції f по відрізку $[a;\, b]$ називається число*

$$\underline{\int_a^b} f := \sup_{\lambda} L(f, \lambda).$$

<u>Верхнім інтегралом</u> від обмеженої функції f по відрізку $[a;\, b]$ називається число

$$\overline{\int_a^b} f := \inf_{\lambda} U(f, \lambda).$$

Існування тут точних меж випливає з властивості 1 сум Дарбу. Крім того, з властивості 3 випливає, що

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f.$$

Означення 2.2 *Обмежена функція f називається <u>інтегровною за Ріманом</u> по відрізку $[a;\, b]$, якщо*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

У такому випадку спільне значення нижнього і верхнього інтегралів називається <u>інтегралом Рімана</u> (<u>визначеним інтегралом</u>) від функції f по відрізку $[a;\, b]$ і позначається символом

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Функція f тут називається підінтегральною, числа a і b – нижньою і верхньою межами інтегрування. Слід підкреслити, що інтеграл Рімана – це число, яке визначається функцією f, і не залежить від позначення змінної інтегрування $x, y, t, \ldots$

Позначення. Клас усіх функцій, інтегровних за Ріманом по відрізку $[a;\, b]$, позначається символом $R([a;\, b])$.

Приклад 1. Нехай для деякого числа $c \in \mathbb{R}$

$$f(x) = c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для будь-якого відрізка $[a;\, b]$ і будь-якого розбиття $\lambda([a;\, b])$ суми Дарбу

$$L(f, \lambda) = U(f, \lambda) = c \cdot (b - a).$$

Тому $f \in R([a;\, b])$ і

$$\int_a^b f = c \cdot (b - a).$$

Приклад 2. Функція Діріхле

$$f(x) := \mathbb{I}_{\mathbb{Q} \cap [0;\, 1]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0;\, 1], \\ 0, & x \in [0;\, 1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

для будь-якого розбиття $\lambda([0;\, 1])$ має суми Дарбу

$$L(f, \lambda) = 0, \quad U(f, \lambda) = 1$$

і тому неінтегровна по відрізку $[0;\, 1]$.

2. Існування інтеграла Рімана

Теорема 2.1 (критерій інтегровності)

$$f \in R([a;\, b]) \iff \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \lambda = \lambda([a;\, b]) : \; U(f, \lambda) - L(f, \lambda) < \varepsilon.$$

◀ $(\Rightarrow)$ Нехай $f \in R([a;\, b])$. За означенням інтегровної функції і теоремою про характеризацію точних меж

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \lambda_1 = \lambda_1([a;\, b])\; \exists\, \lambda_2 = \lambda_2([a;\, b]) :$$

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, \lambda_1) \le U(f, \lambda_2) \le \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тому для розбиття $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$ за властивістю 3 сум Дарбу

$$U(f, \lambda) - L(f, \lambda) \le U(f, \lambda_2) - L(f, \lambda_1) < \varepsilon.$$

$(\Leftarrow)$ Нехай

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \lambda = \lambda([a;\, b]) : \; U(f, \lambda) - L(f, \lambda) < \varepsilon.$$

Оскільки

$$L(f,\lambda) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le U(f,\lambda),$$

то

$$\forall\,\varepsilon > 0 :\ 0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon.$$

Тому $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ і за означенням інтегровної функції $f \in R([a;\, b])$. ►

Критерій інтегровності зручно сформулювати в термінах <u>коливання</u> <u>функції</u>, яке визначається рівністю

$$\omega(f,\ A) := \sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x) \in [0;\ +\infty].$$

Можна довести, що $\omega(f,\ A) = \sup\limits_{\{x,y\}\subset A} \big(f(x) - f(y)\big)$.

Теорема 2.2 (критерій інтегровності)

$$f \in R([a;\, b]) \iff \forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\lambda = \lambda([a;\, b]) :\ \sum_{k=0}^{\infty} \omega(f,\ [x_k,\ x_{k+1}])\Delta x_k < \varepsilon.$$

2.2 Умови існування інтеграла Рімана

1. Класи інтегровних функцій

Теорема 2.3 $C([a;\,b]) \subset R([a;\,b])$.

◀ Довільна неперервна функція $f \in C([a;\,b])$ за теоремою Кантора рівномірно неперервна, тобто

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\, \forall\, [\alpha;\, \beta] \subset [a;\, b],\ \beta - \alpha < \delta :\ |f(\alpha) - f(\beta)| < \varepsilon.$$

Розглянемо довільне розбиття $\lambda = \lambda([a;\,b]) = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ з діаметром $|\lambda| < \delta$. Для нього

$$U(f,\lambda) - L(f,\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} (\max_{[x_k;\,x_{k+1}]} f - \min_{[x_k;\,x_{k+1}]} f)\,\Delta x_k < \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon \cdot (b-a).$$

За Теоремою 1 $f \in R([a;\,b])$. ▶

Теорема 2.4 *Нехай* $f : [a;\,b] \to \mathbb{R}$ *обмежена і для деякого* $z \in (a;\,b)$ *функція* $f \in C([a;\,z) \cup (z;\,b]$. *Тоді* $f \in R([a;\,b])$.

◀ Нехай для деякого числа $M > 0$

$$\forall\, x \in [a;\,b] :\ |f(x)| \le M.$$

Для довільного числа $\varepsilon > 0$ розглянемо інтервал $(\alpha;\,\beta) \ni z$ довжини $\beta - \alpha < \frac{\varepsilon}{6M}$. Функція f інтегровна по відрізках $[a;\,\alpha]$ і $[\beta;\,b]$. За критерієм інтегровності існують розбиття $\lambda_1([a;\,\alpha])$ і $\lambda_2([\beta;\,b])$ для яких

$$U(f,\lambda_1) - L(f,\lambda_1) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad U(f,\lambda_2) - L(f,\lambda_2) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тоді для розбиття $\lambda([a;\,b]) = \lambda_1([a;\,\alpha]) \cup \lambda_2([\beta;\,b])$

$$\begin{aligned} &U(f,\lambda) - L(f,\lambda) = \\ &= (U(f,\lambda_1) - L(f,\lambda_1)) + \left((\sup_{[\alpha;\,\beta]} f - \inf_{[\alpha;\,\beta]} f) \cdot (\beta - \alpha) \right) + (U(f,\lambda_2) - L(f,\lambda_2)) < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{6M} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

За критерієм інтегровності $f \in R([a;\,b])$. ▶

З цієї теореми випливає інтегровність обмеженої функції зі скінченною множиною точок розриву. Можна навести вичерпний опис інтегровних за Ріманом функцій в термінах множини точок розриву. Зараз лише обмежимося важливим прикладом.

Теорема 2.5 *Будь-яка монотонна на відрізку функція інтегровна за Ріманом.*

◀ Нехай функція f монотонно не спадає на відрізку $[a;\, b]$. Для довільного числа $\varepsilon > 0$ розглянемо довільне розбиття $\lambda([a;\, b])$ з діаметром

$$|\lambda| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}.$$

Для такого розбиття

$$U(f, \lambda) - L(f, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \cdot \Delta x_k \leq$$
$$\leq |\lambda| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = |\lambda| \, (f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

За критерієм інтегровності $f \in R([a;\, b])$. ▶

2. Означення границі інтегральних сум

Нагадаємо, інтегральною сумою для функції $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$, розбиття

$$\lambda = \lambda([a;\, b]) = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

і відмічених точок $\{\xi_k | \lambda\} = \{\xi_k \in [x_k;\, x_{k+1}] |\ k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ називається число

$$S(f, \lambda, \{\xi_k\}) := \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Озн. 2. Границею інтегральних сум при $|\lambda| \to 0$ називається число $J \in \mathbb{R}$, якщо

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;\forall\, \lambda = \lambda([a;\, b]),\ |\lambda| < \delta,\ \forall\, \{\xi_k | \lambda\} :$$

$$|S(f, \lambda, \{\xi_k | \lambda\}) - J| < \varepsilon.$$

Теорема 2.6 *Нехай для функції $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ існує границя інтегральних сум $J \in \mathbb{R}$. Тоді функція f обмежена.*

◀ Нехай функція f необмежена зверху. Тоді існує послідовність точок $\{z_m : m \geq 1\} \subset [a;\, b]$ така, що $z_m \to z_0 \in [a;\, b]$ та $f(z_m) \to +\infty$. У будь-якому розбитті $\lambda = \lambda([a;\, b])$ знайдеться відрізок $[x_i;\, x_{i+1}]$, що містить нескінченно багато членів послідовності $\{z_m :\ m \geq 1\}$, позначимо їх $\{z'_m\}$. Вибираючи $\xi_i = z'_m$, при фіксованих розбитті і решті відмічених точок отримаємо послідовність інтегральних сум, розбіжну до $+\infty$. Тому границя інтегральних сум не може існувати. ▶

3. Границя інтегральних сум vs. інтегровність

Теорема 2.7 (Дарбу) *Обмежена функція $f \in R([a;\, b])$ тоді й лише тоді, коли існує границя інтегральних сум $J \in \mathbb{R}$. При цьому*

$$J = \lim_{|\lambda|\to 0} S(f, \lambda, \{\xi_k|\lambda\}) = \int_a^b f.$$

◀ **(i)** Доведемо, що для обмеженої функції $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$

$$\lim_{|\lambda|\to 0} L(f, \lambda) = \underline{\int_a^b} f.$$

Тут границя в лівій частині рівності розуміється подібно до границі інтегральних сум, тобто

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, \lambda = \lambda([a;\, b]),\ |\lambda| < \delta : \quad \left| L(f, \lambda) - \underline{\int_a^b} f \right| < \varepsilon.$$

За означенням супремума для довільного $\varepsilon > 0$ існує розбиття

$$\lambda_1 = \lambda_1([a;\, b]) = \{a = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_m = b\},$$

для якого

$$0 \le \underline{\int_a^b} f - L(f, \lambda_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для довільного розбиття $\lambda = \lambda([a;\, b]) = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ з діаметром $|\lambda|$ розглянемо розбиття $\lambda_2 = \lambda_1 \cup \lambda$, яке є підрозбиттям λ_1. При цьому за властивістю 2 сум Дарбу

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, \lambda_1) \le L(f, \lambda_2) \le \underline{\int_a^b} f.$$

Суми Дарбу для розбиттів λ і λ_2 відрізняються доданками, які відповідають відрізкам розбиття λ, на які потрапили точки розбиття λ_1. Таких відрізків щонайбільше m. Якщо $x_k < z_i < z_{i+1} < \ldots < z_{i+j-1} < x_{k+1}$, то

$$\left(\inf_{[x_k;\, z_i]} f \cdot (z_i - x_k) + \sum_{l=i}^{i+j-2} \inf_{[z_l;\, z_{l+1}]} f \cdot (z_{l+1} - z_l) + \inf_{[z_{i+j-1};\, x_{k+1}]} f \cdot (x_{k+1} - z_{i+j-1}) \right) -$$

$$- \inf_{[x_k;\, x_{k+1}]} f \cdot (x_{k+1} - x_k) \le 2 \sup_{[a;\, b]} |f| \cdot \Delta x_k \le 2 \sup_{[a;\, b]} |f| \cdot |\lambda|.$$

Тому

$$0 \le L(f, \lambda_2) - L(f, \lambda) \le 2m \sup_{[a;\, b]} |f| \cdot |\lambda|.$$

Виберемо тепер таке додатне число δ, що

$$2m \sup_{[a;\,b]} |f| \cdot \delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді для довільного розбиття λ з діаметром $|\lambda| < \delta$

$$\underline{\int_a^b} f - \varepsilon \le L(f,\lambda_2) - \frac{\varepsilon}{2} \le L(f,\lambda) \le \underline{\int_a^b} f.$$

(ii) Так само доводиться, що для обмеженої функції $f : [a;\,b] \to \mathbb{R}$

$$\lim_{|\lambda|\to 0} U(f,\lambda) = \overline{\int_a^b} f.$$

(iii) Для інтегровної функції f доведемо, що

$$\lim_{|\lambda|\to 0} S(f,\lambda,\{\xi_k|\lambda\}) = \int_a^b f.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо таке $\delta > 0$, щоб згідно з **(i)**, **(ii)**

$$\forall\, \lambda = \lambda([a;\,b]),\ |\lambda| < \delta :$$

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,\lambda) \le \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f \le U(f,\lambda) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Якщо тепер $\{\xi_k|\lambda\}$ – довільний набір відмічених точок, що відповідають розбиттю λ з $|\lambda| < \delta$, то

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,\lambda) \le S(f,\lambda,\{\xi_k|\lambda\}) \le U(f,\lambda) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тому

$$\left| S(f,\lambda,\{\xi_k|\lambda\}) - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

(iv) Якщо існує $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} S(f,\lambda,\{\xi_k|\lambda\}) = J$, то $f \in R([a;\,b])$.

Нехай для довільного $\varepsilon > 0$ вибрано таке $\delta > 0$, що

$$\forall\, \lambda = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n\},\ |\lambda| < \delta,\ \forall\,\{\xi_k|\lambda\} :$$

$$|S(f,\lambda,\{\xi_k|\lambda\}) - J| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Виберемо відмічені точки $\xi_k',\ \xi_k'' \in [x_k,;\,x_{k+1}]$ так, щоб

$$f(\xi_k') < \inf_{[x_k,;\,x_{k+1}]} f + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad f(\xi_k'') > \sup_{[x_k,;\,x_{k+1}]} f - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Тоді
$$S(f,\lambda,\{\xi'_k|\lambda\}) < L(f,\lambda) + \frac{\varepsilon}{4}, \quad S(f,\lambda,\{\xi''_k|\lambda\}) > U(f,\lambda) - \frac{\varepsilon}{4}.$$
Тому
$$J - \frac{\varepsilon}{2} < S(f,\lambda,\{\xi'_k|\lambda\}) - \frac{\varepsilon}{4} < L(f,\lambda) \le U(f,\lambda) < S(f,\lambda,\{\xi''_k|\lambda\}) + \frac{\varepsilon}{4} < J + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Звідси
$$0 \le U(f,\lambda) - L(f,\lambda) < \varepsilon.$$
За критерієм інтегровності $f \in R([a;\, b])$. Крім того, з нерівності
$$J - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,\lambda) \le \int\limits_a^b f \le U(f,\lambda) < J + \frac{\varepsilon}{2},$$
правильної при довільному $\varepsilon > 0$, випливає рівність $\int\limits_a^b f = J$. ▶

Зауваження. Для інтегровної функції f інтеграл можна обчислити як границю послідовності інтегральних сум. Для цього досить взяти довільну послідовність розбиттів $\{\lambda_n\}$ з діаметрами $|\lambda_n| \to 0$, $n \to \infty$, і відповідну послідовність наборів відмічених точок $\{\xi_k^{(n)}|\lambda_n\}$. Тоді
$$\int\limits_a^b f = \lim_{n\to\infty} S(f,\lambda_n,\{\xi_k^{(n)}\}).$$

Приклад 1. Метод вичерпування (Евдокс Кнідський, Архімед). Обчислимо інтеграл
$$\int\limits_0^1 x^2\,dx.$$
Підінтегральна функція неперервна, отже й інтегровна. За теоремою Дарбу інтеграл можна обчислити як границю інтегральних сум, які побудуємо наступним чином. Розглянемо розбиття відрізка $[0;\,1]$ рівновіддаленими точками $\lambda_n = \{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\}$ з $|\lambda_n| = \frac{1}{n} \to 0$, $n \to \infty$. Виберемо відміченими точками ліві кінці відрізків розбиття $\xi_k^{(n)} = \frac{k}{n} \in [\frac{k}{n};\, \frac{k+1}{n}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тоді
$$\int\limits_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

2.3 Властивості інтеграла Рімана

1. Арифметичні дії з інтегровними функціями

Теорема 2.8 (лінійність інтеграла) *Нехай* $\{f, g\} \subset R([a;\, b])$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$. *Тоді* $\alpha f + \beta g \in R([a;\, b])$ *і*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

◀ Для довільного розбиття $\lambda([a;\, b])$ і відмічених точок $\{\xi_k | \lambda\}$

$$\begin{aligned} S(\alpha f + \beta g, \lambda, \{\xi_k\}) &= S(\alpha f, \lambda, \{\xi_k\}) + S(\beta g, \lambda, \{\xi_k\}) = \\ &= \alpha S(f, \lambda, \{\xi_k\}) + \beta S(g, \lambda, \{\xi_k\}). \end{aligned}$$

Подальші міркування подібні до доведення аналогічного твердження для числових послідовностей і функцій. ▶

Теорема 2.9 *Нехай* $\{f, g\} \subset R([a;\, b])$. *Тоді*

$$(i)\ f^2 \in R([a;\, b]); \qquad (ii)\ f \cdot g \in R([a;\, b]).$$

◀ (i) Доведення випливає з нерівності

$$\forall\, [\alpha;\, \beta] \subset [a;\, b]:$$

$$|f^2(\beta) - f^2(\alpha)| = |f(\beta) - f(\alpha)| \cdot |f(\beta) + f(\alpha)| \le 2 \sup_{[a;\, b]} |f| \cdot |f(\beta) - f(\alpha)|$$

і критерія інтегровності.

(ii) Доведення випливає з рівності

$$f \cdot g = \frac{1}{4} \left((f+g)^2 - (f-g)^2 \right),$$

лінійності інтеграла і частини (i). ▶

2. Інтегрування нерівностей. Теорема про середнє

Теорема 2.10 *Нехай* $f(x) \ge 0$, $x \in [a;\, b]$, $f \in R([a;\, b])$. *Тоді* $\int\limits_a^b f \ge 0$.

◀ Для довільного розбиття $\lambda([a;\, b])$

$$0 \le L(f, \lambda) \le \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f.$$

▶

Теорема 2.11 *Нехай* $f(x) \le g(x)$, $x \in [a;\, b]$, $\{f,\, g\} \subset R([a;\, b])$. *Тоді* $\int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b g$.

◀ Застосуємо Теореми 2.10 і 2.8 до функції $h = g - f$. ▶

Теорема 2.12 *Нехай $f \in R([a;\, b])$. Тоді $|f| \in R([a;\, b])$ і*

$$\left|\int\limits_a^b f\right| \le \int\limits_a^b |f|.$$

◀ Інтегровність функції $|f|$ випливає з нерівності

$$\big|\,|f(\alpha) - |f(\beta)|\,\big| \le |f(\alpha) - f(\beta)|, \quad \alpha,\, \beta \in [a;\, b],$$

і критерія інтегровності в термінах коливання. Нерівність випливає з нерівності

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|, \quad x \in [a;\, b],$$

і теорем 2.11, 2.8. ▶

Теорема 2.13 (про середнє значення) *Нехай $f \in C([a;\, b])$. Тоді*

$$\exists\, c \in [a;\, b]: \int\limits_a^b f = f(c) \cdot (b - a).$$

◀ За другою теоремою Вейєрштрасса існують $m := \min\limits_{[a;\, b]} f$, $M := \max\limits_{[a;\, b]} f$. За теоремою 2.11

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f \le M(b-a), \qquad m \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f \le M.$$

Тоді за теоремою Коші про проміжне значення

$$\exists\, c \in [a;\, b]: \ f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f.$$

▶

3. Інтеграл як функція проміжку інтегрування

Теорема 2.14 (адитивність інтеграла) ***(i)*** *Нехай $f \in R([a;\, b])$. Тоді*

$$\forall\, c \in (a;\, b): \ f \in R([a;\, c]),\ f \in R([c;\, b]) \text{ і } \int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f.$$

(ii) *Навпаки, якщо $f \in R([a;\, c])$, $f \in R([c;\, b])$, то $f \in R([a;\, b])$.*

◀ **(i)** Нехай $f \in R([a;\, b])$. Розглянемо довільне розбиття $\lambda = \lambda([a;\, b])$. Для довільної точки $c \in (a;\, b)$ утворимо підрозбиття $\lambda_1 := \lambda \cup \{c\}$. Тоді за властивістю 2 сум Дарбу і означенням нижнього інтеграла

$$L(f, \lambda) \le L(f, \lambda_1) = L(f, \lambda_1 \cap [a;\, c]) + L(f, \lambda_1 \cap [c;\, b]) \le \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f.$$

Тому

$$\underline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f. \tag{2.1}$$

Навпаки, для довільних розбиттів $\lambda' = \lambda'([a;\, c])$, $\lambda'' = \lambda''([c;\, b])$ утворимо розбиття

$$\lambda = \lambda([a;\, b]) := \lambda'([a;\, c]) \cup \lambda''([c;\, b]).$$

Тоді

$$L(f, \lambda') + L(f, \lambda'') = L(f, \lambda) \le \underline{\int_a^b} f$$

і

$$\underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \le \underline{\int_a^b} f. \tag{2.2}$$

З нерівностей (2.1) і (2.2) випливає рівність

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f. \tag{2.3}$$

Аналогічними міркуваннями доводиться рівність

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f. \tag{2.4}$$

За означенням функції, інтегровної по відрізку $[a;\, b]$, з рівностей (2.3) і (2.4) отримуємо рівності

$$\underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f = \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f.$$

Оскільки нижній інтеграл завжди не більший за верхній, звідси випливають твердження про інтегровність по складових відрізках і рівності

$$\underline{\int_a^c} f = \overline{\int_a^c} f = \int_a^c f, \quad \underline{\int_c^b} = \overline{\int_c^b} f = \int_a^b f.$$

(ii) Доведення випливає з рівностей (2.3), (2.4) і означення інтегровної функції. ▶

Розглянемо функцію $f \in R([a;\, b])$. Для довільного $x \in (a;\, b]$ за Теоремою 2.14 визначений інтеграл

$$\varphi(x) := \int\limits_a^x f.$$

Довизначимо

$$\varphi(a) = \int\limits_a^a f := 0$$

для довільної функції f. Для збереження властивості адитивності інтеграла для різних варіантів взаємного розташування складових відрізків покладемо

$$\int\limits_b^a f := -\int\limits_a^b f.$$

Функція φ у подальшому буде називатися <u>інтегралом зі змінною верхньою межею</u>. Розглянемо властивості функції φ.

Теорема 2.15 (неперервність) *Нехай $f \in R([a;\, b])$. Тоді $\varphi \in C([a;\, b])$.*

◀ Для довільного $x_0 \in [a;\, b]$ і такого Δx, що $x_0 + \Delta x \in [a;\, b]$, за властивістю адитивності інтеграла і теоремою про інтегровність модуля інтегровної функції

$$|\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)| = \left| \int\limits_a^{x_0+\Delta x} f - \int\limits_a^{x_0} f \right| = \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f \right| \le \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f| \right| \le \sup_{[a;\, b]} |f| \cdot |\Delta x|.$$

Лишилося згадати про обмеженість інтегровної функції і перейти до границі при $\Delta x \to 0$. ▶

Теорема 2.16 (диференційовність) *Нехай $f \in C([a;\, b])$.*
Тоді $\varphi \in C^{(1)}([a;\, b])$ і

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f \right) = f(x), \quad x \in [a;\, b].$$

.

◀ Для довільного $x_0 \in [a;\, b]$ і такого Δx, що $x_0 + \Delta x \in [a;\, b]$, за властивістю адитивності інтеграла і теоремою про середнє значення для $\Delta x \ne 0$ знайдеться таке $c(x_0, \Delta x)$ з проміжка з кінцями в точках x_0 і $x_0 + \Delta x$, що

$$\frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f = f\big(c(x_0, \Delta x)\big).$$

Лишилося перейти до границі при $\Delta x \to 0$, скориставшись неперервністю функції f у точці x_0. ▶

Наслідок *Неперервна на відрізку фунція має первісну.*
◀ Такою первісною є функція φ. ▶

Подібно до наведеного вище означення можна означити й <u>інтеграл зі змінною нижньою межею</u> та інтеграл зі змінними обома межами інтегрування. З урахуванням знака, наведені вище твердження правильні і для таких інтегралів.

2.4 Обчислення інтеграла

1. Формула Ньютона – Лейбніца

Теорема 2.17 (формула Ньютона – Лейбніца) *Нехай $f \in C([a;\, b])$. Тоді для будь-якої первісної F функції f*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \tag{2.5}$$

Зауваження. Часто використовується позначення

$$F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

◀ Існування первісної неперервної функції встановлено у наслідку з теореми 2.16. Незалежність правої частини рівності (2.5) від вибору конкретної первісної випливає з опису класу всіх первісних функції f. Якщо вибрати первісною функцію

$$F(x) = \varphi(x) = \int_a^x f, \quad x \in [a;\, b],$$

то

$$\int_a^b f = F(b) = F(b) - F(a).$$

▶

Зауваження. Формула Ньютона – Лейбніца правильна і в загальнішій ситуації, для функції $f \in R([a;\, b])$ яка має первісну.

2. Формула заміни змінної

Теорема 2.18 (формула заміни змінної) *Нехай виконані умови:*

1. $f \in C([A;\, B])$;
2. $u \in C^{(1)}([\alpha;\, \beta],\ [A;\, B])$.

Тоді

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))\, u'(t)\, dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\, dx.$$

◀ Нехай F – довільна первісна функції f на відрізку $[A;\, B]$. Тоді $F(u)$ – первісна функції $f(u)\, u'$ на відрізку $[\alpha;\, \beta]$ і за формулою Ньютона – Лейбніца

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))\, u'(t)\, dt = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\, dx.$$

▶

Зауваження. Формула заміни змінної правильна й для лише інтегровної функції f за додаткової умови монотонності функції u з інтегровною похідною.

3. Формула інтегрування частинами

Теорема 2.19 (формула інтегрування частинами) *Нехай* $\{f, g\} \subset C^{(1)}([a;\, b])$. *Тоді правильна* *<u>формула інтегрування частинами</u>*

$$\int\limits_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int\limits_a^b f'(x)\, g(x)\, dx.$$

Зауваження. Часто використовується позначення

$$f(x)g(x)\big|_a^b := f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

◀ Усі інтеграли у цій формулі існують як інтеграли від неперервних функцій. Функція $f(x) \cdot g(x)$ є первісною функції

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x),\ x \in [a;\, b].$$

Тому твердження теореми випливає з формули Ньютона – Лейбніца. ▶

4. Приклади

Приклад 1. Формула Валліса. Обчислимо інтеграли

$$\mathcal{I}_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x, \qquad \mathcal{J}_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x,\ n \geq 0.$$

Перш за все, зауважимо, що заміна змінної доводить рівність цих інтегралів

$$\mathcal{I}_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \left| \begin{array}{ll} x = \pi/2 - t & dx = -dt \\ x = 0 & t = \pi/2 \\ x = \pi/2 & t = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{\pi/2}^0 \sin^n(\pi/2 - t) \cdot (-dt) = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt = \mathcal{J}_n,\ n \geq 1.$$

Тепер при $n \geq 2$ проінтегруємо частинами

$$\mathcal{I}_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = \sin^{n-1} x & g'(x) = \sin x \\ f'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x & g(x) = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x)\big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} (n-1)\sin^{n-2} x\, \cos x \cdot \cos x\, dx =$$

$$= (n-1) \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x)\, dx =$$

$$= (n-1)\, \mathcal{I}_{n-2} - (n-1)\, \mathcal{I}_n.$$

Звідси отримуємо рекурентне співвідношення

$$\mathcal{I}_n = \frac{n-1}{n} \cdot \mathcal{I}_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Оскільки за формулою Ньютона – Лейбніца

$$\mathcal{I}_0 = \int\limits_0^{\pi/2} 1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \mathcal{I}_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x = -\cos x|_0^{\pi/2} = 1,$$

то

$$\mathcal{I}_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}; \qquad \mathcal{I}_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad n \geq 1.$$

Ці формули дозволяють обчислити число π як границю послідовності раціональних чисел. Оскільки

$$\forall\, n \geq 1 \ \forall\, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] : \ \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x,$$

то, проінтегрувавши ці нерівності, отримаємо

$$\mathcal{I}_{2n+1} \leq \mathcal{I}_{2n} \leq \mathcal{I}_{2n-1} \Leftrightarrow \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}, \ n \geq 1 \ (0!! := 1).$$

Звідси

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2} \leq \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n}, \ n \geq 1.$$

Оскільки

$$0 \leq \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n} - \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} =$$

$$= \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n(2n+1)} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n} \to 0, \ n \to \infty,$$

то

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Це і є формула Дж. Валліса.

Приклад 2. Формула Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі. Нехай $f \in C^{(n+1)}((\alpha;\, \beta))$. Тоді для будь-яких $\{a,\, x\} \subset (\alpha;\, \beta)$ правильна рівність

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x),$$

де

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt \ –$$

залишковий член в інтегральній формі.

◀ Проінтегруємо залишковий член частинами

$$
\begin{aligned}
r_n(x) &= \frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n d(f^{(n)}(t)) = \\
&= \frac{1}{n!}\,(x-t)^n f^{(n)}(t)\Big|_a^x + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt = \\
&= -\frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a) + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1} d(f^{(n-1)}(t)) = \\
&= \ldots = \\
&= -\frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a) - \frac{1}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) - \ldots - \\
&- \frac{1}{1!}(x-a)f'(a) + \int\limits_a^x d\,f(t).
\end{aligned}
$$

▶

2.5 Функціональні послідовності

1. Поточкова і рівномірна збіжності функціональних послідовностей

Нехай на множині $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, задані функції f, f_n, $n \geq 1$.

Означення 2.3 *Послідовність* $\{f_n :\ n \geq 1\}$ *називається* <u>*поточково збіжною*</u> *до функції* f *на множині* A*, якщо*

$$\forall\, x \in A:\ f_n(x) \to f(x),\ n \to \infty.$$

Така збіжність є, по суті, збіжністю кожної з числових послідовностей $\{f_n(x) : n \geq 1\}$, $x \in A$. Виявляється, поточкова границя функціональної послідовності може не успадковувати такі властивості членів цієї послідовності, як неперервність, інтегровність, диференційовність. Для збереження цих властивостей граничною функцією потрібне поняття збіжності, яке враховує одночасну поведінку функцій f_n, $n \geq 1$, в усіх точках деякої множини.

Означення 2.4 *Послідовність* $\{f_n :\ n \geq 1\}$ *називається* <u>*рівномірно збіжною*</u> *до функції* f *на множині* A*, якщо*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, n \geq n_0\ \forall\, x \in A:\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Надалі рівномірна збіжність послідовності функцій на множині A коротко позначається символом

$$f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f,\ n \to \infty.$$

Зауваження 1. $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f,\ n \to \infty \iff d_n := \sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0,\ n \to \infty.$

Зауваження 2. $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f,\ n \to \infty \Rightarrow \forall\, x \in A:\ f_n(x) \to f(x),\ n \to \infty.$

Зауваження 3.

$$f_n \underset{A}{\not\rightrightarrows} f,\ n \to \infty \iff \exists\, \{x_n :\ n \geq 1\} \subset A:\ f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0,\ n \to \infty.$$

Приклад 1. Послідовність функцій $f_n(x) = x^n,\ x \in [0;\, 1],\ n \geq 1$, має поточкову границю

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;\, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Згідно із Зауваженням 2 жодна інша функція, крім f, не може бути границею послідовності функцій у рівномірному сенсі. Оскільки

$$d_n := \sup_{x \in [0;\, 1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \sup_{x \in [0;\, 1)} |x^n - 0| = 1 \not\to 0,\ n \to \infty,$$

то послідовність функцій $\{f_n :\ n \geq 1\}$ не збігається рівномірно на $[0;\, 1]$.

Зауваження 4. Легко довести, що послідовність функцій, яка рівномірно збігається на кожній з множин A і B, рівномірно збігається і на об'єднанні $A \cup B$.

Однак, рівномірно збіжна послідовність на кожній з множин A_m, $m \geq 1$, може не збігатися рівномірно на їх об'єднанні $\bigcup\limits_{m\geq 1} A_m$. Так, послідовність функцій з Прикладу 1 рівномірно збігається на проміжках $[0;\, 1-\frac{1}{m}]$, $m \geq 2$, але не збігається рівномірно на об'єднанні цих проміжків $\bigcup\limits_{m\geq 2} [0;\, 1-\frac{1}{m}] = [0;\, 1)$.

Приклад 3. Послідовність функцій $f_n(x) = x^n - x^{n+1},\ x \in [0;\, 1],\ n \geq 1$, має поточкову границю

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1} \to f(x) = 0,\ x \in [0;\, 1].$$

Згідно із Зауваженням 2 жодна інша функція, крім f, не може бути границею послідовності функцій у рівномірному сенсі. Оскільки

$$d_n := \sup_{x\in[0;\,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0;\,1]} |x^n - x^{n+1}| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 0,\ n \to \infty,$$

то послідовність функцій $\{f_n:\ n \geq 1\}$ збігається рівномірно на $[0;\, 1]$.

Приклад 4. Послідовність функцій $f_n(x) = x^n - x^{2n},\ x \in [0;\, 1],\ n \geq 1$, має поточкову границю

$$f_n(x) = x^n - x^{2n} \to f(x) = 0,\ x \in [0;\, 1].$$

Згідно із Зауваженням 2 жодна інша функція, крім f, не може бути границею послідовності функцій у рівномірному сенсі. Оскільки

$$|f_n(2^{-1/n}) - f(2^{-1/n})| = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \not\to 0,\ n \to \infty,$$

то послідовність функцій $\{f_n:\ n \geq 1\}$ не збігається рівномірно на $[0;\, 1]$ згідно із Зауваженням 3.

Теорема 2.20 (Критерій Коші) *Послідовність функцій* $\{f_n : A \to \mathbb{R} :\ n \geq 1\}$ *збігається рівномірно на* A $\iff$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, n \geq n_0\ \forall\, m \geq n_0\ \forall\, x \in A :\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

◀ ($\Leftarrow$) З умови (2.6) для кожного $x \in A$ випливає фундаментальність, а отже й збіжність числової послідовності $\{f_n(x) :\ n \geq 1\}$. Нехай $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in A$. Перейшовши при кожному фіксованому x в нерівності (2.6) до границі при $m \to \infty$, отримаємо

$$\forall\, x \in A :\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Це й означає, що $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f,\ n \to \infty$.

($\Rightarrow$) Нехай $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f,\ n \to \infty$, тобто

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, n \geq n_0\ \forall\, x \in A :\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді

$$\forall\, n \ge n_0\; \forall\, m \ge n_0\; \forall\, x \in A: \; |f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

тобто виконується умова (2.6). ▶

2. Властивості границі функціональної послідовності

Теорема 2.21 (про границю послідовності границь) *Нехай функції* $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \ge 1$, *задовольняють умови:*

1. $\forall\, n \ge 1\; \exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = \alpha_n \in \mathbb{R}$;
2. $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f,\; n \to \infty$.

Тоді

(i) $\exists\, \alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n \in \mathbb{R}$;

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$.

Зауваження. Теорема дає типові достатні умови, за яких можлива перестановка порядку переходу до границі

$$\lim_{n \to \infty} \big(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \big) = \lim_{x \to x_0} \big(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \big).$$

◀ (i) Доведемо збіжність послідовності $\{\alpha_n :\; n \ge 1\}$. За критерієм Коші рівномірної збіжності послідовності функцій

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N = N(\varepsilon)\, \forall\, n \ge N\, \forall\, m \ge N\, \forall\, x \in A: \; |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Для довільних $n \ge N,\; m \ge N$ виберемо $\delta > 0$ з умови

$$\forall\, x \in \check{B}(x_0, \delta) \cap A: \; |f_m(x) - \alpha_m| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |f_n(x) - \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тоді

$$|\alpha_n - \alpha_m| \le |\alpha_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - \alpha_m| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Таким чином, послідовність $\{\alpha_n :\; n \ge 1\}$ фундаментальна, отже й збіжна.
(ii) Для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо $n \ge 1$ з умов

$$\forall\, x \in A: \; |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\alpha_n - \alpha_0| < \frac{\varepsilon}{3},$$

а потім для цього n виберемо $\delta_n > 0$ з умови

$$\forall\, x \in \check{B}(x_0, \delta_n) \cap A: \; |f_n(x) - \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тоді

$$\forall\, x \in \check{B}(x_0, \delta_n) \cap A: \; |f(x) - \alpha| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon.$$

▶

Теорема 2.22 (про неперервність граничної функції) *Нехай функції* $f,\ f_n : A \to \mathbb{R},\ n \geq 1$, *задовольняють умови:*

1. $\forall\, n \geq 1: \ f_n \in C(A;\, \mathbb{R})$;
2. $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f,\ n \to \infty$.

Тоді

$$f \in C(A).$$

◀ Для доведення можна скористатися теоремою 2.21, поклавши

$$\alpha_n = f_n(x_0),\ n \geq 1,\ x_0 \in A.$$

Тоді

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \big(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \big) = \lim_{n \to \infty} \big(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \big) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

▶

Теорема 2.23 (про граничний перехід під знаком інтеграла) *Нехай функції* $f_n : [a;\, b] \to \mathbb{R},\ n \geq 1$, *задовольняють умови:*

1. $\forall\, n \geq 1: \ f_n \in R([a;\, b])$;
2. $f_n \underset{[a;\, b]}{\rightrightarrows} f,\ n \to \infty$.

Тоді

$$f \in R([a;\, b]) \quad i \quad \int\limits_a^b f = \lim_{n \to \infty} \int\limits_a^b f_n. \tag{2.7}$$

◀ Доведемо інтегровність граничної функції. Для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо таке N, що

$$\forall\, x \in [a;\, b]: \ |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Функція $f_N \in R([a;\, b])$, тому за критерієм інтегровності для деякого розбиття $\lambda = \lambda([a;\, b])$

$$U(f_N, \lambda) - L(f_N, \lambda < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Для цього розбиття

$$\begin{aligned} &0 \leq U(f, \lambda) - L(f, \lambda) \leq \\ &\leq |U(f, \lambda) - U(f_N, \lambda)| + \big(U(f_N, \lambda) - L(f_N, \lambda) \big) + |L(f_N, \lambda) - L(f, \lambda)| < \varepsilon \end{aligned}$$

і за критерієм інтегровності $f \in R([a;\, b])$.

Доведемо тепер рівність (2.7). Для цього скористаємося інтегровністю модуля інтегровної функції і відповідною нерівністю

$$\left| \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b f_n \right| \leq \int\limits_a^b \big| f - f_n \big| \leq \sup_{[a;\, b]} |f - f_n| \cdot (b-a) \to 0,\ n \to \infty.$$

▶

Теорема 2.24 (про похідну граничної функнкції) *Нехай функції* $f_n : [a;\, b] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, *задовольняють умови:*

1. $\forall\, n \geq 1 : \ f_n \in C^{(1)}([a;\, b])$;
2. $\exists\, x_0 \in [a;\, b]) : \ f_n(x_0) \to \alpha \in \mathbb{R}, \ n \to \infty$;
3. $f_n' \underset{[a;\,b]}{\rightrightarrows} g, \ n \to \infty$.

Тоді

$$\forall\, x \in [a;\, b] : \ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x), \quad f'(x) = g(x).$$

◀ За теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Рімана і умовою 2

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt \to \alpha + \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\, dt =: f(x), \ n \to \infty, \ x \in [a; b].$$

Функція g неперервна як границя рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій і за теоремою про диференційовність інтеграла зі змінною верхньою межею

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\alpha + \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\, dt\right) = g(x), \ x \in [a;\, b].$$

▶

2.6 Застосування інтеграла Рімана

1. Площа криволінійної трапеції

(i) Площа прямокутника

Уважаємо відомою площу прямокутника $P = [a;\, b] \times [0; c]$, де $c \geq 0$:

$$\sigma(P) = c \cdot (b - a) = \int\limits_a^b c.$$

(ii) Площа криволінійної трапеції

Нехай $f \in C([a;\, b],\, [0;\, +\infty))$. Множина

$$T = \{(x,\, y) |\ 0 \leq y \leq f(x),\ x \in [a;\, b]\} \subset \mathbb{R}^2 \tag{2.8}$$

називається криволінійною трапецією.

Означення площі цієї множини $\sigma(T)$ можна запровадити наступним чином. Розіб'ємо відрізок $[a;\, b]$ точками $\lambda = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ на частини

$$[a;\, b] = [x_0;\, x_1] \cup [x_1;\, x_2] \cup [x_2;\, x_3] \cup \ldots [x_{n-1};\, x_n].$$

Позначимо

$$m_k := \inf_{[x_k;\, x_{k+1}]} f = \min_{[x_k;\, x_{k+1}]} f, \quad M_k := \sup_{[x_k;\, x_{k+1}]} f = \max_{[x_k;\, x_{k+1}]} f, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Тоді

$$T_\lambda := \bigcup_{k=0}^{n-1} ([x_k;\, x_{k+1}] \times [0;\, m_k]) \subset T \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} ([x_k;\, x_{k+1}] \times [0;\, M_k]) =: T^\lambda.$$

Площу кожної з фігур $T_\lambda,\ T^\lambda$, складених з прямокутників, можна обчислити як суму площ цих складових прямокутників, оскільки прямокутники мають спільними лише сусідні вертикальні сторони нульової площі. Природно вважати, що

$$\sigma(T_\lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot (x_{k+1} - x_k) \leq \sigma(T) \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot (x_{k+1} - x_k) =: \sigma(T^\lambda).$$

Означимо внутрішню площу фігури T

$$\sigma_*(T) := \sup_\lambda \sigma(T_\lambda)$$

і її зовнішню площу

$$\sigma^*(T) := \inf_\lambda \sigma(T^\lambda).$$

Означення 2.5 *Криволінійна трапеція T називається квадрованою, якщо*

$$\sigma_*(T) = \sigma^*(T).$$

Це спільне значення називається площею криволінійної трапеції T і позначається символом $\sigma(T)$.

Теорема 2.25 *Нехай $f \in C([a;\, b],\, [0;\, +\infty))$. Тоді криволінійна трапеція T квадрована і*

$$\sigma(T) = \int\limits_a^b f.$$

◀ Для доведення досить зауважити, що $\sigma(T_\lambda)$, $\sigma(T^\lambda)$ є відповідно нижньою і верхньою сумами Дарбу для функції f і розбиття λ, $\sigma_*(T)$, $\sigma^*(T)$ – нижнім і верхнім інтегралами інтегровної функції f. ▶

2. Площа криволінійного сектора

(i) Площа кругового сектора

Уважаємо відомою площу кругового сектора S радіуса $r > 0$ з центральним кутом $\beta - \alpha$, заданого в полярних координатах $S = \{(\rho,\, \varphi)|\ \alpha \le \varphi \le \beta, \quad 0 \le \le \rho \le r\}$, де $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$,

$$\sigma(S) = \frac{1}{2}\, r^2(\beta - \alpha).$$

(ii) Площа криволінійного сектора

Нехай $\beta - \alpha \le 2\pi$, $r \in C([\alpha;\, \beta],\, [0;\, +\infty))$. Множина

$$S = \{(\rho,\, \varphi)|\ \alpha \le \varphi \le \beta, \quad 0 \le \rho \le r(\varphi)\} \subset \mathbb{R}^2$$

називається криволінійним сектором.

Означення площі цієї множини $\sigma(S)$ можна запровадити наступним чином. Розіб'ємо відрізок $[\alpha;\, \beta]$ точками $\lambda = \{\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n = \beta\}$ на частини

$$[\alpha;\, \beta] = [\varphi_0;\, \varphi_1] \cup [\varphi_1;\, \varphi_2] \cup [\varphi_2;\, \varphi_3] \cup \ldots [\varphi_{n-1};\, \varphi_n].$$

Позначимо

$$m_k := \inf_{[\varphi_k;\, \varphi_{k+1}]} r = \min_{[x_k;\, x_{k+1}]} r, \quad M_k := \sup_{[\varphi_k;\, \varphi_{k+1}]} r = \max_{[x_k;\, x_{k+1}]} r, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Тоді

$$S_\lambda := \bigcup_{k=0}^{n-1} (\{0 \le \rho \le m_k,\ \varphi \in [\varphi_k;\, \varphi_{k+1}]\}) \subset S \subset$$

$$\subset \bigcup_{k=0}^{n-1} (\{0 \le \rho \le M_k,\ \varphi \in [\varphi_k;\, \varphi_{k+1}]\}) =: S^\lambda.$$

Площу кожної з фігур S_λ, S^λ, складених з кругових секторів, можна обчислити як суму площ цих складових секторів, оскільки вони мають спільними лише сусідні радіальні відрізки нульової площі. Природно при цьому вважати, що

$$\sigma(S_\lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\, m_k^2 \cdot (\varphi_{k+1} - \varphi_k) \le \sigma(S) \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\, M_k^2 \cdot (\varphi_{k+1} - \varphi_k) =: \sigma(S^\lambda).$$

Означимо внутрішню площу фігури S

$$\sigma_*(S) := \sup_{\lambda} \sigma(S_\lambda)$$

і її зовнішню площу

$$\sigma^*(S) := \inf_{\lambda} \sigma(S^\lambda).$$

Означення 2.6 *Криволінійний сектор S називається квадрованим, якщо*

$$\sigma_*(S) = \sigma^*(S).$$

Це спільне значення називається площею криволінійного сектора S і позначається символом $\sigma(S)$.

Теорема 2.26 *Нехай $r \in C([\alpha;\, \beta],\, [0;\, +\infty))$. Тоді криволінійний сектор S квадрований і*

$$\sigma(S) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi.$$

◀ Для доведення досить зауважити, що $\sigma(S_\lambda)$, $\sigma(S^\lambda)$ є відповідно нижньою і верхньою сумами Дарбу для функції r і розбиття λ, $\sigma_*(S)$, $\sigma^*(S)$ – нижнім і верхнім інтегралами інтегровної функції r. ▶

3. Довжина дуги кривої

Нехай декартові координати точок кривої Γ на площині задані функціями $\{x,\, y\} \subset C^{(1)}([a;\, b])$, тобто

$$\Gamma = \{(x(t), y(t))|\; t \in [a;\, b]\}. \tag{2.9}$$

Апроксимуємо криву ламаною таким чином. Розглянемо довільне розбиття $\lambda = \lambda([a;\, b]) = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$. Воно визначає розбиття самої кривої Γ точками $(x(t_k), y(t_k))$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Розглянемо ламану Γ_λ, прямолінійні ланки якої сполучають сусідні точки розбиття кривої. Довжину кожної такої ланки можна обчислити за теоремою Піфагора. Довжина усієї ламаної тоді дорівнює

$$\ell(\Gamma_\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2}.$$

Означення 2.7 *Крива Γ називається спрямлюваною, якщо для деякого числа $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, \lambda = \lambda([a;\, b]),\; |\lambda| < \delta : \;\; |\ell(\Gamma_\lambda) - \mathcal{I}| < \varepsilon.$$

Число $\mathcal{I}$ називається довжиною спрямлюваної кривої і позначається символом

$$\ell(\Gamma) = \mathcal{I}.$$

Зауваження. Для спрямлюваної кривої правильна рівність

$$\ell(\Gamma) = \sup_{\lambda} \ell(\Gamma_\lambda).$$

Теорема 2.27 *Нехай* $\{x,\,y\} \subset C^{(1)}([a;\,b])$*. Тоді крива* $\Gamma = \{(x(t),y(t))|$ $t \in [a;\,b]\}$ *спрямлювана і має довжину*

$$\ell(\Gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

◀ Для довільного розбиття $\lambda = \lambda([a;\,b]) = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$ за теоремою Лагранжа знайдуться точки $\xi_k,\,\eta_k \in [t_k,\,t_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots,n-1$,

$$\ell(\Gamma_\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} \cdot \Delta t_k.$$

Оскільки

$$\forall\,\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}: \ \left|\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \sqrt{\alpha^2+\gamma^2}\right| \le |\beta-\gamma|,$$

то для інтегральних сум для функції $\sqrt{x'^2+y'^2}$ маємо нерівність

$$\left|\ell(\Gamma_\lambda) - S\left(\sqrt{x'^2+y'^2},\,\lambda,\,\{\xi_k\}\right)\right| =$$
$$= \left|\ell(\Gamma_\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \cdot \Delta t_k\right| \le$$
$$\le \sum_{k=0}^{n-1} |y'(\xi_k)) - y'(\eta_k)| \cdot \Delta t_k.$$

Неперервна функція y' рівномірно неперервна на відрізку $[a;\,b]$ за теоремою Кантора, тобто

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\{t,s\} \subset [a;\,b],\ |t-s| < \delta:\ |y'(s) - y'(t)| < \varepsilon.$$

Тому для довільного розбиття $\lambda = \lambda([a;\,b])$ з діаметром $|\lambda| < \delta$

$$\left|\ell(\Gamma_\lambda) - S\left(\sqrt{x'^2+y'^2},\,\lambda,\,\{\xi_k\}\right)\right| < \varepsilon \cdot (b-a).$$

Звідси та з інтегровності функції $\sqrt{x'^2+y'^2}$ випливає спрямлюваність кривої Γ і рівність

$$\ell(\Gamma) = \lim_{|\lambda|\to 0} \ell(\Gamma_\lambda) = \lim_{|\lambda|\to 0} S\left(\sqrt{x'^2+y'^2},\,\lambda,\,\{\xi_k\}\right) = \int\limits_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

▶

Слід зауважити, що так означені поняття довжини дуги і площі мають природні властивості невід'ємності і адитивності.

4. Інші застосування

Міркуваннями, подібними до вище наведених, можна прийти до означень різних геометричних і фізичних характеристик, отримати ефективні формули для їх обчислення.

1. Об'єм тіла обертання Уважаємо відомим об'єм прямого кругового цидіндра
$$C = \{(x, y, z)|\ a \le x \le b,\ y^2 + z^2 \le r^2\} \subset \mathbb{R}^3 :$$
$$V(C) = \pi r^2 (b - a).$$

Цей циліндр можна розглядати як тіло, утворене обертанням прямокутника $\{(x, y)|\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le r\}$ навколо осі Ox. Розглянемо тепер тіло
$$B = \{(x, y, z)|\ x \in [a;\, b],\ y^2 + z^2 \le f^2(x)\},$$
утворене обертанням криволінійної трапеції (2.8) навколо осі Ox. Для довільного розбиття $\lambda = \lambda([a;\, b])$ тілá, утворені обертанням фігур T_λ, T^λ навколо осі Ox складаються з прямих кругових циліндрів. Об'єм кожного з них можна обчислити як суму об'ємів складових циліндрів. Далі можна означити внутрішній і зовнішній об'єми тіла обертання і поняття кубованої фігури (тієї, що має об'єм). У випадку невід'ємної неперервної функції f отримаємо кубованість тіла обертання B і формулу для його об'єму
$$V(B) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx.$$

2. Площа поверхні обертання Уважаємо відомою площу бічної поверхні зрізаного кругового конуса K з віссю, перпендикулярною до площин основ:
$$\sigma(K) = \pi(r + R)l,$$
де l – довжина твірної, r, R – радіуси основ. Ця поверхня утворена обертанням навколо осі відрізка прямої довжини l, що лежить в одній з віссю площині. Кінці відрізка знаходяься на відстанях r і R від осі обертання.

Нехай тепер функція $f \in C^{(1)}([a;\, b];\ [0;\, +\infty))$, а поверхня Π утворена обертанням її графіка $\Gamma = \{(x, f(x))|\ x \in [a;\, b]\}$ навколо осі Ox. Для довільного розбиття $\lambda = \lambda([a;\, b])$ поверхня Π_λ, утворена обертанням ламаної Γ_λ навколо осі Ox, складається з поверхонь зрізаних конусів. Далі можна обчислити площу всієї поверхні Π_λ і означити площу поверхні Π як границю (подібну до границі інтегральних сум):
$$\sigma(\Pi) := \lim_{|\lambda| \to 0} \sigma(\Pi_\lambda).$$

У випадку функції $f \in C^{(1)}([a;\, b];\ [0;\, +\infty))$ площа поверхні (границя) існує і дорівнює
$$\sigma(\Pi) = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

3. Статичні моменти. Центр маси. Теореми Гульдіна Нехай в точці зосереджена маса m. Статичним моментом цієї точки відносно прямої L називається число $m \cdot d$, де d – відстань від точки до прямої. Статичним

моментом скінченної множини точок, що лежать в одній площині з прямою, відносно цієї прямої називається сума їхніх моментів. При цьому моменти точок, що лежать в різних півплощинах відносно прямої, враховуються з протилежними знаками.

Нехай тепер на кривій (2.9) рівномірно розподілена маса з густиною, що дорівнює 1, тобто маса будь-якого відрізка кривої чисельно дорівнює довжині цього відрізка. Довільне розбиття $\lambda = \lambda([a;\, b]) = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$ визначає розбиття самої кривої Γ точками $(x(t_k), y(t_k))$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Зосередимо масу відрізка розбиття кривої $\{(x(t), y(t)) |\ t \in [t_k;\, t_{k+1}]\}$ у якій-небудь точці $(x(\xi_k), y(\xi_k))$ цього відрізка. Тоді статичні моменти побудованої множини точок відносно координатних осей становитимуть

$$M^{\lambda}_{Ox} = \sum_{k=0}^{n-1} y(\xi_k) \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt,$$

$$M^{\lambda}_{Oy} = \sum_{k=0}^{n-1} x(\xi_k) \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Для функцій $\{x,\, y\} \subset C^{(1)}([a;\, b])$ існують статичні моменти кривої Γ відносно координатних осей

$$M_{Ox} := \lim_{|\lambda| \to 0} M^{\lambda}_{Ox} = \int\limits_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt,$$

$$M_{Oy} := \lim_{|\lambda| \to 0} M^{\lambda}_{Oy} = \int\limits_a^b x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Зосередимо у точці $(x_0,\, y_0)$ масу усієї кривої Γ. Якщо статичний момент побудованої матеріальної точки відносно довільної прямої на площині збігається зі статичним моментом кривої відносно цієї прямої, то така точка називається центром маси кривої. Для кривої з рівномірно розподіленою масою координати центра маси дорівнюють

$$x_0 = \frac{M_{Oy}}{\ell(\Gamma)}, \qquad y_0 = \frac{M_{Ox}}{\ell(\Gamma)}.$$

Якщо крива Γ є графіком функції $f \in C^{(1)}$, тобто $\Gamma = \{(x, f(x)) |\ x \in [a;\, b]\}$, то

$$2\pi y_0 \ell(\Gamma) = 2\pi M_{Ox} = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \sigma(\Pi).$$

Ця рівність є твердженням першої теореми Гульдіна.

Теорема 2.28 ***(Перша теорема Гульдіна)*** *Площа поверхні, утвореної обертанням однорідної кривої (2.9) навколо осі, що лежить у одній площині з цією кривою і не перетинає її, дорівнює добутку довжини кривої і довжини кола, описаного центром маси кривої.*

Аналогічним чином можна означити статичні моменти однорідної криволінійної трапеції (2.8). При цьому окремі криволінійні трапеції розбиття можна наближено вважати прямокутниками, а їхні статичні моменти можна наблизити, зосередивши маси в центрах прямокутників

$$(\xi_k,\, \eta_k) = \left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \frac{1}{2} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Тоді

$$M_{Ox} = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\, dx, \qquad M_{Oy} = \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Відповідно координати центра маси

$$x_0 = \frac{M_{Oy}}{\sigma(T)}, \qquad y_0 = \frac{M_{Ox}}{\sigma(T)}.$$

Звідси

$$2\pi y_0 \sigma(T) = 2\pi M_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx = V(B),$$

де $V(B)$ – об'єм тіла B, утвореного обертанням криволінійної трапеції T навколо осі Ox. Таким чином, правильна

Теорема 2.29 ***(Друга теорема Гульдіна)*** *Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої однорідної фігури навколо осі, що лежить у одній площині з цією фігурою і не перетинає її, дорівнює добутку площі фігури і довжини кола, описаного центром маси фігури.*

2.7 Інтегральні нерівності

Нехай числа $p > 1,\ \ q > 1$ задовольняють рівняння

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Такі числа в подальшому називатимемо спряженими.
Лема 1. (Нерівність Юнга) Для спряжених чисел p і q

$$\forall\, a \ge 0\ \forall\, b \ge 0: \quad ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

◀ Строго монотонна неперервна функція $f(x) = x^{p-1}$, $x \ge 0$, має обернену $f^{-1}(y) = y^{q-1}$, $x \ge 0$. Порівнюючи площу прямокутника $[0;\, a] \times [0;\, b]$ з сумою площ криволінійних трапецій $\big\{(x,y)|\ x \in [0;\, a],\ \ y \in [0;\, f(x)]\big\}$ і $\big\{(x,y)|\ y \in [0;\, b],\ x \in [0;\, f^{-1}(y)]\big\}$, отримуємо нерівність

$$ab \le \int\limits_0^a f(x)\, dx + \int\limits_0^b f^{-1}(y)\, dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Рівність у цій нерівності справджується коли $f(a) = b$. ▶

Теорема 2.30 (Нерівність Гьольдера) *Для спряжених чисел p і q*

$$\forall\, a \ge 0\ \forall\, b \ge a,\ \forall \{f,\ g\} \subset C([a;\, b]): \quad \int\limits_a^b |fg| \le \left(\int\limits_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int\limits_a^b |g|^q\right)^{1/q}.$$

◀ **(i)** Нерівність правильна, якщо принаймні одна з функцій f, g тотожно нульова.
(ii) Нехай $\int\limits_a^b |f|^p = \int\limits_a^b |g|^q = 1$. За нерівністю Юнга

$$\forall\, x \in [a;\, b]:\ |f(x) \cdot g(x)| \le \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}.$$

Проінтегруємо цю нерівність

$$\int\limits_a^b |f \cdot g| \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(iii) Нехай обидві функції f і g не дорівнюють тотожно 0. Тоді $\int\limits_a^b |f|^p > 0$; $\int\limits_a^b |g|^q > 0$. Застосувавши результат п. **(ii)** до функцій

$$\frac{f}{\left(\int\limits_a^b |f|^p\right)^{1/p}}, \quad \frac{g}{\left(\int\limits_a^b |g|^q\right)^{1/q}},$$

отримаємо

$$\int\limits_a^b \frac{|f|}{\left(\int\limits_a^b |f|^p\right)^{1/p}} \cdot \frac{|g|}{\left(\int\limits_a^b |g|^q\right)^{1/q}} \le 1,$$

що й треба було довести. ▶

Зауваження 1. При $p = q = 2$ нерівність Гьольдера є відомою нерівністю Коші – Буняковського.

Зауваження 2. Оскільки $\frac{q}{p} + 1 = q$, рівність у нерівності Гьольдера має місце тоді й лише тоді, коли $|f|^p = |\lambda g|^q$ для деякого числа λ.

Теорема 2.31 (Нерівність Мінковського) *Для числа* $p \ge 1$

$$\forall\, a \ge 0\, \forall\, b \ge a,\ \forall \{f,\ g\} \subset C([a;\, b]):\quad \left(\int\limits_a^b |f+g|^p\right)^{1/p} \le \left(\int\limits_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^b |g|^p\right)^{1/p}.$$

◀ Нехай $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\int\limits_a^b |f+g|^p \le \int\limits_a^b \big(|f| + |g|\big)^p = \int\limits_a^b \big(|f| + |g|\big)^{p-1}(|f| + |g|) \le \text{ (нерівність Гьольдера) } \le$$

$$\le \left(\int\limits_a^b \big(|f| + |g|\big)^{(p-1)\cdot q}\right)^{1/q} \left(\int\limits_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^b \big(|f| + |g|\big)^{(p-1)\cdot q}\right)^{1/q} \left(\int\limits_a^b |g|^p\right)^{1/p}. \tag{2.10}$$

Зауважимо, що

$$(p-1)q = p\left(1 - \frac{1}{p}\right)q = p \cdot \frac{1}{q} \cdot q = p$$

і поділимо обидві частини нерівності (2.10) на

$$\left(\int\limits_a^b \big(|f| + |g|\big)^{(p-1)\cdot q}\right)^{1/q} = \left(\int\limits_a^b \big(|f| + |g|\big)^p\right)^{1/q}.$$

▶

Розділ 3

Ряди

3.1 Числові ряди

1. Основні означення

Для заданої послідовності дійсних чисел $\{a_n : n \geq 1\}$ рядом називається пара послідовностей $\{a_n : n \geq 1\}$ і $\{s_n : n \geq 1\}$, де $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ n \geq 1$. Числа a_n і s_n називаються n-м членом і n-ю частинною сумою ряду відповідно. Позначається ряд символом

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{3.1}$$

Якщо $s_n \to s \in \mathbb{R},\ n \to \infty$, то ряд (3.1) називається збіжним, а число s називається його сумою. В іншому випадку ряд (3.1) називається розбіжним. Для $m \geq 0$ ряд

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n. \tag{3.2}$$

називається залишком ряду (3.1). Будь-який залишок збіжного ряду також збігається. Навпаки, якщо який-небудь залишок збігається, то й ряд збігається. Суму залишку (3.2) позначимо через r_m. При цьому $s = s_n + r_n,\ \ n \geq 1$, і для збіжного ряду $r_m \to 0,\ m \to \infty$.

Теорема 3.1 *Необхідними умовами збіжності ряду (3.1) є кожна з нижче наведених:*

1. $a_n \to 0,\ n \to \infty$;
2. $s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \to 0,\ n \to \infty$.

Теорема 3.2 *(Критерій Коші) Ряд (3.1) збігається* $\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall\, n \geq n_0\ \forall\, p \geq 1 : \left| \sum_{n=n+1}^{n+p} a_n \right| < \varepsilon.$$

Приклади

1. Ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin n$$

розбігаються, оскільки не виконується умова 1 теореми 3.1.

2. Гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

розбігається, оскільки не виконується умова 2 теореми 3.1. Це випливає з нерівності

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \quad n \geq 1.$$

3. Геометричний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

збігається $\iff$ $|q| < 1$.
◀ При $|q| \geq 1$

$$a_n = q^n \not\to 0, \ n \to \infty.$$

При $|q| < 1$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \to \frac{1}{1 - q}, \quad n \to \infty.$$

▶

4. Узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

збігається $\iff$ $\alpha > 1$.
◀ При $\alpha \leq 1$

$$\forall\, n \geq 1 : \ \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}, \qquad \text{тому} \ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}, \quad n \geq 1.$$

Ряд розбігається, оскільки не виконується умова 2 теореми 3.1.

При $\alpha > 1$ строго зростаюча послідовність $\left\{ s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} : \ n \geq 1 \right\}$ обмежена зверху

$$0 < s_n \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{(\alpha - 1)(n+1)^{\alpha - 1}} < \frac{1}{\alpha - 1}, \quad n \geq 1.$$

Тому існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} s_n \in \mathbb{R}$. ▶

2. Арифметичні властивості збіжних рядів

Теорема 3.3 *Нехай ряди* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *збігаються. Тоді*

1. *для кожного числа* $c \in \mathbb{R}$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ *збігається і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;
2. *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *збігається і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

3. Ряди з невід'ємними членами

Нехай члени ряду (3.1) невід'ємні: $a_n \geq 0$, $n \geq 1$. Тоді послідовність частинних сум цього ряду монотонно не спадає

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n.$$

Тому умова збіжності такого ряду полягає в обмеженості послідовності його частинних сум.

Теорема 3.4 *Ряд (3.1) з невід'ємними членами збігається тоді й лише тоді, коли послідовність його частинних сум обмежена.*

Зауважимо, що у цьому випадку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\limits_{n\geq 1} s_n$.

1. Ознаки порівняння

Розглянемо ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.3}$$

і

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{3.4}$$

Теорема 3.5 ***(мажорантна ознака порівняння)*** *Нехай*

$$\forall\, n \geq 1: \ 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Тоді зі збіжності ряду (3.4) випливає збіжність ряду (3.5) (з розбіжності ряду (3.5) випливає розбіжність ряду (3.4)).

◀ Обмеженість частинних сум ряду (3.5) випливає з нерівності

$$\forall\, n \geq 1: \ 0 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k$$

і обмеженості частинних сум ряду (3.4). ▶

Теорема 3.6 ***(ознака порівняння у формі еквівалентності)*** *Нехай виконані умови:*

1. $\forall\, n \geq 1: \ a_n > 0, \ b_n > 0;$
2. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = C \in [0; +\infty].$

Тоді

1. *при* $C < +\infty$ *зі збіжності ряду (3.4) випливає збіжність ряду (3.5);*
2. *при* $C > 0$ *з розбіжності ряду (3.4) випливає розбіжність ряду (3.5);*
3. *при* $0 < C < +\infty$ *ряди (3.4) і (3.5) або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.*

◀ *(i)* У такому випадку

$$\exists\, n_0 \geq 1\ \forall\, n \geq n_0: \ a_n \leq (C+1)b_n$$

і твердження випливає з мажорантної ознаки порівняння.

(ii) У цьому випадку

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{C}$$

і твердження випливає з п. *(i)*.

(iii) Випливає з п.п. *(i)*, *(ii)*. ▶

Теорема 3.7 ***(ознака порівняння у термінах швидкості збіжності)*** *Нехай виконані умови:*

1. $\forall\, n \geq 1: \ a_n > 0, \ b_n > 0;$
2. $\forall\, n \geq 1: \ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}.$

Тоді зі збіжності ряду (3.4) випливає збіжність ряду (3.5).

◀ З умови *2* випливає нерівність

$$\forall\, n \geq 1: \ 0 < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}.$$

Тому існує

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C \in [0; +\infty).$$

Твердження тепер випливає з теореми 3.6. ▶

3.2 Ознаки збіжності рядів з невід'ємними членами

Далі наведені достатні умови збіжності числових рядів, які по суті є ознаками порівняння з модельними рядами. Розглядаються ряди вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.5}$$

з членами $a_n \geq 0$, $n \geq 1$.

Теорема 3.8 (ознака Д'Аламбера) ***(i)*** *Нехай члени ряду (3.5) задовольняють умови:*

1. $\forall n \geq 1 \,:\, a_n > 0$;
2. $\exists \rho,\ 0 \leq \rho < 1,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho.$

Тоді ряд (3.5) збігається.
(ii) *Якщо за умови 1*

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$

то ряд (3.5) розбігається.
(iii) *(Гранична форма) Якщо за умови 1 існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \in [0, +\infty],$$

то при $r < 1$ ряд (3.5) збігається, при $r > 1$ ряд (3.5) розбігається.

◀ Доведення ***(i)*** випливає з порівняння швидкості прямування до нуля членів ряду (3.5) з геометричним рядом. У випадку ***(ii)*** не виконується необхідна умова збіжності ряду. Твердження ***(iii)*** є наслідком ***(i)*** і ***(ii)***. ▶

Теорема 3.9 (ознака Коші) ***(i)*** *Нехай члени ряду (3.5) задовольняють умови:*

1. $\forall n \geq 1 \,:\, a_n \geq 0$;
2. $\exists \rho,\ 0 \leq \rho < 1,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\ \sqrt[n]{a_n} \leq \rho.$

Тоді ряд (3.5) збігається.
(ii) *Якщо за умови 1 для нескінченної множини номерів n виконується нерівність $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд (3.5) розбігається.*
(iii) *(Гранична форма) Якщо за умови 1 існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r \in [0, +\infty],$$

то при $r < 1$ ряд (3.5) збігається, при $r > 1$ ряд (3.5) розбігається.

◀ Доведення *(i)* випливає з з мажорантної ознаки порівняння ряду (3.5) з геометричним рядом. У випадку *(ii)* не виконується необхідна умова збіжності ряду. Твердження *(iii)* є наслідком *(i)* і *(ii)*. ▶

Зауваження 1. Умова 2) еквівалентна тому, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{a_n} < 1$.

Зауваження 2. Якщо існує границя в п. *(iii)* ознаки Д'Аламбера, то існує

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r.$$

Теорема 3.10 (логарифмічна ознака) *Нехай члени ряду (3.5) задовольняють умови:*

1. $\forall n \geq 1 \ : \ a_n > 0$;
2. *існує* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \ln \dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right) = r \in [-\infty, +\infty]$. *Тоді при* $r > 1$ *ряд (3.5) збігається, при* $r < 1$ *ряд (3.5) розбігається.*

◀ Нехай

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = r > 1.$$

Тоді для довільного числа $\rho \in (1;\ r)$ можна вказати таке $n_0 \geq 1$, що

$$\forall\, n \geq n_0 : \ n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > \rho \iff \frac{a_n}{a_{n+1}} > e^{\rho/n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\cdot(\rho/n)} = \frac{\frac{1}{n^\rho}}{\frac{1}{(n+1)^\rho}} \iff$$

$$\iff \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^\rho}}{\frac{1}{n^\rho}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\rho}$ при $\rho > 1$ збігається, тому за ознакою порівняння у термінах швидкості збіжності ряд (3.5) збігається.

Нехай

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = r < 1.$$

Тоді для довільного числа $\rho \in (r;\ 1)$ можна вказати таке $n_0 \geq 1$, що

$$\forall\, n > n_0 : \ n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} < \rho \iff \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\rho/n} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n\cdot(\rho/n)} = \frac{\frac{1}{(n-1)^\rho}}{\frac{1}{n^\rho}} \iff$$

$$\iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\frac{1}{n^\rho}}{\frac{1}{(n-1)^\rho}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\rho}$ при $\rho < 1$ розбігається, тому за ознакою порівняння у термінах швидкості збіжності ряд (3.5) розбігається. ▶

Теорема 3.11 ***(ознака Раабе)*** *Нехай члени ряду (3.5) задовольняють умови:*

1. $\forall n \geq 1 \ : \ a_n > 0$;

2. існує $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r \in [-\infty, +\infty]$.

Тоді при $r > 1$ *ряд (3.5) збігається, при* $r < 1$ *ряд (3.5) розбігається.*

◀ Якщо $r \in (-\infty, +\infty)$, то $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$, $n \to \infty$, і

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \sim n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad n \to \infty.$$

Твердження теореми тепер випливає з ознаки порівняння у формі еквівалентності і логарифмічної ознаки.

Якщо $r = -\infty$, то

$$\exists\, n_0 \geq 1 \ \forall\, n \geq n_0 : \ \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$$

і не виконується необхідна умова збіжності ряду (3.5).

Якщо $r = +\infty$, то

$$\exists\, n_0 \geq 1 \ \forall\, n \geq n_0 : \ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 3 = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^3 - 1}{\frac{1}{n}} > \frac{(1+\frac{1}{n})^2 - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Тому

$$\forall\, n \geq n_0 : \ \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}.$$

За ознакою порівняння з узагальненим гармонічним рядом у термінах швидкості збіжності ряд (3.5) збігається. ▶

Додаткова умова монотонності послідовності членів ряду (3.5) спрощує дослідження його збіжності.

Теорема 3.12 (ознака Коші) *Нехай члени ряду (3.5) задовольняють умову*

$$\forall\, n \geq 1 \ : \ a_n \geq a_{n+1} \geq 0.$$

Тоді

$$\text{ряд (3.5) збігається} \iff \text{ряд } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ збігається}.$$

◀ Доведення випливає з нерівностей

$$\forall\, n \geq 1 \ \forall\, m = 0, 1, \ldots, 2^n - 1 : \ 2^{-1} \cdot 2^{n+1} a_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n}^{2^n+m} a_k \leq 2^n a_{2^n}$$

і мажорантної ознаки порівняння. ▶

Теорема 3.13 (інтегральна ознака Маклорена – Коші) *Нехай функція* $f : [1; +\infty) \to [0; +\infty)$ *монотонно не зростає,* $a_n = f(n)$, $n \geq 1$. *Тоді*

$$\text{ряд (3.5) збігається} \iff \exists \lim_{x\to+\infty} \int\limits_1^x f =: \int\limits_1^{+\infty} f \in \mathbb{R}.$$

При цьому

$$\int\limits_1^{+\infty} f \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + \int\limits_1^{+\infty} f.$$

◄ Монотонна функція f інтегровна по будь-якому відрізку з множини $[1; +\infty)$, причому інтеграл

$$\varphi(x) := \int\limits_1^x f, \quad x \geq 1,$$

унаслідок невід'ємності f є монотонно неспадною функцією і

$$\int\limits_1^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \sup_{x\geq1} \varphi(x) = \sup_{n\geq1} \varphi(n) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(n).$$

Оскільки

$$\forall\, k \geq 1 : \; a_{k+1} \leq \int\limits_k^{k+1} f \leq a_k,$$

то унаслідок адитивності інтеграла правильна нерівність

$$\int\limits_1^n f \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq a_1 + \int\limits_1^n f, \quad n \geq 1.$$

Звідси граничним переходом при $n \to \infty$ отримуємо твердження теореми. ►

3.3 Знакозмінні ряди. Ряд Лейбніца

1. Ряд Лейбніца

Ряди з членами різних знаків мають властивості, відмінні від властивостей скінченних сум. Відносно простим модельним прикладом знакозмінного ряду є ряд Лейбніца

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \tag{3.6}$$

Доведемо збіжність цього ряду і обчислимо його суму. Позначимо частинні суми ряду Лейбніца і гармонічного ряду відповідно символами

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \qquad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad n \geq 1.$$

Оскільки

$$s_{2(n+1)} = s_{2n} + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)}\right) > s_{2n},$$

$$s_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2n} < 1, \quad n \geq 1,$$

послідовність $\{s_{2n} : \ n \geq 1\}$ монотонно зростає і обмежена зверху числом 1. Тому існує числова границя цієї послідовності

$$s := \lim_{n\to\infty} s_{2n}, \quad \frac{1}{2} = s_2 < s < 1.$$

Оскільки

$$s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}, \ \text{ то й } \ s_n \to s, \quad n \to \infty.$$

Для обчислення числа s згадаємо, що

$$\gamma_n = \sigma_n - \ln n \to \gamma, \quad n \to \infty,$$

де γ – стала Ойлера – Маскероні. Далі зауважимо, що

$$s_{2n} = \sigma_{2n} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \sigma_{2n} - \sigma_n = (\ln(2n) + \gamma_{2n}) - (\ln n + \gamma_n) =$$

$$= \ln 2 + \gamma_{2n} - \gamma_n \to \ln 2 + \gamma - \gamma = \ln 2, \quad n \to \infty.$$

Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

Виявляється, що перестановка членів ряду (3.6) може змінити його суму (і навіть привести до розбіжного ряду). Наприклад, переставимо доданки ряду (3.6) таким чином

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots \tag{3.7}$$

Позначимо n-ту частинну суму цього ряду символом τ_n, $n \geq 1$. Тоді

$$\tau_{3n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{4n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) =$$
$$= \sigma_{4n} - \frac{1}{2}\sigma_{2n} - \frac{1}{2}\sigma_n = (\ln 4n + \gamma_{4n}) - \frac{1}{2}(\ln 2n + \gamma_{2n}) - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma_n) \to$$
$$\to \frac{3}{2}\ln 2, \quad n \to \infty.$$

Далі звичайними міркуваннями доводиться, що й усі підпослідовності послідовності $\{\tau_n : \ n \geq 1\}$ збігаються до $\frac{3}{2}\ln 2$.

Як бачимо, ряди (3.6) і (3.7) складено з тих самих доданків у різному порядку, в результаті чого вони мають різні суми. Для довільного $p \in [-\infty; +\infty]$ члени ряду (3.6) можна переставити у такому порядку, що переставлений ряд буде збігатися (розбігатися) до p.

2. Абсолютно та умовно збіжні ряди

Збіжність знакозмінних рядів забезпечують два механізми:

- швидкість збіжності членів ряду до нуля;
- взаємна компенсація доданків протилежних знаків.

Виокремити їхній вплив можна з допомогою поняття абсолютно збіжного ряду. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{3.8}$$

Означення 3.1 *Ряд (3.8) називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{3.9}$$

Збіжний ряд з членами одного знаку збігається абсолютно. Однак збіжний ряд Лейбніца не збігається абсолютно. Тому виправдане таке означення.

Означення 3.2 *Ряд (3.8) називається умовно збіжним, якщо він збігається, а ряд (3.9) розбігається.*

Дослідження умовної збіжності рядів зручно проводити в термінах додатної і від'ємної частин ряду. За числом $x \in \mathbb{R}$ означимо числа

$$x^+ := \max\{0,\, x\}, \quad x^- := -\min\{0,\, x\}.$$

Зауважимо, що

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \ x^+ \geq 0; \quad x^- \geq 0; \quad x = x^+ - x^-; \quad |x| = x^+ + x^-.$$

За рядом (3.8) побудуємо ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \ - \tag{3.10}$$

його додатну і від'ємну частини.

Теорема 3.14 *Абсолютно збіжний ряд збігається, причому*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

◀ Оскільки

$$\forall\, n \ge 1: \; a_n^+ \le |a_n|, \quad a_n^- \le |a_n|, \quad n \ge 1,$$

зі збіжності ряду (3.9) за мажорантною ознакою порівняння випливає збіжність обох рядів (3.10). Тому за властивістю збіжних рядів ці ряди можна почленно відняти

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-).$$

Нерівність для сум рядів доводиться граничним переходом в нерівності

$$\forall\, n \ge 1: \; \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

▶

Теорема 3.15 *Ряд (3.8) збігається абсолютно тоді й лише тоді, коли збігаються обидва ряди (3.10).*

◀ Необхідність встановлена в доведенні Теореми 1. Достатність випливає з можливості почленного додавання збіжних рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

▶

Теорема 3.16 *Нехай ряд (3.8) збігається умовно. Тоді обидва ряди (3.10) розбігаються до* $+\infty$.

◀ Якщо збігаються ряд (3.8) і один з рядів (3.10), то збігається й інший як почленна сума збіжних рядів. Тоді за Теоремою 2 ряд (3.8) збігається абсолютно. Суперечність. ▶

3. Збіжність знакозмінних рядів

Теорема 3.17 ***(ознака Лейбніца)*** *Нехай послідовність* $\{a_n : \; n \ge 1\}$ *задовольняє умови:*

1. $\forall n \ge 1: \; 0 \le a_{n+1} \le a_n$;

2. $a_n \to 0$, $n \to \infty$.

Тоді ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \tag{3.11}$$

збігається і для його залишку правильна оцінка

$$\forall\, m\geq 1: \ \left|\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\right|\leq a_m.$$

◄ За умовою 1) послідовність частинних сум $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ цього ряду з парними номерами задовольняє нерівності

$$\begin{aligned} &s_{2n}\leq s_{2n}+a_{2n+1}-a_{2n+2}=s_{2(n+1)}=\\ &\quad =a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\ldots-(a_{2n}-a_{2n+1})-a_{2n+2}\leq a_1, \quad n\geq 1,\end{aligned}$$

тобто монотонно не спадає і обмежена зверху. Тому існує границя

$$s:=\lim_{n\to\infty}s_{2n}\leq a_1.$$

Крім того,

$$s_{2n+1}=s_{2n}+a_{2n+1}\to s, \quad n\to\infty.$$

Тому ряд збігається до числа s. Оцінка для залишку ряду доводиться застосуванням вже доведеного твердження до ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{m+n}$. ►

Нехай для цілого числа $n\geq 0$ і натурального p задані набори чисел $\{a_{n+1},a_{n+2},\ldots,a_{n+p}\}$ і $\{b_{n+1},b_{n+2},\ldots,b_{n+p}\}$. Означимо суми

$$\sigma(n+1,k):=\begin{cases}0, & k=n,\\ b_{n+1}+b_{n+2}+\ldots+b_k, & k=n+1,n+2,\ldots,n+p.\end{cases}$$

Тоді, перегрупувавши доданки, отримаємо рівність

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k&=\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\cdot(\sigma(n+1,k)-\sigma(n+1,k-1))=\\ &=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})\cdot\sigma(n+1,k)+a_{n+p}\sigma(n+1,n+p),\end{aligned}$$

яка називається перетворенням Абеля або формулою підсумовування частинами.

Теорема 3.18 ***(ознака Діріхле)*** *Нехай послідовності $\{a_n:\ n\geq 1\}$ і $\{b_n:\ n\geq 1\}$ задовольняють умови:*

1. *$\{a_n:\ n\geq 1\}$ – монотонна послідовність;*

2. *$a_n\to 0,\ n\to\infty;$*

3. $\exists C > 0\ \forall N \geq 1: \ \left|\sum\limits_{n=1}^{N} b_n\right| \leq C.$

Тоді ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3.12}$$

збігається.

◀ За умовою 3)

$$\forall n \geq 1\ \forall k \geq n+1: \ |\sigma(n+1,k)| \leq 2C.$$

За умовою 1) різниці $a_k - a_{k+1}$, $k \geq 1$, мають один й той самий знак. Тому

$$\begin{aligned}
&\forall n \geq 1\ \forall p \geq 1: \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \\
&\qquad = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) \cdot \sigma(n+1,k) + a_{n+p}\sigma(n+1,n+p)\right| \leq \\
&\qquad \leq 2C \cdot \left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_{n+p}|\right) = \\
&\qquad = 2C \cdot \left(\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1})\right| + |a_{n+p}|\right) = 2C \cdot (|a_{n+1} - a_{n+p}| + |a_{n+p}|) \leq \\
&\qquad \leq 2C \cdot (|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|)\,.
\end{aligned}$$

Ураховуючи умову 2), звідси отримуємо фундаментальність, а отже й збіжність частинних сум ряду (3.12). ▶

Зауважимо, що ознака Лейбніца є частинним випадком ознаки Діріхле з $b_n = (-1)^{n+1}$, $n \geq 1$.

Теорема 3.19 ***(ознака Абеля)*** *Нехай послідовності* $\{a_n : \ n \geq 1\}$ *і* $\{b_n : \ n \geq 1\}$ *задовольняють умови:*

1. $\{a_n : \ n \geq 1\}$ *– монотонна послідовність;*

2. $\{a_n : \ n \geq 1\}$ *– обмежена послідовність;*

3. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *збігається.*

Тоді ряд (3.12) збігається.

◀ Монотонна обмежена послідовність $\{a_n : \ n \geq 1\}$ має числову границю

$$a_n \to a \in \mathbb{R}, \ n \to \infty.$$

Тоді послідовності $\{a'_n = a_n - a : \ n \geq 1\}$ і $\{b_n : \ n \geq 1\}$ задовольняють умови ознаки Діріхле, за якою ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n b_n$$

збігається. Лишилося до цього ряду почленно додати збіжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a b_n.$$

►

3.4 Групування і перестановки членів ряду. Множення рядів

Операція додавання кількох доданків має властивості комутативності, асоціативності, дистрибутивності відносно множення. Інша справа – нескінченні суми, власне ряди. Некомутативність вже відома для ряду Лейбніца. Неасоціативність очевидна у наступному прикладі

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \neq (1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots.$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{3.13}$$

1. Групування членів ряду

Для довільної строго зростаючої послідовності натуральних чисел

$$1 \leq m(1) < m(2) < \ldots < m(n) < \ldots$$

побудуємо послідовність

$$b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{m(1)}, \quad b_2 = a_{m(1)+1} + a_{m(1)+2} + \ldots + a_{m(2)}, \ldots,$$

$$b_n = a_{m(n-1)+1} + a_{m(n-1)+2} + \ldots + a_{m(n)}, \ \ldots$$

Кажуть, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \big(a_1 + a_2 + \ldots + a_{m(1)}\big) + \big(a_{m(1)+1} + a_{m(1)+2} + \ldots + a_{m(2)}\big) + \ldots \tag{3.14}$$

утворено з ряду (3.13) розстановкою дужок (або групуванням його членів), а ряд (3.13) утворено з ряду (3.14) розкриттям дужок.

Частинні суми ряду (3.14) утворюють підпослідовність послідовності частинних сум ряду (3.13). Тому згрупувавши довільним чином члени збіжного ряду, отримаємо збіжний до тієї ж суми ряд. Навпаки, якщо розкривши дужки отримаємо збіжний ряд, то його сума дорівнюватиме сумі вихідного ряду.

2. Перестановка членів ряду

Розглянемо довільну бієкцію (перестановку) $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Для заданого ряду (3.13) розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m(n)}, \tag{3.15}$$

утворений перестановкою членів ряду (3.13). Для ряду Лейбніца було показано, що перестановка його членів може привести до зміни суми ряду.

Теорема 3.20 ***(Діріхле)*** *Нехай члени збіжного ряду (3.13) невід'ємні. Тоді для довільної перестановки $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ряд (3.15) збігається і*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m(n)}.$$

◀ Для довільного $n \in \mathbb{N}$ позначимо $N(n) = \max\{m(1), m(2), \ldots, m(n)\}$. Унаслідок невід'ємності доданків

$$\sum_{k=1}^{n} a_{m(k)} \le \sum_{k=1}^{N(n)} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty.$$

Тому ряд (3.15) збігається і

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{m(k)} \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Ряд (3.13) утворено з ряду (3.15) оберненою перестановкою $m^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Тому за доведеним

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m^{-1}(m(k))} \le \sum_{k=1}^{\infty} a_{m(k)}.$$

▶

Теорема 3.21 *Нехай ряд (3.13) збігається абсолютно. Тоді для довільної перестановки* $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *ряд (3.15) збігається і*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m(n)}.$$

◀ Застосуємо теорему Діріхле до збіжних додатної і від'ємної частин ряду (3.13)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{+}_{m(n)} - a^{-}_{m(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{+}_{m(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-}_{m(n)} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a^{+}_{n} - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-}_{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

▶

Теорема 3.22 ***(Ріман)*** *Нехай ряд (3.13) збігається умовно. Тоді для будь-якого* $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *існує така перестановка* $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *що*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m(n)} = s.$$

3. Множення рядів

Добуток скінченних сум не залежить від порядку додавання попарних добутків їхніх доданків

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_k \cdot b_j).$$

Сума зліченної множини попарних добутків членів рядів може залежати від їхнього порядку і вимагає спеціального означення. Важливим є такий порядок підсумовування.

Означення 3.3 *Добутком рядів*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{3.16}$$

та

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \tag{3.17}$$

в сенсі Коші називається ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad \text{де} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \ n \geq 0. \tag{3.18}$$

Теорема 3.23 ***(Коші)*** *Нехай ряди (3.16) і (3.17) збігаються абсолютно. Тоді для довільного упорядкування елементів таблиці попарних добутків* $\{a_k b_j | \ k \geq 0, \ j \geq 0\}$ *ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{j(n)} b_{k(n)} \tag{3.19}$$

збігається абсолютно і

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{j(n)} b_{k(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Зокрема, збігається добуток рядів у сенсі Коші

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

◀ Для довільного упорядкування елементів таблиці попарних добутків $\{a_k b_j | \ k \geq 0, \ j \geq 0\}$ і довільного цілого $n \geq 0$ позначимо

$$N(n) := \max\{j(0), j(1), \ldots, j(n), k(0), k(1), \ldots, k(n)\}.$$

Тоді маємо обмеженість частинних сум ряду (3.19)

$$\sum_{m=0}^{n} |a_{j(m)} b_{k(m)}| \leq \sum_{j,k=0}^{N(n)} |a_j b_k| = \sum_{j=0}^{N(n)} |a_j| \cdot \sum_{k=0}^{N(n)} |b_k| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < +\infty.$$

Звідси випливає абсолютна збіжність ряду (3.19) (і незалежність його суми від порядку і групування доданків). Зокрема, підсумовуючи квадратами, отримаємо

$$a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j b_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_n b_k + a_n b_n \right) = \sum_{j,k=0}^{N} a_j b_k = \sum_{j=0}^{N} a_j \cdot \sum_{k=0}^{N} b_k \to$$

$$\to \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \ N \to \infty.$$

▶

Теорема 3.24 ***(Мертенс)*** *Нехай ряди (3.16) і (3.17) збігаються, причому хоча б один з них збігається абсолютно. Тоді збігається ряд (3.18) і*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

◀ Нехай збігаються ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B,$$

причому ряд (3.17) збігається абсолютно. Позначимо через α_n залишок збіжного ряду (3.16)

$$\alpha_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0,\ n \to \infty.$$

Змінимо порядок підсумовування частинних сум ряду (3.18)

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n-k} a_j \right) b_k = \sum_{k=0}^{n} (A - \alpha_{n-k})\, b_k = A \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n-k} b_k.$$

Зауважимо тепер, що

$$A \sum_{k=0}^{n} b_k \to A \cdot B,\ n \to \infty,$$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k b_{n-k},\ n \geq 0.$$

Трикутна таблиця чисел $\{b_{n-k} |\ n \geq 0,\ 0 \leq k \leq n\}$ визначає регулярне перетворення послідовності $\alpha_n \to 0$, оскільки

$$\forall\, k \geq 0 :\ b_{n-k} \to 0,\ n \to \infty; \qquad \sum_{k=0}^{n} |b_{n-k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < +\infty.$$

Тому за теоремою Тьопліца

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k b_{n-k} \to 0,\ n \to \infty.$$

▶

3.5 Нескінченні добутки

Розглядаючи замість додавання операцію множення, аналогічно рядам прийдемо до конструкції нескінченного добутку.

Для заданої послідовності дійсних чисел $\{a_n : n \geq 1\}$ нескінченним добутком називається пара послідовностей $\{a_n : n \geq 1\}$ і $\{p_n : n \geq 1\}$, де

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k, \ n \geq 1.$$

Числа a_n і p_n називаються n-м членом і n-м частинним добутком відповідно. Позначається нескінченний добуток символом

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{3.20}$$

Якщо $p_n \to p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ n \to \infty$, то добуток (3.20) називається збіжним, а число p називається його добутком. В іншому випадку добуток (3.20) називається розбіжним.

Приклад 1. При $|x| < 1$

$$\begin{aligned}
&\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^n}) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})\ldots = \\
&= \lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n}) = \\
&= \frac{1}{1-x}\lim_{n\to\infty}(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n}) = \\
&= \frac{1}{1-x}\lim_{n\to\infty}(1-x^{2^{n+1}}) = \frac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

Теорема 3.25 *Необхідними умовами збіжності добутку (3.20) є кожна з нижче наведених:*

1. $\forall n \geq 1 : \ a_n \neq 0;$
2. $\exists\, n_0 \geq 1 \ \forall\, n \geq n_0 : \ a_n > 0;$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1.$

У подальшому будемо розглядати нескінченні добутки лише за умови

$$a_n > 0, \quad n \geq 1.$$

Теорема 3.26 *Нескінченний добуток (3.20) збігається тоді й лише тоді, коли збігається ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n. \tag{3.21}$$

При цьому

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n\right).$$

◀ Доведення випливає з рівності

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln a_k\right), \ n \geq 1,$$

і неперервності логарифмічної та показникової функцій. ▶

Ураховуючи необхідні умови збіжності нескінченного добутку, зручно його n-тий член подати у вигляді $a_n = 1 + u_n$, $n \geq 1$, де у збіжному добутку $u_n \to 0$, $n \to \infty$.

Теорема 3.27 *Нехай $u_n \geq 0$, $n \geq 1$. Нескінченний добуток*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n) \tag{3.22}$$

збігається тоді й лише тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{3.23}$$

◀ Зауважимо, що збіжність $u_n \to 0$, $n \to \infty$, є необхідною умовою як збіжності добутку (3.22), так і збіжності ряду (3.23). При цьому

$$\ln(1 + u_n) \sim u_n, \quad n \to \infty.$$

Твердження теореми тепер випливає з Теореми 3.26 і ознаки порівняння збіжності рядів у формі еквівалентності. ▶

Приклад 2. Нескінченний добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leq 1$.

Теорема 3.28 *Нехай ряд (3.23) збігається. Нескінченний добуток (3.22) збігається тоді й лише тоді, коли збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$.*

◀ Зауважимо, що за умовою теореми $u_n \to 0$, $n \to \infty$. Тому з локальної формули Тейлора випливає, що

$$\exists\, n_0 \ \forall\, n \geq n_0 : \ 0 \leq \frac{1}{4}u_n^2 \leq u_n - \ln(1 + u_n) \leq \frac{3}{4}u_n^2.$$

За мажорантною ознакою порівняння збіжність ряду (3.21) еквівалентна збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$. ▶

3.6 Функціональні ряди

1. Означення рівномірно збіжного ряду

Нехай на множині $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, задані функції $a_n : \ A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$.

Означення 3.4 *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \quad x \in A, \tag{3.24}$$

називається функціональним.

Для ряду (3.28) можна досліджувати

- поточкову збіжність на множині A (абсолютну і умовну для знакозмінного ряду);
- рівномірну збіжність на множині $B \subset A$.

Уточнимо останнє поняття.

Означення 3.5 *Ряд (3.28) називається рівномірно збіжним на множині B до суми $s(x)$, $x \in B$, якщо*

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \underset{x \in B}{\rightrightarrows} s(x), \ n \to \infty.$$

Останню умову зручно перевіряти використовуючи еквівалентне твердження в термінах залишку ряду на множині збіжності:
ряд (3.28) рівномірно збігається на множині $B \iff$

$$d_n = \sup_{x \in B} \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k(x) \right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Необхідною умовою рівномірної збіжності ряду (3.28) на множині B є збіжність

$$\sup_{x \in B} |a_n(x)| \to 0, \ n \to \infty.$$

2. Умови рівномірної збіжності ряду

Теорема 3.29 ***(Критерій Коші)*** *Ряд (3.28) збігається рівномірно на множині $A \iff$*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall m \geq 0 \ \forall x \in A : \ \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Теорема 3.30 ***(Ознака Вейєрштрасса)*** *Нехай функції $a_n : \ A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, і числова послідовність $\{b_n : \ n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ задовольняють умови:*

1. *$\forall n \geq 1 \ \forall x \in A : \ |a_n(x)| \leq b_n$;*

2. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *збігається.*

Тоді ряд (3.28) збігається абсолютно у кожній точці множини A *і збігається рівномірно на цій множині.*

◀ Доведення випливає з критеріїв Коші збіжності числових рядів і рівномірної збіжності функціональних рядів та з нерівностей

$$\forall\, n \geq n_0 \;\forall\, m \geq 0 \;\forall\, x \in A: \;\left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k(x)\right| \leq \sum_{k=n}^{n+m} |a_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{n+m} b_k.$$

▶

Теорема 3.31 ***(Ознака Лейбніца)*** *Нехай функції* $a_n: \; A \to \mathbb{R},\; n \geq 1,$ *задовольняють умови:*

1. $\forall\, x \in A \;\forall\, n \geq 1: \; a_n(x) \geq a_{n+1}(x) \geq 0;$

2. $a_n(x) \underset{x \in A}{\rightrightarrows} 0,\; n \to \infty.$

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n(x)$ *збігається рівномірно на множині* A.

◀ За оцінкою в ознаці Лейбніца для числових рядів

$$\forall\, n \geq 1 \;\forall\, x \in A: \;\left|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k(x)\right| \leq a_n(x).$$

Твердження теореми тепер випливає з умови *2.* ▶

Теорема 3.32 ***(Ознака Діріхле)*** *Нехай функції* $a_n: \; A \to \mathbb{R},\; b_n: \; A \to \mathbb{R},$ $n \geq 1,$ *задовольняють умови:*

1. $\forall\, x \in A: \; \{a_n(x): \; n \geq 1\}$ *– монотонна послідовність;*

2. $a_n(x) \underset{x \in A}{\rightrightarrows} 0,\; n \to \infty;$

3. $\exists\, C > 0 \;\forall\, N \geq 1 \;\forall\, x \in A: \; \left|\sum\limits_{n=1}^{N} b_n(x)\right| \leq C.$

Тоді ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x) \tag{3.25}$$

збігається рівномірно на множині A.

◀ Для $x \in A$ означимо суми

$$\sigma(n+1,k,x) := \begin{cases} 0, & k = n, \\ b_{n+1}(x) + b_{n+2}(x) + \ldots + b_k(x), & k = n+1, n+2, \ldots, n+p. \end{cases}$$

За умовою 3)

$$\forall\, n \geq 1\; \forall\, k \geq n+1 : \; |\sigma(n+1,k,x)| \leq 2C.$$

За умовою 1) при кожному фіксованому x різниці $a_k(x) - a_{k+1}(x)$, $k \geq 1$, мають один й той самий знак. Тому

$$\begin{aligned}
&\forall\, n \geq 1\; \forall\, p \geq 1\; \forall\, x \in A : \; \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\, b_k(x)\right| = \\
&\quad = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) \cdot \sigma(n+1,k,x) + a_{n+p}(x)\sigma(n+1,n+p,x)\right| \leq \\
&\quad \leq 2C \cdot \left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k(x) - a_{k+1}(x)| + |a_{n+p}(x)|\right) = \\
&\quad = 2C \cdot \left(\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x))\right| + |a_{n+p}(x)|\right) = \\
&\quad = 2C \cdot (|a_{n+1}(x) - a_{n+p}(x)| + |a_{n+p}(x)|) \leq \\
&\quad \leq 2C \cdot (|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|)\,.
\end{aligned}$$

Ураховуючи умову 2), звідси отримуємо фундаментальність в сенсі рівномірної збіжності, а отже й рівномірну збіжність частинних сум ряду (3.25). ▶

Зауважимо, що ознака Лейбніца є частинним випадком ознаки Діріхле з $b_n = (-1)^{n+1}$, $n \geq 1$.

Приклад. Ряд Діріхле.

Розглянемо функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}, \; x \in \mathbb{R}; \; p \in \mathbb{R}. \tag{3.26}$$

Очевидно, цей ряд збігається при $x \in \{k\pi|\ k \in \mathbb{Z}\}$ і будь-якому $p \in \mathbb{R}$. При $x \notin \{k\pi|\ k \in \mathbb{Z}\}$ послідовність $\{\sin nx|\ n \in \mathbb{N}\}$ не збігається до 0, тому $\frac{\sin nx}{n^p} \to 0$, $n \to \infty$, лише при $p > 0$. При $p > 1$

$$\forall\, n \geq 1\; \forall\, x \in \mathbb{R} : \; \left|\frac{\sin nx}{n^p}\right| \leq n^{-p},$$

тому за ознакою Веєрштрасса ряд Діріхле збігається абсолютно і рівномірно на $\mathbb{R}$. При $0 < p \leq 1$, $x \notin \{k\pi|\ k \in \mathbb{Z}\}$ для доведення поточкової збіжності можна скористатися ознакою Діріхле. Покладемо $a_n(x) = n^{-p}$, $b_n(x) = \sin nx$, $n \geq 1$. Умови 1), 2) очевидно, виконані. Виконання умови 3) можна перевірити таким чином

$$\begin{aligned}\forall\, n \geq 1 \;\forall\, x \notin \{2k\pi|\; k \in \mathbb{Z}\} :\; &\left|\sum_{k=1}^{N} \sin kx\right| = \\ =&\frac{1}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\sum_{k=1}^{N} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx\right| = \\ =&\frac{1}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\sum_{k=1}^{N}\left(\cos\frac{(2k-1)x}{2} - \cos\frac{(2k+1)x}{2}\right)\right| = \\ =&\frac{\left|\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2N+1)x}{2}\right|}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|} \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Для довільного $\delta \in (0;\, \pi)$

$$\forall\, x \in [\delta;\, 2\pi - \delta] :\; \frac{1}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|} < \frac{1}{2\sin\delta/2}.$$

Тому з урахуванням нерівності (3.27), ознаки Діріхле рівномірної збіжності ряду і періодичності синуса можна зробити висновок про рівномірну збіжність ряду Діріхле на об'єднанні проміжків

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [2n\pi + \delta;\, 2(n+1)\pi - \delta].$$

Покажемо тепер, що ряд Діріхле не збігається рівномірно на $[0;\, \delta]$. Розглянемо послідовність $x_n = \frac{1}{2n} \to 0$, $n \to \infty$. В точках цієї послідовності

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin(kx_k)}{k^p} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin(nx_n)}{k^p} = \sin\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^p} \to +\infty.$$

Непарність і періодичність синуса дозволяє зробити висновок про те, що ряд не збігається рівномірно в жодному околі будь-якої точки з множини $\{2k\pi|\; k \in \mathbb{Z}\}$.

Теорема 3.33 ***(Ознака Абеля)*** *Нехай функції $a_n :\; A \to \mathbb{R}$, $b_n :\; A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, задовольняють умови:*

1. *$\forall\, x \in A :\; \{a_n(x) :\; n \geq 1\}$ – монотонна послідовність;*
2. *$\exists\, C > 0\; \forall\, n \geq 1\; \forall\, x \in A :\; |a_n(x)| \leq C$;*
3. *ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ збігається рівномірно на множині A.*

Тоді ряд (3.25) збігається рівномірно на множині A.

◀ Використаємо позначення з доведення ознаки Діріхле. За умовою 3) і критерієм Коші

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0\; \forall\, n \geq n_0\; \forall\, k \geq n+1\; \forall\, x \in A :\; |\sigma(n+1, k, x)| \leq \varepsilon.$$

За умовою 1) при кожному фіксованому x різниці $a_k(x) - a_{k+1}(x)$, $k \geq 1$, мають один й той самий знак. Тому

$$\forall\, n \geq n_0 \;\forall\, p \geq 1 \;\forall\, x \in A : \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\, b_k(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) \cdot \sigma(n+1, k, x) + a_{n+p}(x)\sigma(n+1, n+p, x) \right| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k(x) - a_{k+1}(x)| \cdot |\sigma(n+1, k, x)| + |a_{n+p}(x)| \cdot |\sigma(n+1, n+p, x)| \right) \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot \left(\left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) \right| + |a_{n+p}(x)| \right) =$$

$$= \varepsilon \cdot \big(|a_{n+1}(x) - a_{n+p(x)}| + |a_{n+p}(x)| \big) \leq \varepsilon \cdot (|a_{n+1}(x)| + |a_{n+p}(x)| + |a_{n+p}(x)|) \leq$$

$$\leq 3\varepsilon C.$$

Звідси отримуємо фундаментальність, а отже й рівномірну збіжність частинних сум ряду (3.25) в рівномірному сенсі. ►

3.7 Властивості сум функціональних рядів

Нехай

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = s(x), \quad x \in A \subset \mathbb{R}. \tag{3.28}$$

Теорема 3.34 (про неперервність суми) *Нехай виконані умови:*

1. *ряд (3.28) збігається рівномірно на множині A;*
2. $\forall\, n \geq 1 :$ a_n *неперервна в точці* $x_0 \in A$.

Тоді сума ряду s неперервна в точці x_0.

Теорема 3.35 (про почленне інтегрування) *Нехай виконані умови:*

1. *ряд (3.28) збігається рівномірно на $[a;\, b]$;*
2. $\forall\, n \geq 1 :$ $a_n \in R([a;\, b])$.

Тоді сума ряду $s \in R([a;\, b])$ і

$$\int_a^b s = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n, \quad \textit{тобто} \quad \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n.$$

Теорема 3.36 (про почленне диференціювання) *Нехай виконані умови:*

1. $\exists\, x_0 \in [a;\, b] :$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ *збігається;*
2. $\forall\, n \geq 1\ \forall\, x \in [a;\, b]\ \exists\, a_n'(x);$ $\quad a_n' \in C([a;\, b]);$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'$ *збігається рівномірно на $[a;\, b]$.*

Тоді ряд (3.28) збігається рівномірно на $[a;\, b]$ до диференційовної суми s і $\forall\, x \in [a;\, b] :$ $\dfrac{ds(x)}{dx} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$, *тобто* $\dfrac{d}{dx} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$.

Доведення цих теорем полягає у застосуванні загальних теорем про властивості границь функціональних послідовностей до частинних сум ряду.

Приклад. Ряд Меркатора
Доведемо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x), \quad x \in (-1;\, 1]. \tag{3.29}$$

Розглянемо геометричний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}t^{n-1} = \frac{1}{1+t}, \quad t \in (-1;\, 1). \tag{3.30}$$

За ознакою Вейєрштрасса цей ряд збігається рівномірно на будь-якому відрізку $[-x;\, x] \subset (-1;\, 1)$. Члени цього ряду є неперервними (отже й інтегровними) функціями, тому за теоремою 3.35 ряд (3.30) можна проінтегрувати почленно і

$$\forall x \in (-1;\, 1): \int\limits_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}t^{n-1}\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int\limits_0^x t^{n-1}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n.$$

З іншого боку,

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x).$$

Таким чином, рівність (3.29) доведена для всіх $x \in (-1;\, 1)$. Ряд (3.29) рівномірно збігається на $[0; 1]$ за ознакою Лейбніца. Тому його сума неперервна на цьому проміжку і

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = \lim_{x\to 1-}\ln(1+x) = \ln 2.$$

3.8 Збіжність степеневих рядів

Нехай $\{a_n : \ n \geq 0\}$ – деяка числова послідовність, x_0 – фіксоване число.

Означення 3.6 *Ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad , x \in \mathbb{R}, \tag{3.31}$$

називається <u>степеневим</u>.

Лінійною заміною аргумента ряд (3.31) зводиться до вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.32}$$

тобто до випадку $x_0 = 0$, який надалі і буде розглядатися. Степеневий ряд визначається своїми коефіцієнтами, якими описуються властивості ряду. Частинні суми степеневого ряду – многочлени.

Означимо

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad r = \begin{cases} 0, & \rho = +\infty, \\ 1/\rho, & \rho \in (0; +\infty), \\ +\infty, & \rho = 0. \end{cases} \tag{3.33}$$

Теорема 3.37 (Коші – Адамар) *Нехай величина r означена формулою (3.33).*

1. *при $r = 0$ ряд (3.34) збігається лише при $x = 0$;*

2. *при $r \in (0; +\infty)$ ряд (3.34) збігається абсолютно при $|x| < r$ і розбігається при $|x| > r$;*

3. *при $r = +\infty$ ряд (3.34) збігається абсолютно при будь-якому $x \in \mathbb{R}$.*

◄

1. У цьому випадку $\rho = +\infty$. Тому для довільного $x \neq 0$ для деякої підпослідовності $\{n(k) : \ k \geq 1\}$

$$\sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|}\, |x| \geq 1 \iff |a_{n(k)}|\, |x|^{n(k)} \geq 1.$$

   Не виконується необхідна умова збіжності ряду (3.34).

2. Нехай $0 < |x| < r = 1/\rho$. Тоді $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$. Ряд (3.34) збігається за ознакою Коші. Нехай $|x| > r = 1/\rho$. Тоді $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$ і не виконується необхідна умова збіжності ряду (3.34).

3. У цьому випадку $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ і для довільного $x \neq 0$ знайдеться таке n_0, що
$$\forall\, n \geq n_0: \ \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x|}.$$
Тоді
$$\forall\, n \geq n_0: \ \sqrt[n]{|a_n x^n|} < \frac{1}{2} \iff |a_n x^n| < \frac{1}{2^n}.$$
Тепер ряд (3.34) збігається за мажорантною ознакою порівняння з геометричним рядом.

▶

З огляду на геометричну інтерпретацію теореми Коші – Адамара величина r називається радіусом збіжності степеневого ряду.

Зауваження 1. Нехай існує границя
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \in [0, +\infty],$$
тоді
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

Приклад 1. Нижче наведені ряди мають один і той самий радіус збіжності $r = 1$:
$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} x^n; \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$
Однак, ряд (a) розбігається в обох кінцях проміжку збіжності ± 1; ряд (b) розбігається в точці 1 і збігається умовно в точці -1; ряд (c) збігається абсолютно в обох кінцях проміжку збіжності ± 1.

Рівномірна збіжність степеневого ряду

Теорема 3.38 *Нехай ряд (3.34) має радіус збіжності $r > 0$ і множину збіжності A. Тоді цей ряд збігається рівномірно на кожному обмеженому відрізку $[\alpha; \beta] \subset A$.*

◀ Нехай $[\alpha; \beta] \subset (-r; r)$. За теоремою Коші – Адамара тоді ряд збігається абсолютно на відрізку $[-\gamma; \gamma] \subset (-r; r)$, $[\alpha; \beta] \subset [-\gamma; \gamma]$. Оскільки
$$\forall\, x \in [\alpha; \beta]: \ |a_n x^n| \leq |a_n \gamma^n|,$$
за ознакою Вейєрштрасса ряд (3.34) збігається рівномірно на $[\alpha; \beta]$. Нехай $\beta = r \in A$. Оскільки
$$a_n x^n = (a_n r^n) \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^n, \ x \in [0; r], \ n \geq 1,$$
ряд (3.34) збігається рівномірно на $[0; r]$ за ознакою Абеля. Нехай $\alpha = -r \in A$. Оскільки
$$a_n x^n = (a_n (-r)^n) \cdot \left(\frac{x}{-r}\right)^n, \ x \in [-r; 0], \ n \geq 1,$$
ряд (3.34) збігається рівномірно на $[-r; 0]$ за ознакою Абеля. ▶

3.9 Властивості степеневих рядів

Нехай степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a(x) \tag{3.34}$$

має радіус збіжності $r > 0$ і множину збіжності A.

1. Властивості суми степеневого ряду

Теорема 3.39 $a \in C(A)$.

◀ Ряд (3.34) збігається рівномірно на кожному відрізку $[\alpha;\, \beta] \subset A$ і має неперервні члени. За теоремою про неперервність суми функціонального ряду $a \in C([\alpha;\, \beta])$. ▶

Теорема 3.40

$$\forall\, x \in A: \;\; a \in R([0;\, x]); \quad \int\limits_0^x a(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \tag{3.35}$$

◀ Твердження випливає з теореми про почленне інтегрування функціонального ряду. ▶

Зауваження. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{n+1}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, тому множина збіжності ряду (3.35) містить в собі множину A.

Наслідок. Степеневий ряд можна скільки завгодно разів почленно інтегрувати по будь-якому відрізку з множини збіжності.

Теорема 3.41

$$\forall\, x \in (-r;\, r): \;\; \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{3.36}$$

◀ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, тому ряд у правій частині (3.36) теж має радіус збіжності r. Твердження теореми тепер випливає з теорем про рівномірну збіжність степеневого ряду і про почленне диференціювання функціонального ряду. ▶

Наслідок. Степеневий ряд можна скільки завгодно разів почленно диференціювати у будь-якій точці інтервалу збіжності.

Теорема 3.42 *Нехай $r > 0$. Тоді*

$$\forall\, n \geq 0: \;\; a_n = \frac{1}{n!} a^{(n)}(0). \tag{3.37}$$

◀ Спочатку помітимо, що

$$a(0) = a_0.$$

Далі за теоремою про почленне диференціювання степеневого ряду

$$a'(0) = 1 \cdot a_1, \quad a''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2, \ \ldots, \ a^{(n)}(0) = n! \cdot a_n, \ldots$$

▶

2. Ряд Тейлора

Означення 3.7 *Нехай для $x_0 \in \mathbb{R}$ і $0 < r \leq +\infty$ функція $f \in C^{(\infty)}((x_0 - r;\, x_0 + r))$. Степеневий ряд*

$$f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \ldots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - r;\, x_0 + r), \tag{3.38}$$

називається <u>рядом Тейлора</u> (при $x_0 = 0$ <u>рядом Тейлора – Маклорена</u>) в околі точки x_0.

Зауваження. Ряд Тейлора для многочлена збігається із самим многочленом, записаним за степенями $(x - x_0)^n$. Збіжний на проміжку степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми у відповідній точці за теоремою 3.42. Однак, наприклад, функція

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

не дорівнює тотожно нулю, але має в точці 0 похідні будь-якого порядку рівні 0. Ця функція не дорівнює сумі свого ряду Тейлора – Маклорена в околі точки 0.

Достатні умови збіжності ряду Тейлора до функції наведені у наступній теоремі.

Теорема 3.43 *Нехай для деякого $x_0 \in \mathbb{R}$ і $0 < r \leq +\infty$ функція f задовольняє умови:*

1. $f \in C^{(\infty)}((x_0 - r;\, x_0 + r))$;
2. $\exists\, C > 0\ \forall\, n \geq 1\ \forall\, x \in (x_0 - r;\, x_0 + r):\ |f^{(n)}(x)| \leq C^n$.

Тоді

$$\forall\, x \in (x_0 - r;\, x_0 + r):\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

де ряд збігається рівномірно на будь-якому обмеженому проміжку з множини $(x_0 - r;\, x_0 + r)$.

◀ Нехай $0 < r < +\infty$. Для $x \in (x_0 - r;\ x_0 + r)$ з умови 2 випливає нерівність

$$\left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(x - x_0)^n\right| \le \frac{C^n r^n}{n!}.$$

Тому ряд Тейлора (3.38) для функції fзбігається рівномірно на $(x_0 - r;\ x_0 + r)$ за ознакою Вейєрштрасса. Частинні суми ряду Тейлора є многочленами Тейлора. Залишкові члени формули Тейлора у формі Лагранжа

$$\rho_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - r;\ x_0 + r), \quad \theta = \theta(x) \in [0;\ 1],$$

теж задовольняють нерівність

$$|\rho_n(x)| \le \frac{C^n r^n}{n!}$$

і тому

$$\sup_{x \in (x_0 - r;\ x_0 + r)} |\rho_n(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Звідси випливає твердження теореми. ▶

У наступних прикладах розглядаються розвинення деяких функцій в ряд Тейлора – Маклорена.

Наступні три розклади випливають безпосередньо з теореми 3.43.

Приклад 1. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$

Приклад 2. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Приклад 3. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Крім того, використовуючи властивості степеневих рядів, побудуємо ще два розвинення.

Приклад 4. $\ln(1 + x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad x \in (-1;\ 1].$

За Теоремою 3.42 ряд Меркатора є рядом Тейлора – Маклорена.

Приклад 5. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}:\ (1 + x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n, \quad x \in (-1;\ 1),$

де $C_\alpha^0 := 1$, $C_\alpha^n := \dfrac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!}$, $n \ge 1$.

◀ Степеневий ряд в правій частині рівності має радіус збіжності

$$r = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{C_\alpha^n}{C_\alpha^{n+1}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{n+1}{\alpha - n}\right| = 1.$$

Означимо функцію
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\alpha}^{n} x^{n}, \quad x \in (-1;\, 1).$$
За теоремою про почленне диференціювання степеневого ряду
$$(1+x)f'(x) = (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} nC_{\alpha}^{n} x^{n-1} = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1)C_{\alpha}^{n+1} + nC_{\alpha}^{n}\right) x^{n} =$$
$$= \alpha \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{\alpha}^{n}\right) x^{n} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_{\alpha}^{n} x^{n}, \quad x \in (-1;\, 1).$$
Для диференційовної функції f отримали функціональне рівняння
$$(1+x)f'(x) - \alpha f(x) = 0,\ x \in (-1;\, 1).$$
Домноживши це рівняння на $(1+x)^{-\alpha-1} \neq 0$, отримаємо
$$\left((1+x)^{-\alpha} f(x)\right)' = 0.$$
За наслідком з формули кінцевих приростів для деякого числа C
$$f(x) = C(1+x)^{\alpha},\ x \in (-1;\, 1).$$
Лишилося врахувати, що $f(0) = 1$ і встановити, що $C = 1$. ▶

3.10 Формула Стірлінга

Теорема 3.44 (Формула Стірлінга)

$$\forall\, n \geq 1\ \exists\, \theta(n) \in (0;\, 1):\ n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\theta(n)}{12n}}.$$

◀ **Зауваження.** $a_n = n!,\ n \geq 1 \iff a_1 = 1,\ \forall\, n \geq 1:\ a_{n+1} = (n+1)a_n.$

За побудовою числа e правильні нерівності

$$\forall\, k \geq 1:\ \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

Перемножимо такі нерівності при $k = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} < e^{n-1} < \frac{2^2}{1^2} \cdot \frac{3^3}{2^3} \cdot \ldots \cdot \frac{n^n}{(n-1)^n} = \frac{n^n}{(n-1)!},$$

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}},\ n \geq 1.$$

Тому видається слушною апроксимація факторіала функцією

$$n! = f(n) := Cn^{n+1/2} e^{-n+1} e^{\mu(n)},\ n \geq 1,$$

з деякими $C \in \mathbb{R}$ і послідовністю μ. Функцію μ можна побудувати наступними міркуваннями. З рекурентного співвідношення для факторіала випливає, що f має задовольняти рівність

$$f(n+1) = (n+1)f(n),\ \text{тобто}\ (n+1)^{n+3/2} e^{-n} e^{\mu(n+1)} = (n+1)n^{n+1/2} e^{-n+1} e^{\mu(n)} \iff$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2} e^{-1} e^{\mu(n+1)-\mu(n)} = 1 \iff$$

$$\iff \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n+1}{n} - 1 = \mu(n) - \mu(n+1),\ n \geq 1.$$

Скористаємося розкладом логарифма в ряд Тейлора – Маклорена

$$\begin{aligned}
\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n+1}{n} &= \frac{1}{\frac{2}{2n+1}} \ln \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \\
&= \frac{1}{\frac{2}{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{1}{(2n+1)^k} - \frac{(-1)^k}{(2n+1)^k}\right) = \\
&= \frac{2}{\frac{2}{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \frac{1}{(2n+1)^{2k-1}} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2n+1)^{2k}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2n+1)^{2k}}.
\end{aligned}$$

Звідси

$$g(n) := \mu(n) - \mu(n+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2n+1)^{2k}},\ n \geq 1.$$

Очевидно, що

$$0 < g(n) < \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2k}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2-1} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),\ n \geq 1.$$

Тому функцію μ можна означити як суму збіжного ряду

$$\mu(n) := \sum_{k=0}^{\infty} g(n+k),$$

причому

$$0 < \mu(n) < g(n) < \frac{1}{12n},\ n \geq 1. \tag{3.39}$$

Константу $C \in \mathbb{R}$ тепер знайдемо з формули Валліса

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$$

Для цього перепишемо подвійні факторіали в термінах звичайних

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{(2n)!!^4}{(2n)!^2} = \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!^2}.$$

Тоді

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2^{4n}\cdot C^4 n^{4n+2}e^{-4n+4}e^{4\mu(n)}}{C^2(2n)^{4n+1}e^{-4n+2}e^{2\mu(2n)}} = C^2 2^{-2}e^2, \quad C = \frac{\sqrt{2\pi}}{e}.$$

Остаточно знаходимо

$$n! = f(n) = \frac{\sqrt{2\pi}}{e}n^{n+1/2}e^{-n+1}e^{\mu(n)} = \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}e^{\mu(n)},\ n \geq 1,$$

де з урахуванням нерівності (3.39) для деякого $\theta(n) \in (0;\, 1)$ можна записати

$$\mu(n) = \frac{\theta(n)}{12n}.$$

▶

Розділ 4

Функції обмеженої варіації

4.1 Монотонні функції

Нехай $[a;\, b] \subset \mathbb{R}$, функція $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ монотонно не спадає, тобто

$$\forall \{x_1, x_2\} \subset [a;\, b],\ x_1 \le x_2 :\ f(x_1) \le f(x_2).$$

Для зручності покладемо за означенням $f(a-) := f(a)$, $f(b+) := f(b)$. За теоремою про існування границі монотонна обмежена функція f має обидві одностороні границі у кожній точці відрізка $[a;\, b]$. Розриви монотонної функції можуть бути лише першого роду – стрибки.

В подальшому, якщо не сказано інше, під монотонними розуміються неспадні функції, задані на відрізку.

Лема 4.1 *Нехай функція $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ монотонно не спадає і для деякого $n \in \mathbb{N}$ точки $\{a \le z_1 < z_2 < \ldots < z_n \le b\} \subset [a;\, b]$. Тоді*

$$\big(f(z_1+) - f(z_1-)\big) + \big(f(z_2+) - f(z_2-)\big) + \ldots + \big(f(z_n+) - f(z_n-)\big) \le f(b) - f(a).$$

◀ Унаслідок монотонності функції f правильні нерівності

$$f(z_1+) - f(z_1-) \le f\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) - f(a), \quad f(z_n+) - f(z_n-) \le f(b) - f\left(\frac{z_{n-1} + z_n}{2}\right),$$

$$f(z_k+) - f(z_k-) \le f\left(\frac{z_k + z_{k+1}}{2}\right) - f\left(\frac{z_{k-1} + z_k}{2}\right), \quad k = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Твердження леми отримаємо додавши ці нерівності почленно. ▶

Лема 4.2 *Множина точок розриву монотонної функції не більш ніж злічена.*

◀ Для $k \in \mathbb{N}$ позначимо через A_k множину

$$A_k := \left\{x \middle|\ f(x+) - f(x-) \ge k^{-1}\right\}.$$

За лемою 1 вона містить не більше $k\big(f(b) - f(a)\big)$ точок. Тому множина усіх точок розриву функції f

$$A = \bigcup_{k \ge 1} A_k$$

щонайбільше злічена. ▶

Лема 4.3 *Нехай $\{x_n|\ n \geq 1\}$ – множина усіх точок розриву монотонної функції f на відрізку $[a;b]$. Тоді*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(f(x_n+) - f(x_n-)\big) \leq f(b) - f(a). \tag{4.1}$$

Множина точок розриву неперервної функції порожня. У цьому випадку ліва частина нерівності (4.1) дорівнює 0. Якщо нерівність (4.1) виконується зі знаком рівності, то функція f називається функцією стрибків.

Приклад 1. Нехай

$$\{r_n :\ n \geq 1\} = \mathbb{Q} \cap [0;\ 1].$$

Функція $f : [0;\ 1] \to [0;\ 1]$, означена рівностями

$$f(0) := 0, \qquad f(x) := \sum_{n:\, r_n < x} 2^{-n},\ x \in (0;\ 1],$$

є монотонно зростаючою функцією стрибків з розривами в усіх раціональних точках.

Теорема 4.1 (про розклад) *Для монотонно неспадної функції $f : [a;\ b] \to \mathbb{R}$ з множиною точок розриву A існують такі монотонно неспадні функції g і h, що:*

(i) $f(x) = g(x) + h(x),\ x \in [a;\ b]$;

(ii) *g – функція стрибків, що має розриви у тих самих точках і тієї ж самої величини, що й функція f;*

(iii) $h \in C([a;\ b])$.

◄ Означимо функції g і h:

$$g(a) := 0; \qquad g(x) := \sum_{n:\ x_n \in A,\ x_n < x} \big((f(x_n+) - f(x_n-)\big) + f(x) - f(x-);$$
$$h(x) := f(x) - g(x),\ x \in (a;\ b].$$

Для довільних $\{x',\ x''\} \subset [a;\ b]$, $x' < x''$ унаслідок монотонності f і леми 3 маємо нерівності

$$\begin{aligned} &0 \leq g(x'') - g(x') = \\ &= f(x'+) - f(x') + \sum_{n:\ x_n \in A,\ x' < x_n < x''} \big((f(x_n+) - f(x_n-)\big) + f(x'') - f(x''-) \leq \\ &\leq f(x'') - f(x'), \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} &h(x'') - h(x') = \\ &= \big(f(x'') - g(x'')\big) - \big(f(x') - g(x')\big) = \big(f(x'') - f(x')\big) - \big(g(x'') - g(x')\big) \geq 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Тому функції g і h монотонно неспадні. З (4.2) випливає нерівність

$$f(x'') - f(x') \geq g(x'') - g(x') \geq f(x'+) - f(x'),$$

з якої при $x'' \to x'+$ одержуємо рівність

$$g(x'+) - g(x') = f(x'+) - f(x').$$

Аналогічними міркуваннями доводиться і рівність

$$g(x') - g(x'-) = f(x') - f(x'-).$$

Тому

$$g(x'+) - g(x'-) = f(x'+) - f(x'-).$$

Отже, у функцій g, f точки стрибків і величини стрибків у цих точках збігаються. Це забезпечує неперервність функції h. ►

4.2 Функції обмеженої варіації

Для функції $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ і довільного розбиття $\lambda = \{a = x_0 < x_1 < \ldots <$ $< x_n = b\}$ розглянемо суму обсолютних величин приростів

$$\sigma(f,\, \lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1} - f(x_k)| \geq 0.$$

Означення 4.1 *<u>Варіацією</u> функції f на відрізку $[a;\, b]$ називаеться величина*

$$V(f,\, [a;\, b]) := \sup_{\lambda=\lambda([a;\, b])} \sigma(f,\, \lambda) \in [0;\, +\infty) \cup \{+\infty\}.$$

Функція f називаеться <u>функцією обмеженої варіації</u> на відрізку $[a;\, b]$, якщо $V(f,\, [a;\, b]) < +\infty$. У випадку $V(f,\, [a;\, b]) = +\infty$ говорять, що функція має <u>необмежену варіацію</u>.

Множина усіх функцій обмеженої варіації на відрізку $[a;\, b]$ позначається символом $BV([a;\, b])$.
Приклад 1. Нехай функція f монотонно неспадна на $[a;\, b]$. Тоді $f \in BV([a;\, b])$ і $V(f,\, [a;\, b]) = f(b) - f(a)$.
Приклад 2. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x},\ x \in [0;\, 1], \\ 0,\ x = 0. \end{cases}$$

Для розбиття $\lambda_n = \{0 < \frac{2}{2n+1} < \ldots < \frac{2}{5} < \frac{2}{3} < 1\}$

$$\sigma(f,\, \lambda_n) = \frac{4}{2n+1} + \frac{4}{2n-1} + \frac{4}{2n-3} + \ldots + \frac{4}{3} \to +\infty,\, n \to \infty.$$

Варто зауважити, що в цьому прикладі $f \in C([a;\, b]) \setminus BV([a;\, b])$.

1. Властивості варіації і функцій обмеженої варіації

1°. $V(f,\, [a;\, b]) \geq 0$.
2°. $|f(b) - f(a)| \leq V(f,\, [a;\, b])$.
◄ Досить розглянути розбиття, що складається з кінців відрізка. ►
3°. Нехай $f \in BV([a;\, b])$. Тоді функція f обмежена.
◄ Доведення випливає з ланцюжка нерівностей

$$\begin{aligned} \forall\, x \in [a;\, b] : |f(x)| = \big| f(a) + \big(f(x) - f(a)\big)\big| \leq \\ \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq |f(a)| + V(f,\, [a;\, b]). \end{aligned}$$

►

4°. Нехай $\{f,\, g\} \subset BV([a;\, b])$. Тоді:

(i) $\forall\, c \in \mathbb{R} :\ c \cdot f \in BV([a;\, b])$;

(ii) $\{f + g,\ f \cdot g\} \subset BV([a;\, b])$;

(iii) якщо додатково для деякого $\alpha > 0\ \forall\, x \in [a;\, b] :\ |g(x)| \geq \alpha$, то $\dfrac{1}{g} \in BV([a;\, b])$.

◀ Для доведення твердження iii) досить зауважити нерівність

$$\forall \{x',\, x''\} \subset [a;\, b]:\ \left|\frac{1}{g(x')} - \frac{1}{g(x'')}\right| \le \frac{\big|g(x') - g(x'')\big|}{\alpha^2}.$$

▶

5°. (Адитивність варіації). Нехай $f \in BV([a;\, b])$. Тоді для довільного $c \in (a;\, b)$:

$$f \in BV([a;\, c]),\ f \in BV([c;\, b]) \ \text{ і } \ V(f,\, [a;\, b]) = V(f,\, [a;\, c]) + V(f,\, [c;\, b]).$$

Навпаки. Нехай $f \in BV([a;\, c])$, $f \in BV([c;\, b])$. Тоді $f \in BV([a;\, b])$.
◀ Для довільних розбиття $\lambda_1 = \lambda_1([a;\, c])$ і розбиття $\lambda_2 = \lambda_2([c;\, b])$ $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$ є розбиттям відрізка $[a;\, b]$, для якого

$$\sigma(f,\, \lambda_1) + \sigma(f,\, \lambda_2) = \sigma(f,\, \lambda) \le V(f,\, [a;\, b]).$$

Звідси випливає, що

$$V(f,\, [a;\, c]) + V(f,\, [c;\, b]) \le V(f,\, [a;\, b]).$$

Навпаки, для довільного розбиття $\lambda([a;\, b])$

$$\sigma(f,\, \lambda) \le \sigma\Big(f,\, \big(\lambda \cup \{c\}\big)\Big) = \sigma\Big(f,\, \big(\lambda \cup \{c\}\big) \cap [a;\, c]\Big) + \sigma\Big(f,\, \big(\lambda \cup \{c\}\big) \cap [c;\, b]\Big) \le$$
$$\le V(f,\, [a;\, c]) + V(f,\, [c;\, b]).$$

Звідси випливає, що

$$V(f,\, [a;\, b]) \le V(f,\, [a;\, c]) + V(f,\, [c;\, b]).$$

▶

6°.

Теорема 4.2 (Жордан)

$$f \in BV([a;\, b]) \iff \textit{існують монотонно неспадні функції } g,\, h : [a;\, b] \to \mathbb{R},$$
$$\textit{для яких } \ f(x) = g(x) - h(x),\ x \in [a;\, b].$$

◀ Достатність випливає з обмеженості варіації монотонних функцій і з лінійності класу функцій обмеженої варіації.

Означимо функції

$$g(a) := 0,\ g(x) := V(f,\, [a;\, x]),\ x \in (a;\, b], \quad h(x) = g(x) - f(x),\ x \in [a;\, b].$$

Унаслідок адитивності і невід'ємності варіації функція g монотонно не спадає. З властивості варіації 2° для довільних $a \le x_1 < x_2 \le b$ випливають нерівності

$$g(x_1) \le g(x_1) + V(f,\, [x_1;\, x_2]) = g(x_2),$$

$$h(x_2) - h(x_1) = \big(g(x_2) - f(x_2)\big) - \big(g(x_1) - f(x_1)\big) =$$
$$= V(f,\, [x_1;\, x_2]) - (f(x_2) - f(x_1)) \ge 0.$$

▶

Зауваження 1. Розклад у теоремі Жордана не єдиний.
Зауваження 2. Нехай функція $f \in BV([a;\, b])$ неперервна в точці $x_0 \in [a;\, b]$. Тоді функція

$$g(x) := V(f,\, [a;\, x])$$

також неперервна в точці x_0.
◀ Міркуємо від супротивного. Нехай монотонна функція g має стрибок зліва в точці $y \in (a;\, b]$ величини $g(y) - g(y-) > \varepsilon > 0$. Тоді

$$\forall\, z \in [a;\, y): \ V(f,\, [z;\, y]) > \varepsilon.$$

Візьмемо таку довільну точку $z_1 \in [a;\, y)$. За побудовою варіації існує розбиття $\lambda = \{z_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = y\}$, для якого $\sigma(f,\, \lambda) > \varepsilon$. Унаслідок неперервності функції f існує така точка $z_2 \in (x_{n-1};\, y)$, що для розбиття $\lambda' = \{z_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = z_2\}$ варіація

$$V(f,\, [z_1;\, z_2]) \geq \sigma(f,\, \lambda') > \varepsilon.$$

Повторимо ці міркування для проміжка $[z_2;\, y)$ і побудуємо точку $z_3 \in (z_2;\, y)$, для якої $V(f,\, [z_2;\, z_3]) > \varepsilon$ і т. д. В результаті для довільного $N \in \mathbb{N}$ отримаємо точки

$$a \leq z_1 < z_2 < \ldots < z_N < y,$$

для яких

$$V(f, [z_1; y]) = V(f,\, [z_1; z_2]) + V(f, [z_2; z_3]) + \ldots + V(f, [z_{N-1}; z_N]) + V(f, [z_N; y]) > N\varepsilon,$$

що неможливо для функції обмеженої варіації.

Так само доводиться неперервність функції f справа. ▶

2. Спрямлювані криві

Нехай $\{\varphi_1,\, \varphi_2,\, \varphi_3\} \in C([a;\, b])$,

$$\Gamma = \left\{ \big(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t),\, \varphi_3(t)\big) |\ t \in [a; b] \right\} -$$

неперервна крива в $\mathbb{R}^3$. Розбиттю $\lambda([a;\, b]) = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$ відповідає розбиття кривої в об'єднання дуг

$$\Big(\big(x_1(t_k),\, x_2(t_k),\, x_3(t_k)\big),\ \big(x_1(t_{k+1}),\, x_2(t_{k+1}),\, x_3(t_{k+1})\big) \Big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Утворимо ламану Γ_λ, сполучивши послідовно кінці цих дуг прямолінійними відрізками. За теоремою Піфагора довжина цієї ламаної дорівнює

$$l(\Gamma_\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\big(x_1(t_{k+1}) - \big(x_1(t_k)\big)^2 + \big(x_2(t_{k+1}) - \big(x_2(t_k)\big)^2 + \big(x_3(t_{k+1}) - \big(x_3(t_k)\big)^2}.$$

Крива Γ називається <u>спрямлюваною</u>, якщо

$$\sup_{\lambda = \lambda([a;\, b])} l(\Gamma_\lambda) < +\infty.$$

<u>Довжиною</u> спрямлюваної кривої називається число

$$l(\Gamma) := \sup_{\lambda = \lambda([a;\, b])} l(\Gamma_\lambda).$$

Теорема 4.3 *Неперервна крива спрямлювана тоді й лише тоді, коли*

$$\{\varphi_1,\, \varphi_2,\, \varphi_3\} \subset BV([a;\, b]).$$

◀ Доведення випливає з нерівності

$$\forall\, \lambda = \lambda\big([a;\, b]\big) : \ \max_{j=1,2,3} \sigma(\varphi_j,\, \lambda) \le l(\Gamma_\lambda) \le \sum_{j=1}^{3} \sigma(\varphi_j,\, \lambda).$$

▶

4.3 Означення інтеграла Рімана - Стілтьєса

Означення інтеграла Рімана – Стілтьєса в цілому повторює побудову розглянутого раніше інтеграла Рімана.

Нехай функція $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ обмежена, функція $\alpha : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ монотонно не спадає. Для довільного розбиття $\lambda = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ нижню і верхню суми Дарбу – Стілтьєса для функції f відносно функції α означимо відповідно рівностями

$$L(f,\, \alpha,\, \lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{[x_k;\, x_{k+1}]} f \cdot \big(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)\big),$$
$$U(f,\, \alpha,\, \lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{[x_k;\, x_{k+1}]} f \cdot \big(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)\big).$$

Для відмічених точок $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}],\ k = 0, \ldots, n-1$, інтегральною сумою Дарбу – Стілтьєса для функції f відносно функції α називається число

$$S\big(f,\, \alpha,\, \lambda,\, \{\xi_k\}\big) := \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \big(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)\big).$$

1. Властивості сум Дарбу та інтегральних сум

Нехай обмежена функція $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ і неспадна функція $\alpha : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ фіксовані.

1°. $\forall\, \lambda = \lambda[a;\, b]\ \forall\, \{\xi_k\}$:

$$\inf_{[a;\, b]} f \cdot (\alpha(b) - \alpha(a)) \le L(f,\, \alpha,\, \lambda) \le S\big(f,\, \alpha,\, \lambda,\, \{\xi_k\}\big) \le$$
$$\le U(f,\, \alpha,\, \lambda) \le \sup_{[a;\, b]} f \cdot (\alpha(b) - \alpha(a))$$

2°. При додаванні до розбиття нових точок нижня сума Дарбу – Стілтьєса може хіба що збільшитися, верхня – хіба що зменшитися.

3°. Для будь-яких розбиттів λ_1 і λ_2

$$L(f,\, \alpha,\, \lambda_1) \le U(f,\, \alpha,\, \lambda_2).$$

Означення 4.2 *Число* $\underline{\int\limits_a^b} f\, d\alpha := \sup\limits_{\lambda} L(f, \alpha, \lambda)$ *називається нижнім інтегралом Рімана – Стілтьєса від функції* f *відносно функції* α *по відрізку* $[a;\, b]$.

Число $\overline{\int\limits_a^b} f\, d\alpha := \inf\limits_{\lambda} U(f,\, \alpha,\, \lambda)$ *називається верхнім інтегралом Рімана – Стілтьєса від функції* f *відносно функції* α *по відрізку* $[a;\, b]$.

Зауваження. $\underline{\int\limits_a^b} f\, d\alpha \le \overline{\int\limits_a^b} f\, d\alpha.$

Означення 4.3 *Функція f називається <u>інтегровною</u> в сенсі Рімана – Стілтьєса відносно функції α по відрізку $[a;\, b]$, якщо $\underline{\int\limits_a^b} f\, d\alpha = \overline{\int\limits_a^b} f\, d\alpha$. Спільне значення нижнього і верхнього інтегралів називається у цьому випадку <u>інтегралом Рімана – Стілтьєса</u> від функції f відносно функції α по відрізку $[a;\, b]$ і позначається символом*

$$\int\limits_a^b f\, d\alpha.$$

Приклад 1. Будь-яка обмежена функція f інтегровна відносно сталої функції α і $\int\limits_a^b f\, d\alpha = 0$.

Приклад 2. Нехай f – функція Діріхле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0;\, 1], \\ 0, & x \in [0;\, 1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

функція α монотонно не спадає і $\alpha(1) - \alpha(0) > 0$. Тоді

$$\underline{\int\limits_0^1} f\, d\alpha = 0, \qquad \overline{\int\limits_0^1} f\, d\alpha = \alpha(1) - \alpha(0) \neq 0.$$

Тому $f \notin RS(\alpha,\, [0;\, 1])$.

Зауваження. Для функції $\alpha(x) = x$, $x \in [a;\, b]$, інтеграл Рімана – Стілтьєса є інтегралом Рімана.

Означення 4.4 *Число J називається <u>границею інтегральних сум</u> при $|\lambda| \to 0$, якщо*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, \lambda = \lambda([a;\, b]),\ |\lambda| < \delta,\ \forall\, \{\xi_k\} : \ \Big| J - S\big(f,\, \alpha,\, \lambda,\, \{\xi_k\}\big) \Big| < \varepsilon.$$

Теорема 4.4 (Критерій інтегровності)

$$f \in RS(\alpha) \iff \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \lambda = \lambda([a;\, b]) : \ U(f,\, \lambda) - L(f,\, \lambda) < \varepsilon.$$

З існування границі інтегральних сум випливає інтегровність і рівність

$$\int\limits_a^b f\, d\alpha = \lim_{|\lambda| \to 0} S\big(f,\, \alpha,\, \lambda,\, \{\xi_k\}\big).$$

Однак обернене твердження, на відміну від інтеграла Рімана, тут взагалі кажучи, неправильне.

Приклад 3. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1;\, 0), \\ 0, & x \in [0;\, 1]; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;\, 0], \\ 1, & x \in (0;\, 1]. \end{cases}$$

Для будь-якого розбиття λ нижня сума Дарбу – Стілтьєса $L(f,\, \alpha,\, \lambda) = 0$, для розбиття $\lambda = \{-1 < 0 < 1\}$ верхня сума Дарбу – Стілтьєса $U(f,\, \alpha,\, \lambda) = 0$. Тому $f \in RS(\alpha,\, [-1;\, 1])$ і $\int\limits_{-1}^{1} f\, d\alpha = 0$. Однак, при будь якому $n \geq 1$ для розбиття $\lambda_n = \{-1 < -\frac{1}{n} < \frac{1}{n} < 1\}$ і відмічених точок $\xi_0 = -1$, $\xi_1 = -\frac{1}{2n} \in [-\frac{1}{n};\, \frac{1}{n}]$, $\xi_2 = 1$ інтегральна сума $S(f,\, \alpha,\, \lambda_n,\, \{\xi\}) = 1$. Тому границя інтегральних сум не існує.

2. Умови існування інтеграла Рімана – Стілтьєса

Теорема 4.5 *Нехай функція* $f \in C\big([a;\, b]\big)$, *функція* $\alpha : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ *монотонно не спадає. Тоді* $f \in RS(\alpha,\, [a;\, b])$ *і*

$$\int\limits_a^b f\, d\alpha = \lim_{|\lambda| \to 0} S\big(f,\, \alpha,\, \lambda,\, \{\xi_k\}\big).$$

◀ Нехай $\alpha(b) - \alpha(a) > 0$. Неперервна функція f за теоремою Кантора рівномірно неперервна на відрізку $[a;\, b]$, тобто

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, \{x',\, x''\} \subset [a;\, b],\, |x' - x''| < \delta :\ |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}.$$

Тоді

$$U(f,\, \lambda) - L(f,\, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\sup_{[x_k;\, x_{k+1}]} f - \inf_{[x_k;\, x_{k+1}]} f \Big) \cdot \big(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k) \big) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)} \sum_{k=0}^{n-1} \big(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k) \big) = \varepsilon.$$

За критерієм інтегровності $f \in RS(\alpha,\, [a;\, b])$. При цьому для довільного набору відмічених точок

$$\Big| \int\limits_a^b f\, d\alpha - S\big(f,\, \alpha,\, \lambda,\, \{\xi_k\}\big) \Big| \leq U(f,\, \lambda) - L(f,\, \lambda) \leq \varepsilon.$$

▶

Теорема 4.6 *Нехай функція* $f \in R\big([a;\, b]\big)$, *функція* $\alpha : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ *монотонно не спадає на* $[a;\, b]$ *і задовольняє умову Ліпшиця*

$$\exists\, L > 0\, \forall\, \{x',\, x''\} \subset [a;\, b] :\ |\alpha(x') - \alpha(x'')| \leq L \cdot |x' - x''|.$$

Тоді $f \in RS(\alpha,\, [a;\, b])$ *і*

$$\int\limits_a^b f\, d\alpha = \lim_{|\lambda| \to 0} S\big(f,\, \alpha,\, \lambda,\, \{\xi_k\}\big).$$

◄ Для довільного розбиття $\lambda = \lambda([a;\, b]) = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

$$
\begin{aligned}
&U(f, \alpha,\, \lambda) - L(f,\, \alpha,\, \lambda) = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\sup_{[x_k;\, x_{k+1}]} f - \inf_{[x_k;\, x_{k+1}]} f \Big) \cdot \big(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)\big) \le \\
&\quad \le L \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\sup_{[x_k;\, x_{k+1}]} f - \inf_{[x_k;\, x_{k+1}]} f \Big) \cdot \big(x_{k+1} - x_k\big) = \\
&\quad = L \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f,\, [x_k;\, x_{k+1}])\Delta x_k.
\end{aligned}
$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ за критерієм інтегровності за Ріманом виберемо розбиття λ, для якого

$$
L \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f,\, [x_k;\, x_{k+1}])\Delta x_k < \varepsilon.
$$

Тоді за критерієм інтегровності в сенсі Рімана – Стілтьєса $f \in RS(\alpha,\, [a;\, b])$. Існування границі інтегральних сум доводиться як в теоремі 4.5. ►

Теорема 4.7 *Нехай функція* $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ *монотонна, функція* $\alpha : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ *монотонно не спадає і неперервна. Тоді* $f \in RS(\alpha,\, [a;\, b])$ *і*

$$
\int_a^b f\, d\alpha = \lim_{|\lambda| \to 0} S\big(f,\, \alpha,\, \lambda,\, \{\xi_k\}\big).
$$

◄ Припустимо, що функція f монотонно не спадає і $f(b) - f(a) > 0$. За довільним $\varepsilon > 0$ для рівномірно неперервної за теоремою Кантора функції α виберемо таке $\delta > 0$, що

$$
\forall \{x',\, x''\} \subset [a;\, b],\ |x' - x''| < \delta :\ |\alpha(x') - \alpha(x'')| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.
$$

Розглянемо довільне розбиття $\lambda = \lambda([a;\, b])$ з діаметром $|\lambda| < \delta$. Для нього

$$
\begin{aligned}
&0 \le U(f,\, \lambda) - L(f,\, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\big) \cdot \big(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)\big) \le \\
&\le \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\big) = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

За критерієм інтегровності $f \in RS(\alpha,\, [a;\, b])$. Існування границі інтегральних сум доводиться як в теоремі 4.5. ►

Зауважимо, що в усіх трьох теоремах виключена можливість співпадіння точок розриву інтегрованої та інтегруючої функцій.

3. Властивості інтеграла Рімана – Стілтьєса

1. $\int\limits_a^b d\alpha = \alpha(b) - \alpha(a)$.

2. Нехай $f \in RS(\alpha,\, [a;\, b])$. Тоді для будь-якого $c \in \mathbb{R}$ функція $cf \in RS(\alpha,\, [a;\, b])$ і
$$\int\limits_a^b c \cdot f\, d\alpha = c \int\limits_a^b f\, d\alpha.$$

3. Нехай $f_i \in RS(\alpha,\, [a;\, b]),\ i = 1, 2$. Тоді функція $f_1 + f_2 \in RS(\alpha,\, [a;\, b])$ і
$$\int\limits_a^b (f_1 + f_2)\, d\alpha = \int\limits_a^b f_1\, d\alpha + \int\limits_a^b f_2\, d\alpha.$$

◀ Для будь-якого розбиття $\lambda = \lambda([a;\, b])$
$$L(f_1, \alpha,\, \lambda) + L(f_2,\, \alpha,\, \lambda) \le L(f_1 + f_2,\, \alpha,\, \lambda) \le U(f_1 + f_2,\, \alpha,\, \lambda) \le$$
$$\le U(f_1,\, \alpha,\, \lambda) + U(f_2,\, \alpha,\, \lambda).$$
▶

4. Нехай $f \in RS(\alpha,\, [a;\, b]),\ a < c < b$. Тоді $f \in RS(\alpha,\, [a;\, c]),\ f \in RS(\alpha,\, [c;\, b])$ і
$$\int\limits_a^b f\, d\alpha = \int\limits_a^c f\, d\alpha + \int\limits_c^b f\, d\alpha.$$

◀ Як і для інтеграла Рімана, твердження випливає з рівностей
$$\underline{\int\limits_a^b} f\, d\alpha = \underline{\int\limits_a^c} f\, d\alpha + \underline{\int\limits_c^b} f\, d\alpha,$$
$$\overline{\int\limits_a^b} f\, d\alpha = \overline{\int\limits_a^c} f\, d\alpha + \overline{\int\limits_c^b} f\, d\alpha.$$
▶

5. Нехай $f_i \in RS(\alpha,\, [a;\, b]),\ i = 1, 2$, і для кожного $x \in [a;\, b]$: $f_1(x) \le f_2(x)$. Тоді
$$\int\limits_a^b f_1\, d\alpha \le \int\limits_a^b f_2\, d\alpha.$$

6. Нехай $f \in RS(\alpha,\, [a;\, b])$. Тоді

   (а) $\inf\limits_{[a;\, b]} f \cdot \big(\alpha(b) - \alpha(a)\big) \le \int\limits_a^b f\, d\alpha \le \sup\limits_{[a;\, b]} f \cdot \big(\alpha(b) - \alpha(a)\big)$;

   (б) $|f| \in RS(\alpha,\, [a;\, b])$ і $\left|\int\limits_a^b f\, d\alpha\right| \le \int\limits_a^b |f|\, d\alpha$.

7. Нехай $f \in RS(\alpha_i,\ [a;\ b]),\ i = 1, 2$. Тоді $f \in RS(\alpha_1 + \alpha_2)$ і

$$\int\limits_a^b f\, d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int\limits_a^b f\, d\alpha_1 + \int\limits_a^b f\, d\alpha_2.$$

8. Нехай $f,\ \alpha:\ [a;\ b] \to \mathbb{R}$ – монотонно неспадні функції, $f \in C([a; b])$. Тоді $\alpha \in RS(f,\ [a;\ b])$ і правильна формула інтегрування частинами

$$\int\limits_a^b \alpha\, df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int\limits_a^b f\, d\alpha.$$

4.4 Обчислення інтеграла Рімана - Стілтьєса

1. Інтеграл Рімана – Стілтьєса відносно функції обмеженої варіації

Нехай тепер $\alpha : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ – функція обмеженої варіації. За теоремою Жордана її можна подати як різницю монотонно неспадних функцій $\alpha = \beta - \gamma$. З огляду на властивість **7°** тоді видається природним означити

$$\int\limits_a^b f\, d\alpha := \int\limits_a^b f\, d\beta - \int\limits_a^b f\, d\gamma. \tag{4.4}$$

Зауваження 1. У такий спосіб інтеграл можна означити у кожній з наступних ситуацій:

1. $f \in C([a;b]),\ \alpha \in BV([a;b])$;
2. $f \in R([a;b]),\ \alpha$ задовольняє умову Ліпшиця;
3. функція f монотонна, $\alpha \in C([a;b]) \cap BV([a;b])$.

Для функції α, що задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L, компоненти її розкладу

$$\alpha(x) = Lx - (Lx - \alpha(x)),\ x \in [a;\, b],$$

монотонно не спадають і задовольняють умову Ліпшиця. Дійсно,

$$\forall\, a \le x_1 < x_2 \le b:\ (Lx_2 - \alpha(x_2)) - (Lx_1 - \alpha(x_1)) = L(x_2 - x_1) - (\alpha(x_2) - \alpha(x_1)) \ge 0,$$

$$\big|(Lx_2 - \alpha(x_2)) - (Lx_1 - \alpha(x_1))\big| \le L(x_2 - x_1) + (\alpha(x_2) - \alpha(x_1)) \le 2L(x_2 - x_1).$$

Тому за умов теореми 2 існує розклад Жордана, відносно компонент якого інтегровна функція f.

Інтегровність функції f відносно обох компонент розкладу Жордана за умови теореми 3 забезпечується неперервністю варіації неперерервної фуннкції як функції проміжку і відповідно можливістю побудови розкладу Жордана з неперервними компонентами.

Надалі в подібних ситуаціях мається на увазі вибір саме таких припустимих розкладів Жордана.

Зауваження 2. Інтеграл (4.4) не залежить від вибору конкретного розкладу Жордана. Справді, якщо

$$\beta - \gamma = \tilde{\beta} - \tilde{\gamma},$$

то $\beta + \tilde{\gamma} = \tilde{\beta} + \gamma$ і за властивістю **7°**

$$\int\limits_a^b f\, d\beta + \int\limits_a^b f\, d\tilde{\gamma} = \int\limits_a^b f\, d(\beta + \tilde{\gamma}) = \int\limits_a^b f\, d(\tilde{\beta} + \gamma) = \int\limits_a^b f\, d\tilde{\beta} + \int\limits_a^b f\, d\gamma,$$

звідки

$$\int\limits_a^b f\, d\beta - \int\limits_a^b f\, d\gamma = \int\limits_a^b f\, d\tilde{\beta} - \int\limits_a^b f\, d\tilde{\gamma}.$$

2. Обчислення інтеграла Рімана – Стілтьєса

Теорема 4.8 *Нехай функції f, $\alpha : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ задовольняють умови:*

1. $f \in R([a;\, b])$;
2. $\alpha \in C([a; b])$;
3. *виключаючи хіба що скінченну множину точок, існує похідна* $\alpha' \in R([a;\, b])$.

Тоді $f \in RS(\alpha,\, [a;\, b])$ *і*

$$\int\limits_a^b f\, d\alpha = \int\limits_a^b f(x) \cdot \alpha'(x)\, dx.$$

◀ За умов теореми неперервна функція α має інтегровну за Ріманом, а значить обмежену похідну. З формули кінцевих приростів тоді випливає обмеженість варіації цієї функції

$$\forall\, \lambda = \lambda([a;\, b]):\ \sigma(\alpha,\, \lambda) \le \sup_{[a;\, b]} |\alpha'| \cdot (b - a).$$

Тут в розбиття λ слід включити точки, у яких похідна не існує, довизначивши похідну в них довільним чином. Подібним чином доводиться, що α задовольняє умову Ліпшиця. Тому за теоремою 2 $f \in RS(\alpha,\, [a;\, b])$ та інтеграл $\int\limits_a^b f\, d\alpha$ є границею інтегральних сум.

Розглянемо довільне розбиття $\lambda = \lambda([a;\, b]) = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, що містить усі точки, в яких похідна α' не існує. Відмічені точки виберемо за формулою скінченних приростів з умови

$$\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k) = \alpha'\big(\xi_k)(x_{k+1} - x_k\big),\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Тоді, оскільки $f \cdot \alpha' \in R([a;\, b])$,

$$S(f,\, \alpha,\, \lambda,\, \{\xi_k\}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\alpha'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \to$$

$$\to \int\limits_a^b f(x) \cdot \alpha'(x)\, dx,\ |\lambda| \to 0.$$

▶

Лема 1. Нехай функція $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ неперервна в точці $z \in [a,\, b]$, функція α задана формулою

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(z-), & x \in [a;\, z), \\ \alpha(z), & x = c, \\ \alpha(z+), & x \in (z;\, b]. \end{cases}$$

Тоді $f \in RS(\alpha,\, [a;\, b])$ і

$$\int\limits_a^b f\, d\alpha = f(z) \cdot \bigl(\alpha(z+) - \alpha(z-)\bigr).$$

◀ Розглянемо довільне розбиття $\lambda = \lambda([a;\, b]) = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ і відмічені точки $\xi_k \in [x_k;\, x_{k+1}]$, $k = 0,\, 1 \ldots n-1$. Унаслідок неперервності функції f, якщо точка z є точкою розбиття λ, $z = x_j$, то

$$s(f,\, \alpha,\, \lambda) = f(\xi_{j-1}) \cdot \bigl(\alpha(z) - \alpha(z-)\bigr) + f(\xi_j) \cdot \bigl(\alpha(z+) - \alpha(z)\bigr) \to$$
$$\to f(z) \cdot \bigl(\alpha(z+) - \alpha(z-)\bigr),\ |\lambda| \to 0.$$

Якщо точка $z \in (x_{j-1},\, x_j)$, то

$$s(f,\, \alpha,\, \lambda) = f(\xi_{j-1}) \cdot \bigl(\alpha(z+) - \alpha(z-)\bigr) \to f(z) \cdot \bigl(\alpha(z+) - \alpha(z-)\bigr),\ |\lambda| \to 0.$$

▶

Лема 2. Нехай функція $f \in C([a,\, b])$, функція α кусково-стала, тобто для деякого набоору точок $a = z_0 \le z_1 < z_2 < \ldots < z_{m-1} \le z_m = b$

$$\alpha(x) = \alpha(z_j+) = \alpha(z_{j+1}-),\ x \in (z_j;\, z_{j+1}),\ j = 0,\, 1,\, \ldots,\, m.$$

Тоді $f \in RS(\alpha,\, [a;\, b])$ і

$$\int\limits_a^b f\, d\alpha = \sum_{j=0}^{m} f(z_j) \cdot \bigl(\alpha(z_j+) - \alpha(z_j-)\bigr).$$

◀ Так само, як і в доведенні леми 1, встановлюється існування границі інтегральних сум. ▶

Теорема 4.9 *Нехай функції $f,\, \alpha : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ задовольняють умови:*

1. $f \in C([a;\, b])$;
2. $\alpha \in C([a; b] \setminus \{z_1 < z_2 < \ldots < z_{m-1} < z_m\})$, *де в точках* $z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_m$ *функція* α *має розриви 1-го роду;*
3. *виключаючи хіба що скінченну множину точок, існує похідна* α', $\alpha' \in R([a;\, b])$.

Тоді $f \in RS(\alpha,\, [a;\, b])$ *і*

$$\int\limits_a^b f\, d\alpha = \int\limits_a^b f(x) \cdot \alpha'(x)\, dx + \sum_{j=1}^{m} f(z_j) \cdot \bigl(\alpha(z_j+) - \alpha(z_j-)\bigr).$$

◀ Як і в теоремі 4.8, функція $\alpha \in BV([a;\, b])$. За теоремами про розклад Жордана і про розклад монотонної функції в суму функції стрибків і неперервної функцію α можна подати у вигляді

$$\alpha(x) = \varphi(x) + \psi(x) - \gamma(x),\ x \in [a;\, b],$$

де усі функції монотонно не спадають, функція φ – функція стрибків, $\psi,\ \gamma$ – монотонно неспадні неперервні функції. До функції φ тепер можна застосувати лему 2, до функції $\psi - \gamma$ – теорему 4.8. ▶

3. Граничний перехід під знаком інтеграла Рімана – Стілтьєса

Теорема 4.10 *Нехай функції* $f_n \in C([a;\, b]),\ n \geq 1,\ \alpha \in BV\big([a;\, b]\big)$ *монотонно не спадає. Якщо*

$$f_n \underset{[a;\,b]}{\rightrightarrows} f,\ n \to \infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n\, d\alpha = \int\limits_a^b f\, d\alpha.$$

◀ Рівномірна границя послідовності неперервних функцій

$$f \in C([a;\, b]) \subset RS(\alpha,\, [a;\, b]).$$

Лишається використати оцінку інтеграла

$$\left|\int\limits_a^b f\, d\alpha - \int\limits_a^b f_n\, d\alpha\right| \leq \left|\int\limits_a^b \Big|f - f_n\Big|\, d\alpha\right| \leq \max_{[a;\,b]} |f - f_n| \cdot V(\alpha,\, [a;\, b]).$$

▶

Теорема 4.11 (теорема Геллі) *Нехай* $f \in C([a;\, b])$*, послідовність монотонно неспадних функцій* $\{\alpha_n :\ n \geq 1\}$ *збігається до монотонно неспадної функції* $\alpha : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ *у точках її неперервності і в кінцях відрізка* $\alpha_n(a) \to \alpha(a)$, $\alpha_n(b) \to \alpha(b)$, $n \to \infty$. *Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f\, d\alpha_n = \int\limits_a^b f\, d\alpha.$$

◀ Інтеграли від неперервної функції відносно монотонних існують, тому треба довести лише граничну рівність.

Інтеграл $\int\limits_a^b f\, d\alpha$ апроксимуємо інтегралом від кусково-сталої функції. Неперервна функція f за теоремою Кантора рівномірно неперервна. Тому для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що

$$\forall \{x',\, x''\} \subset [a;\, b],\ |x' - x''| < \delta :\ |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3\big(\alpha(b) - \alpha(a) + 1\big)}.$$

Виберемо точки неперервності $\{x_1 < x_2 < \ldots < x_m\} \subset [a;\, b]$ функції α з умови

$$x_1 - a < \delta,\ x_{k+1} - x_k < \delta,\ k = 1, 2, \ldots, m-1,\ b - x_m < \delta.$$

Це можна зробити, оскільки множина точок розриву монотонної функції α не більш, ніж зліченна. Далі позначаємо

$$x_0 = a,\ x_{m+1} = b,\ A = \{x_k,\ k = 0,\, 1,\, \ldots,\, m+1\}.$$

Використавши адитивність інтеграла, отримаємо оцінку

$$\Big|\int\limits_a^b f\,d\alpha - \sum_{k=0}^{m} f(x_k)\big(\alpha(x_{k+1})-\alpha(x_k)\big)\Big| = \Big|\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\big(f(x)-f(x_k)\big)\,d\alpha\Big| \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{3\big(\alpha(b)-\alpha(a)+1\big)}\cdot\big(\alpha(b)-\alpha(a)\big)\big) \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Множина A скінченна, тому можна вибрати таке $N \ge 1$, що для кожного $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, m+1$

$$\forall\, n \ge N: \quad \alpha_n(b)-\alpha_n(a) < \alpha(b)-\alpha(a)+1, \quad \max_{[a;\, b]}|f|\cdot|\alpha_n(x_k)-\alpha(x_k)| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Оцінимо тепер різницю інтегралів з формулювання теореми для довільного $n \ge N$.

$$\Big|\int\limits_a^b f\,d\alpha - \int\limits_a^b f\,d\alpha_n\Big| \le$$
$$\le \Big|\int\limits_a^b f\,d\alpha - \sum_{k=0}^{m} f(x_k)\big(\alpha(x_{k+1})-\alpha(x_k)\big)\Big| +$$
$$+\Big|\sum_{k=0}^{m} f(x_k)\big(\alpha(x_{k+1})-\alpha(x_k)\big) - \sum_{k=0}^{m} f(x_k)\big(\alpha_n(x_{k+1})-\alpha_n(x_k)\big)\Big| +$$
$$+\Big|\sum_{k=0}^{m} f(x_k)\big(\alpha_n(x_{k+1})-\alpha_n(x_k)\big) - \int\limits_a^b f\,d\alpha_n\Big| \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3\big(\alpha(b)-\alpha(a)+1\big)}\big(\alpha(b)-\alpha(a)+1\big) = \varepsilon.$$

▶

Зауваження 2. Розглянутий в теоремі тип збіжності функціональної послідовності називається збіжністю в основному.

Приклад. Нехай $\alpha : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ – монотонно неспадна функція стрибків, множина усіх її точок стрибків $A = \{x_k :\ k \ge 1\} \ne \varnothing$, $f \in C([a;\, b])$. Означимо

$$\alpha_n(a) := 0, \quad \alpha_n(x) := \sum_{k\le n:\ x_k\in A\cap[a;\, x)} \big(\alpha(x_k+)-\alpha(x_k-)\big)+\alpha(x)-\alpha(x-), \quad x \in (a;\, b].$$

Якщо x – точка неперервності функції α, то $\alpha_n(x) \to \alpha(x)$, $n \to \infty$, оскільки

$$0 \le \alpha(x)-\alpha_n(x) = \sum_{k>n:\ x_k\in A\cap[a;\, x)} \big(\alpha(x_k+)-\alpha(x_k-)\big) \to 0,\ n\to\infty,$$

як залишок збіжного ряду зі стрибків функції α. Тому за теоремо Геллі

$$\int\limits_a^b f\,d\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)\cdot\big(\alpha(x_k+)-\alpha(x_k-)\big),$$

де ряд збігається абсолютно.

Список літератури

[1] Денисьєвський М.О. Збірник задач з математичного аналізу: функції однієї змінної. / М.О. Денисьєвський, О.О. Курченко, В.Н. Нагорний, О.Н. Нестеренко, Т.О. Петрова, А.В. Чайковський. – ВПЦ "Київський університет 2005. – 240 с.

[2] Курченко О.О. Інтегральне числення функцій однієї змінної: навчальний посібник/ О.О. Курченко. – К., 2016. – 140 с.

[3] Курченко О.О. Числові та функціональні ряди: навчальний посібник/ О.О. Курченко. – К., 2023. – 124 с.

[4] Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Підручник: у двох частинах. Частина I. – К.: Либідь, 1993. – 320 с.