Київський національний університет імені Тараса Шевченка

О.Д.Борисенко

МЕТОДИ ЕКОНОМІЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Модуль 1. Прийняття рішень в умовах невизначеності

навчальний посібник
для студентів механіко-математичного факультету

Київ
2024

Методи економічних обчислень. Модуль 1. Прийняття рішень в умовах невизначеності: Навчальний посібник / О.Д.Борисенко– Київ, 2024.-50 с.

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, професор О.М. Станжицький
канд. фіз.-мат. наук, доцент О.В. Перегуда

Навчальний посібник відповідає курсу лекцій з методів економічних обчислень, який читається у 6 семестрі в обсязі, передбаченому навчальними планами механіко-математичного факультету.

Рекомендовано до друку в електронному вигляді вченою радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол №14 від 2 травня 2024 року)

Зміст

Передмова

Посібник охоплює теми лекцій, що читаються у шостому семестрі при вивченні нормативного курсу з методів економічних обчислень на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Курс методів економічних обчислень, що читається на механіко-математичному факультеті складається із двох модулів: прийняття рішень в умовах невизначеності і теорія нескінченних антагоністичних ігор.

У розділах присвячених теорії прийняття рішень в умовах невизначеності розглядаються питання існування функції корисності у формі середньої корисності, властивості функції корисності у формі середньої корисності, для грошових лотерей вводиться поняття функції корисності грошей, поняття несхильності до ризику, напевного еквівалента, ймовірнісної премії. Для порівняння ступеня несхильності до ризику різних інвесторів використовується коефіцієнт абсолютної несхильності до ризику та еквівалентні твердження у термінах напевного еквіваленту, ймовірнісної премії та властивостей функції корисності грошей. Для порівняння ступеня несхильності до ризику відносно різних рівнів капіталу використовується властивість спадання абсолютної несхильності до ризику і доводяться еквівалентні твердження у термінах напевного еквіваленту, ймовірнісної премії та властивостей функції корисності грошей. Для порівняння розподілів на множині грошових лотерей вводяться поняття стохастичних домінант першого і другого порядку. Доведено теореми про необхідні і достатні умови стохастичного домінування першого і другого порядку. До кожного розділу підібрані відповідні задачі, які можна використовувати на практичних заняттях.

МОДУЛЬ №1.

Вибір в умовах невизначеності.

1 Відношення переваги на множині простих лотерей.

Почнемо вивчення теорії індивідуального прийняття рішення у абстрактній постановці, а потім розвинемо аналіз у контексті прийняття рішень в умовах невизначеності.

Відправною точкою кожної задачі прийняття рішень є множина X можливих (взаємно виключних) альтернатив, із якої проводиться вибір. Зараз будемо вважати X довільною множиною. Наприклад, для випускника середньої школи множина можливих альтернатив продовження кар'єри X може бути {вступити до юридичного факультету, вступити до механіко-математичного факультету,..., стати естрадним співаком}. При вивченні задач споживання, елементами множини X будуть можливі альтернативи споживання.

Нехай X – довільна множина. Кажуть, що на X задано **бінарне відношення** $\mathcal{R}$, якщо в $X^2 = \{(x, y) |\ \forall x \in X, \forall y \in X\}$ задано підмножину $\mathcal{R}$. Елемент $x \in X$ знаходиться у відношенні $\mathcal{R}$ до елемента $y \in X$, позначається $x\mathcal{R}y$, якщо впорядкована пара (x, y) належить $\mathcal{R}$.

Означення 1.1 *Розглянемо на множині альтернатив X бінарне відношення $\succsim$ і будемо називати його* **відношенням переваги** *на X. Запис $x \succsim y, x, y \in X$ означає, що альтернатива x* **не гірша** *ніж альтернатива y.*

Відношення строгої переваги $\succ$ визначається так: для $x, y \in X$,

$$(x \succ y) \Leftrightarrow (x \succsim y) \wedge \urcorner (y \succsim x).$$

Відношення байдужості $\sim$ визначається так: для $x, y \in X$, $(x \sim y) \Leftrightarrow (x \succsim y) \wedge (y \succsim x)$.

Означення 1.2 *Відношення переваги $\succsim$ на множині альтернатив X називаєтьcя* **раціональним**, *якщо воно є повним і транзитивним:*

(i) Повнота:

$$\forall x, y \in X: \ (x \succsim y) \vee (y \succsim x).$$

(ii) Транзитивність:

$$\forall x, y, z \in X: \ (x \succsim y) \wedge (y \succsim z) \ \Rightarrow \ (x \succsim z).$$

Зручним аналітичним інструментом, що зображає відношення перваги є **функція корисності**.

Означення 1.3 *Функція $u: \ X \to \mathbb{R}$ називаєтьcя функцією корисності, що зображає відношення переваги $\succsim$, якщо для всіх $x, y \in X$, $x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$.*

Зауважимо, що функція корисності $u(x)$ для заданного відношення переваги $\succsim$ не єдина. Для довільної строго зростаючої функції $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функція $v(x) = f(u(x))$ теж буде функцією корисності, що зображає відношення переваги $\succsim$.

Нехай потрібно робити вибір в умовах ризикових альтернатив, тобто кожна альтернатива приводить до одного результату з певної множини результатів, але який саме результат буде, невідомо. Припустимо, що задано скінченну множину результатів C. Пронумеруємо можливі результати $C = \{1, 2, \ldots, N\}$. Для опису ризикових альтернатив введемо поняття лотереї.

Означення 1.4 **Простою лотереєю** L *будемо називати вектор*

$$L = (p_1, \dots, p_N),\ p_n \geq 0,\ \forall n = \overline{1, N},\ \sum_{n=1}^{N} p_n = 1,$$

де p_n *це ймовірність результату* n, $\forall n = \overline{1, N}$.

Таким чином проста лотерея L це розподіл ймовірностей на множині можливих результатів C.

Означення 1.5 *Для заданих* K *просих лотерей* $L_k = (p_1^k, \dots, p_N^k)$, $k = \overline{1, K}$ *і заданих ймовірностей* $\alpha_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$, **складеною лотереєю** $(L_1, \dots, L_K; \alpha_1, \dots, \alpha_K)$ *називається ризикова альтернатива, яка приводить до простої лотереї* L_k *з ймовірністю* α_k, $\forall k = \overline{1, K}$.

Для довілної складеної лотереї $(L_1, \dots, L_K; \alpha_1, \dots, \alpha_K)$ можна обчислити відповідну **зведену лотерею** $L_{rd} = (p_1^{rd}, \dots, p_N^{rd})$, яка породжує той же самий кінцевий розподіл на множині C. Зрозуміло, що

$$p_n^{rd} = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_n^k,\ \forall n = \overline{1, N},\ \text{де } L_k = (p_1^k, p_2^k, \dots, p_N^k), k = \overline{1, K}.$$

Кожну просту лотерею L можна зобразити як точку симплексу

$$\Delta = \{p \in \mathbb{R}_+^N\ :\ \sum_{n=1}^{N} p_n = 1\}.$$

Будемо вважати, що для довільної ризикової альтернативи лише зведена лотерея має значення для прийняття рішення.

Приклад 1.1 *Із нашого припущення виплива€, що складені лотереї із однаковими зведеними лотереями для прийняття рішення є еквівалентними*

$$\left((1,0,0),\left(\frac{1}{4},\frac{3}{8},\frac{3}{8}\right);\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\sim\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right);\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

бо

$$L_{rd}^1=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4},\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8},\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}\right)=L_{rd}^2=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right).$$

Позначимо $\mathcal{L}$ множину простих лотерей над множиною результатів C. Нехай на $\mathcal{L}$ задано раціональне відношення переваги $\succsim$.

Означення 1.6 *Відношення перваги $\succsim$ на множині простих лотерей $\mathcal{L}$ є* **неперервним**, *якщо для $\forall L,L',L''\in\mathcal{L}$ множини*

$$\{\alpha\in[0,1]:\alpha L+(1-\alpha)L'\succsim L''\},\{\alpha\in[0,1]:L''\succsim\alpha L+(1-\alpha)L'\}$$

є замкненими.

Зауваження 1.1 *У загальній постановці маємо таке означення неперервності відношення переваги. Відношення переваги $\succsim$ на X називається* **неперервним**, *якщо для довільних послідовностей $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\in X$, $\{y^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\in X$ таких, що $x^{(n)}\succsim y^{(n)},\forall n\geq 1$, $\exists x=\lim_{n\to\infty}x^{(n)}$, $\exists y=\lim_{n\to\infty}y^{(n)}$ маємо $x\succsim y$.*

Еквівалентне означення неперервності відношення переваги $\succsim$ можна дати таке:

Означення 1.7 *Відношення переваги $\succsim$ на X називається* **неперервним**, *якщо $\forall x\in X$ переважна множина $P_x=\{y\in X:y\succsim x\}$ і непереважна множина $NP_x=\{y\in X:x\succsim y\}$ будуть замкненими.*

Еквівалентність цих означень пропонується перевірити самостійно.

Означення 1.8 *Відношення переваги* $\succsim$ *на множині простих лотерей* $\mathcal{L}$ *задовольняє* **аксіому незалежності**, *якщо для* $\forall L, L', L'' \in \mathcal{L}$ *і* $\forall \alpha \in (0,1)$ *маємо*

$$L \succsim L' \;\Leftrightarrow\; \alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''.$$

Означення 1.9 *Функція корисності* $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ *має форму* **середньої корисності**, *якщо існують числа* $u_n \in \mathbb{R}, n = \overline{1,N}$ *і встановлена взаємно однозначна відповідність* $u_n \leftrightarrow n$, $\forall n \in C$, *так що для кожної простої лотереї* $L = (p_1, \ldots, p_N)$ *ми маємо*

$$U(L) = \sum_{n=1}^{N} p_n u_n.$$

Функцію корисності яка має форму середньої корисності називають функцією корисності фон Неймана – Моргенштерна.

Теорема 1.1 *Функція корисності* $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ *має форму середньої корисності тоді і тільки тоді, коли виконується умова* $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall L_i \in \mathcal{L}, i = \overline{1,k}$, $\forall \alpha_i \geq 0, i = \overline{1,k}$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$:

$$U\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i L_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i U(L_i).$$

(умова лінійності).

Доведення.
($\Rightarrow$) Розглянемо складену лотерею $(L_1, \ldots, L_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, де $L_i = (p_1^i, \ldots, p_N^i)$, $i = \overline{1,k}$. Тоді відповідна зведена лотерея має вигляд $L_{rd} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i L_i$. Тому

$$U\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i L_i\right) = U(L_{rd}) = \sum_{n=1}^{N} u_n \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_n^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sum_{n=1}^{N} u_n p_n^i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i U(L_i).$$

($\Leftarrow$) Довільну просту лотерею $L = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathcal{L}$ можна подати у вигляді

$$L = \sum_{n=1}^{N} p_n L^{(n)},\ L^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0),$$

$$L^{(2)} = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, L^{(N)} = (0, \ldots, 0, 1).$$

Тому

$$U(L) = U\left(\sum_{n=1}^{N} p_n L^{(n)}\right) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(L^{(n)}) = \sum_{n=1}^{N} p_n u_n,$$

де $u_n = U(L^{(n)})$. Тому функція корисності $U(L)$ має форму середньої корисності. $\square$

Теорема 1.2 *Нехай $U: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ це функція корисності фон Неймана для $\succsim$ на $\mathcal{L}$. Тоді функція $\tilde{U}: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ буде функцією корисності фон Неймана для $\succsim$ тоді і тільки тоді коли існують $\beta > 0$ і $\gamma \in \mathbb{R}$ такі, що $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$, $\forall L \in \mathcal{L}$.*

Доведення.
($\Leftarrow$) Нехай $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$, $\beta > 0$ і $\gamma \in \mathbb{R}$. Оскільки маємо строго зростаюче перетворення функції корисності $U(L)$, то $\tilde{U}(L)$ теж буде функцією корисності, що зображає $\succsim$ на $\mathcal{L}$. Покажемо, що $\tilde{U}(L)$ буде функцією корисності фон Неймана. Для цього покажемо, що $\tilde{U}(L)$ є лінійною. Маємо

$$\tilde{U}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i L_i\right) = \beta U\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i L_i\right) + \gamma =$$

$$= \beta \sum_{i=1}^{k} \alpha_i U(L_i) + \gamma = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (\beta U(L_i) + \gamma) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \tilde{U}(L_i).$$

Тому за Теоремою 1.1 функція $\tilde{U}(L)$ має форму середньої корисності.

($\Rightarrow$) Із означення випливає, що функція корисності фон Неймана $U(L)$ є неперервною. Множина $\mathcal{L}$ це компакт. Значить функція $U(L)$ досягає свого найбільшого і найменшого значення на $\mathcal{L}$. Отже існують $\bar{L}, \underline{L} \in \mathcal{L}$ такі що

$$\bar{L} \succsim L \succsim \underline{L}, \quad \forall L \in \mathcal{L}.$$

Якщо $\bar{L} \sim \underline{L}$, тоді довільна функція корисності є константою, і твердження теореми має місце. Надалі будемо розглядати випадок $\bar{L} \succ \underline{L}$. Нехай $U(L)$ і $\tilde{U}(L)$, $L \in \mathcal{L}$ це функції корисності фон Неймана. Покажемо, що існують такі $\beta > 0, \gamma \in \mathbb{R}$, що $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$.

Візьмемо $\forall L \in \mathcal{L}$ і виберемо $\lambda_L \in [0,1]$ так, щоб

$$U(L) = \lambda_L U(\bar{L}) + (1-\lambda_L)U(\underline{L}) \;\Rightarrow\; \lambda_L = \frac{U(L) - U(\underline{L})}{U(\bar{L}) - U(\underline{L})} \in [0,1].$$

За Теоремою 1.1 маємо

$$U(L) = \lambda_L U(\bar{L}) + (1-\lambda_L)U(\underline{L}) = U(\lambda_L \bar{L} + (1-\lambda_L)\underline{L}) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; L \sim \lambda_L \bar{L} + (1-\lambda_L)\underline{L}.$$

Але для функції корисності $\tilde{U}(L)$ теж маємо

$$\tilde{U}(L) = \tilde{U}(\lambda_L \bar{L} + (1-\lambda_L)\underline{L}) = \lambda_L \tilde{U}(\bar{L}) + (1-\lambda_L)\tilde{U}(\underline{L}).$$

Підставимо значення λ_L у одержане співвідношення і одержимо $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$. $\square$

Зауважимо, що для функції корисності фон Неймана різниця між корисностями результатів має значення. Дійсно, із того, що

$$u_1 - u_2 > u_3 - u_4, \quad \text{де } u_i \text{ це корисність } i\text{-го результату}$$

маємо

$$\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_4 > \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 \ \Rightarrow$$

$$L = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right) \succ L' = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Теорема 1.3 *(Теорема про середню корисність). Нехай раціональне відношення переваги $\succsim$ на просторі простих лотерей $\mathcal{L}$ задовольняє умову неперервності і аксіому незалежності. Тоді існує відповідна функція корисності, яка має форму середньої корисності.*

Доведення. Із аксіоми незалежності і раціональності $\succsim$ випливає існування найкращої $\bar{L}$ і найгіршої $\underline{L}$ лотерей,тобто

$$\forall L \in \mathcal{L}: \qquad \bar{L} \succsim L \succsim \underline{L}.$$

Дійсно, із того, що множина результатів $C = \{1, 2, \ldots, N\}$ скінченна, а відношення переваги $\succsim$ є раціональним випливає, що існують лотереї

$$\bar{L}, \underline{L} \in \{L^{(i)} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i}, 1, 0, \ldots, 0), i = \overline{1, N}\}.$$

такі, що

$$\bar{L} \succsim L^{(n)} \succsim \underline{L},\ \forall n = \overline{1, N}.$$

Для довільної простої лотереї $L = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathcal{L}$ маємо

$$L = \sum_{n=1}^{N} p_n L^{(n)} = p_1 L^{(1)} + (1 - p_1) \sum_{n=2}^{N} \frac{p_n}{(1 - p_1)} L^{(n)} \succsim$$

$$\succsim p_1 \underline{L} + (1 - p_1) \sum_{n=2}^{N} \frac{p_n}{(1 - p_1)} L^{(n)} =$$

$$= p_1\underline{L} + \sum_{n=2}^{N} p_n L^{(n)} = p_2 L^{(2)} + (1-p_2)\left(\frac{p_1}{(1-p_2)}\underline{L} + \sum_{n=3}^{N} \frac{p_n}{(1-p_2)} L^{(n)}\right) \succsim (p_1+p_2)\underline{L} + \sum_{n=3}^{N} p_n L^{(n)} \succsim \ldots$$

$$\succsim (p_1 + p_2 + \ldots + p_N)\underline{L} = \underline{L}.$$

Аналогічно перевіряємо, що $\forall L \in \mathcal{L}: \ \bar{L} \succsim L$.

Якщо $\bar{L} \sim \underline{L}$, тоді всі лотереї еквівалентні і $u_1 = u_2 = \ldots = u_N = \tilde{u}$. Тому для $\forall L = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathcal{L}$ маємо

$$U(L) = \tilde{u} = \sum_{n=1}^{N} p_n \tilde{u} = \sum_{n=1}^{N} p_n u_n.$$

Отже у цьому випадку існує функція корисності у формі середньої корисності.

Нехай тепер $\bar{L} \succ \underline{L}$. Розіб'ємо доведення на послідовні кроки.

Крок 1. Якщо $L \succ L'$ і $\alpha \in (0,1)$, тоді

$$L \succ \alpha L + (1-\alpha)L' \succ L'.$$

Дійсно за аксіомою незалежності

$$L = \alpha L + (1-\alpha)L \succ \alpha L + (1-\alpha)L' \succ \alpha L' + (1-\alpha)L' = L'.$$

Крок 2. Нехай $\alpha, \beta \in [0,1]$. Тоді

$$\beta\bar{L} + (1-\beta)\underline{L} \succ \alpha\bar{L} + (1-\alpha)\underline{L} \ \Leftrightarrow\ \beta > \alpha.$$

Дійсно.
($\Leftarrow$) Нехай $\beta > \alpha$. Маємо

$$\beta\bar{L} + (1-\beta)\underline{L} = \gamma\bar{L} + (1-\gamma)[\alpha\bar{L} + (1-\alpha)\underline{L}],$$

тут

$$\gamma + \alpha(1-\gamma) = \beta \ \Rightarrow\ \gamma = \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha} \in (0,1].$$

Використаємо крок 1:

$$\bar{L} \succ \alpha\bar{L} + (1-\alpha)\underline{L} \;\Rightarrow\; \bar{L} \succ \gamma\bar{L} + (1-\gamma)[\alpha\bar{L} + (1-\alpha)\underline{L}] \succ$$

$$\succ \alpha\bar{L} + (1-\alpha)\underline{L} \;\Rightarrow\; \beta\bar{L} + (1-\beta)\underline{L} \succ \alpha\bar{L} + (1-\alpha)\underline{L}.$$

($\Rightarrow$) Нехай

$$\beta\bar{L} + (1-\beta)\underline{L} \succ \alpha\bar{L} + (1-\alpha)\underline{L} \quad \text{і} \quad \beta \le \alpha.$$

Якщо $\beta = \alpha$, то

$$\beta\bar{L} + (1-\beta)\underline{L} = \alpha\bar{L} + (1-\alpha)\underline{L}$$

і маємо суперчність строгій перевазі. Якщо $\beta < \alpha$ то за достатністю маємо

$$\alpha\bar{L} + (1-\alpha)\underline{L} \succ \beta\bar{L} + (1-\beta)\underline{L},$$

що суперечить припущенню.

Крок 3. Для $\forall L \in \mathcal{L}$ існує єдине число $\alpha_L \in [0,1]$ таке, що

$$L \sim \alpha_L\bar{L} + (1-\alpha_L)\underline{L}.$$

Дійсно, розглянемо множини

$$A^+ = \{\alpha \in [0,1] : \alpha\bar{L} + (1-\alpha)\underline{L} \succsim L\},$$

$$A^- = \{\alpha \in [0,1] : L \succsim \alpha\bar{L} + (1-\alpha)\underline{L}\}.$$

Із неперервності $\succsim$ випливає, що множини A^+, A^- замкнені. Із повноти $\succsim$ випливає, що $A^+ \cup A^- = [0,1]$. Із зв'язності відрізка $[0,1]$ випливає, що

$$\exists \alpha_L \in A^+ \cap A^- \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \alpha_L\bar{L} + (1-\alpha_L)\underline{L} \sim L.$$

Із результату кроку 2 маємо єдиність числа $\alpha_L \in [0,1]$.

Крок 4. Визначимо функцію корисності $U(L) = \alpha_L$, $\forall L \in \mathcal{L}$. Дійсно це функція корисності:

$$L \succsim L' \;\Leftrightarrow\; \alpha_L \bar{L} + (1-\alpha_L)\underline{L} \succsim \alpha_{L'}\bar{L} + (1-\alpha_{L'})\underline{L} \;\Leftrightarrow$$

$$\text{за результатом кроку 2 } \Leftrightarrow \alpha_L \geq \alpha_{L'} \;\Leftrightarrow U(L) \geq U(L').$$

Крок 5. Покажемо, що побудована функція корисності має форму середньої корисності. Для цього достатньо показати лінійність $U(L)$:

$$U(\beta L + (1-\beta)L') = \beta U(L) + (1-\beta)U(L'),\ \forall \beta \in [0,1].$$

Маємо за побудовою

$$L \sim \alpha_L \bar{L} + (1-\alpha_L)\underline{L},\ L' \sim \alpha_{L'}\bar{L} + (1-\alpha_{L'})\underline{L}.$$

За аксіомою незалежності

$$\beta L + (1-\beta)L' \sim \beta[\alpha_L \bar{L} + (1-\alpha_L)\underline{L}] + (1-\beta)L' \sim$$

$$\sim \beta[\alpha_L \bar{L} + (1-\alpha_L)\underline{L}] + (1-\beta)[\alpha_{L'}\bar{L} + (1-\alpha_{L'})\underline{L}] =$$

$$= [\beta U(L) + (1-\beta)U(L')]\bar{L} + [1 - (\beta U(L) + (1-\beta)U(L'))]\underline{L}.$$

Але за результатом кроку 4

$$U(\beta L + (1-\beta)L') = \beta U(L) + (1-\beta)U(L'). \qquad \square$$

ЗАДАЧІ.

1.1. Якщо відношення переваги $\succsim$ на $\mathcal{L}$ задовольняє аксіому незалежності, тоді для всіх $\alpha \in (0,1)$ і $L, L', L'' \in \mathcal{L}$ маємо

$$L \succ L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \succ \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

і

$$L \sim L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \sim \alpha L' + (1-\alpha)L''.$$

1.2. Довести: якщо відношення переваги $\succsim$ на $\mathcal{L}$ зображається функцією корисності фон Неймана – Моргенштерна $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, тоді відношення переваги $\succsim$ задовольняє аксіому незалежності.

1.3. Довести: якщо множина можливих результатів C – скінчена, а раціональне відношення переваги $\succsim$ на $\mathcal{L}$ задовольняє аксіому незалежності, тоді

$$\exists \overline{L} \in \mathcal{L}, \exists \underline{L} \in \mathcal{L} : \quad \overline{L} \succsim L \succsim \underline{L}, \ \forall L \in \mathcal{L}.$$

1.4. Нехай відношення переваги $\succsim$ на множині простих лотерей $\mathcal{L}$ є раціональне, неперервне і задовольняє аксіому незалежності. Показати: якщо $(L' \succ L'') \wedge (L' \succsim L \succsim L'')$ тоді існує єдине число $\alpha \in [0,1]$, таке що $L \sim \alpha L' + (1 - \alpha)L''$.

1.5. Нехай маємо три можливі грошові призи $C = \{2500000\$, 500000\$, 0\$\}$. Приймаючий рішення робить вибір між лотереями $L_1 = (0,1,0)$ і $L_1' = (0.1, 0.89, 0.01)$ та лотереями $L_2 = (0, 0.11, 0.89)$ $L_2' = (0.1, 0, 0.9)$. Нехай $L_1 \succ L_1'$ і $L_1' \succ L_2$. Показати, що такий вибір суперечить існуванню функції корисності фон Неймана – Моргенштерна, яка зображає це відношення переваги.

1.6. Припустимо, що деяка агенція з надзвичайних ситуацій хоче вибрати критерій, за яким буде відбуватись евакуація населення з території можливого затоплення. Ймовірність затоплення дорівнює 0.01. Можливі чотири результати:

(**A**) Евакуація не потрібна, і не проводилась.

(**B**) Евакуацію провели, але вона була не потрібна.

(**C**) Евакуацію провели і вона була потрібна.

(**D**) Евакуацію не провели, але вона була потрібна.

Припустимо для агенції напевний результат **B** пов'язаний відношенням байдужості з лотереєю, у якій результат **A** має ймовірність p, а результат **D** має ймовірність $1-p$. Крім того напевний результат **C** пов'язаний відношенням байдужості з лотереєю, у якій результат **B** має ймовірність q, а результат **D** має ймовірність $1-q$. Припустимо, що результат **A** строго переважає результат **D**. Нехай виконуються умови теореми про існування функції корисності у формі середньої корисності.

(а) Побудувати функцію корисності у формі середньої корисності.

(б) Розглянемо два критерії:
Критерій 1: Результатом цього критерію є евакуація у 90% випадків, коли відбулось затоплення, і необов'язкова евакуація у 10% випадків, коли затоплення не було.
Критерій 2: Результатом цього критерію є евакуація у 95% випадків, коли відбулось затоплення, і необов'язкова евакуація у 5% випадків, коли затоплення не було.

Знайти розподіли ймовірностей на множині результатів, які породжені цими критеріями. Використавши побудовану функцію корисності, порівняти вказані критерії.

1.7. Розглянемо лотереї

$$L: \ P\{X = 200\$\} = 0.7, P\{X = 0\$\} = 0.3,$$
$$L': \ P\{X = 1200\$\} = 0.1, P\{X = 0\$\} = 0.9.$$

Нехай $x_L \sim L, x_{L'} \sim L'$, де $x_L, x_{L'}$ – це суми грошей, які ми одержуємо з ймовірністю одиниця. Показати: якщо відповідне відношення переваги є транзитивне і монотонне, то

$$L \succ L' \Leftrightarrow x_L > x_{L'}.$$

1.8. В урні знаходиться 300 куль: 100 куль червоні, а інші 200 або сині або зелені. Навмання виймається куля і розглядаються лотереї:

L_1: Ви одержуєте 1000\$ якщо куля червона.

L_2: Ви одержуєте 1000\$ якщо куля синя.

L_3: Ви одержуєте 1000\$ якщо куля не червона.

L_4: Ви одержуєте 1000\$ якщо куля не синя.

Порівняйте лотереї L_1 і L_2, L_3 і L_4. Покажіть: якщо $L_1 \succ L_2$ і $L_3 \succ L_4$, то такий вибір суперечить властивостям ймовірності.

1.9. Нехай монета з ймовірністю p падає гербом. В лотереї ви одержуєте 2^j\$, якщо вперше герб випав при j-ому підкиданні.

(а) Який середній виграш цієї лотереї при $p = 1/2$?

(б) Нехай корисність виграшу $u(x) = \ln x$. Знайти середню корисність заданої лотереї.

(в) Нехай c – це сума грошей, яка еквівалентна заданій лотереї. Знайдіть c.

2 Грошові лотереї. Несхильність до ризику.

Розглянемо випадок, коли можливі результати наших рішень виражені у грошових одиницях. При цьому будемо вважати, що сума грошей змінюється неперервно. Позначимо суму грошей через x. Можна описати грошову лотерею, як функцію розподілу $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$. Якщо задано складену лотерею $(L_1, \ldots, L_K; \alpha_1, \ldots, \alpha_K)$, то зведена лотерея має вигляд

$$F(x) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k F_k(x),$$

де $F_k(x)$ це лотерея L_k. Через $\mathcal{L}$ будемо позначати множину всіх функцій розподілу зосереджених на інтервалі $[a, +\infty)$, $a \geq 0$. Нехай на множині $\mathcal{L}$ задано відношення переваги $\succsim$.

Означення 2.1 *Будемо говорити що функція корисності $U(\cdot)$ має форму середньої корисності (функція корисності фон Неймана – Моргенштерна), якщо $\forall F \in \mathcal{L}$*

$$U(F) = \int_a^{\infty} u(x) dF(x).$$

Функцію $u(x)$, $x \in [a, +\infty)$ будемо називати **функцією корисності грошей** *(функцією корисності Бернуллі). Будемо вважати, що $u(x)$ строго зростаюча, обмежена і неперевна.*

Означення 2.2 *Приймаючий рішення є* **несхильним до ризику** *якщо для*

$$\forall F \in \mathcal{L} : \qquad \bar{F} \succsim F,$$

де $\bar{F}$ це функція розподілу, яка відповідає виродженому розподілу ймовірностей

$$\mathrm{P} \left\{ X = \int_a^{\infty} x dF(x) \right\} = 1.$$

Тобто несхильний до ризику віддає перевагу лотереї, яка з ймовірністю одиниця приносить капітал $\int_a^{\infty} x dF(x)$ перед лотереєю $F(x)$.

Якщо $\bar{F} \sim F$, $\forall F \in \mathcal{L}$, то говорять, що приймаючий рішення є **нейтральним до ризику**.

Якщо ж $\bar{F} \sim F$ тільки при $F = \bar{F}$, то говорять, що приймаючий рішення є **строго несхильним до ризику**.

Означення 2.3 *Для заданої функції корисності грошей $u(x)$:*

(i) **Напевний еквівалент** *лотереї $F(x)$ це така сума грошей $c(F,u)$, що*

$$u(c(F,u)) = U(F) = \int_a^\infty u(x)dF(x).$$

(ii) *Для заданої суми грошей x і $\varepsilon > 0$* **ймовірнісною премією** *будемо називати таку величну $\pi(x,\varepsilon,u)$, що*

$$u(x) = \left(\frac{1}{2} + \pi(x,\varepsilon,u)\right) u(x+\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u)\right) u(x-\varepsilon).$$

Теорема 2.1 *Нехай на $\mathcal{L}$ задана функція корисності у формі середньої корисності $U(\cdot)$ із функцією корисності грошей $u(\cdot)$. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

(i) *Приймаючий рішення є несхильним до ризику*

$$u\left(\int_a^\infty x dF(x)\right) \geq U(F) = \int_a^\infty u(x)dF(x).$$

(ii) *Функція корисності грошей $u(\cdot)$ є опуклою вгору (угнутою).*

(iii) $c(F,u) \leq \int_a^\infty x dF(x),\ \forall F \in \mathcal{L}.$

(iv) $\pi(x,\varepsilon,u) \geq 0,\ \forall x, \forall \varepsilon > 0.$

Доведення. (i)$\sim$(ii): Маємо

$$u\left(\int_a^\infty x dF(x)\right) \geq \int_a^\infty u(x)dF(x). \tag{2.1}$$

Це нерівність Йенсена і з неї випливає опуклість вгору функції $u(\cdot)$. І навпаки, із опуклості вгору функції $u(\cdot)$ випливає нерівність Йенсена (2.1), а із (2.1) випливає несхильність до ризику.

(i)$\sim$(iii): Дійсно із зростання функції $u(\cdot)$ і означення напевного еквівалента маємо

$$c(F,u) \leq \int_a^\infty x dF(x) \ \Leftrightarrow\ u(c(F,u)) \leq u\left(\int_a^\infty x dF(x)\right) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \int_a^\infty u(x) dF(x) \leq u\left(\int_a^\infty x dF(x)\right).$$

(ii)$\sim$(iv). Якщо функція $u(\cdot)$ опукла вгору, тоді

$$u(x) = u\left(\frac{1}{2}(x+\varepsilon) + \frac{1}{2}(x-\varepsilon)\right) \geq \frac{1}{2}u(x+\varepsilon) + \frac{1}{2}u(x-\varepsilon).$$

Із означення ймовірінісної премії маємо

$$u(x) = \left(\frac{1}{2} + \pi(x,\varepsilon,u)\right)u(x+\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u)\right)u(x-\varepsilon).$$

Тому

$$\left(\frac{1}{2} + \pi(x,\varepsilon,u)\right)u(x+\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u)\right)u(x-\varepsilon) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}u(x+\varepsilon) + \frac{1}{2}u(x-\varepsilon),$$

а значить

$$\pi(x,\varepsilon,u)(u(x+\varepsilon) - u(x-\varepsilon)) \geq 0 \ \Rightarrow\ \pi(x,\varepsilon,u) \geq 0,$$

бо $u(x+\varepsilon) > u(x-\varepsilon)$.

Нехай $\pi(x,\varepsilon,u) \geq 0$, тоді

$$u(x) = \left(\frac{1}{2} + \pi(x,\varepsilon,u)\right)u(x+\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u)\right)u(x-\varepsilon) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}u(x+\varepsilon) + \frac{1}{2}u(x-\varepsilon). \tag{2.2}$$

Покладемо $\forall z > y$:

$$x = \frac{z+y}{2}, \quad \varepsilon = \frac{z-y}{2}.$$

Тоді із (2.2) одержимо

$$u\left(\frac{z+y}{2}\right) \geq \frac{1}{2}u(z) + \frac{1}{2}u(y). \tag{2.3}$$

А для неперервної функції $u(\cdot)$ співвідношення (2.3) означає опуклість вгору функції $u(\cdot)$. $\square$

Приклад 2.1 *Нехай строго несхильний до ризику приймаючий рішення із диференційовною функцією корисності грошей $u(x)$ має початковий капітал w і може втратити капітал D. Ймовірність втрати дорівнює $p \in (0,1)$. Можна купити страховий поліс. Нехай q це вартість одного страхового полісу, який повертає 1 долар при втраті. Треба визначити оптимальну кількість α страхових полісів. Оптимальність визначаєтьcя максимізацією середньої корисності капіталу. Оптимальне α^* знайдемо як розв'язок задачі*

$$\max_{\alpha \geq 0}[(1-p)u(w-\alpha q) + pu(w-\alpha q - D + \alpha)].$$

Із необхідних умов максимуму одержимо при $\alpha^* > 0$

$$-q(1-p)u'(w-\alpha^* q) + p(1-q)u'(w-\alpha^* q - D + \alpha^*) = 0, \tag{2.4}$$

а при $\alpha^* = 0$

$$-q(1-p)u'(w-\alpha^* q) + p(1-q)u'(w-\alpha^* q - D + \alpha^*) \leq 0, \tag{2.5}$$

Припустимо, що ціна q є **актуарно справедливою**, *тобто дорівнює середнім виплатам $q = 1 \cdot p$. Тоді із (2.5) маємо при $\alpha^* = 0$*

$$u'(w-D) \leq u'(w). \tag{2.6}$$

З іншого боку $u(x)$ строго опукла вгору, тому $u''(x) < 0$, а значить $u'(x)$ строго спадна функція. Тому

$$u'(w-D) > u'(w),$$

що суперечить (2.6). Отже $\alpha^* > 0$ *і*

$$u'(w - \alpha^* p) = u'(w - \alpha^* p - D + \alpha^*) \;\Rightarrow\; \alpha^* = D.$$

Цей же результат можна отримати іншим способом. Середній капітал, який отримає приймаючий рішення дорівнює

$$(1 - p)(w - \alpha q) + p(w - D - \alpha q + \alpha) = w - pD + \alpha(p - q).$$

При актуарно справедливій вартості полісу $p = q$*, і середній капітал буде дорівнювати* $w - pD$*. При* $\alpha = D$ *маємо капітал* $w - pD$ *з ймовірністю одиниця. Тому за означенням несхильності до ризику оптимальним рішенням буде* $\alpha^* = D$*.*

Введемо міру, за допомогою якої, будемо вимірювати ступінь несхильності до ризику.

Означення 2.4 *Для заданної двічі неперевно диференційовної функції корисності грошей* $u(\cdot)$ **коефіцієнт абсолютної несхильності до ризику Ерроу – Пратта** *для капіталу* x *визначається так*

$$r_A(x, u) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

Тепер ми можемо перейти до порівняння ступеня несхильності до ризику суб'єктів з різними функціями корисності грошей. Для заданих функцій корисності грошей $u_1(\cdot)$ і $u_2(\cdot)$ з'ясуємо, коли суб'єкт з функцією корисності грошей $u_2(\cdot)$ є більш несхильним до ризику ніж суб'єкт з функцією корисності грошей $u_1(\cdot)$.

Теорема 2.2 *Наступні твердження відносно більшої несхильності до ризику суб'єкта з функцією корисності грошей* $u_2(\cdot)$ *ніж суб'єкта з функцією корисності грошей* $u_1(\cdot)$ *еквівалентні:*

(i) $r_A(x,u_2) \geq r_A(x,u_1)$, $\forall x$.

(ii) Існує зростаюча, опукла вгору функція $\psi(\cdot)$ *така що*

$$u_2(x) = \psi(u_1(x)), \forall x.$$

(iii) $c(F,u_2) \leq c(F,u_1)$, $\forall F \in \mathcal{L}$.

(iv) $\pi(x,\varepsilon,u_2) \geq \pi(x,\varepsilon,u_1)$, $\forall x \in [a,+\infty), \forall \varepsilon > 0$.

(v) $\forall F \in \mathcal{L}$:

$$\int_a^\infty u_2(x)dF(x) \geq u_2(\bar{x}) \;\Rightarrow\; \int_a^\infty u_1(x)dF(x) \geq u_1(\bar{x}).$$

Доведення. (i)$\Leftrightarrow$(ii). Зауважимо, що функції $u_i(\cdot), i = 1,2$ двічі неперервно диференційовні, і для деякої зростаючої функції $\psi(\cdot)$ маємо $u_2(x) = \psi(u_1(x))$. Дійсно

$$u_2(x) = u_2(u_1^{-1}(u_1(x))) = \psi(u_1(x)),$$

де $u_1^{-1}(\cdot)$ це функція обернена до $u_1(\cdot)$.

Маємо

$$u_2'(x) = \psi'(u_1(x))u_1'(x),$$
$$u_2''(x) = \psi'(u_1(x))u_1''(x) + \psi''(u_1(x))(u_1'(x))^2.$$

Звідси одержимо

$$\frac{u_2''(x)}{u_2'(x)} = \frac{u_1''(x)}{u_1'(x)} + \frac{\psi''(u_1(x))}{\psi'(u_1(x))}u_1'(x) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; r_A(x,u_2) = r_A(x,u_1) - \frac{\psi''(u_1(x))}{\psi'(u_1(x))}u_1'(x).$$

Таким чином

$$r_A(x,u_2) \geq r_A(x,u_1) \;\Leftrightarrow\; \psi''(u) \leq 0,\; \forall u \;\Leftrightarrow$$

$\psi(\cdot)$ є опуклою вгору.

(ii)⇒(iii). Нехай $u_2(x) = \psi(u_1(x))$, де $\psi(\cdot)$ зростаюча, опукла вгору функція. Маємо

$$u_2(c(F,u_2)) = \int_a^\infty u_2(x)dF(x) =$$

$$= \int_a^\infty \psi(u_1(x))dF(x) = \mathrm{E}[\psi(\eta)], \tag{2.7}$$

де $\mathrm{E}[\cdot]$ це математичне сподівання, $\eta = u_1(X)$, X це випадкова величина з функцією розподілу F. Тоді за нерівністю Йенсена одержимо з (2.7)

$$u_2(c(F,u_2)) = \mathrm{E}[\psi(\eta)] \le \psi\left(\mathrm{E}[\eta]\right) = \psi\left(\int_a^\infty u_1(x)dF(x)\right) =$$

$$= \psi(u_1(c(F,u_1)) = u_2(c(F,u_1)).$$

Оскільки функція $u_2(\cdot)$ зростає, то $c(F,u_2) \le c(F,u_1)$.

(iii)⇒(ii). Нехай $c(F,u_2) \le c(F,u_1)$, $\forall F \in \mathcal{L}$. Ми знаємо, що $u_2(x) = \psi(u_1(x))$, де $\psi(\cdot)$ зростаюча функція. Використовуючи попередні позначення, одержимо

$$\mathrm{E}[\psi(\eta)] = \mathrm{E}[\psi(u_1(X))] = \int_a^\infty \psi(u_1(x))dF(x) = \int_a^\infty u_2(x)dF(x) =$$

$$= u_2(c(F,u_2)) \le u_2(c(F,u_1)) = \psi(u_1(c(F,u_1))) =$$

$$= \psi\left(\int_a^\infty u_1(x)dF(x)\right) = \psi(\mathrm{E}[\eta]).$$

Таким чином для функції $\psi(\cdot)$ виконується нерівність Йенсена, а значить функція $\psi(\cdot)$ є опуклою вгору.

(iii)⇒(v). Нехай $c(F,u_2) \le c(F,u_1)$, $\forall F \in \mathcal{L}$, і для деякого $\bar{x}$ маємо

$$\int_a^\infty u_2(x)dF(x) \ge u_2(\bar{x}), \ \forall F \in \mathcal{L}.$$

За означенням напевного еквівалента маємо

$$u_2(c(F,u_2)) = \int_a^\infty u_2(x)dF(x) \geq u_2(\bar{x}).$$

Тому $c(F,u_1) \geq c(F,u_2) \geq \bar{x}$. Значить

$$\int_a^\infty u_1(x)dF(x) = u_1(c(F,u_1)) \geq u_1(c(F,u_2)) \geq u_1(\bar{x}).$$

(v)$\Rightarrow$(iii). Нехай

$$\int_a^\infty u_2(x)dF(x) \geq u_2(\bar{x}) \;\Rightarrow\; \int_a^\infty u_1(x)dF(x) \geq u_1(\bar{x}),\; \forall F \in \mathcal{L}.$$

Покладемо $\bar{x} = c(F,u_2)$. Тоді

$$\int_a^\infty u_2(x)dF(x) = u_2(c(F,u_2)) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; u_1(c(F,u_1)) = \int_a^\infty u_1(x)dF(x) \geq u_1(c(F,u_2)),$$

а значить $c(F,u_2) \leq c(F,u_1), \forall F \in \mathcal{L}$, бо функція $u_1(\cdot)$ зростає.

(iii)$\Rightarrow$(iv). Нехай $c(F,u_2) \leq c(F,u_1), \forall F \in \mathcal{L}$. Розглянемо дві лотереї:

$$F_i : \quad \begin{array}{l} \mathrm{P}(X = x+\varepsilon) = \dfrac{1}{2} + \pi(x,\varepsilon,u_i), \\ \mathrm{P}(X = x-\varepsilon) = \dfrac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u_i), \end{array} \quad i = 1,2$$

Оскільки

$$u_i(c(F_i,u_i)) = \int_a^\infty u_i(y)dF_i(y) = u_i(x),\; i = 1,2,$$

то $x = c(F_1,u_1) = c(F_2,u_2)$. Тому із (iii) одержимо

$$c(F_1,u_2) \leq c(F_1,u_1) = c(F_2,u_2) \Rightarrow u_2(c(F_1,u_2) \leq u_2(c(F_2,u_2)).$$

Отже корисність лотереї F_2 буде більшою за корисність лотереї F_1 для суб'єкта з функцією корисності грошей $u_2(\cdot)$:

$$\left(\frac{1}{2}+\pi(x,\varepsilon,u_2)\right)u_2(x+\varepsilon)+\left(\frac{1}{2}-\pi(x,\varepsilon,u_2)\right)u_2(x-\varepsilon)\geq$$

$$\geq\left(\frac{1}{2}+\pi(x,\varepsilon,u_1)\right)u_2(x+\varepsilon)+\left(\frac{1}{2}-\pi(x,\varepsilon,u_1)\right)u_2(x-\varepsilon)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (\pi(x,\varepsilon,u_2)-\pi(x,\varepsilon,u_1))(u_2(x+\varepsilon)-u_2(x-\varepsilon)\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \pi(x,\varepsilon,u_2)\geq\pi(x,\varepsilon,u_1).$$

(iv)$\Rightarrow$(i). Із означення ймовірнісної премії маємо

$$u(x)=\left(\frac{1}{2}+\pi(x,\varepsilon,u)\right)u(x+\varepsilon)+\left(\frac{1}{2}-\pi(x,\varepsilon,u)\right)u(x-\varepsilon)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \pi(x,\varepsilon,u)=\frac{u(x)-(u(x+\varepsilon)+u(x-\varepsilon))/2}{u(x+\varepsilon)-u(x-\varepsilon)}. \tag{2.8}$$

Використаємо розклад

$$u(x+\varepsilon)=u(x)+u'(x)\varepsilon+\frac{1}{2}u''(x)\varepsilon^2+o(\varepsilon^2),$$

$$u(x-\varepsilon)=u(x)-u'(x)\varepsilon+\frac{1}{2}u''(x)\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)$$

і з (2.8) одержимо

$$\pi(x,\varepsilon,u)=\frac{-u''(x)\varepsilon^2/2-o(\varepsilon^2)}{2u'(x)\varepsilon+o(\varepsilon^2)}. \tag{2.9}$$

За припущенням (iv) маємо $\pi(x,\varepsilon,u_2)\geq\pi(x,\varepsilon,u_1)$. Підставимо у цю нерівність вирази із (2.9) і одержимо після перетворень

$$-\frac{u_2''(x)/2+o(\varepsilon^2)/\varepsilon^2}{2u_2'(x)+o(\varepsilon^2)/\varepsilon}\geq-\frac{u_1''(x)/2+o(\varepsilon^2)/\varepsilon^2}{2u_1'(x)+o(\varepsilon^2)/\varepsilon}. \tag{2.10}$$

При $\varepsilon\downarrow 0$ із (2.10) маємо

$$r_A(x,u_2)\geq r_A(x,u_1). \qquad \square$$

Приклад 2.2 *Нехай приймаючий рішення має для інвестування капітал W. На ринку є два активи: безризиковий, який дає 1\$ доходу на 1\$ інвестицій і ризиковий, який дає випадкову величину Z\$ на 1\$ інвестицій. Випадкова величина Z має функцію розподілу $F(z)$ і*

$$\mathrm{E}[Z] = \int_0^{+\infty} z dF(z) > 1.$$

Нехай приймаючий рішення є несхильним до ризику і тому його функція корисності грошей $u(x)$ опукла вгору. Нехай $\alpha + \beta = W$, де α це інвестиція у ризиковий актив, β це інвестиція у безризиковий актив. Потрібно знайти оптимальні інвестиції. Оскільки оптимальні інвестиції максимізують середню корисність, то маємо задачу

$$\max_{0 \le \alpha \le W} \int_0^{+\infty} u(W+(z-1)\alpha) dF(z), \text{ ми використали } \beta = W-\alpha.$$

Нехай функція $u(x)$ диференційовна і α^* це оптимальна інвестиція, тоді

$$\phi(\alpha^*) = \int_0^{+\infty} u'(W+(z-1)\alpha^*)(z-1) dF(z) \begin{cases} \le & 0, \quad \alpha^* = 0, \\ = & 0, \quad 0 < \alpha^* < W, \\ \ge & 0, \quad \alpha^* = W. \end{cases}$$

Якщо $\alpha^* = 0$, то

$$\phi(0) = u'(W) \left(\int_0^{+\infty} z dF(z) - 1 \right) > 0.$$

Тому $\alpha^* \neq 0$ при умові $\mathrm{E}[Z] > 1$, і несхильний до ризику приймаючий рішення обов'язково інвестує у ризиковий актив.

Нехай маємо два інвестори з функціями корисності грошей $u_1(x)$, $u_2(x)$, і нехай другий інвестор більш несхильний *до ризику. Покажемо, що* $\alpha_2^* < \alpha_1^*$*. Дійсно, при* $\alpha_i^* \in (0, W)$, $i = 1, 2$ *маємо*

$$\phi_1(\alpha_1^*) = \int_0^{+\infty} u_1'(W + (z-1)\alpha_1^*)(z-1)dF(z) = 0,$$

$$\phi_2(\alpha_2^*) = \int_0^{+\infty} u_2'(W + (z-1)\alpha_2^*)(z-1)dF(z) = 0.$$

Але за теоремою 2.2 маємо

$u_2(x) = \psi(u_1(x)),$ *де* $\psi(\cdot)$ *зростаюча, опукла вгору функція.*

Маємо

$$\phi_i'(\alpha) = \int_0^{+\infty} u_i''(W + (z-1)\alpha)(z-1)^2 dF(z) \le 0$$

Отже функції $\phi_i(\alpha), i = 1, 2$ *це спадні функції. Маємо*

$$\phi_2(\alpha_1^*) = \int\limits_0^{+\infty} \psi'(u_1(W+(z-1)\alpha_1^*))u_1'(W+(z-1)\alpha_1^*)(z-1)dF(z) =$$

$$= \int_{z<1} \psi'(u_1(W + (z-1)\alpha_1^*))u_1'(W + (z-1)\alpha_1^*)(z-1)dF(z) +$$

$$+ \int_{z>1} \psi'(u_1(W + (z-1)\alpha_1^*))u_1'(W + (z-1)\alpha_1^*)(z-1)dF(z) <$$

$$< \psi'(u_1(W)) \int_0^{+\infty} (z-1)u_1'(W + (z-1)\alpha_1^*)dF(z) =$$

$$= \psi'(u_1(W))\phi_1(\alpha_1^*) = 0 = \phi_2(\alpha_2^*).$$

Тому $\alpha_2^* < \alpha_1^*$.

ЗАДАЧІ

2.1. Приймаючий рішення має функцію корисності фон Неймана – Моргенштерна. Лотерея F_1 : $P\{X = 3\$\} = P\{X = 5\$\} = 1/2$ і лотерея F_2 : $P\{X = 3\$\} = 2/3$, $P\{X = 9\$\} = 1/3$ для нього еквівалентні. Чи може бути, що приймаючий рішення

(а) є строго несхильним до ризику,

(б) є нейтральним до ризику,

(в) є строго схильним до ризику?

2.2. Нехай приймаючий рішення з функцією корисності грошей $u(x) = \sqrt{x}$ має капітал 9\$. Лотерея F має вигляд: $P\{X = 0\$\} = P\{X = 7\$\} = 1/2$.

(а) За яку максимальну ціну приймаючий рішення купить лотерею F?

(б) За яку мінімальну ціну приймаючий рішення продасть лотерею F, якщо він її організує за рахунок свого початкового капіталу?

(в) За яку мінімальну ціну приймаючий рішення продасть лотерею F, якщо він її уже має?

2.3. Приймаючий рішення несхильний до ризику з функцією грошей $u(x)$ має капітал W. Лотерея F має вигляд: $P\{X = G\} = p$, $P\{X = B\} = 1 - p$.

(а) За яку максимальну ціну приймаючий рішення купить лотерею F?

(б) За яку мінімальну ціну приймаючий рішення продасть лотерею F, якщо він її уже має?

(в) Показати, що при сталому коефіцієнті абсолютної несхильності до ризику ціна купівлі і продажу лотереї F буде однакова.

2.4. Розглянемо таку гру: якщо гравець вибирає число a, то одержує додатково до свого капіталу w суму грошей a з ймовірністю $1/3$ і $-a$ з ймовірністю $2/3$. Яке число вибере гравець з функцією корисності грошей $u(x)$?

(a) $u(x) = \sqrt{x}$; (b) $u(x) = -e^{-\alpha x}$;
(c) $u(x) = -1/x$; (d) $u(x) = \ln x$;
(e) $u(x) = \alpha x - \beta x^2$; (f) $u(x) = \alpha\sqrt{x} + \beta x$.

2.5. Нехай приймаючий рішення з функцією корисності грошей $u(x) = \sqrt{x}$ має капітал 100\$. Лотерея F має вигляд: $P\{X = 0\$\} = \pi$, $P\{X = 20\$\} = 1 - \pi$. Ціна лотереї 5\$. При яких значеннях ймовірності π приймаючий рішення

(а) купить лотерею F?

(б) продасть лотерею F, якщо він її організує за рахунок свого початкового капіталу?

(в) продасть лотерею F, якщо він її уже має?

2.6. Строго несхильний до ризику інвестор з неперервно диференційовною функцією корисності грошей $u(x)$ має капітал W і з ймовірністю p може втратити капітал D. Пропонується страховий поліс ціною q, який відшкодовує 1 у випадку втрат. Показати: якщо $q > p$, то інвестор не буде страхувати всю можливу втрату D.

2.7. a) Розглянемо функцію $u(x) = \beta x^2 + \gamma x$. При яких умовах цю функцію можна розглядати як функцію корисності Бернуллі несхильного до ризику приймаючого рішення? Показати, що при такій функції корисності Бернуллі корисність лотереї F визначається її математичним сподіванням $m(F)$ і дисперсією $D(F)$.

b) Нехай функція корисності фон Неймана – Моргенштерна має вигляд $U(F) = m(F) - rD(F)$, $r > 0$. Показати, що ця функція корисності не має форму середньої корисності. Для цього навести приклад лотерей

$F: \ P\{X = x''\} = p$, $P\{X = x'\} = 1 - p$, $F': \ P\{X = x''\} = p'$, $P\{X = x'\} = 1 - p'$, де $x'' > x', p' > p$ але $U(F') > U(F)$.

2.8. Розглянемо споживача з початковим капіталом W і можливістю споживання в кінці кожного з двох періодів часу. Нехай $C_i, i = 1, 2$ – це капітал використаний на споживання в кінці i-го періоду, а корисність задається функцією $U(C_1, C_2) = u(C_1) + v(C_2)$, де $u(c), v(c)$ – зростаючі, угнуті і диференційовні функції. Позначимо через x заощадження за перший період, тоді $C_1 = W - x$, $C_2 = x$. Нехай

$$\max_x [u(W - x) + v(x)] = u(W - x_0) + v(x_0).$$

Розглянемо тепер іншу модель споживання: якщо споживач заощадив x на першому етапі, то його капітал для споживання на другому етапі дорівнює $x + Y$, де Y – це випадкова величина. Нехай

$$\max_x [u(W - x) + E[v(x + Y)]] = u(W - x^*) + E[v(x^* + Y)].$$

Показати: якщо $0 < x_0 < W$ і $E[v'(x_0 + Y)] > v'(x_0)$, тоді $x^* > x_0$.

2.9. Розглянемо два активи: безризиковий вартістю 1 гр.од., який дає 1 гр.од. доходу, і ризиковий вартістю 1 гр.од., який дає дохід a гр.од. з ймовірністю π, і дає дохід b гр.од. з ймовірністю $1 - \pi$. Капітал інвестора дорівнює 1 гр.од., портфель інвестора позначимо (x_1, x_2), $x_1 + x_2 = 1$, $x_1, x_2 \in [0, 1]$, де x_1 – це інвестиція у безризиковий актив, а x_2 – це інвестиція у ризиковий актив. Нехай інвестор має угнуту функцію корисності Бернуллі, а (x_1^*, x_2^*) – це оптимальний портфель, який максимізує середню корисність доходу.

(a) У термінах тільки a, b знайти прості необхідні умови того, що $x_1^* > 0$.

(б) У термінах тільки a, b і π знайти прості необхідні умови того, що $x_2^* > 0$.

(в) Нехай $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$, $a < 1$ і функція корисності Бернуллі диференційовна. Покажіть, що $\frac{dx_1^*}{da} \leq 0$.

(г) Нехай $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$, $a < 1$ і функція корисності Бернуллі диференційовна. Який знак має $\frac{dx_1^*}{d\pi}$?

2.10. Нехай фірма є нейтральною до ризику відносно прибутків. Перед фірмою стоять дві альтернативи. При першій альтернативі ціни є випадковими. При другій альтернативі вектор цін є невипадковим і дорівнює вектору середніх значень цін із першої альтернативи. Покажіть, що фірма яка максимізує середні прибутки віддасть перевагу першій альтернативі.

2.11. Розглянемо лотерею F : $P\{X = x+\varepsilon\} = P\{X = x-\varepsilon\} = 1/2$. Показати, що

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} c(F, u) = -r_A(x, u).$$

2.12. Відомо, що ризиковий актив дає дохід на одиницю інвестицій з розподілом $P(Z = 2) = P(Z = 10) = 1/2$, а безризиковий - β. Відомо, що інвестор вибрав портфель, який містить обидва активи. Функція корисності грошей інвестора $u(x) = \ln x$. В яких межах лежить β?

2.13. Відомо, що ризиковий актив дає дохід на одиницю інвестицій з розподілом $P(Z = 4) = \beta, P(Z = 1) = 1 - \beta$, а без ризиковий - 2. Відомо, що інвестор вибрав портфель, який містить обидва активи. Функція корисності грошей інвестора $u(x) = \ln x$. В яких межах лежить β?

2.14. Відомо, що ризиковий актив дає дохід на одиницю інвестицій з розподілом $P(Z = 4) = 1/4, P(Z = \beta) = 3/4$, а без ризиковий - 1. Відомо, що інвестор вибрав портфель, який містить обидва активи. Функція корисності грошей інвестора $u(x) = \ln x$. В яких межах лежить β?

2.15. Показати, що $4\pi'_\varepsilon(x, \varepsilon, u)|_{\varepsilon=0} = r_A(x, u)$.

2.16. Судновласник має функцію корисності грошей $u(x)$ з додатною спадною похідною. Капітал судновласника - 40000\$ і він може втратити у випадку аварії судна 10000\$.

(а) Нехай ймовірність аварії - 0.02 і відомо, що він застрахувався на суму 9000\$. Чи буде ціна страхування 1\$ більшою або меншою за 0.02\$? Застраховану суму він вибирає максимізуючи середню корисність капіталу.

(б) Нехай ціна страхування 1\$ дорівнює 0.02\$ і відомо, що він застрахувався на суму 11000\$. Чи буде ймовірність аварії більшою або меншою за 0.02? Застраховану суму він вибирає максимізуючи середню корисність капіталу.

(в) Нехай ймовірність аварії - 0.01 і відомо, що ціна страхування 1\$ дорівнює 0.02\$. Чи застрахує судновласник суму більшу або меншу за 10000\$? Застраховану суму він вибирає максимізуючи середню корисність капіталу.

2.17. Нехай R_1 і R_2 – це випадкова доходність кожного з двох активів. Припустимо, що R_1 і R_2 незалежні і однаково розподілені. Покажіть, що інвестор, який максимізує середню корисність доходу, розділить інвестиції між обома активами якщо він є несхильним до ризику, і вкладе весь інвестиційний капітал у один із активів, якщо він є схильним до ризику.

3 Порівняння ступеня несхильності до ризику відносно різних рівнів капіталу. Порівняння розподілів платежів.

Означення 3.1 *Функція корисності грошей $u(\cdot)$ виражає* **спадання абсолютної несхильності до ризику***, якщо*

$$r_A(x,u) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

є спадною функцією капіталу x.

Приймаючий рішення, який має таку властивість функції корисності грошей стає схильнішим до ризику, коли стає багатшим.

Розглянемо два рівні початкового капіталу $x_1 > x_2$. Приріст капіталу позначимо через z. Тоді відношення до ризику при капіталах x_1 і x_2 відповідно, можна описати за допомогою функцій

$$u_1(z) = u(x_1 + z) \text{ і } u_2(z) = u(x_2 + z).$$

Таким чином порівнювати відношення до ризику при різних рівнях капіталу можна порівнюючи функції корисності $u_1(\cdot)$ і $u_2(\cdot)$. Якщо функція корисності грошей $u(\cdot)$ виражає спадання абсолютної несхильності до ризику, тоді

$$r_A(z,u_2) = -\frac{u_2''(z)}{u_2'(z)} = -\frac{u''(x_2+z)}{u'(x_2+z)} >$$

$$> -\frac{u''(x_1+z)}{u'(x_1+z)} = -\frac{u_1''(z)}{u_1'(z)} = r_A(z,u_1), \tag{3.1}$$

і з Теореми 2.2 випливає

Теорема 3.1 *Наступні властивості еквівалентні:*
(i) Функція корисності грошей $u(\cdot)$ виражає спадання абсолютної несхильності до ризику.

(ii) Якщо $x_2 < x_1$, то для функції $u_2(z) = u(x_2 + z)$ існує зростаюча опукла вгору функція $\psi(\cdot)$ така, що

$$u_2(z) = \psi(u_1(z)) = \psi(u(x_1 + z)).$$

(iii) Для довільної лотереї $F(z)$ напевний еквівалент c_x, такий що

$$u(c_x) = \int u(x+z)dF(z) \tag{3.2}$$

має властивість: $x - c_x$ спадає за x.
(iv) Ймовірнісна премія $\pi(x, \varepsilon, u)$ спадає за x.
(v) Для довілної лотереї $F(z)$, і $x_1 > x_2$ маємо

$$\int u(x_2 + z)dF(z) \geq u(x_2) \;\Rightarrow\; \int u(x_1 + z)dF(z) \geq u(x_1).$$

Доведення. Із (i) випливає (3.1), а тому із еквівалентності тверджень (i), (ii) Теореми 2.2 маємо еквівалентність (i) і (ii). Достатньо показати еквівалентність відповідних тверджень Теореми 2.2 і Теореми 3.1. Покажемо еквівалентність твердження (iii) і відповідного твердження (iii) Теореми 2.2.

За означенням напевного еквіваленту маємо

$$u_i(c(F, u_i)) = \int u_i(z)dF(z),\; i = 1, 2.$$

Оскільки

$$u(c_{x_i}) = \int u(x_i + z)dF(z) = \int u_i(z)dF(z),\; i = 1, 2,$$

то

$$\begin{aligned} &u(c_{x_i}) = u_i(c(F, u_i)) = u(x_i + c(F, u_i)), \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; c_{x_i} = x_i + c(F, u_i), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Нехай $x_1 > x_2$. За (iii) Теореми 2.2. маємо $c(F, u_2) \leq c(F, u_1)$. Тому із (3.3) одержимо

$$\begin{aligned} &c(F, u_2) \leq c(F, u_1) \;\Leftrightarrow\; c_{x_2} - x_2 \leq c_{x_1} - x_1 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x_1 - c_{x_1} \leq x_2 - c_{x_2},\; \forall x_1 > x_2. \end{aligned}$$

Таким чином функція $x - c_x$ спадає.

За теоремою 2.2 при $x_1 > x_2$ маємо $\pi(x,\varepsilon,u_2) \geq \pi(x,\varepsilon,u_1)$. Із означення ймовірнісної премії маємо

$$u_i(x) = \left(\frac{1}{2} + \pi(x,\varepsilon,u_i)\right) u_i(x+\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u_i)\right) u_i(x-\varepsilon),$$

$$u(x+x_i) = \left(\frac{1}{2} + \pi(x+x_i,\varepsilon,u)\right) u(x+x_i+\varepsilon) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \pi(x+x_i,\varepsilon,u)\right) u(x+x_i-\varepsilon), \ i = 1,2.$$

Крім того $u_i(x) = u(x+x_i), i = 1,2$. Тому $\pi(x,\varepsilon,u_i) = \pi(x_i+x,\varepsilon,u)$. Значить

$$\pi(x+x_2,\varepsilon,u) \geq \pi(x+x_1,\varepsilon,u), \text{ при } x_1 > x_2.$$

Отже $\pi(x,\varepsilon,u)$ спадає за x.

(v) Маємо

$$\int u(x_2+z)dF(z) \geq u(x_2) \ \Leftrightarrow \ \int u_2(z)dF(z) \geq u_2(0) \ \Rightarrow$$

за теоремою 2.2

$$\Rightarrow \ \int u_1(z)dF(z) \geq u_1(0) \ \Leftrightarrow \ \int u(x_1+z)dF(z) \geq u(x_1). \qquad \square$$

Розглянемо тепер пропорційний приріст капіталу з x до $tx, t > 0$. Тоді при заданій функції корисності грошей $u(\cdot)$, заданому початковому капіталі x, відносний ризик можна описати за допомогою функції корисності $\tilde{u}(t) = u(tx)$. Початкове значення капіталу відповідає $t = 1$. Ступінь несхильності до ризику в околі точки $t = 1$ описується відношенням

$$-\frac{\tilde{u}''(1)}{\tilde{u}'(1)} = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}.$$

Означення 3.2 *Для заданої функції корисності грошей* $u(\cdot)$ **коефіцієнтом відносної несхильності до ризику** *при капіталі* x *називаеться величина*

$$r_R(x,u) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}.$$

Будемо говорити, що функція корисності грошей виражає властивість незростання відносної несхильності до ризику, якщо $r_R(x,u)$ є незростаючою функцією x.

Окільки $r_R(x,u) = xr_A(x,u)$, то із незростання за x коефіцієнта $r_R(x,u)$ випливає спадання за x коефіцієнта $r_A(x,u)$. Таким чином властивість незростання відносної несхильності до ризику більш сильне припущення ніж спадання абсолютної несхильності до ризику.

Теорема 3.2 *Наступні умови для функції корисності грошей* $u(\cdot)$ *еквівалентні:*

(i) $r_R(x,u)$ *спадає за* x.

(ii) Якщо $x_2 < x_1$ *то для функцій корисності* $u_2(t) = u(tx_2)$, $u_1(t) = u(tx_1)$ *існує зростаюча опукла вгору функція* $\psi(\cdot)$ *така, що* $u_2(t) = \psi(u_1(t))$.

(iii) Для заданого розподілу $F(t)$, $t > 0$ *напевний еквівалент* $\bar{c}_x$ *визначений як*

$$u(\bar{c}_x) = \int u(tx)dF(t)$$

є таким, що $\frac{x}{\bar{c}_x}$ *спадає.*

Доведення. Розглянемо функції корисності $u_i(t) = u(tx_i)$, $i = 1,2$, $x_2 < x_1$. Маємо

$$r_A(t,u_i) = -\frac{u_i''(t)}{u_i'(t)} = -\frac{x_i u''(tx_i)}{u'(tx_i)} = \frac{1}{t} r_R(tx_i,u), \; i = 1,2. \quad (3.4)$$

Значить

$$r_A(t,u_2) = \frac{1}{t} r_R(tx_2,u) > \frac{1}{t} r_R(tx_1,u) = r_A(t,u_1).$$

Отже умова (i) еквівалентна умові $r_A(t,u_2) > r_A(t,u_1)$, а за теоремою 2.2 ця умова еквівалетна існуванню зростаючої опуклої вгору функції $\psi(\cdot)$, такої що

$$u_2(t) = \psi(u_1(t)).$$

Таким чином $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Зафіксуємо лотерею $F(t), t > 0$ і позначимо $u_i(t) = u(tx_i)$, $i = 1, 2$, $x_2 < x_1$. За попередніми міркуваннями при $x_2 < x_1$ маємо

$$r_A(t,u_1) < r_A(t,u_2).$$

За теоремою 2.2 випливає, що $c(F,u_2) < c(F,u_1)$, де

$$u_i(c(F,u_i)) = \int u_i(t)dF(t) = \int u(tx_i)dF(t),\ i = 1, 2.$$

Але за означенням $\bar{c}_{x_i}$ маємо

$$u(\bar{c}_{x_i}) = \int u(tx_i)dF(t),\ i = 1, 2.$$

Тому

$$u(\bar{c}_{x_i}) = u_i(c(F,u_i)) = u(x_i c(F,u_i)),\ i = 1, 2.$$

Таким чином $\bar{c}_{x_i} = x_i c(F,u_i)$, $i = 1, 2$. Оскільки при $x_2 < x_1$ маємо $c(F,u_2) < c(F,u_1)$, то

$$\frac{x_1}{\bar{c}_{x_1}} = \frac{1}{c(F,u_1)} < \frac{1}{c(F,u_2)} = \frac{x_2}{\bar{c}_{x_2}}, \tag{3.5}$$

і функція $\frac{x}{\bar{c}_x}$ спадає за x.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Нехай $\frac{x}{\bar{c}_x}$ спадає за x. Із (3.5) випливає, що при $x_2 < x_1$ маємо $c(F,u_2) < c(F,u_1)$. Тоді за теоремою 2.2 і (3.4) маємо при $x_2 < x_1$

$$r_A(t,u_2) > r_A(t,u_1) \ \Rightarrow\ \frac{1}{t} r_R(tx_2,u) > \frac{1}{t} r_R(tx_1,u) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r_R(tx_2,u) > r_R(tx_1,u).$$

Тому маємо властивість спадання $r_R(x,u)$ за x. $\square$

Порівняння розподілів платежів.

До цього часу ми порівнювали функції корисності грошей. Тепер ми хочемо порівнювати розподіли платежів. Це можна зробити двома шляхами: порівнюючи рівні доходів, або порівнюючи дисперсію доходів (ризик). Будемо розглядати розподіли на множині капіталів, які зосереджені на проміжку $x \in [0, a]$.

Означення 3.3 *Будемо говорити, що розподіл $F(\cdot)$ є* **стохастичною домінантою першого порядку** *для розподілу $G(\cdot)$, якщо для довільної неспадної функції $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ маємо*

$$\int_0^a u(x)dF(x) \geq \int_0^a u(x)dG(x).$$

Теорема 3.3 *$F(\cdot)$ є стохастичною домінантою першого порядку для $G(\cdot)$ тоді і тільки тоді, коли $F(x) \leq G(x)$, $\forall x \in [0, a]$.*

Доведення. ($\Rightarrow$). Доведення проведемо від супротивного. Нехай

$$\int_0^a u(x)dF(x) \geq \int_0^a u(x)dG(x)$$

для довільної неспадної функції $u(\cdot)$ і нехай існує точка $\bar{x} \in [0, a]$ така, що $F(\bar{x}) - G(\bar{x}) > 0$. Візьмемо неспадну функцію

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \bar{x}, \\ 1, & x > \bar{x}. \end{cases}$$

Тоді

$$\int_0^a u(x)dF(x) \geq \int_0^a u(x)dG(x) \;\Rightarrow\; 1 - F(\bar{x}) \geq 1 - G(\bar{x}) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; F(\bar{x}) - G(\bar{x}) \leq 0,$$

що суперечить нашому припущенню.

($\Leftarrow$). Нехай $F(x) \leq G(x)$, $\forall x \in [0,a]$. Достатньо показати, що
$$\int_0^a u(x)dF(x) \geq \int_0^a u(x)dG(x)$$
для довільної диференційовної неспадної функції $u(x)$. Маємо для $H(x) = F(x) - G(x)$
$$\int_0^a u(x)dF(x) - \int_0^a u(x)dG(x) = \int_0^a u(x)dH(x) =$$
$$= u(x)H(x)|_0^a - \int_0^a u'(x)H(x)dx =$$
$$= -\int_0^a u'(x)[F(x) - G(x)]dx \geq 0. \ \Box$$

Приклад 3.1 *Розглянемо таку складену лотерею. На першому етапі маємо дохід X з розподілом $G(x)$. Після отримання доходу x, на другому етапі маємо дохід $x + Z$, де Z дохід з розподілом $H_x(z)$, з $H_x(0) = 0$. Позначимо $F(\cdot)$ зведений розподіл. Тоді для довільної неспадної функції $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ одержимо*
$$\int u(x)dF(x) = \int \left[\int u(x+z)dH_x(z)\right] dG(x) \geq \int u(x)dG(x).$$
Тому розподіл $F(x)$ є стохастичною домінантою першого порядку для $G(x)$. Має місце і обернене твердження.

Розглянемо тепер розподіли з однаковим середнім.

Означення 3.4 *Для $F, G \in \mathcal{L}$ з $\int_0^a xdF(x) = \int_0^a xdG(x)$, $F(\cdot)$ є* **стохастичною домінантою другого порядку** *для розподілу $G(\cdot)$, якщо для довільної неспадної опуклої вгору функції $u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ маємо*
$$\int_0^a u(x)dF(x) \geq \int_0^a u(x)dG(x).$$

Теорема 3.4 *Для того, щоб функція розподілу* $F(\cdot)$ *була стохастичною домінантою другого порядку для* $G(\cdot)$ *необхідно і достатньо, щоб*

$$\int_0^x G(t)dt \geq \int_0^x F(t)dt,\ \forall x \in [0, a].$$

Доведення. $(\Rightarrow)$. Нагадаємо, що

$$\int_0^a xdF(x) = \int_0^a xdG(x),\ F(0) = G(0) = 0,\ F(a) = G(a) = 1.$$

Доведення проведемо від супротивного. Нехай для довільної неспадної, опуклої вгору функції $u(x)$ маємо

$$\int_0^a u(x)dF(x) \geq \int_0^a u(x)dG(x),$$

і існує таке $\tilde{x}$, що

$$\int_0^{\tilde{x}} G(t)dt < \int_0^{\tilde{x}} F(t)dt.$$

Розглянемо функцію

$$u(x) = \begin{cases} x - \tilde{x}, & x \leq \tilde{x}, \\ 0, & x > \tilde{x}. \end{cases}$$

Для цієї функції маємо

$$\int_0^{\tilde{x}} (x - \tilde{x})dF(x) \geq \int_0^{\tilde{x}} (x - \tilde{x})dG(x).$$

Інтегруючи частинами одержимо

$$(x - \tilde{x})F(x)|_0^{\tilde{x}} - \int_0^{\tilde{x}} F(x)dx \geq (x - \tilde{x})G(x)|_0^{\tilde{x}} - \int_0^{\tilde{x}} G(x)dx.$$

Звідси

$$\int_0^{\tilde{x}} G(x)dx \geq \int_0^{\tilde{x}} F(x)dx,$$

що суперечить вибору $\tilde{x}$.

($\Leftarrow$). Достатньо довести твердження для диференційовних функцій $u(x)$. Одержимо, двічі інтегрую чи частинами

$$\int_0^a u(x)dF(x) - \int_0^a u(x)dG(x) = u(x)[F(x) - G(x)]|_0^a +$$

$$+\int_0^a (G(x)-F(x))u'(x)dx = u'(x)\left(\int_0^x G(t)dt - \int_0^x F(t)dt\right)\Big|_0^a -$$

$$-\int_0^a u''(x)\left(\int_0^x G(t)dt - \int_0^x F(t)dt\right)dx \geq 0.$$

Тут ми використали опуклість вгору функції $u(x)$ і рівність

$$\int_0^a G(t)dt - \int_0^a F(t)dt = t(G(t) - F(t))|_0^a -$$

$$-\int_0^a tdG(t) + \int_0^a tdF(t) = 0. \ \Box$$

Приклад 3.2 *Розглянемо таку складену лотерею. На першому етапі маємо випадковий дохід X з розподілом $F(\cdot)$. На другому етапі ми рандомізуємо всі можливі доходи x так, що кінцевий дохід буде дорівнювати $x + Z$, де Z має розподіл $H_x(z)$ із нульовим середнім. Таким чином*

$$\mathrm{E}[X + Z] = \mathrm{E}[X].$$

Нехай зведена лотерея позначена $G(\cdot)$. Тоді говорять, розподіл $G(\cdot)$ це **розсіювання $F(\cdot)$, що зберігає середнє значення**. *Таким чином*

$$\int_0^a xdG(x) = \int_0^a xdF(x)$$

і для опуклої вгору функції $u(\cdot)$ маємо

$$\int u(x)dG(x) = \int \left(\int u(x+z)dH_x(z)\right)dF(x) \leq$$

$$\leq \int u\left(\int (x+z)dH_x(z)\right)dF(x) = \int u(x)dF(x).$$

Отже $F(\cdot)$ є стохастичною домінантою другого порядку для $G(\cdot)$. Має місце і обернене твердження: якщо $F(\cdot)$ це стохастична домінанта другого порядку для $G(\cdot)$, то існує такий розподіл $H_x(z)$, $\int zdH_x(z) = 0$, що $G(\cdot)$ є розсіюванням $F(\cdot)$ що зберігає середнє значення.

ЗАДАЧІ

3.1. Нехай функція корисності грошей Бернуллі $u(x)$ інвестора виражає спадання абсолютної несхильності до ризику. Розглядається модель інвестування: (α, β), $\alpha+\beta = w$, де w – це інвестиційний капітал, α – це доля інвестицій у ризиковий актив, який дає Z гр.од. доходу на 1 гр.од. інвестицій, Z – випадкова величина з функцією розподілу $F(z)$ і $\int zdF(z) > 1$, β – це доля інвестицій у безризиковий актив, який дає 1 гр.од. доходу на 1 гр.од. інвестицій. Показати, що при зростанні інвестиційного капіталу w буде зростати доля інвестицій у ризиковий актив.

3.2. Нехай споживання відбувається у два етапи, і на першому етапі споживач має капітал w. Позначимо через $c_i, i = 1,2$ рівень споживання на першому і відповідно на другому етапі. Рівень корисності споживання задається функцією $u(c_1, c_2) = u(c_1) + v(c_2)$, де функції $u(x), v(x)$ строго зростають, угнуті і диференційовні. Нехай x – це заощадження споживача за перший період, тоді $c_1 = w - x, c_2 = x$. Позначимо через x_0 оптимальне значення x у задачі

$$\max_x [u(w-x) + v(x)].$$

Введемо невизначеність у дану економіку. Якщо споживач заощадив x на першому етапі, то його капітал на другому етапі задається величиною $x + y$, де y – це випадкова величина. Нехай x^* – це розв'язок задачі

$$\max_x [u(w - x) + E[v(x + y)]].$$

(а) Нехай $0 < x_0 < w$. Показати: якщо $E[v'(x_0 + y)] > v'(x_0)$, тоді $x^* > x_0$.

(б) Визначимо **коефіцієнт абсолютної розсудливості** для функції корисності грошей $v(\cdot)$ при рівні капіталу x так: $p(x, v) = -v'''(x)/v''(x)$. Показати: якщо $p(x, v_1) \le p(x, v_2), \forall x$, тоді із $E[v_1'(x_0 + y)] > v_1'(x_0)$ випливає $E[v_2'(x_0 + y)] > v_2'(x_0)$.

(в) Показати: якщо $v'''(x) > 0, \forall x$, і $E[y] = 0$, тоді $E[v'(x + y)] > v'(x), \forall x$.

(г) Показати: якщо функція корисності грошей $v(x)$ відображає спадання абсолютної несхильності до ризику, тоді $p(x, v) > r_A(x, v), \forall x$.

3.3. Нехай в умовах задачі **3.1** $r_R(x, u)$ зростає по x. Покажіть, що тоді $\gamma = \alpha/x$ спадає по x. Аналогічно, якщо $r_R(x, u)$ спадає по x, тоді $\gamma = \alpha/x$ зростає по x.

3.4. Нехай $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ – це строго зростаюча функція корисності грошей Бернуллі. Показати, що

(а) $r_R(x, u) = \rho, \rho \ne 1, \forall x \Leftrightarrow u(x) = \beta x^{1-\rho} + \gamma$, $\beta > 0, \gamma \in \mathbb{R}$.

(б) $r_R(x, u) = 1, \forall x \Leftrightarrow u(x) = \beta \ln x + \gamma, \beta > 0, \gamma \in \mathbb{R}$.

3.5. Нехай функції корисності грошей $u^*(x)$ і $u(x)$ зростають, угнуті і диференційовні, $x \in [0, r]$. Будемо говорити, що функція корисності грошей $u^*(x)$ виражає строго більшу несхильність до ризику ніж функція корисності грошей $u(x)$ тоді і тільки тоді, коли існують стала $k > 0$ і незростаюча, угнута функція $v(\cdot)$ такі що $u^*(x) = ku(x) + v(x)$.

(а) Показати: якщо $u^*(x)$ виражає строго більшу несхильність до ризику ніж функція корисності грошей $u(x)$, тоді $r_A(x, u^*) \geq r_A(x, u)$.

(б) Показати: якщо $x \in [0, +\infty)$ і функція $u(\cdot)$ обмежена, тоді $u^*(x) = ku(x) + c$, $c = const$ – це єдина функція корисності грошей яка виражає строго більшу несхильність до ризику ніж функція корисності грошей $u(x)$.

3.6. Припустимо, що приймаючий рішення має справу з двоперіодною задачею інвестування. У момент часу $t = 0, 1$ його капітал w_t потрібно розподілити між безпечним активом з доходом R від 1 гр.од. інвестицій і ризиковим активом з випадковим доходом x від 1 гр.од. інвестицій. Нехай α_t – це доля інвестицій у ризиковий актив у момент $t = 0, 1$, а x_t, $t = 1, 2$ – це доход від ризикового активу. Капітал w_t у моменти часу $t = 1, 2$ формується так

$$w_t = [(1 - \alpha_{t-1})R + \alpha_t x_t]w_{t-1}.$$

Метою приймаючого рішення є максимізація середньої корисності кінцевого капіталу w_2. Припустимо, що випадкові величини x_1 і x_2 незалежні і однаково розподілені. Доведіть, що оптимальним вибором буде $\alpha_0 = \alpha_1$, якщо функція корисності грошей інвестора виражає сталу відносну несхильність до ризику рівну $0 < \rho < 1$. Покажіть, що цей вибір буде не оптимальним при сталій абсолютній несхильності до ризику.

3.7. Нехай функція корисності грошей інвестора має вигляд $u(x) = -\exp\{-\gamma x\}$, $(\gamma > 0)$. Свій капітал W інвестор ділить між безризиковим активом із доходністю R і ризиковим активом із випадковою доходністю Z. Доходність це дохід на одну грошову одиницю інвестування. Можна брати кредит на довільну суму під відсоток R. Інвестор максимізує середню корисність доходу. Доведіть, що при будь-якій величині капіталу W інвестор вкладе у ризиковий актив однакову суму грошей.

3.8. Нехай функція корисності грошей інвестора має вигляд $u(x) = x^\gamma$, $(0 < \gamma < 1)$, або $u(x) = -x^{-\gamma}$, $(\gamma > 0)$, або $u(x) = \ln x$. Свій капітал W інвестор ділить між безризиковим активом із доходністю R і ризиковим активом із випадковою доходністю Z. Інвестор максимізує середню корисність доходу. Доведіть, що при будь-якій величині капіталу W інвестор вкладе у ризиковий актив однакову частку капіталу.

3.9. Нехай інвестор може вкладати гроші лише у ризиковий і безризиковий активи. Як змінюється величина інвестицій у ризиковий актив при зростанні інвестиційного капіталу, якщо функція корисності грошей інвестора $u(x)$ має вигляд:

(a) $u(x) = \sqrt{x}$; (b) $u(x) = -\exp\{-ax\}, a > 0$;
(c) $u(x) = -x^{-1}$; (d) $u(x) = \ln x$.

3.10. Доведіть, що якщо функція корисності грошей $u(x)$ має похідні до третього порядку включно і виражає спадання абсолютної несхильності до ризику, то $u'''(x) \geq 0$. Покажіть, що обернене твердження невірне.

3.11. Наведіть приклади функції корисності грошей, яка виражає спадання, зростання або сталість абсолютної і відносної несхильності до ризику.

3.12. Нехай функція корисності грошей інвестора $u(x)$ виражає зростання абсолютної несхильності до ризику. Свій капітал W інвестор ділить між безризиковим активом із доходністю R і ризиковим активом із випадковою доходністю Z. Інвестор максимізує середню корисність доходу. Нехай $\alpha(R)$ – це оптимальна частка капіталу інвестована у ризиковий актив і $0 < \alpha(R) < 1$. Покажіть, що при цих умовах $d\alpha(R)/dR < 0$, тобто зростання доходності безризикового активу приводить до зменшення частки інвестицій у ризиковий актив.

3.13. Якщо функція розподілу $F(x)$ є стохастичною домінантою першого порядку для функції розподілу $G(x)$ то $\int_0^a x\,dF(x) \geq \int_0^a x\,dG(x)$. Навести приклад, коли $\int_0^a x\,dF(x) \geq \int_0^a x\,dG(x)$ але функція розподілу $F(x)$ не є стохастичною домінантою першого порядку для функції розподілу $G(x)$.

3.14. Нехай випадкові величини ξ і η мають неперервні функції розподілу $F(x)$ і $G(x)$ відповідно. Випадкові величини ξ і η задовольняють умову $\xi \geq_{st1} \eta$ якщо існують дві випадкові величини $\tilde{\xi}$ і $\tilde{\eta}$, визначені на одному і тому ж ймовірнісному просторі, такі що розподіл ξ співпадає з розподілом $\tilde{\xi}$, розподіл η співпадає з розподілом $\tilde{\eta}$ і $P(\tilde{\xi} \geq \tilde{\eta}) = 1$. (**Вказівка**. При доведенні необхідності розгляньте випадкові величини $\tilde{\xi} = F^{-1}(\zeta)$ і $\tilde{\eta} = G^{-1}(\zeta)$, де $F^{-1}(x)$ і $G^{-1}(x)$ – це функції обернені до $F(x)$ і $G(x)$ відповідно, а випадкова величина ζ має рівномірний розподіл на $[0, 1]$.)

3.15. Якщо $\xi \geq_{st1} \eta$ і неперервна функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго зростає (спадає), тоді $g(\xi) \geq_{st1} g(\eta)$ $(g(\eta) \geq_{st1} g(\xi))$.

3.16. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ це незалежні випадкові величини, $\eta_1, \ldots,$ η_n це незалежні випадкові величини і $\xi_i \geq_{st1} \eta_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \geq_{st1} \sum_{i=1}^{n} \eta_i.$$

3.17. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ це незалежні випадкові величини, $\eta_1, \ldots,$ η_n це незалежні випадкові величини і $\xi_i \geq_{st1} \eta_i$, $i = 1, \ldots, n$. Якщо функція $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ строго зростає по кожному аргументу x_i, $i = 1, \ldots, n$, тоді

$$\phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \geq_{st1} \phi(\eta_1, \ldots, \eta_n).$$

3.18. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ це незалежні випадкові величини, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ це незалежні випадкові величини і $\xi_i \geq_{st1} \eta_i$, $i = 1, \ldots, n$, тоді

$$\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \geq_{st1} \max\{\eta_1, \ldots, \eta_n\},$$
$$\min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \geq_{st1} \min\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}.$$

3.19. Нехай випадкові величини ξ і η мають неперервні функції розподілу. Якщо $\xi \geq_{st1} \eta$ і $E[\xi] = E[\eta]$, тоді $\xi =_{st1} \eta$.

3.20 Якщо ξ і η – це невід'ємні випадкові величини з абсолютно неперервними функціями розподілу і $\xi \geq_{hr} \eta$, тоді $\xi \geq_{st1} \eta$.

3.21. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – незалежні невід'ємні випадкові величини з абсолютно неперервними функціями розподілу, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ – незалежні невід'ємні випадкові величини з абсолютно неперервними функціями розподілу і $\xi_i \geq_{hr} \eta_i$, $i = 1, \ldots, n$, тоді $\min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \geq_{hr} \min\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$.

3.22. Говорять, що функція розподілу $G(x)$, $x \in [0, a]$ є елементарним зростанням ризику для функції розподілу $F(x)$, $x \in [0, a]$ якщо для деяких $0 < x' < x'' < a$ маємо $G(x) = F(x), \forall x \in [0, x'] \cup (x'', a]$, $F(x'' + 0) - F(x') = G(x' + 0) - G(x') + G(x'' + 0) - G(x'')$, $\int_0^a x dF(x) = \int_0^a x dG(x)$. Довести, що при цьому $F(x)$ буде стохастичною домінантою 2-го порядку для $G(x)$.

3.23. Нехай ξ невід'ємна випадкова величина, $E[\xi] = 1$ і $\eta = \alpha\xi + (1 - \alpha)$, $\alpha \in (0, 1)$. Показати, що $\eta \geq_{st2} \xi$.

3.24. Якщо $\xi \geq_{st2} \eta$ і угнута функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не спадає, тоді $g(\xi) \geq_{st2} g(\eta)$.

3.25. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ це незалежні випадкові величини, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ це незалежні випадкові величини і $\xi_i \geq_{st2} \eta_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \geq_{st2} \sum_{i=1}^{n} \eta_i.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Mas-Colell, A.* Microeconomic Theory/ A. Mas-Colell, M.D. Whinston, J.R. Green. - Oxford University Press, 1995.

2. *Varian, H.R.* Microeconomic Analysis/ H.R. Varian. - W.W. Norton & Company, Inc. 1992.

3. *Varian, H.R.* Intermediate Microeconomics. A Modern Approach. Eighth Edition.- W.W. Norton & Company, 2009.