Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет

Олександра Десятерик

Методичні вказівки до практичних занять з дискретної математики

Київ–2024

Десятерик О.О. Методичні вказівки до практичних занять з дискретної математики. – К., 2024. – 85 с.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, Р. Є. Ямненко;
к-т техн. наук, С. В. Яковлєв.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол № 14 від 2 травня 2024 року)

Зміст

Вступ

У даному навчальному виданні наведені теми для практичних занять, з курсу «Дискретна математика», що викладається на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

У посібнику наведено умови задач для аудиторної роботи, та задачі для домашньої роботи. Також для кожного розділу (заняття) наведено детальні розв'язання основних типів задач, та за необхідності подано теоретичні відомості.

У даних методичних рекомендаціях подано матеріал з початків комбінаторики та деяких методів комбінаторного аналізу, також значну увагу присвячено базовим поняттям теорії графів, розглядаються різні типи бінарних відношень, булеві функції та деякі інші конструкції.

У розділі «Література» наведено список джерел як теоретичного так і практичного спрямування, які допоможуть читачу додатково розширити і поглибити свої знання з дискретної математики.

Навчальне видання «Методичні вказівки до практичних занять з дискретної математики» відповідає ОП «Комп'ютерна математика» для бакалаврів.

Дане видання буде корисним також для студентів молодших курсів інших освітніх програм, які вивчають дискретну математику.

1 Рівнопотужні множини

Рівнопотужними множинами називаються множини A та B для яких існує бієкція з A у B.

Задача 1. *Користуючись лише означенням рівнопотужних множин доведіть, що дві скінченні множини рівнопотужні тоді і лише тоді, коли вони містять рівну кількість елементів.*

Розв'язання. Нехай A та B — скінченні множини.

Нехай дані множини рівнопотужні, $A \sim B$. Тоді за означенням рівнопотужних множин існує бієкція $\varphi : A \to B$. Між скінченними множинами існує бієкція тоді і тільки тоді, коли вони рівнопотужні. Тому множини A та B є рівнопотужними, $|A| = |B|$.

Нехай множини A та B містять однакову кількість елементів. Оскільки ці множини скінченні і мають однакову кількість елементів, то вони є рівноптужними. Таким чином між множинами A та B існує буєкція і за означенням вони є рівнопотужними.

Задача 2. *Користуючись лише означенням рівнопотужних множин доведіть, що жодна непорожня скінченна множина не рівнопотужна множині усіх своїх підмножин.*

Розв'язання. Нехай непорожня множина $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ містить n елементів, тобто $|A| = n$.

Покажемо, що множина потужності n містить 2^n підмножин. Розглянемо деяку підмножин $B \subset A$. Для кожного елемента $a_i \in A$ визначаємо чи підмножина B містить його чи ні. Можна сказати, що кожному елементу множини A ставиться у відповідність 0, якщо елемент належить у підмножині B та 1, якщо елемент належить підмножині B. Таким чином кожна підмножина B задається деяким вектором довжини n, елементами якого є $\{0, 1\}$. Тоді бачимо, що кількість підмножин множини A збігається з кількістю таких векторів. Очевидно, що кількість векторів такого типу дорівнює 2^n.

Скористаємося задачею 1, у якій доведено, що дві скінченні множини рівнопотужні тоді і тільки тоді, коли вони містять рівну кількість елементів.

Тобто нам достатньо показати, що $n \neq 2^n$ для довільного $n > 0$. Останнє твердження очевидне, оскільки $2^n > n$ (це можна довести за індукцією по n).

Задача 3. *Доведіть, що множина є нескінченною тоді й лише тоді, коли вона рівнопотужна власній підмножині.*

Розв'язання. Нагадаємо, що власною називають непорожню підмножину множини A яка не збігається з самою множиною A.

Необхідність. Нехай A є нескінченною множиною. Покажемо, що A містить нескінченну підмножину. Розглянемо підмножину $B = A \setminus \{a\}$, $a \in A$. Підмножина B очевидно є власною, та нескінченною, тому A та B – рівнопотужні. Зауважимо, що якщо A є зліченною (континуальною) то множина B є зліченною (континуальною), оскільки відкидання одного елемента з не змінює тип множини.

Достатність. Очевидно, що жодна скінченна множина не ізоморфна жодній своїй власній підмножині бо кожна власна підмножина $B \subsetneq A$ містить не всі елементи з A тобто $|B| \lneq |A|$. Тоді A – нескінченна.

1.1 Аудиторні завдання 1

1. Доведіть, що кожна нескінченна множина містить зліченну підмножину.

2. Доведіть, що об'єднання нескінченної множини A з довільною не більш ніж зліченною множиною рівнопотужне множині A.

3. Доведіть, що об'єднання скінченного числа зліченних множин є зліченною множиною.

4. Доведіть, що декартів добуток скінченного числа зліченних множин є зліченною множиною.

5. Доведіть, що множина усіх многочленів від однієї змінної з цілими коефіцієнтами є зліченною.

6. Доведіть, що довільна множина цифр “8” на площині, які попарно не перетинаються, є не більш, ніж зліченною.

7. Доведіть, що множина усіх нескінченних послідовностей 0 та 1 рівнопотужна множині усіх нескінченних послідовностей 0, 1, 2 та 3.

8. Доведіть, що множини точок відрізка та квадрата рівнопотужні.

9. Знайдіть потужність множини всіх послідовностей 0 та 1.

1.2 Домашні завдання 1

1. Доведіть, що множина усіх алгебраїчних чисел (тобто тих комплексних чисел, кожне з яких є коренем деякого многочлена з цілими коефіцієнтами) є зліченною.

2. Доведіть, що множина точок розриву монотонно неспадної функції є не більш ніж зліченною.

3. Доведіть, що довільна множина літер “T” на площині, які попарно не перетинаються, є не більш, ніж зліченною.

4. Вкажіть бієкцію між множинами $[0, 1]$ та $[0, 1)$.

5. Доведіть, що множина усіх нескінченних послідовностей 0 та 1 рівнопотужна множині усіх нескінченних послідовностей 0, 1 та 2.

6. Нехай задано розбиття відрізка на дві підмножини. Доведіть, що хоча б одна з них рівнопотужна відрізку.

2 Основні правила комбінаторики

Часто кажуть про два основні правила комбінаторики: правило додавання (суми) та правило множення (добутку).

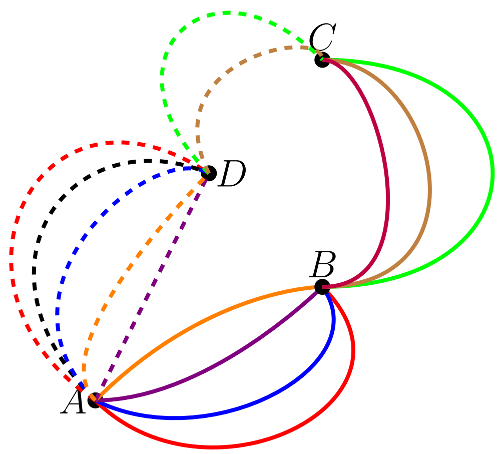
Розглянемо дві множини M та N, відповідних потужностей m та n.

*Правило множення (**"і"**).* Нехай потрібно обрати один елемент з множини M **і** один елемент з множини N. Це можна зробити $m \cdot n$ способами.

*Правило додавання (**"або,... або"**).* Нехай потрібно обрати **або** один елемент з множини M, **або** один елемент з множини N. Це можна зробити $m + n$ способами.

Розглянемо як застосовуються ці правила на прикладі наступної задачі.

Задача 4. *Скільки існує шляхів з міста A у місто C? (Якщо заборонено двічі використовувати одну й ту саму дорогу.)*



Розв'язання. Для початку з'ясуємо скільки існує шляхів з міста A у місто C, які проходять через місто B. Зауважимо, що такі шляхи складаються з двох доріг: догори з A у B та догори з B у C.

Спершу можна обрати довільну з доріг, які ведуть з A у B, що можна зробити чотирма способами. Очевидно, що як другу частину шляху, для кожної з чотирьох доріг першої частини шляху ми можемо обрати довільну з трьох доріг, що ведуть з B у C. Тобто маємо для кожної з чотирьох доріг по три можливі продовження, що сумарно дорівнює $3 \cdot 4 = 12$ шляхам. Тут кількість шляхів отримано множенням кількості доріг першої частини на кількість доріг другої частини, оскільки дорого першої та другої частин шляху обираються *незалежно* (для кожної дороги з першої частини можна обрати *довільну* дорогу з другої частини). *Тобто тут ми застосували правило множення.*

Далі, очевидно, нам необхідно підрахувати кількість шляхів з A у C, що проходять через місто D. Тут міркування є аналогічними до попередніх. Тобто для кожної дороги з п'яти доріг з A у D, для продовження шляху, можна обрати довільну з двох доріг, що ведуть з D у C. Таким чином загальна кількість шляхів з A в C через D, обчислюється за правилом множення $5 \cdot 2 = 10$ шляхів.

Зрозуміло, що залишилося підрахувати скільки шляхів з A у C є разом тих, що проходять через B та тих, що проходять через D. Зауважимо, що ми можемо обрати *або* шлях через B, *або* через D (тільки один з цих двох варіантів, тобто вони залежні один від одного, в тому сенсі, що обравши один варіант проходження шляху через проміжне місто, одночасно другий обрати неможливо). Тобто обрання шляху через B не дає нам йти через D і навпаки. Тому у цьому випадку ми маємо обчислити суму кількостей шляхів, для цих двох варіантів руху $12 + 10 = 22$ шляхи. *Тут ми вже використали правило додавання.*

Таким чином для розв'язання задачі ми скористалися двома основними правилами: *множення* двічі та один раз *додавання*: $4 \cdot 3 + 5 \cdot 2$. Тобто всього існує 12 шляхів з міста A у місто C.

Задача 5. *Скільки є способів викласти в ряд сім куль різного кольору?*

Розв'язання. Відповісти на питання – це те саме, що з'ясувати кількість перестановок з семи елементів. Тож підрахуємо кількість перестановок. У ряду є початок та кінець, тобто ми можемо пронумерувати місця на які ми викладатимемо кулі. Тоді на перше місці ми можемо покласти довільну з семи куль, на друге місце вже – довільну з шести (бо одна вже використана), на третє місце – одну з п'яти, і т.д. Таким чином на передостаннє місце ми можемо покласти одну з двох куль, а на останнє місце, залишається тільки одна куля. Вибір кулі для кожного з місць здійснюється незалежно, тому використовуємо правило множення. Тоді, всього є $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 7!$ перестановок з семи елементів. Тобто є $7!$ різних способів викласти сім різних кіль в ряд.

Задача 6. *Дано три зелені, дві фіолетові, одну жовту та одну червону кулі. Кулі одного кольору розрізнити неможливо. Скільки існує різних способів викласти їх в ряд?*

Розв'язання. Припустимо, що всі кулі пронумеровані.

Тоді б дана задача зводиться до попередньої, тобто поставити в ряд сім так пронумерованих куль є $7!$ способів, бо такі кулі одного кольору ми вже можемо розрізнити. Але в ці $7!$ способів входять способи, які є однаковими у випадку видалення номерів з куль. Наприклад, наступний спосіб однаковий з початковою розстановкою

Очевидно, що повторні способи розстановки куль отримуємо коли міняємо кулі одного кольору але з різними номерами. Оскільки є три зелені кулі, то отримуємо $3!$ однакових варіантів. Та для двох фіолетових куль отримуємо $2!$.

Для відкидання повторів, треба відкинути повторні варіанти, а оскільки зелені та фіолетові кулі розставляються незалежно одна від одної, то необхідно поділити на відповідні кількості повторів для отримані для кожного з цих кольорів куль. Тобто остаточно маємо $\frac{7!}{3!2!} = 420$ різних способів розставити дані кулі в ряд.

Задача 7. *У кафе продають три різновиди супів, п'ять варіантів основної страви та десять різновидів салатів. Скільки різних меню-дня можна запропонувати відвідувачам (меню-дня складається з супу, основної страви та салату)?*

Розв'язання. Для формування меню-дня необхідно обрати по одній страві кожного типу. Тому, скористаємося правилом множення. Тобто, суп можна обрати одним з трьох способів, основну страву – одним з п'яти і салат – одним з десяти, тому усього маємо $3 \cdot 5 \cdot 10 = 150$ різних меню-дня можна сформувати.

Задача 8. *На прилавку кафе хочуть виставити в ряд 12 тортів. Скільки існує різних варіантів виставити ці торти?*

Розв'язання. Очевидно, що перший торт обираємо довільний з 12-ти, наступний довільний з 11-ти, потім обираємо довільний з 10-ти і так далі, очевидно, що вибір кожного наступного торта ніяк не залежить від вибору попередніх. Таким чином, скориставшись правилом множення маємо, що всього можна отримати $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 1 = 12!$ варіантів розстановки торів. Зауважимо, що це є кількість всіх можливих перестановок з 12-ти елементів.

Задача 9. *Скільки існує різних варіантів виставити у вітрині тільки п'ять тортів з попередньої задачі?*

Розв'язання. Аналогічно до попередньої задачі перемножимо кількості способів якою можна обрати перший, другий і так далі до п'ятого торту. Отримуємо $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ способів.

Іншими словами кількість різних способів поставити в ряд п'ять з дванадцяти тортів дорівнює відповідному числу розміщень $A_{12}^5 = \frac{12!}{7!}$.

2.1 Аудиторні завдання 2

1. Учні вивчають 10 предметів. У понеділок 6 уроків, причому всі уроки попарно різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

2. Скільки є k-значних чисел у системі числення за основою n?

3. Скільки існує п'ятизначних чисел, які діляться на 5?

4. Скільки існує п'ятизначних чисел, що діляться на 3?

5. З точки проведено n променів. Скільки кутів вони утворюють?

6. Скільки натуральних дільників має число $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$, де $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — попарно різні прості числа, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \geq 1$?

7. Скільки натуральних дільників має число 1250?

8. Скількома способами n людей можуть стати в коло?

9. Скільки існує камінців у грі доміно? Скількома способами можна обрати два камінці, які можна прикласти один до одного?

10. Скількома способами можна поставити дві тури на шахову дошку так, щоб вони не били одна одну?

11. Скількома способами можна поставити на шаховій дошці 8 тур так, щоб вони попарно не могли бити одна одну?

12. Скількома способами можна поставити два слони на шахову дошку так, щоб вони не били один одного?

13. Скільки існує перестановок із n елементів, у яких дані 2 елементи стоять поруч?

2.2 Домашні завдання 2

1. Скільки є парних шестизначних чисел?

2. На залізничній станції n семафорів, кожен з яких може перебувати в одному з 3 положень. Скільки можна дати різних сигналів одночасно?

3. Скільки натуральних дільників має кожне з чисел 6^5, 10^4, 2255?

4. Скількома способами можна поставити двох коней на шахову дошку так, щоб вони не били один одного?

5. Скількома способами можна поставити дві ферзі на шахову дошку так, щоб вони не били один одного?

6. На одній із бічних сторін рівнобедреного трикутника взято n точок, а на другій m точок. Кожну вершину при основі трикутника сполучено відрізками з вибраними точками на протилежній стороні. На скільки частин поділиться трикутник цими відрізками?

3 Біноміальні коефіцієнти

Кількість k-елементних підмножин n-елементної множини (кількість сполук або комбінацій з n по k елементів) обчислюється за формулою

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Повернемося до задач про розстановку в ряд різнокольорових куль.

Задача 10. *Дано дві зелені та п'ять жовтих куль. Кулі одного кольору розрізнити неможливо. Скільки існує різних способів викласти їх в ряд?*

Розв'язання. Припустимо, що всі кулі пронумеровані.

По аналогії до розв'язків задач з попереднього розділу, маємо $7!$ способів переставити пронумеровані кулі. Для відкидання повторних способів, ділимо на $2!$ та $5!$, оскільки для кожного фіксованого варіанту розстановки пронумерованих куль є ще $2!5!$ способів отриманих перестановкою між собою відповідних куль одного кольору, які, якщо не зважати на нумерацію є одним і тим же способом. Тож отримуємо $\frac{7!}{2!5!} = 21$ спосіб.

Розглянемо інший спосіб міркувань.

Уявимо, що кулі пронумеровані але не мають кольору.

З семи можливих оберемо номери під якими будуть стояти дві зелені кулі, це можна зробити $\binom{7}{2}$ способами. Після обрання двох з семи номерів, залишається п'ять номерів, кулі з цими номерами автоматично мають бути жовтими. Таким чином обравши номери для зелених куль ми знайшли усі можливі способи викласти дані кулі в ряд. Зауважимо, що $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$.

Задача 11. *У кафе продають дев'ять видів тістечок. За сет з п'яти різних тістечок надається знижка. Скільки різних сетів можна сформувати?*

Розв'язання. Перше тістечко у сет можна обрати дев'ятьма способами, друге – вісьмома, третє – сімома і так далі, таким чином, за правилом множення, отримуємо $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$, але цей результат дає кількість впорядкованих наборів з п'яти тістечок. Проте, зауважимо, що порядок у якому ми обираємо тістечка у сет не важливий, тобто ми обираємо саме множину тістечок, не зважаючи на порядок. В такому випадку, для усунення повторних сетів, необхідно усунути всі перестановки, що отримані з множини якихось п'яти обраних тістечок. Тобто достатньо поділити на 5!. Тобто остаточно маємо $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!} = \frac{9!}{5!4!}$

Задача 12. *Скількома способами можна з 7 осіб вибрати комісію, яка складається з 3 осіб?*

Розв'язання. При обранні членів комісії порядок "обирання"неважливий. Таким чином ця задача аналогічна знаходженню кількості способів обрання 3-елементної підмножини з 7-еленертної множини. Тобто необхідно обчислити відповідний біноміальний коефіцієнт $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 = 35$. Таким чином маємо 35 способів обрати з 7 осіб комісію, що складається з 3 осіб.

Задача 13. *У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого n-кутника, якщо жодні три з них не перетинаються в одній точці?*

Розв'язання. Для підрахунку точок перетину достатньо помітити, що кожну точка перетину однозначно відповідає двом діагоналям, а таким чином і чотиром вершинам многокутника. Тобто кожна точка перетину діагоналей перебуває в однозначній відповідності з якимись чотирьма (різними) вершинами даного n-кутника (між такими наборами існує бієкція). Тому необхідно підрахувати кількість способів обрати чотири вершини з n вершин многокутника. Тобто обчислити кількість 4 елементних підмножин n елементної множини, що є відповідним біноміальним коефіцієнтом Тобто обчислити кількість 4 елементних підмножин n елементної множини, що є відповідним біноміальним коефіцієнтом $\binom{n}{4}$.

Задача 14. *Скільки є натуральних чисел від 100 до 999, цифри яких ідуть у зростаючому порядку?*

Розв'язання. Необхідно знайти кількість трицифрових чисел $\overline{abc}$, таких, що $a < b < c$, де a, b, c – різні цифри. Варто відзначити, що кожній трійці різних цифр відповідає тільки одне число у якого цифри розташовані по зростанню. Тому достатньо підрахувати кількість усіх можливих трійок різних цифр. Зауважимо,що цифру 0 не враховуємо бо в такому випадку отримали б тільки двоцифрове число.

Тому кількість шуканих чисел $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$.

Задача 15. *З колоди, в якій 52 карти, вибрали 10 карт.*

a) *У скількох випадках серед цих карт є хоча б один туз?*

b) *У скількох випадках не менше двох тузів?*

c) *У скількох випадках серед цих карт був рівно один туз і рівно дві карти бубнової масті?*

Розв'язання. a) Розв'яжемо цю задачу обчисливши "доповнення"до шуканого. Очевидно, що загальна кількість способів обрати "якісь"10 карт розбивається на дві (неперетинні) підмножини: ті способи, де набори, містять хоча б один туз та ті, які не містять жодного туза. Тоді знайдемо кількість способів обрати "якісь"10 карт і віднімемо кількість способів обрати 10 карт жодна з яких не є тузом.

Кількість способів обрати "якісь"10 карт з 52 дорівнює відповідному біноміальному коефіцієнту $\binom{52}{10}$.

В свою чергу шукаючи кількість способів обрати 10 карт жодна з яких не є тузом, ми обиратимемо вже не з 52 карт а з 48 карт, бо тузи не повинні потрапити до нашої 10-ки обраних карт. Тобто кількість способів "без тузів"дорівнює $\binom{48}{10}$.

Тому кількість випадків у яких серед обраних 10 карт буде хоч один туз дорівнює $\binom{52}{10} - \binom{48}{10}$.

b) Розглянемо два способи розв'язання.

(i) Від кількості способів обрати 10 карт серед яких є хочаб один туз (пункт а)) віднімемо кількість способів обрати 10 карт серед яких рівно один туз.

Кількість способі вобрати 10 карт з 52 серед яких рівно один туз, обчислюється навступним чином. Обираємо цей один туз (з 4 існуєчих тузів), це відповідно $\binom{4}{1} = 4$. Обираємо ще 9 карт з 48 карт, серед яких вже точно немає тузів, це дорівнює $\binom{48}{9}$. Застосовуємо правило множення, оскільки обрання туза і 9 карт (не тузів) виконується некзалежно одне від одного. Тож всого $4 \cdot \binom{48}{9}$ способів обрати 10 карт серед яких є рівно один туз.

Тоді кількість випадків у яких обраний набір з 10 карт містить не менше двох тузів дорівнює $\binom{52}{10} - \binom{48}{10} - 4 \cdot \binom{48}{9}$.

(ii) Обчислимо суму кількостей способів обрати 10 карт, серед яких рівно два, рівно три чи рівно чотири тузи.

Кількостей способів обрати 10 карт, серед яких рівно два тузи, обчислимо обравши спочатки два тузи з 4 існуючих, потім оберемо 8 з 48 карт (які точно не тузи). Застосувавши правило множення отримуємо $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{8}$. Аналогічно обчислюємо кількість способів коли в набір потраплять рівно тр тузи $\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{7}$, та коли в набір потраплять рівно чотири тузи $\binom{4}{4} \cdot \binom{48}{6}$.

Далі залишається обчислити суму вище отриманих способів

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{8} + \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{7} + \binom{4}{4} \cdot \binom{48}{6}$$

.

c) Для обчислення шуканої кількості способів, зрозуміємо які карти обираються для кожної комбінації. Оскільки туз може бути бубновим окремо виділемо варіанти коли "обраним"тузом виявився саме туз бубна. В такому (другому) випадку способи, які ще залишилися – це такі, що обрано один туз не бубуну, дві карти бубни (не тузи), і ще 7 карт не тузи і не бубни.

Перший варіант, обираємо одного бубнового туза (1 спосіб), обираємо другу бубнову карту (не туза) маємо для цього $\binom{12}{1}$. Зауважимо, що карт, не тузів і не бубнової масті є всього $52-4-12=36$. Для нашої комбінації необхідно обрати ще 8 не тузів і не бубен, що можна зробити $\binom{36}{8}$ способами. Тому для такої комбінації всого маємо $1\cdot\binom{12}{1}\cdot\binom{36}{8}$ способів.

Другий варіант, в якому туз не бубновий, його можна обрати $\binom{3}{1}=3$ способами. Ще дві не бубнові карти ми обираємо з 12 (не 13 бо ми відкинули бубновий туз), тобто отримуємо $\binom{13}{2}$ способів. І нарешті обираємо 7 не бубнових карт і звичайно не тузів, тоді це можна зробити $\binom{36}{7}$ способами. Усього отримуємо $\binom{3}{1}\cdot\binom{13}{2}\cdot\binom{36}{7}$ способів для цього випадку.

За правилом додавання отримаємо загальну кількість способів обрати 10 карт з 52 карт так, що набір містить рівно одного туза і рівно дві бубнові карти $1\cdot\binom{12}{1}\cdot\binom{36}{8}+\binom{3}{1}\cdot\binom{13}{2}\cdot\binom{36}{7}$, що можна спростити $12\cdot\binom{36}{8}+3\cdot\binom{13}{2}\cdot\binom{36}{7}$,

Задача 16. *У розкладі $(1+x)^n$ коефіцієнти при x^5 і x^{12} рівні. Знайдіть n.*

Розв'язання. Запишемо біноміальний розклад даного многочлена n-го степеня

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

Звідси маємо коеціцієнти при даних степенях.

При x^5 у розкладі стоїть коефіцієнт $\binom{n}{5}$, а при x^{12} стоїть коефіцієнт $\binom{n}{12}$. Прирівняємо дані біномі коефіцієнти $\binom{n}{5}=\binom{n}{12}$. Для пошуку n варто не просто розв'язувати отримане рівняння а скористатися властивостями біноміальних коефіцієнтів. З властивості $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, поклавши $k=5$ отримуємо, що $n-k=12$. Тоді $n-5=12$, та $n=17$.

(Зауважимо, що неважко показати, що біноміальні коефіцієнти $\binom{n}{k}=\binom{n}{l}$ є рівними тільки у випадку, коли $l=n-k$.)

Задача 17. *Скільки раціональних доданків містить розклад $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{100}$.*

Розв'язання. Розкладемо у суму

$$(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{100}=\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\sqrt{3}^{(100-k)}\cdot\sqrt[4]{5}^{k}.$$

Раціональними будуть ті доданки для яких обидва множники $\sqrt{3}^{(100-k)}$ та $\sqrt[4]{5}^{k}$ є раціональними. Тобто степінь (число) k має ділитися на 4 та число $100-k$ ділитьися на 2, що виконується тоді і тільки тоді, коли k ділиться на 4, $0\leq k\leq 100$.

Підрахуємо кількістьтаких чисел k, що діляться на 4 від 1 до 100, їх буде рівно чверть, тобто 25 чисел плюс ще число 0, тобто всього 26 таких чисел. Таким чином буде 26 раціональних доданків.

Задача 18. *Чому дорівнює коефіцієнт у розкладі* $(x+y^2)^{15}$

а) при x^6y^{18}*;*

б) при x^8y^{16}*;*

в) при x^7y^{16}*?*

Розв'язання. Розпишемо за біномом Ньотона

$$(x+y^2)^{15}=\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}(x)^k y^{2\cdot(15-k)}.$$

Звідси бачимо, що степінь x рівний k, а степінь y відповідно рівний $30-2k$.

а) Для доданку x^6y^{18}, маємо $k=6$, перевіримо чи правильно визначений степінь y. Для перевірки прирівняємо $30-2k=18$, звідси маємо, що $k=6$. Таким чином ми показали, що доданок x^6y^{18} дійсно входить у розклад $(x+y^2)^{15}$. Коефіцієнт при ньому легко визначається і є рівним $\binom{15}{6}$.

б) Аналогічну перевірку виконаємо для доданку x^8y^{16}. Покладемо для x степінь $k=8$ і перевіримо чи правильний степінь для y. Для $30-2k=16$ маємо, що $k=7$, отримуємо суперечність. Тобто доданок x^8y^{16} не входить у розклад $(x+y^2)^{15}$. А це аналогічне до того, що коефіцієнт доданка x^8y^{16} у даному розкладі є 0.

в) З попередніх пунктів легко бачимо, що коефіцієнт при x^7y^{16} знаходиться, як $\binom{15}{7}$.

3.1 Аудиторні завдання 3

1. Скількома способами можна з 31 школяра вибрати команду для математичного змагання, яка складається з 12 учнів?

2. У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого n-кутника, якщо жодні три з них не перетинаються в одній точці?

3. Скільки є натуральних чисел від 100 до 999, цифри яких ідуть у спадному порядку?

4. З колоди, в якій 52 карти, вибрали 7 карт.

   (a) У скількох випадках серед цих карт є хоча б одна десятка?

   (b) У скількох випадках не менше двох десяток?

   (c) У скількох випадках серед цих карт був рівно дав королі та рівно дві трефові карти?

5. У розкладі $(1+x)^n$ коефіцієнти при x^7 і x^{28} рівні. Знайдіть n.

6. Скільки раціональних доданків містить розклад

$$(\sqrt{7}+\sqrt[3]{11})^{60}?$$

7. Чому дорівнює коефіцієнт у розкладі $(x+y^3)^{17}$

   (a) при x^7y^{30};

   (b) при x^9y^{24};

   (c) при x^11y^{21}?

3.2 Домашні завдання 3

1. На площині задано пряму, n точок, які на ній лежать, і m точок поза цією прямою. Скільки існує невироджених трикутників з вершинами в заданих точках і зі стороною, що лежить на заданій прямій?

2. У чемпіонаті з футболу беруть участь 16 команд. Говоритимемо, що результати двох чемпіонатів з футболу тотожні, якщо в результаті цих чемпіонатів однакові команди отримують золоту, срібну, бронзову медалі і залишають вищу лігу (4 команди). Скільки є різних нетотожних чемпіонатів?

3. З колоди, в якій 52 карти, вибрали 10 карт.

   a) У скількох випадках серед цих карт є рівно один туз і є червоні карти?

   b) У скількох випадках серед цих карт є рівно 2 тузи і рівно 3 бубнові карти?

4. У розкладі $(1+x)^n$ коефіцієнти при x^6 і x^9 рівні. Знайдіть n.

5. Скільки раціональних доданків містить розклад
$$(\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{3})^{120}?$$

6. Чому дорівнює коефіцієнт у розкладі $(x^3+y^2)^{12}$

   a) при $x^{15}y^{14}$;

   b) при $x^{12}y^{22}$;

   c) при x^9y^{18}?

4 Тотожності для біноміальних коефіцієнтів

Задача 19. *Для довільних натуральних n, k доведіть рівність:*

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Розв'язання. Розпишемо ліву частину рівності за означенням для біноміальних коефіцієнтів і виконаємо деякі перетворення

$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)...(-n-(k-1))}{k!} = (-1)^k \cdot \frac{(n+k-1)...(n+1)n}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$.

Отримали праву частину рівності з умови, таким чином рівність доведена.

Задача 20. *Знайдіть комбінаторну інтерпретацію властивості симетричності біноміальних коефіцієнтів.*

Розв'язання. Необхідно знайти комбінатону інтерпретацію рівності

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Згадаємо, що є комбінаторною інтерперетацією $\binom{n}{k}$, це є кількість способів обрати k елементну підмножину n елементної множини. Тоді помітимо, що кожні обрані k елементів однозначно відповідають $n-k$ елементам, які залишилися "не обраними". Тобто кожному способу обрати k елементну підмножину з n елементної множини однозначно відповідає спосіб обрати з цієї ж n елементної множини але вже $n-k$ елементну підмножину (тих елементів, які не увійшли у вже обрану k елементну підмножитну). Зауважимо, що обрані пари підмножин є неперетинними і в об'єднанні дають усю n елементну множину. Звідси очевидно, що кількість способів обрати з n елементної множини k елементну підмножину дорівнює кількості способів обрати $n-k$ елементну підмножину.

Задача 21. *Знайдіть комбінаторну інтерпретацію тотожності* *а)*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad n \in N;$$

б)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0, \quad n \in N;$$

Розв'язання.

а) Очевидно, що права частина рівності має комбінаторну інтерпретацію, тобто 2^n це кількість всіх підмножин n елементної множини.

Розглянемо ліву частину рівності. Кожен з доданків $\binom{n}{k}$ інтерпретується як кількість підмножин потужності k множини з n елементів. Оскільки такі кількості (біноміальні коефіцієнти) сумуються від 0 до n, то ми сумуємо кількості підмножин потужності 0, кількості підмножин потужності 1, потужності 3 і так до кількості підмножин потужності n. Таким чином ми враховуємо усі можливі підмножини n елементної множини.

б) Для початку розпишемо дану суму і перенесемо від'ємні доданки у праву частину рівності:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \ldots$$

Таким чином з лівого боку рівності маємо кількість підмножин з парними кількостями елементів, а з правого боку отримуємо кількість підмножин потужність кожної з яких є непарним числом. Покажемо, що такі кількості дійсно є однаковими. Розглянемо множину A потужності n. Зафіксуємо деякий елемент $a \in A$. Оберемо деяку довільну підмножину B множини A, тобто $B \subseteq A$. Тоді розглянемо відображення $\varphi(B) = \begin{cases} B \setminus a, & \text{якщо } a \in B \\ B \cup a, & \text{якщо } a \notin B \end{cases}$, яке кожній множині B потужності $|B| = k$ ставіть у відповідність множину $\varphi(B)$, потужність якої (відрізняється на одиницю) $k-1$ або $k+1$. Тоді множини B та $\varphi(B)$ мають потужність різної парності.

Таким чином ми побудували взаємно однозначну відповідність між всіма парними та непарними підмножинами даної множини A. Тому рівність з умови виконується.

Задача 22. *Доведіть, що для довільних натуральних n, m, k має місце рівність:*

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}.$$

Розв'язання. Знайдемо комбінаторну інтерпретацію для доведення цієї рівності.

Нехай є множина G – зелених яблук і її потужність $|G| = n$, а також множина R – червоних яблук потужності $|R| = m$ (вважаємо, що всі яблука різні). Знайдемо кількість способів вибрати деякі k яблук з цих двох множин. З одного боку, оскільки немає вимог на те, які яблука ми маємо оберети, можемо вважати, що яблука ми обираємо з обнієї множини $G \cup R$, потужності $n + m$. Очевидно, що вбрати k елементну підмножину з $n+m$ елементної множини можна $\binom{n+m}{k}$ способами.

З іншого боку ми можемо оберети яблука спорчатку тільки з зелених (деяку кількість i не більшу за k), потім з червоних ми обираємо таку кількість яблук, щоб у суммі з вже обраними зеленими вийшло k, тобто червоних тереба обрати $k - i$. Це в свою чергу буде рівно $\binom{n}{i}$ зелених яблук, та $\binom{n}{k-i}$ червоних яблук. Очевитдно, що i, кількість обраних зелених яблук, може змінюватися у визначених межах $0 \leq i \leq k$, і всі ципадки мають бути пораховані. Тоді встого способів обрати k яблук з $n + m$ буде $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \binom{n}{k-i}$.

Таким чином ми довели рівність лівої і правої частини рівності.

Задача 23. *Доведіть, що для кожного допустимого натурального n має місце рівність:*

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Розв'язання. Доведемо методом математичної індукції по n.

База, нехай $n = 1$. Ліва частина рівності після підстановки $n = 1$ записується, як $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{1} k\binom{1}{k} = 1\binom{1}{1} = 1$ і набуває значення 1. Після підстановки $n = 1$ права части також перетворюється в 1, тобто $1 \cdot 2^0 = 1$.

Припущення. Нехай рівність виконується для деякого натурального числа $n = m$, тобто

$$\sum_{k=1}^{m} k\binom{m}{k} = m2^{m-1}.$$

Крок (індукційний перехід). Доведемо, що рівність справджуватиметься і для $n = m + 1$. Розпишемо ліву частину рівності, скориставшись властивісттю біноміальних конефіцієнтів $\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}$, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{m+1} k\binom{m+1}{k} = \sum_{k=1}^{m+1}\left(k\left(\left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right)\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} k\binom{m}{k} + \sum_{k=1}^{m+1} k\binom{m}{k-1} =$$

$$\sum_{k=1}^{m} k\binom{m}{k} + (m+1)\binom{m}{m+1} + \sum_{k=1}^{m+1} k\binom{m}{k-1} =$$

врахуємо, що $\binom{m}{m+1} = 0$ та скористаємося припущенням індукції, тоді

$$= \sum_{k=1}^{m} k\binom{m}{k} + \sum_{k=1}^{m+1} k\binom{m}{k-1} = m2^{m-1} + \sum_{k=1}^{m+1} k\binom{m}{k-1} =$$

у сумі $\sum_{k=1}^{m+1} k\binom{m}{k-1}$ перейдемо до меж від 0 до m, для цього спочатку розіб'ємо доданки, замінивши $k = (k-1) + 1$,

$$= m \cdot 2^{m-1} + \sum_{k=1}^{m+1}\left((k-1)\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k-1}\right)$$

$$= m \cdot 2^{m-1} + \sum_{k=0}^{m} \left(k\binom{m}{k} + \binom{m}{k} \right) =$$

також врахуємо, те, що $\binom{m}{0} = 1$, і отримаємо межі для суми від 1 до m

$$= m \cdot 2^{m-1} + \sum_{k=1}^{m} k\binom{m}{k} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} =$$

таким чином перший доданок це сума з припущення індукції, а другий це просто сума біноміальних коефіцієнтів, зробимо відповідну заміну

$$= m \cdot 2^{m-1} + m \cdot 2^{m-1} + 2^m = 2^{m-1} \cdot (m+m+2) = 2^{m-1} \cdot 2 \cdot (m+1) = 2^m \cdot (m+1)$$

Таким чином $\sum_{k=1}^{m+1} k\binom{m+1}{k} = 2^m \cdot (m+1)$, що доводить крок математичної індукції.

Таким чином рівність доведено.

Задача 24. *Обчисліть суму*

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 4\binom{n}{3} + \ldots + (n+1)\binom{n}{n}$$

Розв'язання.

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 4\binom{n}{3} + \ldots + (n+1)\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(k\binom{n}{k} + \binom{n}{k} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1} + 2^n = 2^{n-1}(n+2)$$

передостанній перехід робимо використовуючи попередню задачу, і відому рівність для суми біноміальних коефіцієнтів.

Задача 25. *Скільки різних слів можна отримати, переставляючи літери слова “комбінаторика”?*

Розв'язання. Для початку уявимо собі, що всі букви у даному слові різні, тобто однакові літери проіндексуємо

$$\text{К}_1\text{О}_1\text{МБІНА}_1\text{ТО}_2\text{РИК}_2\text{А}_2.$$

Для такого слова кожна перестановка літер буде новим словом, тоді отримуємо 13! слів, оскільки вважаємо, що слово має 13 різних літер. Але реально слова, у яких однакові літери з різними індексами переставлені місцями, є однаковими. Для відкидання таких слів необхідно з'ясувати їх кількість. Для кожної пари індексованих літер, наприклад для літер К_1 та К_2, маємо однакових 2! слів (кількість всіх перестановок індексованих літер одного типу). Враховуючи всі пари індексованих літер отримаємо остаточну кількість $\frac{13!}{2!2!}$.

Задача 26. *Скількома способами можна розселити 16 студентів, якщо є дві тримісні кімнати, три двомісні, та чотири одномісні?*

Розв'язання. Уявимо собі, що всі студенти вишукувалися у ряд в очікування рорзселення. Вишикуватися у ряд 16 стедентів можуть 16! способами. Розселемо цих студентів підряд заселяючи кімнати. Та ще врахуємо, що якщо у деяку кімнау ми заселяли одних і тих самих студентів але у різному порядку, то це має бути той самий варіант поселення. Враховуючи кількості місць у кімнатах маємо $(3,3,2,2,2,1,1,1,1) = \frac{16!}{3!3!2!2!2!}$ (мати б ще ділити читири рази на 1!, але не записуємо це, бо на відповідь не впливає).

4.1 Аудиторні завдання 4

1. Для довільних натуральних $n > r$ доведіть рівність:
$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-1} + \ldots + \binom{n-r}{r-1} = \binom{n}{r}.$$

2. Знайдіть комбінаторну інтерпретацію властивості додавання біноміальних коефіцієнтів $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

3. Доведіть

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

4. Доведіть, що для натуральних n, m, k має місце рівність: $\binom{n}{m}\binom{k}{0} + \binom{n-1}{m-1}\binom{k+1}{1} + \ldots + \binom{n-m}{0}\binom{k+m}{m} = \binom{n+k+1}{m}$.

5. Доведіть, що для кожного допустимого натурального n має місце рівність:

   (a)
   $$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2};$$

   (b)
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).$$

6. Скільки різних слів можна отримати, переставляючи літери слова "метаморфоза"?

4.2 Домашні завдання 4

1. Доведіть, що для довільних натуральних n, k має місце рівність:
$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{k-1}.$$

2. Доведіть, що для кожного допустимого натурального n має місце рівність:

   a)
   $$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)\binom{n}{k} = (n+1)2^n;$$

b)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1};$$

c)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

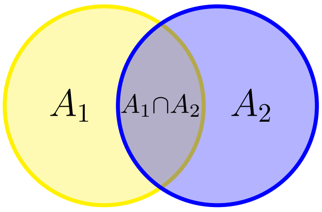
3. Обчисліть суму

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - 4\binom{n}{4} + \ldots + (-1)^n n\binom{n}{n}.$$

5 Формула включень-вилучень (формула решета)

Формула включень-вилучень дозволяє підрахувати кількість елементів в об'єднанні даних скінченних множин, якщо відомі потужності кожної з множин та потужності перетинів всіх можливих комбінацій цих множин.

Розглянемо детальніше випадок перетину двох множин.

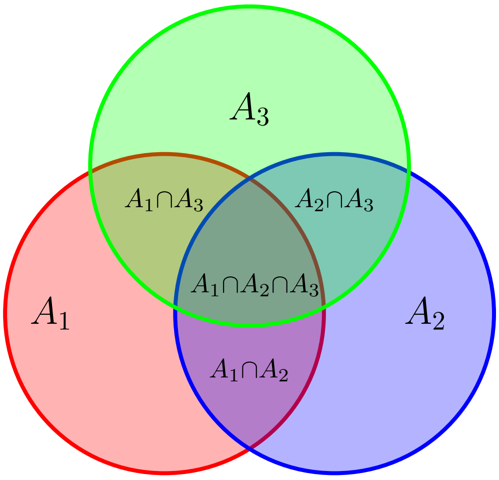


Формула включення-виключення для двох множин A_1 та A_2 є добре відомою і записується наступним чином

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

З наступних міркувань очевидною є необхідність віднімання кількість елементів у перетині. Оскільки елементи з перетину $|A_1 \cap A_2|$ входять і в множину A_1 і в множину A_2, то при підрахунку суми $|A_1| + |A_2|$, елементи, що входять до перетину $|A_1 \cap A_2|$ враховані двічі.

Розглянемо випадок перетину трьох множин. Як і для випадку двох множин після додавання потужностей кожної з множин, бачимо, що кожен перетин двох множин пораховано двічі, тож такі перетини віднімаємо. Але зауважимо, що таких перетинів три і в кожен з них входить перетин всіх трьох множин. Тож потрійний перетин ми спочатку тричі врахували, але потім тричі відкинули, тому для остаточного підрахунку залишається додати потрійний перетин. Ці міркування є природними, для наочності, зручно користуватися графічним зображенням перетинів множин за допомогою діаграми Вена.



Таким чином отримуємо формулу для обчислення потужності об'єднання трьох множин

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - \big(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|\big) +$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

За допомогою аналогічних міркувань можна отримати формулу для обчислення потужності перетину n множин A_1, A_2, $\ldots$ A_n у наступному вигляді

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| +$$
$$+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \ldots +$$
$$+(-1)^{m-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le n} \Big|\bigcup_{i=1}^{m} A_{i_k}\Big| + \ldots + (-1)^{n-1} \Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big|.$$

Задача 27. *Скільки є натуральних чисел, менших за 10000, які взаємно прості з числом 30?*

Розв'язання. Будемо розглядати числа ≤ 10000, оскільки це не впливає на відповідь.

Розкладемо 30 на прості множники $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Для того, щоб число було взаємно простим з 30 воно не повинно ділитися на жоден з простих дільників числа 30.

Нехай множина всіх чисел ≤ 10000 та тих, які діляться на 2 позначемо A_2, тих, що діляться на 3 позначемо A_3, а тих, що діляться на 5 через A_5. Далі розглянемо множини чисел, які діляться на дільники (не прості) числа 30. Числа, які діляться на 6 будуть лежати у перетині відповідних множин $A_2 \cap A_3$. Ті, що діляться на 10 у перетині множин $A_2 \cap A_5$. Числа, що діляться на 15 лежать у перетині множин $A_3 \cap A_5$. Також врахуємо і числа, які діляться на 30 вони лежать у перетині трьох множин $A_2 \cap A_3 \cap A_5$. Підрахуємо кількості таких чисел ($[*]$-позначимо цілу частину числа $*$):

$$|A_2| = \left[\frac{10000}{2}\right] = 5000, \quad |A_3| = \left[\frac{10000}{3}\right] = 3333,$$

$$|A_5| = \left[\frac{10000}{5}\right] = 2000,$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left[\frac{10000}{6}\right] = 1666, \quad |A_2 \cap A_5| = \left[\frac{10000}{10}\right] = 1000,$$

$$|A_3 \cap A_5| = \left[\frac{10000}{15}\right] = 666, \quad |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left[\frac{10000}{30}\right] = 333.$$

Використаємо формулу включень-вилучень для підрахунку кількості чисел ≤ 10000, які мають спільні дільники з числом 30:

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5|$$

$$+|A_2 \cap A_3 \cap A_5| =$$

$$= 5000 + 3333 + 2000 - 1666 - 1000 - 666 + 333 = 7334$$

Всі число ≤ 10000 розбиваються на ті, які є взвємнопростими з 30 і ті, які мають спільні дільники з 30.

Тому для підрахунку кількості чисел взаємнопростих з 30 та ≤ 10000 достатньо від усіх 10000 чисел відняти $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 7334$, таким чином $10000 - 7334 = 2666$. Тоді кількість чисел ≤ 10000 та взаємно простих з 30 дорівнює 2666.

Задача 28. *Нехай $n = 30m$ для деякого натурального m. Доведіть, що кількість чисел, не більших за n і які не діляться на жодне з чисел 6, 10 і 15, рівна $22m$.*

Розв'язання. Розв'язок даної задачі подібний до розв'язку попередньої.

Позначемо A_6 – числа ≤ 30, які діляться на 6 відповідно їх кількість $|A_6| = \frac{30m}{6} = 5m$;

позначемо A_{10} – числа ≤ 30 , які діляться на 10, їх кількість дорівнює $|A_{10}| = \frac{30m}{10} = 3m$;

позначемо A_{15} – числа ≤ 30 , які діляться на 15; їх кількість дорівнює $|A_{15}| = \frac{30m}{15} = 2m$.

Аналогічно $A_6 \cap A_{10}$, $A_6 \cap A_{15}$, $A_6 \cap A_{10} \cap A_{15}$ та $A_{10} \cap A_{15}$ – числа ≤ 30 числа, які діляться на 30. І їх кількості відповідно $|A_6 \cap A_{10}| = m$, $|A_6 \cap A_{15}| = m$, $|A_{10} \cap A_{15}| = m$ та $|A_6 \cap A_{10} \cap A_{15}| = m$.

За формулою включень-вилучень $|A_6 \cup A_{10} \cup A_{15}| = |A_6| + |A_{10}| + |A_{15}| - |A_6 \cap A_{10}| - |A_6 \cap A_{15}| - |A_{10} \cap A_{15}| + |A_6 \cap A_{10} \cap A_{15}| = 5m + 3m + 2m - m - m - m + m = 8m$. Таким чином маємо $8m$ чисел $\leq n$, які ділятся на 6, 10 та 15.

Оскільки всього чисел $30m$ віднявши від них отримані $8m$ чисел ми отримаємо $22m$ числа $\leq n$, які не діляться на жодне з чисел 6, 10 та 15.

Задача 29. *Про групу студентів із 30 осіб відомо, що 19 студентів вивчають математику, 17 – музику, 11 – історію, 12 – математику і музику, 7 – історію та математику, 5 – музику та історію, 2 – математику, історію та музику. Скільки студентів вивчає історію, але не вивчає математику?*

Розв'язання. Позначимо A_{mat} множину студентів, які вивчають математику (кількість таких студентів $|A_{mat}| = 19$), A_{muz} множину студентів, які вивчають музику (їх кількість $|A_{muz}| = 17$), A_i множину студентів, які вивчають історію (відповідно їх кількість $|A_i| = 11$). Тоді кількість студентів, що вивчають математику і музику $|A_{mat} \cap A_{muz}| = 12$, які вивчають історію і математику $|A_i \cap A_{mat}| = 7$, які вивчають музику та історію $|A_{muz} \cap A_i| = 5$, а тих, хто вивчає всі три предмети $|A_{mat} \cap A_i \cap A_{muz}| = 2$.

Для того, щоб обчислити кількість студентів, які вивчають історію але не вивчають математику необхідно обчислити потужність відповдної різниці множин

$$|A_i \setminus (A_{mat} \cap A_i)| = |A_i| - |A_{mat} \cap A_i| = 11 - 7 = 4.$$

Таким чином отримали, що є всього 4 студенти, які вивчають історію але не вивчають математику.

Задача 30. *Відомо, що кожен учень школи вивчає принаймні одну іноземну мову. 28 учнів вивчають англійську, 23 учні вивчають французьку, 23 — німецьку, 12 — англійську та французьку, 11 — англійську та німецьку, 8 — французьку та німецьку, 5 — всі три мови. Скільки учнів вчиться в школі?*

Розв'язання. Позначимо множину тих, хто вивчає англійську A_1 та їх кількість $|A_1| = 28$; множину тих, хто вивчає французьку A_2 тоді їх кількість $|A_2| = 23$; множину тих, хто вивчає німецьку позначимо A_3, їх кількість $|A_3| = 23$.

Тоді кількість учнів, які вивчають англійську та французьку позначимо $|A_1 \cap A_2| = 12$, англійську та німецьку $|A_1 \cap A_3| = 11$ та французьку і німецьку $|A_2 \cap A_3| = 8$. Кількість учнів, що вивчають усі три мови $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 5$.

Враховуючи, що кожен учень вивчає хочаб одну мову, то кількість учнів відповідно обчислюємо за формулою включень-вилучень

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|$$

$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$$

$$= 28 + 23 + 23 - 12 - 11 - 8 + 5 = 48.$$

Тобто в школі навчається 48 учнів.

Задача 31. *(Задача Льюіса Керола) В жорстокому бою не менше як 70% піратів втратили одне око, не менше як 75% — одне вухо, не менше як 80% — одну руку та не менше як 85% — одну ногу. Яка мінімальна кількість бійців, що втратили водночас і око, і ногу, і вухо, і руку?*

Розв'язання.

Позначимо множину тих, хто втратив одне око (їх $\geq 70\%$) як A_1; тих, хто втратив одне вухо (їх $\geq 75\%$) як A_2; тих, хто втратив одне руку (їх $\geq 80\%$) як A_3; тих, хто втратив одне ногу (їх $\geq 85\%$) як A_4.

Відповідні мінімальні кількості виразимо через n – загальну кількість піратів $|A_1| = \frac{70}{100}n$, $|A_2| = \frac{75}{100}n$, $|A_3| = \frac{80}{100}n$, $|A_4| = \frac{85}{100}n$.

Обчислимо мінімальну кількість піратів які втратили одночасно око і вухо зауваживши, що максимальна кількість піратів які втратили око або вухо $|A_1 \cup A_2|$ дорівнює n, тоді

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cup A_2| = \frac{70}{100}n + \frac{75}{100}n - n = \frac{45}{100}n.$$

Позначимо множину піратів які втратили одночасно око і вухо $A_1 \cap A_2 = D$. Застосуємо формулу включень-вилучень (для двох) для обчислення мінімальної потужності множини $D \cap A_3$ піратів, які втратили око, вухо та руку. Для мінімізації шуканої кількості врахуємо, що максимальна потужніст множини $|D \cup A_3| = |A_1 \cup A_2| \cup A_3$ дорівнює загальній кількості піратів, тобто n

$$|(A_1 \cap A_2) \cap A_3| = |D \cap A_3| = |D| + |A_3| - |D \cup A_3| =$$

$$\frac{45}{100}n + \frac{80}{100}n - n = \frac{25}{100}n.$$

Позначимо $D \cup A_3 = P$ Аналогічно обчислимо мінімальну кількість піратів, які втратили око, вухо, руку і ногу $|P \cap A_4| = |P| + |A_4| - |P \cup A_4| = \frac{25}{100}n + \frac{85}{100}n - n = \frac{10}{100}n$.

Тобто 10% піратів це мінімальна кількість, яка могла втратити і око, і ногу, і вухо, і руку.

5.1 Аудиторні завдання 5

1. Скільки є натуральних чисел, менших за 100000, які взаємно прості з числом 165?

2. В групі “любителів спати протягом першої пару” соціальної мережі “КіТКоТ” всього 25 хлопців і 20 дівчат. З них отримують стипендію 30 осіб, серед яких 16 хлопців. Серед учасників групи 28 також входять в групу “свідків яблуневого бінома”, з яких 18 хлопців і 17 отримують стипендію. Чи може кількість хлопців, які отримують стипендію, і є учасниками обох груп, бути рівною 15?

3. Перебіжчик з ворожого війська повідомив: «У вищих колах нашої армії деградація та розклад. З 75 чотиризіркових генералів 30 алкоголіків, 28 наркоманів і аж 35 брехунів. Шестеро є і алкоголіками, і наркоманами водночас, одинадцятеро — наркомани та брехуни, восьмеро — алкоголіки та брехуни. Немає жодного генерала без якоїсь із цих вад!». Доведіть, що це дезінформація.

4. Є n конвертів з адресами і n листів. Листи навмання кладуть у конверти. Скількома способами це можна зробити так, що хоча б одна людина отримає свій лист?

5. Група з 20 студентів в один і той самий час розпочала складати залік з комбінаторики та іспит з теорії графів двом різним викладачам. Відповідь кожного студента і на заліку, і на іспиті триває 5 хвилин. Жоден студент не може одночасно складати іспит і залік. Скількома способами студенти можуть організувати чергу для складання заліку та іспиту?

6. 6 людей вибрали з 6 пар рукавиць по лівій і правій кожна. У скількох випадках жодна людина не отримала пари?

5.2 Домашні завдання 5

1. Скільки є натуральних чисел, менших 10000, які взаємно прості з числом 42?

2. Доведіть, що для кожного натурального $n \geq 6$ в множині $\{n + 1, ..., n + 30\}$ міститься не більше восьми простих чисел.

3. У трансконтинентальному літаку перебувають: 9 хлопчиків, 5 українських дітей, 9 дорослих чоловіків, 7 іноземних хлопчиків, 14 українців, 6 українців чоловічої статі та 7 іноземок жіночої статі. Скільки всього осіб в літаку?

4. З колоди 52 карт витягли навмання 6 карт. У скількох випадках будуть наявні всі масті?

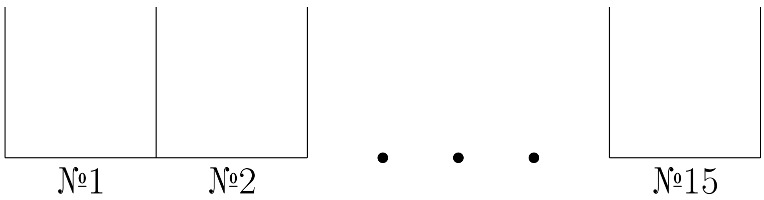
5. Пустелею іде караван верблюдів. Після перепочинку верблюдів переставили так, щоб попереду кожного верблюда йшов верблюд, відмінний від того, що раніше. Скількома способами можна це зробити?

6. Коли в залі театру згасло світло, залишалося n вільних місць, які мали зайняти глядачі, що спізнилися. В темряві ці глядачі почали займати вільні місця випадковим чином. У скількох випадках принаймні два глядачі, що запізнилися, потраплять на свої місця?

6 Мультимножини

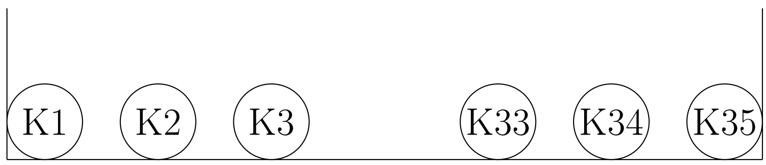
Задача 32. *Є 15 пронумерованих ящиків. Скільки є способів розкласти по ним 35 куль так, щоб жоден ящик не виявився порожнім?*

Розв'язання. Застосуємо «метод куль та перегородок». Уявимо, що всі ящики поставили в ряд і зсунули так, щоб кожен ящик дотикався стінками до своїх сусідів.



Тоді ми бачимо, що утворилося 16 перегородок, які обмежують наші ящики. Якщо позиція першої стінки першого ящика та останньої стінки останнього ящика фіксовані, то очевидно, що стінок (перегородок) залишається на одну менше ніж ящиків, тобто 14. Оскільки немає порожніх ящиків, то у першому і останньому ящику лежить як мінімум по одній кулі, далі це допоможе зафіксувати позицію першої і останньої стінки.

Уявимо тепер, що всі кулі викладено в ряд між першою і останньою стінками. Ці стінки мають фіксовані положення, бо між першою стінкою ящика №1 та першою кулею не можна поставити перегородку, та між другою стінкою ящика №15 та останньою кулею теж не можна поставити перегородку, бо нема порожніх ящиків.



Таким чином для формування п'ятнадцяти ящиків потрібно поставити 14 перегородок. Причому перегородки можна ставити лише по одній між двома сусідніми кулями, щоб не було порожніх ящиків. Очевидно, що між тридцятьма п'ятьма кулями є 34 місця куди можна ставити перегородки.

Тобто наша задача зводиться до підрахунку кількості способів вибрати з 34-ох місць якихось 14-ти місць (для перегородок). Це можна зробити $\binom{34}{14}$ способами.

Задача 33. *Є 15 пронумерованих ящиків. Скільки є способів розкласти по ним 35 куль, якщо цього разу дозволено залишати порожні ящики?*

Розв'язок. Початково розглядаємо таку конструкцію як у попередній задачі, але відкидаючи заборону порожніх ящиків. Тоді ми маємо 14 перегородок та 35 куль. Для того, щоб мати можливість підрахувати, кількість способів, коли є порожні ящики ми маємо надати собі можливість ставити декілька перегородок одна безпосередньо за іншою (щоб між ними не було куль).

У такому випадку нам зручно вважати, що всього в ряд стоїть 14+35=49 якихось об'єктів. Тепер наша задача обрати з них 14, які й будуть перегородками (інші автоматично стануть кулями). Такий вибір можна здійснити $\binom{49}{14}$, що й буде шуканою в задачі кількістю способів.

Задача 34. *Підрахувати кількість способів, якими натуральне число n можна представити у вигляді суми*

a) *k натуральних доданків;*

b) *k невід'ємних цілих доданків;*

   (зображення, що відрізняються порядком доданків, вважаються різними).

Розв'язання. Представимо число n, як суму одиниць $n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n}$.

Тоді число n у суму доданків можна можна розбивати розставляючи дужки у даній сумі та вважаючи, що сума, яка потрапила в дужки і є числом, яке у шуканому представленні числа n. Наприклад, при $n = 5$ та $k = 2$, можна розставити дужки так $5 = (1 + 1\underline{)+(}1 + 1 + 1) = 2 + 3$. При $n = 5$ та $k = 3$ $5 = (1 + 1\underline{)+(}1 + 1\underline{)+(}1) = 2 + 2 + 1$.

У такій конструкції можна побачити аналогію з задачею про розкладання куль у ящики з попередньої задачі. Тобто дану задачу можна переформулювати у вигляді задачі про кулі та перегородки.

Тут кулями будуть одиниці, а перегородками – дужки. Очевидно, що перша і остання дужка стоятимуть на фіксованих місцях, тобто на початку та у кінці виразу, тому їх ставити не потрібно.

Тепер розставлятимемо пари дужок $)+($, бо саме така комбінація буде перегородкою. Розглянемо окремо кожен з пунктів задачі.

a) Оскільки тут ми маємо отримувати тільки не нульові значення в дужках, то кулями будуть одиниці а для отримання k доданків остаточного подання числа n нам треба поставити $k-1$ перегородку типу $) + ($. Причому перегородку у данному випадку не можна ставити до першої одиниці і після останньої, бо не можна отримувати нульові доданки, тому є $n-1$ місце на які можна ставити перегородки. Тоді розставити $k-1$ перегородку по $n-1$ місцю можна $\binom{n-1}{k-1}$ способами.

b) Для випадку коли дозволені нульові доданки у представленні числа n застосовуємо модифікацію, як у випадку, коли дозволені порожні ящики в задачі про розкладання куль у пронумеровані ящики. Тож маємо n одиницю та $k-1$ конструкцію типу $)+($ (такі конструкцію у даному випадку можна ставити одна безпосередньо за іншою, так й отримуємо нульові доданки). Тоді з всіх цих $n+k-1$ об'єктів необхідно обрати n, які будуть одиницями. Таким чином існує $\binom{n+k-1}{n}$ способів розбити число n на k невід'ємних цілих доданків

6.1 Аудиторні завдання 6

1. Скількома способами можна розкласти в 6 різних ящиків 6 чорних, 7 білих і 7 синіх куль, якщо кулі одного одного кольору не розрізняються?

2. 6 ящиків занумеровано числами від 1 до 6. Скількома способами можна розкласти по цих ящиках 20 однакових куль (деякі ящики можуть бути порожніми)?

3. 6 ящиків занумеровано числами від 1 до 6. Скількома способами можна розкласти по цих ящиках 20 однакових куль так, щоб жоден ящик не виявився порожнім?

4. Скільки невід'ємних цілих розв'язків має рівняння
$$x_1 + \ldots + x_m = n, \quad n, m \geq 1?$$

5. Скільки натуральних розв'язків має рівняння
$$x_1 + \ldots + x_m = n, \quad n \geq m \geq 1?$$

6. Скільки існує таких цілочисельних векторів (a, b, c, d), що $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 10$?

7. Скількома способами 12 монет вартістю 25 копійок кожна можна розкласти по 5 різних гаманцях так, щоб жоден гаманець не виявився порожнім? Скількома способами це можна зробити, щоб при цьому в першому гаманці було рівно 7 монет?

8. У поштовому відділенні продаються листівки 10 видів. Скількома способами можна купити в ньому:

   (a) 10 листівок;

   (b) 8 листівок;

   (c) 8 попарно різних листівок?

9. У гаманці лежить 60 монет вартістю 10, 25 і 50 копійок по 20 кожної вартості. Скількома способами можна вибрати з них 20 монет? Скільки є способів це зробити так, щоб хоча б 10 вибраних монет мали вартість 50 копійок?

10. Скількома способами можна викласти в ряд 5 червоних, 5 синіх і 5 зелених куль, причому кулі одного кольору не розрізняються? Для скількох з них жодні дві сині кулі не лежать поряд?

11. Скільки існує шестизначних натуральних чисел, десятковий запис кожного з яких містить лише цифри 1,2 і 3, причому кожна з них обов'язково входить в запис?

6.2 Домашні завдання 6

1. Скількома способами можна розкласти в 5 різних ящиків 5 чорних, 5 білих і 5 синіх куль, якщо кулі одного кольору не розрізняються?

2. Скільки цілочисельних розв'язків має рівняння

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000,$$

   в кожному з яких $x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 3,\ x_4 \geq 4$?

3. Скількома способами палітурник може переплести 12 книг, які не розрізняються, використовуючи червону, зелену чи синю палітурки?

4. В 9 різних лузах розташували 7 білих і 2 чорні кулі (деякі лузи можуть бути порожніми). Скількома способами можна здійснити такий розклад? Скільки буде способів, якщо відомо, що обидві чорні кулі опиняться в одній лузі?

5. У квітковому магазині під кінець робочого дня залишилося 7 троянд білого кольору, 8 червоного і по 9 рожевого і жовтого. Скількома способами можна скласти букет із 7 квітів, якщо

троянди одного кольору не відрізняються? Скількома способами можна скласти букет із 7 квітів, щоб у ньому було рівно 3 білі троянди?

6. Скількома способами 25 яблук, які не розрізняються, можна роздати 5 дітям?

7 Лінійні рекурентні співвідношення. Числа Фібоначчі

Лінійним однорідним рекурентним співвідношенням порядку k з постійними коефіцієнтами називається співвідношення наступного вигляду

$$a_{n+k} = \beta_1 \cdot a_{n+k-1} + \beta_2 \cdot a_{n+k-2} + \ldots + \beta_k \cdot a_n.$$

Характеристичним рівнянням такого співвідношення називається рівняння наступного вигляду

$$x^k = \beta_1 \cdot x^{k-1} + \beta_2 \cdot x^{k-2} + \ldots + \beta_k.$$

Залежно від розв'язку x характеристичного рівняння, загальний розв'язок рівняння яким задається лінійне однорідне рекурентне співвідношення можна подати у вигляді

$$f(n) = A_1 + A_2 + \ldots + A_p,$$

де $A_i = C_i x^n$, якщо x – дійсний корінь кратності 1;

$A_i = (C_{i1} + nC_{i2} + n^2 C_{i3} + \ldots + n^{m-1} C_{im}) x^n$, якщо x – дійсний корінь кратності m;

$A_i = r(C_i \, cos \, n\varphi + D_i \, sin \, n\varphi)$, якщо $x_{1,2} = r(cos \, \varphi \pm sin \, \varphi)$ – пара комплексно-спряжених коренів кратності 1;

$A_i = (C_{i1} + nC_{i2} + n^2 C_{i3} + \ldots + n^{m-1} C_{im}) \cdot cos \, n\varphi \cdot r^n +$ $(D_{i1} + nD_{i2} + n^2 D_{i3} + \ldots + n^{m-1} D_{im}) \cdot sin \, n\varphi \cdot r^n$, якщо $x_{1,2} = r(cos \, \varphi \pm sin \, \varphi)$ – пара комплексно-спряжених коренів кратності m, та C_i, D_i, C_{ij}, D_{ij} – довільні константи.

Послідовність чисел Фібоначчі F_n задається рекурентним співвідношенням $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Задача 35. *Знайдіть явний вигляд елементів послідовності, заданих лінійним рекурентним співвідношенням*

$$a_{n+2} = 111 a_{n+1} - 2024 a_n, \quad a_1 = -143, \quad a_2 = 143.$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння даного співвідношення

$$x^2 = 111x - 2024.$$

Розв'яжемо отримане квадратне рівняння $x^2 - 111x + 2024 = 0$. Його корені можна знайти, наприклад, за теоремою Вієта. Оскільки маємо $x_1 + x_2 = 111$ та $x_1 \cdot x_2 = 2024$, то розклавши на множники $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ легко бачити, що розв'язками будуть $x_1 = 23$ та $x_2 = 88$. Оскільки характеристичне рівняння має два різні корені, то загальний розв'язок даного рекурентного співвідношення записується у вигляді

$$a_n = C_1 23^n + C_2 88^n.$$

Підставимо початкові значення a_n при $n = 1, 2$, отримуємо:

$$\begin{cases} -143 = C_1 23 + C_2 88 \\ 143 = C_1 23^2 + C_2 88^2 \end{cases}.$$

Розв'яжено систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 23 & 88 & | & -143 \\ 529 & 7744 & | & 143 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 529 & 2024 & | & -3289 \\ 529 & 7744 & | & 143 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 529 & 2024 & | & -3289 \\ 0 & 5720 & | & 3432 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 529 & 2024 & | & -3289 \\ 0 & 5 & | & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 529 & 2024 & | & -3289 \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 529 & 0 & | & -3289 - \frac{3\cdot 2024}{5} \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 23 & 0 & | & -\frac{979}{5} \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -\frac{979}{115} \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Таким чином отримуємо, що $C_1 = -\frac{979}{5}$ та $C_2 = \frac{3}{5}$. Тепер можемо записати кінцевий вигляд загального розв'язку:

$$a_n = -\frac{979}{5} \cdot 23^n + \frac{3}{5} \cdot 88^n.$$

Задача 36. *Знайти загальний розв'язок рекурентного співвідношення*

$$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0, \;\; a_1 = 1, \;\; a_2 = 9.$$

Розв'язання. Як і у попередній задачі дане рекурентне співвідношення є лінійним і однорідним. Складемо його характеристичне рівняння

$$x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Дане рівняння має розв'язки $x_1 = x_2 = 3$.

Тоді загальний розв'язок даного рекурентного співвідношення записується у вигляді

$$a_n = (C_1 + nC_2) \cdot 3^n.$$

Підставимо початкові значення для $n = 1$, 2. Маємо

$$\begin{cases} 1 = (C_1 + C_2) \cdot 3 \\ 9 = (C_1 + 2C_2) \cdot 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = (C_1 + C_2) \cdot 3 \\ 1 = C_1 + 2C_2 \end{cases}.$$

Виразимо C_1 з другого рівняння системи і підставимо у перше, $1 = ((1 - 2C_2) + C_2) \cdot 3$, тоді $C_2 = \frac{2}{3}$. Отже $C_1 = 1 - 2C_2 = -\frac{1}{3}$. Тоді загальний розв'язок має вигляд $a_n = (-\frac{1}{3} + n\frac{2}{3}) \cdot 3^n$, що можна спростити

$$a_n = (-1 + 2n) \cdot 3^{n-1}.$$

Задача 37. *Доведіть, що для кожного натурального $n \geq 1$ число*

$$\left(\frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right)^n + \left(\frac{5 - \sqrt{33}}{2}\right)^n$$

є цілим і непарним.

Розв'язання. Можемо вважати число з умови явним виглядом елемента деякої послідовності, позначимо його a_n. Очевидно з формули для розв'язку рекурентного співвідношення

$$a_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n,$$

що $C_1 = 1$, $C_2 = 1$ та корені характеристичного многочлена $x_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$, $x_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$.

Знайдемо, характеристичний многочлен з коренями x_1 та x_2

$$(x - x_1)(x - x_2) = \left(x - \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right) =$$

$$x^2 - x \cdot \frac{5+\sqrt{33}}{2} - x \cdot \frac{5-\sqrt{33}}{2} + \frac{(5+\sqrt{33})(5-\sqrt{33})}{4} =$$
$$x^2 - 5x - 2 = 0.$$

За отриманим многочленом побудуємо рекурентне співвідношення:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} - 2a_n = 0.$$

Доведемо за ММІ по n, що $a_n = \left(\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)^n$ є цілим і парним.

База. Для $n = 1, 2$ обчислимо a_n. Маємо

$$a_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{2} + \frac{5-\sqrt{33}}{2} = 5,$$

та

$$a_2 = \left(\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)^2 = 29.$$

Тобто перші два значення a_1 та a_2 – цілі та непарні.

Припущення. Нехай a_n та a_{n+1} – цілі та непарні.

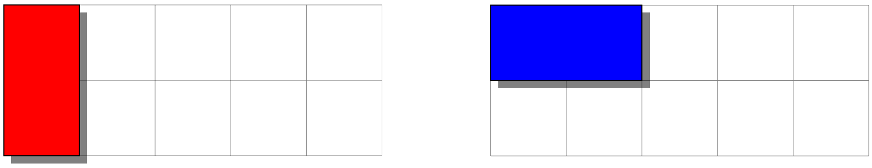
Крок. З отриманого вище рекурентного співвідношення маємо, що $a_{n+2} = 5a_{n+1} + 2a_n$. З припущення $5a_{n+1}$ – непарне, а $2a_n$ очевидно непарне, тоді a_{n+2} є цілим непарним.

Таким чином за методом математичної індукції ми довели, що a_n є цілим і непарним для всіх $n \geq 1$.

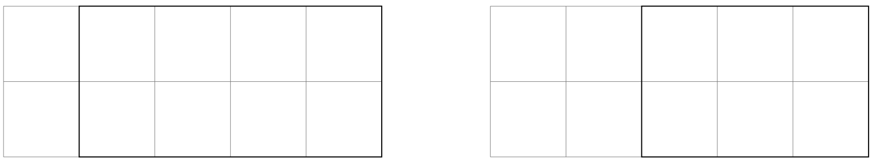
Задача 38. *Дано прямокутник $2 \times n$. Скільки існує його різних покриттів прямокутниками 1×2.*

Розв'язання. Розглянемо початкові значення n і підрахуємо для них кількість покриттів. Очевидно, що при $n = 1$ маємо одне покриття. При $n = 2$ маємо два покриття: двома вертикальними або двома горизонтальними прямокутниками 1×2.

У загальному випадку для покриття прямокутника $2 \times n$ обов'язково треба покрити верхній лівий квадрат. Це можна зробити двома способами.



У випадку покриття вертикальним прямокутником залишається не покритим прямокутник розміром $2 \times (n-1)$. У випадку покриття горизонтальним прямокутником очевидно, що залишається покрити прямокутник $2 \times (n-2)$.



Покриття отримані у першому та другому випадках будуть різними через те, що початкові прямокутники мають різну орієнтацію. Тому загальна кількість покриттів прямокутника $2 \times n$ дорівнює сумі покриттів для прямокутника розміру $2 \times (n-1)$ та прямокутника розміром $2 \times (n-2)$.

Позначимо через a_n кількість розбиттів прямокутника $2 \times n$. Тоді з попередніх міркувань очевидною є справедливість рекурентного співвідношення, що задає шукану кількість розбиттів

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Зауважимо, що отримане співвідношення та початкові значення такі, що дана послідовність a_n виявляється послідовністю чисел Фібоначчі, але починаючи з другого значення послідовності чисел Фібоначчі.

Складемо характеристичне рівняння отриманого рекурентного співвідношення

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Дане квадратне рівняння має два різних корені: $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ та $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Тоді загальний розв'язок даного рекурентного співвідношення знаходиться у вигляді

$$a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Підставимо початкові значення. При $n = 1$ отримуємо

$$a_1 = 1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$n = 2$ отримуємо

$$a_2 = 2 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Помноживши вираз для a_1 на 2 прирівняємо його до другого $C_1\left(1+\sqrt{5}\right) + C_2\left(1-\sqrt{5}\right) = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$;

$4C_1\left(1+\sqrt{5}\right) - C_1\left(1+\sqrt{5}\right)^2 = C_2\left(1-\sqrt{5}\right)^2 - 4C_2\left(1-\sqrt{5}\right)$;

$\left(1+\sqrt{5}\right)C_1\left(3-\sqrt{5}\right) = \left(1-\sqrt{5}\right)C_2\left(-\sqrt{5}-3\right)$;

$C_1 = \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)C_2\left(-\sqrt{5}-3\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}$;

$1 = \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)C_2\left(-\sqrt{5}-3\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$1 = \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)C_2\left(-\sqrt{5}-3\right)}{2\left(3-\sqrt{5}\right)} + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$$C_2 = \frac{2}{5\sqrt{5}-1}, \quad C_1 = \frac{3\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}+12}.$$

Задача 39. *Довести, що для чисел Фібоначчі мають місце тотожності*

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$, $n \geq 1$;

b) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$, $n, m \geq 1$.

Розв'язання. a) Доведемо методом математичної індукції по n.

База. При $n = 1$ рівність з умови перетворюється на $F_1 = F_2$, що справедливо для послідовності чисел Фібоначчі.

Припущення. Нехай для $n = m$ вірно, що $\sum\limits_{k=1}^{m} F_{2k-1} = F_{2m}$.

Крок. Доведемо рівність для $n = m + 1$, тобто покажемо, що $\sum\limits_{k=1}^{m+1} F_{2k-1} = F_{2(m+1)}$. Для цього розпишемо ліву частину рівності, виділивши вираз з припущення $\sum\limits_{k=1}^{m+1} F_{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{m} F_{2k-1} + F_{2m+1}$ $= |\text{за припущенням}| = F_{2m} + F_{2m+1} = F_{2m+2} = F_{2(m+1)}$, що й треба було довести.

b) Доведемо за ММІ по m.

База. При $m = 1$, потрібно довести, що $F_{n+1} = F_{n-1}F_1 + F_nF_2$. Оскільки $F_1 = F_2 = 1$, то треба довести, що $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$, а це – рекурентне співвідношення, яке задає послідовність чисел Фібоначчі, очевидно воно вірне.

Припущення. Для $m = t$ вірно, що $F_{n+t} = F_{n-1}F_t + F_nF_{t+1}$.

Крок. Доведемо для $m = t + 1$, тобто покажемо, що

$$F_{n+t+1} = F_{n-1}F_{t+1} + F_nF_{t+2}.$$

Розпишемо рекурентну формулу для $(n + t + 1)$-го числа Фібоначчі, тобто $F_{(n+t)+1} = \underline{F_{n+t}} + \underline{\underline{F_{n+(t-1)}}} = |\text{за припущенням}| =$

$\underline{F_{n-1}F_t + F_nF_{t+1}} + \underline{\underline{F_{n-1}F_{t-1} + F_nF_t}} = F_{n-1}(F_t+F_{t-1})+F_n(F_{t+1}+F_t) = F_{n-1}F_{t+1} + F_nF_{t+2}$. Що й треба було довести.

7.1 Аудиторні завдання 7

1. Знайдіть явний вигляд елементів послідовності, заданих лінійним рекурентним співвідношенням

   (a) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad a_0 = 0, a_1 = 1;$

   (b) $a_{n+3} + 2a_{n+2} - 5a_{n+1} - 6a_n = 0, \quad a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1.$

2. Доведіть, що для кожного $n \geq 1$ число

$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

   є цілим і непарним.

3. Для кожного натурального n знайдіть кількість n-значних натуральних чисел, які записуються за допомогою цифр $1, 2, 3$ і в яких перша та остання, а також будь-які дві сусідні цифри різні.

4. Доведіть, що для чисел Фібоначчі мають місце тотожності

   (a) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1, \quad n \geq 1;$

   (b) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}, \quad n \geq 1;$

   (c) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}, \quad n \geq 1;$

   (d) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}, \quad n, m \geq 1.$

5. Доведіть, що для довільних натуральних n, k число F_{kn} ділиться на F_n.

6. Нехай НСД$(n, m) = k$. Доведіть, що НСД$(F_n, F_m) = F_k$.

7. Знайдіть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.

8. Доведіть, що для довільного натурального n має місце рівність

$$F_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-k-1}{k}.$$

9. (*Система числення Фібоначчі*) Доведіть, що для кожного натурального числа n існують і єдині натуральне число $M \geq 2$ та числа $\alpha_k \in \{0,1\}$, $2 \leq k \leq M$ такі, що $\alpha_k\alpha_{k+1} = 0$, $2 \leq k \leq M-1$, і

$$n = \sum_{k=2}^{M} \alpha_k F_k.$$

10. Знайдіть розклади перших двадцяти простих чисел у системі численні Фібоначчі.

7.2 Домашні завдання 7

1. Знайдіть явний вигляд елементів послідовності, заданих лінійним рекурентним співвідношенням

   a) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0,\ a_0 = 10,\ a_1 = 16;$

   b) $a_{n+3} - 2a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0,\ a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0.$

2. Знайдіть перші сто знаків після коми у числа $(5+\sqrt{26})^{101}$.

3. Клієнт поклав на рахунок у банк певну суму грошей і підписав контракт, за яким кожного разу, коли він дзвонитиме на гарячу телефонну лінію банку, гроші на його рахунку будуть подвоюватися, але за це банк стягуватиме комісію, яка першого разу становитиме 50 гривень, другого — 100 гривень, третього — 150 гривень і т.д. Після 17 дзвінків клієнта виявилося, що він заборгував банку 360 гривень і 72 копійки. Яку суму клієнт поклав на рахунок? Як змінилася б ситуація, якби він поклав на одну копійку більше?

4. Доведіть, що для чисел Фібоначчі мають місце тотожності

   a) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1, \quad n \geq 1;$

   b) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad n \geq 1;$

   c) $\sum\limits_{k=1}^{2n-1} F_k F_{k+1} = F_{2n}^2, \quad n \geq 1.$

5. Доведіть, що сума восьми послідовних чисел Фібоначчі не може бути числом Фібоначчі.

6. Скількома способами натуральне число n можна подати у вигляді суми натуральних доданків, кожен з яких більший за 1?

8 Числа Стірлінга. Числа Каталана

Число s_k^n (або $\left[{n \atop k}\right]$), яке дорівнює кількості різних способів зображення n-елементної множини у вигляді k циклів, називається числом Стірлінга першого роду.

Зауважимо, що $s_0^0 = 1 = s_n^n$, $s_1^n = (n-1)!$, n – додатне ціле число. Також відома рекурентна формула $s_k^n = (n-1)s_k^{n-1} + s_{k-1}^{n-1}$.

Число S_k^n (або $\left\{{n \atop k}\right\}$), яке дорівнює кількості різних способів розбити n-елементну множину на k підмножин, називається числом Стірлінга другого роду. З означення випливає $S_1^n = S_n^n = 1$.

Також можна записати загальну формулу $S_k^n = S_{k-1}^{n-1} + k \cdot S_k^{n-1}$, де $1 < k < n$.

Послідовність $C_n, n \geq 0$, така, що $C_0 = 1$ та $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$, $n \geq 1$ називається послідовністю чисел Каталана.

Задача 40. *Скільки існує способів розкласти* 9 *листівок у* 6 *конвертів так, щоб не було порожніх конвертів, якщо*

a) всі конверти є різними;

b) всі конверти є однаковими?

Розв'язання.

a) Через $M_n^{(m)}$ позначимо число Моргана (число сюр'єктивних відображень з n-елементної множини у m-елементну множину).

   Тоді відповідь знаходиться, як відповідне число Моргана $M_6^{(9)} = \binom{9}{0}6^9 - \binom{9}{1}5^9 + \binom{9}{2}5^9 - \binom{9}{3}4^9 + \binom{9}{4}3^9 - \binom{9}{5}2^9 + \binom{9}{4}1^9$

b) Дана кількість обчислюється як відповідне число Стірлінга другого роду $S_6^{(9)} = \frac{M_6^{(9)}}{6!}$.

8.1 Аудиторні завдання 8

1. Обчисліть
$$\left\{{n \atop 0}\right\},\quad \left\{{n \atop 1}\right\},\quad \left\{{n \atop 2}\right\},\quad \left\{{n \atop n-1}\right\},\quad \left\{{n \atop n}\right\}.$$

2. Доведіть, що
$$\left[{n \atop k}\right] \geq \left\{{n \atop k}\right\},\quad n \geq k \geq 0.$$
Коли нерівність буде строгою?

3. Доведіть, що
$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} (x)_k.$$

4. Доведіть, що кількість способів розміщення n різних предметів по m різних коробках при умові, що p коробок зайняті, а $m - p$ — порожні, дорівнює
$$m(m-1)\dots(m-p+1)\left\{{n \atop p}\right\}.$$

5. Перевірте, що
$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1},\quad n \geq 1.$$

6. Знайдіть кількість таких векторів $(a_1, \dots, a_{2n})$, усі координати яких рівні 1 або -1, причому
$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0, 1 \leq k \leq 2n,\quad \sum_{i=1}^{2n} a_i = 0.$$

7. На колі зафіксували $2n$ точок. Скількома способами можна провести n хорд так, щоб кожна точка була кінцем рівно однієї хорди і хорди попарно не перетинались?

8.2 Домашні завдання 8

1. Доведіть, що
$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k.$$

2. Доведіть, що натуральне число, яке дорівнює добутку n різних простих множників, можна зобразити у вигляді добутку k натуральних множників
$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$
способами.

3. Доведіть, що кількість цілочисельних векторів $(a_1, \ldots, a_n)$ таких, що $0 \le a_i \le n - i$, $1 \le i \le n$, в яких рівно k координат рівні 0, становить
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

4. Обчисліть числа Каталана C_n, $0 \le n \le 10$.

5. Скільки існує неспадних послідовностей натуральних чисел довжини n, у яких кожне число не більше за його номер у послідовності?

6. Скільки існує перестановок чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ 2n$, які одночасно задовольняють таким умовам:

   a) всі непарні числа зустрічаються в зростаючому порядку;

   b) всі парні числа зустрічаються в зростаючому порядку;

   c) кожне непарне число зустрічається раніше наступного парного?

9 Основні поняття теорії графів

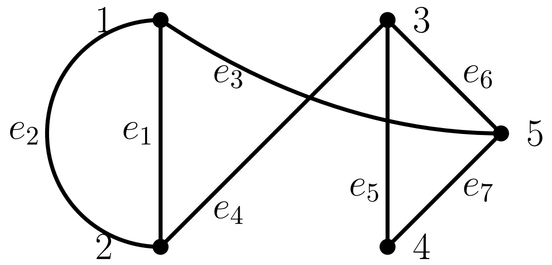
Задача 41. *Нехай задано граф $G = (V, E)$, де*

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \text{ та}$$

$$E = \{(1,2), (2,1), (5,1), (2,3), (3,4), (3,5), (4,5)\}.$$

Зобразіть цей граф, вкажіть його матриці суміжності та інцидентності.

Розв'язання. ***Розглянемо випадок неорієнтованого графа.*** Зобразимо даний граф:



Матриця суміжності $A_0 = [a_{ij}]$, неорієнтованого графа G, матиме розмірність $|V| \times |V| = 5 \times 5$. Також A_0 буде симетричною матрицею, у якій кожен елемент a_{ij} дорівнює кількості ребер, які з'єднують вершини i та j. Тоді отримуємо

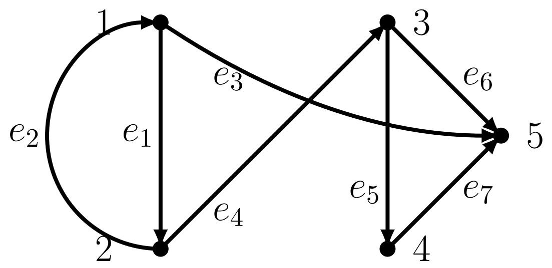
$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицею інцидентності $B_0 = [b_{ij}]$ неорієнтованого графа G буде $|V| \times |E|$ матриця, елементами якої будуть 0, 1. Елементи b_{nk} та b_{mk} будуть одиницями, якщо ребро e_k з'єднує вершини n та m. Тоді граф G має наступну матрицю інцидентності:

$$B_0 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Розглянемо випадок орієнтованого графа.

Зобразимо даний граф:



Матриця суміжності $A = [a_{ij}]$, орієнтованого графа G, матиме розмірність $|V| \times |V| = 5 \times 5$. У матриці A, елемент a_{ij} дорівнює кількості ребер, які починаються у вершині i а закінчуються у вершині j. Тоді маємо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що $A_0 = A + A^\top$.

Матрицею інцидентності $B_0 = [b_{ij}]$ орієнтованого графа G буде $|V| \times |E|$ матриця, елементами якої будуть 0, 1 та -1. Елемент b_{nk} буде дорівнювати 1 а елемент b_{mk} буде дорівнювати -1, якщо ребро e_k починається у вершині n а закінчується у вершині m. Тоді граф G має наступну матрицю інцидентності:

$$B_0 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Задача 42. *Як за матрицею суміжності A графа визначити:*

a) *чи інцидентні дві задані вершини;*

b) *чи буде граф простим;*

c) *степені його вершин;*

d) *кількість його ребер;*

e) *чи буде граф повним?*

Розв'язання.

a) Іншими словами нам треба з'ясувати чи існує хоча б одне ребро між заданими вершинами i та j, таке ребро існує тоді і тільки тоді, коли $a_{ij} > 0$.

b) Граф простий тоді і тільки тоді, коли в ньому немає петель та немає кратних ребер. Тобто тоді і тільки тоді, коли у матриці A на діагоналі стоять нулі та всі інші зеачення є нулями чи одиницями.

c) Степінь вершини v_i, обчислюється за наступною формулою $deg\, v_i = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + 2a_{ii} + \ldots + a_{in}$, a_{ii} враховується двічі, оскільки позначає петлю.

d) Кількість ребер графа дорівнює сумі елементів на діагоналі та над діагоналлю матриці A, тобто $\sum\limits_{1 \le i \le j \le n} a_{ij}$.

e) Повний граф має матрицю суміжності, таку, що всі зовні діагональні елементи – одиниці, а на діагоналі стоять нулі.

Задача 43. *Запишіть матрицю повного графа на п'яти вершинах. З'ясуйте які степені мають його вершини та скільки ребер містить даний граф.*

Розв'язання. За попередньою задачею матриця даного графа є наступною

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Степенями вершин є суми чисел у відповідному рядку (або стовпці), в даній матриці ця сума однакова для кожного рядка (стовпця) і дорівнює 4. Таким чином кожна вершина повного графа на п'яти вершинах має степінь 4 (кожна вершина з'єднана з кожною іншою вершиною).

Кількість ребер обчислюється як сума елементів у верхньотрикутній частині матриці суміжності, тобто $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. Тобто кількість ребер повного графа на п'яти вершинах дорівнює 10.

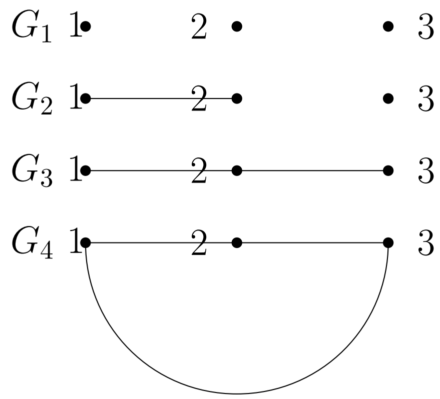
Задача 44. *Доведіть, що у кожного простого графа на n є хоча б дві вершини з однаковими степенями.*

Розв'язання. З'ясуємо які можуть бути степені вершин у даного графа. Максимальний степінь, очевидно дорівнює $n - 1$, оскільки вершина не з'єднана сама з собою (простий граф не має петель), і може бути суміжна з довільною іншою вершиною. Мінімальним степенем вершини є 0 (ця вершина не суміжна жодній іншій вершині). Помітимо, що в одному графі на n вершинах одночасно не можуть бути і вершина степеня $n - 1$ і степеня 0. Тому або набір степенів графа обирається з множини $\{0,\ 1,\ 2, \ldots, n - 1\}$ або з множини $\{1,\ 2, \ldots, n - 1,\ n\}$. Оскільки кожна з цих множин містить по n

елементів, то за принципом Діріхле серед $(n+1)$-єї вершини (степені яких обираються тільки з однієї з цих n-елементних множин) існує хоча б дві степені яких однакові. Таким чином простого графа на n має хоча б дві вершини з однаковими степенями.

Задача 45. *Побудуйте всі попарно неізоморфні прості графи з трьома вершинами.*

Розв'язання. Будемо будувати графи за кількістю ребер у них, від 0 до 3. Оскільки, очевидно, що графи з різною кількістю ребер попарно неізоморфні, залишиться показати, що побудовано всі попарно неізоморфні графи для кожної з кількостей ребер. Розглянемо наступні графи:



Покажемо, що графи G_1, G_2, G_3 та G_4 вичерпують всі відповідні неізоморфні графи.

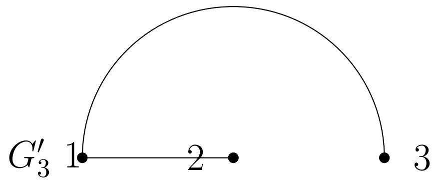
Запишемо їх матриці суміжності:

$$A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{G_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{G_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відомо, що графи ізоморфні тоді і тільки тоді, коли їх матриці суміжності можна отримати одна з одної одночасною перестановкою відповідних рядків і стовпців. Тому, очевидно, що матриці A_{G_1}, A_{G_2}, A_{G_3} та A_{G_4} не можна отримати одна з одної такою перестановкою, оскільки вони мають різну кількість ненульових елементів.

Розглянемо деякий граф з двома ребрами, і покажемо його ізоморфність з G_3. Доведемо, що граф G_3 ізоморфний наступному графу G_3',



Для доведення запишемо матрицю суміжності графа G_3':

$$A_{G_3'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що матриця $A_{G_3'}$ перестановками першого та другого рядків та відповідно стовпців зводиться до матриці A_{G_3}. Тому графи G_3 та G_3' є ізоморфними.

Таким чином графи G_1, G_2 та G_3 це всі попарно неізоморфні прості графи з трьома вершинами.

9.1 Аудиторні завдання 9

1. Нехай задано граф $\Gamma = (V, E)$, де

$$V = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E = \{(1,3),\ (2,3),\ (3,4),\ (4,1),\ (4,2)\}.$$

Зобразіть цей граф, вкажіть його матриці суміжності та інцидентності.

2. Знайдіть матрицю суміжності повного графа з n вершинами. Якими є степені його вершин? Скільки ребер він містить?

3. Доведіть, що для кожного $n \geq 3$ існує простий граф з n вершинами, в якого знайдеться $n-1$ вершина з попарно різними степенями.

4. Доведіть, що прості графи ізоморфні тоді й лише тоді, коли ізоморфні їх доповнення.

5. Побудуйте всі попарно неізоморфні прості графи з 4 вершинами. Вкажіть їх матриці суміжності та інцидентності.

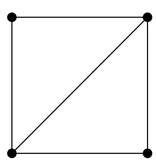
6. Скільки існує попарно неізоморфних простих графів з 6 вершинами, у яких набір степенів вершин є такиим: $(2, 2, 3, 3, 3, 5)$?

7. Скільки існує попарно неізоморфних простих графів з 6 вершинами і 11 ребрами?

8. Скільки існує попарно неізоморфних простих кубічних графів з 6 вершинами?

9. Запишіть матрицю суміжності заданого графа і знайдіть її власні значення, вкажіть його матрицю інцидентності:

   (a)

   (b) 

10. Вкажіть деяку квадратну матрицю розміру 4×4, у якої по чотири елементи рівні 1 і 2, а решта рівні 0. Зобразіть орграф, нею визначений. Які властивості має цей орграф?

11. Побудуйте всі попарно неізоморфні орграфи

    (a) з 2 вершинами і 2 стрілками;

(b) з 2 вершинами і 3 стрілками;

(c) з 3 вершинами і 2 стрілками.

9.2 Домашні завдання 9

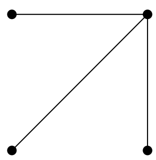
1. Нехай задано граф $G = (V, E)$, де $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(1, 5), (1, 4), (2, 4), (3, 5), (5, 2)\}$. Зобразіть цей граф, вкажіть його матриці суміжності та інцидентності.

2. Вкажіть деяку симетричну квадратну матрицю розміру 4×4, в якої по чотири елементи рівні 1 і 2, а інші нульові. Зобразіть граф, нею визначений. Які властивості має цей граф?

3. Доведіть, що в будь-якому простому графі, який має принаймні дві вершини, знайдуться різні вершини з рівними степенями.

4. Запишіть матрицю суміжності заданого графа і знайдіть її власні значення, вкажіть його матрицю інцидентності:

   (a)

   (b) 

5. Скільки існує попарно неізоморфних простих графів з 7 вершинами і 18 ребрами? Відповідь поясніть.

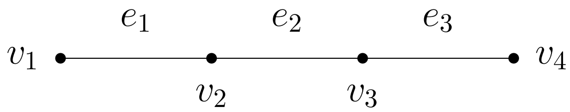
6. Чи існує простий граф з 6 вершинами, у якого набір степенів вершин є такиим: (2, 2, 2, 4, 5, 5)? Відповідь поясніть.

7. Побудуйте всі попарно неізоморфні прості орграфи з 3 вершинами і 3 стрілками. Доведіть, що побудовані орграфи попарно неізоморфні

10 Шляхи в графах. Ойлерові та гамільтонові графи

Задача 46. *Скільки є шляхів довжини 3 у повному графі з n вершинами? Скільки серед них замкнених?*

Розв'язання. Позначимо вершини шляху, як v_1, v_2, v_3 та v_4; а ребра, як e_1, e_2 та e_3. Якщо жодні додаткові вимоги на шлях не накладаються, то можна зобразити його у наступному вигляді:

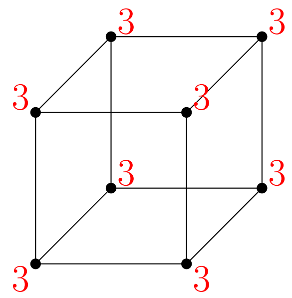


Підрахуємо кількість таких шляхів. Першу вершину v_1 можемо обрати довільним чином, тобто існує n способів її вибрати. Обрання ребра e_1 є тим самим, що й обрання другої вершини $v_2 \neq v_1$, не співпадіння з попередньою вершиною є обов'язковою вимогою, оскільки повний граф є простим, тобто не має петель. Таким чином v_2 можна обрати $n-1$ спосіб. За аналогічним принципом обираються вершини v_3 та v_4, кожна з яких по $n-1$ спосіб. Тому за правилом множення, отримуємо, що усього є $n \cdot (n-1)^3$ шляхів довжини три у повному графі на n вершинах.

З'ясуємо скільки серед цих шляхів буде замкнених. Очевидно, що вершини v_1 та v_2 можна обрати відповідно n та $n-1$ способом. Також зрозуміло, що для замкненості шляху $v_4 = v_1$. Вершина v_3 не може співпадати з попередньою вершиною v_2. Також v_3 не може співпадати й з наступною вершиною v_4, тобто з v_1. Таким чином вершину v_3 можна обрати $n-2$ способами. Тоді всього існує $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$. Зауважимо, що для випадку парних довжин можуть з'являтися шляхи типу $v_1,\ v_2,\ v_1,\ \ldots,\ v_2,\ v_1$, які у нашому випадку не виникають через непарність довжини шляху.

Задача 47. *Маємо каркас куба зроблений з дроту. Чи може жук, що сидить у вершині куба, проповзти (не злітаючи) по всіх ребрах, причому по кожному ребру рівно по одному разу.*

Розв'язання. Зобразимо цей куб, як граф, так, що вершини куба – вершини граф, а ребра куба – відповідно ребра графа.



Позначимо на графі степені його вершин, всі вони непарні та рівні 3.

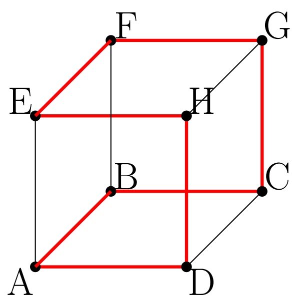
Нагадаємо, що Ойлерів граф можна намалювати не відриваючи руки від паперу і не проходячи двічі по одному ребру. Якщо даний граф Ойлерів, то так намальований маршрут і був би шуканим шляхом для жука. Тож перевіримо чи є даний граф Ойлеровим.

Даний граф має набір степенів $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$. Оскільки Ойлерів граф або не має непарних вершин, або має їх дві, то даний граф-куб, який містить 8 непарних вершин не є Ойлеровим.

Таким чином жук не зможе проповзти по всім ребрам куба, рівно по одному разу.

Задача 48. *Чи буде куб гамільтоновим графом?*

Розв'язання. Так, даний граф буде гамільтоновим, зобразимо на ньому гамільтонів цикл:



Цикл $A \to D \to H \to E \to F \to G \to C \to B \to A$ містить всі вершини графа, тож він гамільтонів. Існування гамільтонового циклу доводить гамільтоновість графа.

10.1 Аудиторні завдання 10

1. Скільки є шляхів довжини 4 у повному графі з n вершинами? Скільки серед них замкнених?

2. Доведіть, що простий граф є дводольним тоді й лише тоді, коли всі його замкнені шляхи мають парну довжину.

3. Доведіть, що в регулярному дводольному графі долі містять однакову кількість вершин.

4. Доведіть, що простий зв'язний граф з n вершинами, всі вершини якого мають степінь 2, єдиний з точністю до ізоморфізму.

5. Нехай в зв'язному графі є рівно дві вершини непарного степеня. Доведіть, що існує простий шлях, який їх з'єднує.

6. Побудуйте три попарно неізоморфні графи з вісьмома вершинами, у кожному з яких існує ойлерів цикл.

7. Чи будуть ойлеровими (гамільтоновими) графи "відкритий конверт", "заклеєний конверт"?

8. Доведіть, що повний граф з n ($n \geq 3$) вершинами є гамільтоновим. Скільки гамільтонових циклів існує в цьому графі?

10.2 Домашні завдання 10

1. У повному графі з n вершинами знайдіть кількість замкнених ланцюгів довжини k.

2. Нехай в простому зв'язному графі з n вершинами ($n \geq 2$) ніякі дві вершини однакового степеня не з'єднані ланцюгом довжини 2. Доведіть, що в цьому графі існує вершина степеня один.

3. Наведіть приклад ойлерового, але не гамільтонового графа.

4. Наведіть приклад гамільтонового, але не ойлерового графа.

5. Наведіть приклад простого ойлерового графа з 6 вершинами і максимальною можливою кількістю ребер.

6. Які з платонових графів є ойлеровими, гамільтоновими?

11 Дерева

Задача 49. *Доведіть, що у довільному дереві кількість вершин на один більша за кількість ребер.*

Розв'язання. Доведемо методом математичної індукції по кількості ребер у дереві. *База.* Розглянемо граф – дерево з однією вершиною, і відповідно нулем ребер. для нього умова задачі виконується. *Припущення.* Нехай, що умова задачі виконується для деякого дерева з k вершинами і $k-1$ ребром.

Оскільки дерево за означенням є графом без циклів, то для того, щоб збільшити кількість ребер не можна з'єднувати ті вершини, що вже є у графі. Тобто не можна додати ребро не додаючи нових вершин. З того, що дерево за означенням також є зв'язним графом, випливає що не можна збільшити кількість ребер на одне а вершин на дві. Таким чином за один крок можна додати до графа тільки одну вершину і одне ребро $\multimap$.

Крок. Тобто при збільшення кількості ребер на 1, кількість вершин теж збільшується на 1. Тобто маємо $k+1$ вершин і k ребер, що задовольняє умову.

За ММІ, довели, що у дереві кількість вершин на один більша за кількість ребер

Задача 50. *Побудуйте всі попарно неізоморфні дерева з 4 вершинами.*

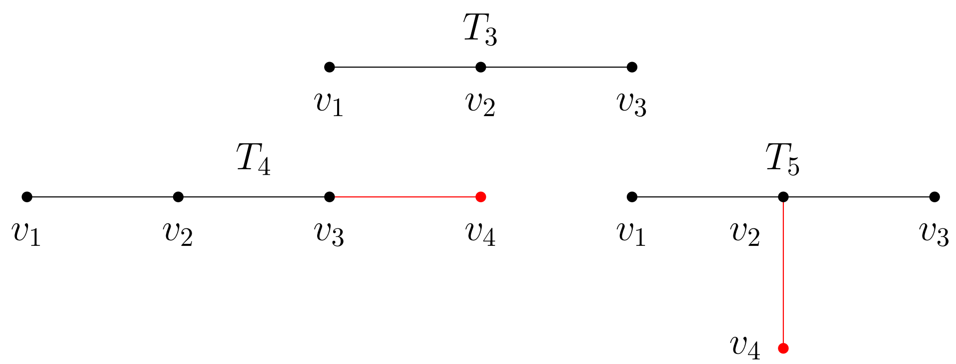
Розв'язання. В пошуку цих графів є зручним застосувати індуктивні міркування, по кількості вершин дерева n.

Якщо $n = 1$ або $n = 2$, то для кожного з таких значень кількості вершин є тільки одне дерево, відповідно T_1 та T_2. Для $n = 3$ також є тільки одне дерево, що вже доводилося в попередніх розділах (при знаходженні всіх не ізоморфних графів на трьох вершинах).

Для цих графі можна побачити, що вони отримані один з одного послідовним додаванням ребра і вершини —∘ до дерева з меншою кількістю вершин.

Тоді побудуємо за таким принципом всі можливі, попарно не ізоморфні дерева, які утворяться з T_3 додаванням одного ребра і однієї вершини —∘.

Переберемо всі можливі варіанти додати ребро і вершину до дерева T_3. Очевидно, що дерева отримані з T_3 домальовуванням ребра і вершини у вершинах v_1 або v_3, будуть ізоморфними (тому залишаємо тільки один варіант: T_4). Додавши до T_3 ребро і вершину в v_2, отримуємо дерево T_5.



Покажемо, що дерева T_4 та T_5 неізоморфні. Запишемо набори степенів їх вершин. Для T_4 це $(1, 1, 2, 2)$, а для T_5 це $(1, 1, 1, 3)$. Набори степенів не співпадають, тому ці графи не ізоморфні.

Таким чином доведено, що всього є два не ізоморфні дерева на чотирьох вершинах, це дерева T_4 та T_5.

11.1 Аудиторні завдання 11

1. Побудуйте всі попарно неізоморфні дерева з 5 вершинами.
2. Доведіть, що кожне дерево з n вершинами, $n \geq 2$, має принаймні два листки.
3. Опишіть дерева, які мають рівно два листки.

4. Доведіть, що зв'язний граф є деревом тоді й лише тоді, коли кожне його ребро є мостом.

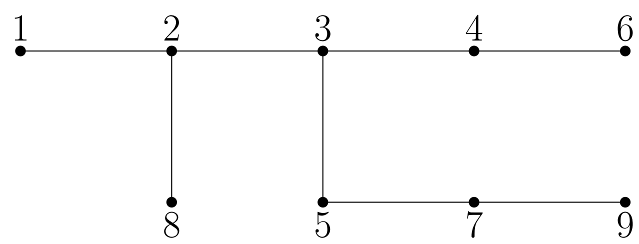
5. Нехай Γ — простий граф з n вершинами та $n-1$ ребром. Доведіть, що такі умови рівносильні:

   (a) Γ є деревом;

   (b) Γ ациклічний;

   (c) Γ зв'язний.

6. Побудуйте код Прюфера дерева



7. Побудуйте дерево, яке має код Прюфера $x_7^3 x_1^2 x_3 x_5 x_2$.

8. Доведіть, що для довільного натурального числа n набір натуральних чисел $(d_1, \ldots, d_n)$ є набором степенів вершин деякого дерева тоді й лише тоді, коли

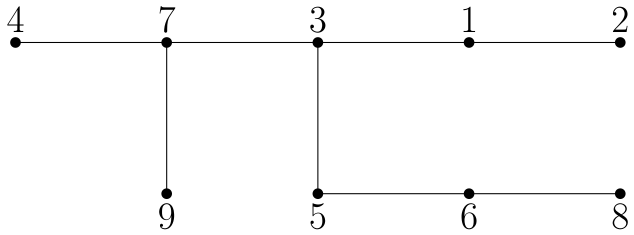
$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2.$$

11.2 Домашні завдання 11

1. Доведіть, що кожне дерево є дводольним графом.

2. Побудуйте всі попарно неізоморфні дерева з 6 вершинами.

3. Побудуйте код Прюфера дерева



4. Побудуйте дерево, яке має код Прюфера $x_7x_1^4x_2x_3x_1^2$.

5. Нехай максимальний степінь вершини деякого дерева не менший за k. Доведіть, що це дерево має принаймні k листків.

12 Бінарні відношення

Задача 51. *Нехай* $M = \{1,2,3,4,5\}$. *Для заданого бінарного відношення*

$$\rho = \{(1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}$$

на множині M *визначте* $Pr_1\rho, Pr_2\rho, \rho^{-1}, \rho\circ\rho, \rho\circ\rho^{-1}$ *і* $\rho^{-1}\circ\rho$ *і побудуйте його транзитивне замикання.*

Розв'язання. У $Pr_1\rho$ потрапляють перші координати з пар, якими задане відношення, тобто $Pr_1\rho = \{1,2,4\}$. У $Pr_2\rho$, навпаки другі елементи, так маємо $Pr_2\rho = \{1,2,3,4\}$. Для запису оберненого відношення міняємо місцями елементи у кожній парі, $\rho^{-1} = \{(2,1),(4,1),(3,2),(4,2),(1,4),(3,4),(4,4)\}$.

Для відшукання композиції $\rho\circ\rho$ перебираючи всі пари елементів, які є у бінарному відношенні, маємо, що якщо у ρ є пара (a,c), $(c,d) \in \rho$, то у композицію потрапляє пара $(a,d) \in \rho\circ\rho$. Тобто $\rho\circ\rho = \{(1,3),(1,4),(1,1),(2,1),(2,3),(2,4),(4,2),(4,4),(4,1),(4,3)\}$. Аналогічно шукаємо

$$\rho\circ\rho^{-1} = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(2,1),(4,4),(4,2),(4,1)\}.$$

Таксамо $\rho^{-1}\circ\rho = \{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4),(3,3),(3,4),(4,3),(1,1),(1,3),(1,4),(3,1),(4,1)\}$.

Зауважимо, що з двох останніх композицій відношень, бачимо, що взагалі кажучи $(\rho\circ\rho^{-1})^{-1} \neq \rho^{-1}\circ(\rho^{-1})^{-1})$, враховуючи, що $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

Транзитивне замикання $\widehat{\rho}$ легко побудувати зобразивши граф відповідного бінарного відношення $\widehat{\rho} = \{(1,3),(1,1),(2,1),(2,2),(4,2)\}$.

Задача 52. *Чи буде відношення* $(m,n)\in\rho_1 \;\Leftrightarrow m-n$ *парне число, на множині* $\mathbb{Z}$ *рефлексивним, антирефлексивним, симетричним, антисиметричним, асиметричним, транзитивним?*

Розв'язання. Треба перевірити властивості відношення, вказані в умові.

Рефлексивність: $x\rho_1 x$, для кожного $x \in \mathbb{Z}$? Так.

Антирефлексивність: для жодного $x \in \mathbb{Z}$ не виконується $x\rho_1 x$? Ні.

Симетричність: $x\rho_1 y$, то $y\rho_1 x$, для $x, y \in \mathbb{Z}$? Так.

Антисиметричність: $x\rho_1 y$ та $y\rho_1 x$, то $x = y$ для $x, y \in \mathbb{Z}$? Ні.

Асиметричність: $x\rho_1 y$ то не виконується $y\rho_1 x$, для $x, y \in \mathbb{Z}$? Ні.

Транзитивність: $x\rho_1 y$ і $y\rho_1 z$, то $x\rho_1 z$, для $x, y, z \in \mathbb{Z}$? Так.

Доречі ρ_1 буде відношенням еквівалентності.

12.1 Аудиторні завдання 12

1. Нехай $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Для заданого бінарного відношення ρ на множині M визначте $Pr_1\rho, Pr_2\rho, \rho^{-1}, \rho \circ \rho, \rho \circ \rho^{-1}$ і $\rho^{-1} \circ \rho$ і побудуйте його транзитивне замикання:

   (a) $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$;

   (b) $\rho = \{(2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (5, 2)\}$

2. Для бінарного відношення ρ на множині $\mathbb{N}$ такого, що

   $$\rho = \{(m, n)|\ n \text{ ділиться на } m\}$$

   визначте $Pr_1\rho$, $Pr_2\rho$, ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho \circ \rho^{-1}$ і $\rho^{-1} \circ \rho$, $\overline{\rho}$. Перевірте, чи буде це відношення рефлексивним, антирефлексивним, симетричним, антисиметричним, асиметричним, транзитивним.

3. Доведіть, що для довільного бінарного відношення ρ на множині M

   (a) $Pr_1\rho = \varnothing \Leftrightarrow \rho = \varnothing \Leftrightarrow Pr_2\rho = \varnothing$;

   (b) $Pr_2\rho = Pr_1\rho^{-1}$;

   (c) $Pr_1\rho = Pr_2\rho^{-1}$.

4. Які з бінарних відношень на множині $\mathbb{Z}$

   $(m, n) \in \rho_2 \quad \Leftrightarrow m + n$ парне число;

   $(m, n) \in \rho_3 \quad \Leftrightarrow m - n \leq 2021$;

   $(m, n) \in \rho_4 \quad \Leftrightarrow m - n$ непарне число;

   $(m, n) \in \rho_5 \quad \Leftrightarrow m + n$ непарне число;

   є рефлексивними, антирефлексивними, симетричними, антисиметричними, асиметричними, транзитивними?

5. Доведіть, що добуток $\rho_1 \circ \rho_2$ двох антирефлексивних бінарних відношень ρ_1 і ρ_2 на множині M може не бути антирефлексивним відношенням.

6. Доведіть, що для симетричних бінарних відношень ρ_1 і ρ_2 на множині M симетричними будуть також відношення $\rho_1 \cup \rho_2$, $\rho_1 \cap \rho_2$, ${\rho_1}^{-1}$, $\rho_1 \circ {\rho_1}^{-1}$.

7. Наведіть приклад непорожнього бінарного відношення ρ на деякій множині M, яке було б одночасно:

   (a) симетричним, транзитивним, не рефлексивним;

   (b) рефлексивним, антисиметричним, не транзитивним;

   (c) не симетричним, не антисиметричним.

8. Скільки рефлексивних відношень існує на n-елементній множині? Скільки серед них симетричних?

12.2 Домашні завдання 12

1. Нехай $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Для заданого бінарного відношення ρ на множині M визначте $Pr_1\rho$, $Pr_2\rho$, ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho \circ \rho^{-1}$ і $\rho^{-1} \circ \rho$ та побудуйте його транзитивне замикання:

   (a) $\rho = \{(1, 2),\ (2, 3),\ (3, 5),\ (4, 1),\ (5, 4)\}$;

   (b) $\rho = \{(1, 1),\ (2, 2),\ (3, 3),\ (4, 2),\ (4, 3),\ (5, 1),\ (5, 5)\}$.

2. Нехай $k \geq 2$ – натуральне число. Для бінарного відношення ρ_k на множині $\mathbb{N}$ такого, що $\rho_k = \{(m, n) | \ m-n$ ділиться на $k\}$ визначте $Pr_1\rho_k$, $Pr_2\rho_k$, ρ_k^{-1}, $\rho_k \circ \rho_k$, $\rho_k \circ \rho_k^{-1}$, $\rho_k^{-1} \circ \rho_k$, $\overline{\rho}_k$. Перевірте, чи буде це відношення рефлексивним, антирефлексивним, симетричним, антисиметричним, асиметричним, транзитивним.

3. Які з бінарних відношень на множині $\mathbb{Z}$

   $(m, n) \in \rho_6 \quad \Leftrightarrow \quad$ неповна частка від ділення m на n парна;

   $(m, n) \in \rho_7 \quad \Leftrightarrow \quad$ неповна частка від ділення m на n непарна;

   $(m, n) \in \rho_8 \quad \Leftrightarrow mn \quad$ парне число;

   $(m, n) \in \rho_9 \quad \Leftrightarrow mn \quad$ непарне число;

   $(m, n) \in \rho_{10} \quad \Leftrightarrow m - n \quad$ є степенем числа 2;

   $(m, n) \in \rho_{11} \quad \Leftrightarrow m \ n$ М не взаємнопрості;

4. Наведіть приклад симетричних бінарних відношень ρ_1 і ρ_2 на множині $M = \{1, \ 2, \ 3, \ 4\}$, для яких добуток $\rho_1 \circ \rho_2$ не буде симетричним відношенням.

5. Наведіть приклад таких транзитивних відношень ρ_1 і ρ_2 на множині $M = \{1, \ 2, \ 3, \ 4\}$, що:

   (a) $\rho_1 \circ \rho_2$ не транзитивне;

   (b) $\rho_1 \circ \rho_2$ транзитивне;

   (c) $\rho_1 \circ \rho_2 \neq \rho_1$;

   (d) $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_1$.

6. Наведіть приклад непорожнього бінарного відношення ρ на деякій множині M, яке було б одночасно:

   (a) рефлексивним, симетричним, не транзитивним;

   (b) рефлексивним, симетричним, транзитивним;

   (c) не рефлексивним, не антирефлексивним, несиметричним, транзитивним.

13 Еквівалентності і порядки

Задача 53. *Нехай M — множина всіх прямих на площині. Чи буде відношенням еквівалентності на M відношення паралельності прямих?*

Розв'язання. Позначимо відношення паралельності стандартно, як $\|$. Щоб перевірити чи є $\|$ відношенням еквівалентності на M, перевіримо, за означенням чи воно є рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Нехай l – деяка пряма, $l \in M$. Пряма l паралельна сама собі, тобто $l \| l$, тобто відношення $\|$ є *рефлексивним.*

Виберемо дві довільні прямі $l, m \in M$. Відомо, що якщо l паралельна m, то й m паралельна l. Тобто записавши це для відношення паралельності, маємо: $l \| m \;\Rightarrow\; m \| l$. Тоді відношення $\|$ є *симетричним.*

Залишається перевірити транзитивність $\|$. Розглянемо три довільні прямі $l, m, n \in M$. Якщо $m \| l$, та $l \| n$, то $m \| n$, очевидно з геометричних міркувань. Так, довели, що відношення $\|$ є *транзитивним.*

Тоді з вище доведеного маємо, що відношення $\|$ є відношенням еквівалентності.

13.1 Аудиторні завдання 13

1. Нехай M — множина всіх прямих на площині. Чи буде відношенням еквівалентності на M відношення перпендикулярності прямих?

2. На множині $\mathbb{R}$ усіх дійсних чисел визначимо відношення ρ, поклавши
$$a \rho b \iff a - b \in \mathbb{Q}.$$
Доведіть, що ρ є відношенням еквівалентності, і опишіть його класи еквівалентності.

3. Чи завжди об'єднання відношень еквівалентності буде відношенням еквівалентності?

4. Доведіть, що відношення, обернене до відношення еквівалентності, також є відношенням еквівалентності.

5. Доведіть, що множина всіх підмножин даної множини частково впорядкована за відношенням включення.

6. Нехай $a \leq b \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{N}$ і a є дільником b. Доведіть, що $\leq$ — частковий порядок на $\mathbb{N}$.

7. Побудуйте всі неізоморфні відношення часткового порядку на множині

   (a) $M = \{a, b\}$;

   (b) $M = \{a, b, c\}$;

   (c) $M = \{a, b, c, d\}$.

8. Вкажіть всі неізоморфні частково впорядковані 6-елементні множини з найбільшим і чотирма мінімальними елементами.

9. Доведіть, що

   (a) множина $\mathbb{N}$ з порядком $0 < 2 < 4... < 1 < 3 < 5...$ є цілком впорядкованою;

   (b) множина $\mathbb{N}$ з порядком $...4 < 3 < 2 < 1$ не є цілком впорядкованою;

   (c) множина $\mathbb{Z}$ з порядком $1 < 2 < 3 < ... < 0 < -1 < -2 < -3 < ...$ є цілком впорядкованою.

13.2 Домашні завдання 13

1. Доведіть, що відношення подібності на множині усіх трикутників є еквівалентністю

2. Доведіть, що на множині $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ (де $\mathbb{N}_0$ – множина всіх невід'ємних цілих чисел) відношення ρ_1 і ρ_2 є відношеннями еквівалентності:

   (a) $((a, b), (c, d)) \in \rho_1 \iff a + d = b + c$;

   (b) $((a, b), (c, d)) \in \rho_2 \iff$ ($a \cdot d = b \cdot c$ для $b \neq 0$ $d \neq 0$) або ($a = c$ для $b = 0$ і $d = 0$).

   Опишіть класи еквівалентності цих відношень.

3. Доведіть, що перетин відношень еквівалентності є відношенням еквівалентності.

4. Наведіть приклад таких двох відношень еквівалентності ρ_1 і ρ_2 на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$, що добуток $\rho_1 \circ \rho_2$ не є відношенням еквівалентності.

5. Вкажіть всі неізоморфні частково впорядковані 5-елементні множини з найменшим і найбільшим елементами.

6. Побудуйте приклад частково впорядкованої множини, яка має

   (a) точно один мінімальний елемент, але не має найменшого елемента;

   (b) точно один максимальний елемент, але не має найбільшого елемента;

   (c) один мінімальний і один максимальний елементи, але не має найменшого і найбільшого елементів;

   (d) не має жодного мінімального і максимального елементів та не має найменшого і найбільшого елементів.

14 Булеві функції

Задача 54. *Побудуйте таблицю значень булевої функції, заданої формулою*

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to \neg x_3) \leftrightarrow (x_2 \wedge x_3).$$

За допомогою побудованої таблиці згайдіть ДДНФ та ДКНФ даної формули.

Розв'язання. Для побудови таблиці значень, розіб'ємо дану формулу на частини, для зручності обчислень

x_1	x_2	x_3	$\neg x_3$	$x_1 \to \neg x_3$	$x_2 \wedge x_3$	$F(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0

За таблицею визначаємо область істинності $I(F)$ формули $F(x_1, x_2, x_3)$ та область хибності $O(F)$ цієї формули.

Таким чином

$$I(F) = \{(0,1,1),\ (1,0,1)\},$$

$$O(F) = \{(0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0),\ (1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}.$$

Для того, щоб побудувати ДДНФ нам необхідно побудувати таку диз'юнкцію елементарних кон'юнкцій, яка на векторах з $I(F)$ набуває істинних значень. Зрозуміло, що це виконується, за наступних умов, якщо $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3) \in I(F)$ та $\widetilde{x}_i = 0$, то у відповідну елементарну кон'юнкцію входить $\neg\widetilde{x}_i$, а якщо $\widetilde{x}_j = 1$, то у відповідну елементарну кон'юнкцію входить $\widetilde{x}_j$.

Тоді ДДНФ набуває вигляду

$$(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3).$$

Для того, щоб побудувати ДКНФ нам необхідно побудувати таку кон'юнкцію елементарних диз'юнкцій, яка на векторах з $O(F)$ набуває хибних значень. Це виконується, за наступних умов, якщо $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3) \in O(F)$ та $\widetilde{x}_i = 0$, то у відповідну елементарну кон'юнкцію входить $\widetilde{x}_i$, а якщо $\widetilde{x}_j = 1$, то у відповідну елементарну кон'юнкцію входить $\neg\widetilde{x}_j$.

Тоді ДКНФ набуває вигляду

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge$$

$$\wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3).$$

14.1 Аудиторні завдання 14

1. Знайдіть номер булевого вектора

   (a) $(1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$,

   (b) $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{200}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{100}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{100})$.

2. Знайдіть булевий вектор мінімальної довжини, який має номер

   (a) 325,

   (b) $2^{325} - 2$.

3. Побудуйте таблицю значень булевої функції, заданої формулою

$$((x_1 \to \neg x_2) \to x_2) \vee (x_1 \wedge x_3).$$

4. Скільки існує булевих векторів довжини n, булева сума координат кожного з яких рівна 1?

5. Побудуйте ДДНФ булевої функції, заданої формулою

$$(x_1 \to x_2) \wedge (\neg x_3 \leftrightarrow \neg x_1).$$

6. Побудуйте ДКНФ булевої функції, заданої формулою

$$((x_1 \oplus x_2) \to (x_3 \vee \neg x_1)) \leftrightarrow (\neg x_2 \vee x_3).$$

7. Вкажіть правило побудови ДДНФ булевої функції, заданої формулою $F_1 \leftrightarrow F_2$, якщо відомі ДДНФ булевих функцій, заданих формулами F_1, F_2.

8. Вкажіть булевий многочлен, котрий визначає булеву функцію, задану формулою

$$(\neg x_3 \leftrightarrow x_2) \to (x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)).$$

9. На скількох булевих векторах набуває значення 1 булева функція від 100 змінних, визначена булевим многочленом

$$\bigoplus_{1 \le i < j \le 100} x_i \wedge x_j?$$

10. Для всіх булевих функцій від двох змінних визначте, чи належить вона до кожного з класів $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4$ з теореми Поста.

11. Вкажіть всі двоелементні повні системи булевих функцій від двох змінних, які не містять ні штрих Шеффера, ні стрілку Пірса.

12. Знайдіть дві одноелементні повні системи, утворені з булевих функцій від трьох змінних.

13. Виразіть через стрілку Пірса та штрих Шеффера заперечення, імплікацію, диз'юнкцію та кон'юнкцію.

14.2 Домашні завдання 14

1. Знайдіть номер булевого вектора

   (a) $(1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 9)$,

   (b) $(0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{50}, 0, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{50}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{50}, 1)$.

2. Знайдіть булевий вектор мінімальної довжини, який має номер

   (a) 173,

   (b) $2^{173} - 3$.

3. Побудуйте таблицю значень булевої функції, заданої формулою $(\neg x_1 \vee \neg x_3) \oplus \neg(x_2 \to x_3)$.

4. Скільки існує булевих векторів довжини n, булевий добуток координат кожного з яких рівний 0?

5. Перевірте, чи буде тавтологією формула

   (a)
   $$((x_1 \to x_3) \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \vee x_2) \to x_3),$$

   (b)
   $$(x_1 \to x_2) \to ((x_1 \to x_3) \to (x_1 \to (x_2 \wedge x_3))).$$

6. Побудуйте ДДНФ булевої функції, заданої формулою
   $$(x_1 \wedge (x_2 \to \neg x_3)) \oplus ((\neg x_3 \vee x_1) \to \neg x_2).$$

7. Побудуйте ДКНФ булевої функції, заданої формулою
   $$((\neg x_1 \wedge (x_2 \to \neg x_3)) \vee ((\neg x_2 \to x_1) \vee (\neg x_1 \leftrightarrow x_3)).$$

8. Вкажіть правило побудови ДКНФ булевої функції, заданої формулою $F_1 \vee F_2$, якщо відомі ДКНФ булевих функцій, заданих формулами F_1, F_2.

9. Вкажіть булевий многочлен, котрий визначає булеву функцію, задану формулою $(x_1 \to \neg x_2) \wedge (\neg x_3 \vee x_1)$.

Література

1. Боднарчук Ю. В., Олійник Б. В. Основи дискретної математики. Київ: Вид. дім "Києво-Могилянська академія 2009. – 159с.

2. Вишенський В. А., Перестюк М. О. Комбінаторика: перші кроки. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2010. – 324с.

3. Зеліско М. М., Пирч Н. М. Практикум із дискретної математики. Навчальний посібник. – Львів: УАД, 2022.– 609с.

4. Кривий С.Л. Дискретна математика. Підручник для студентів вищих навчальних закладів. Вид. 2-ге. – Чернівці-Київ: Видавничий дім "Букрекс 2017. – 568 с.

5. Кривий С.Л. Збірник задач з дискретної математики. Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. Вид. 2-ге. – Чернівці-Київ: Видавничий дім "Букрекс 2018. – 456 с.

6. Олійник А.С., Петравчук А.П. Дискретна математика. Навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету. – Київ, 2024.– 177 с.

7. Шумська А. А. Основи дискретної математики. Методичні вказівки. – Київ: Інформаційно-видавничий центр "Політехніка" Друкарня НТУУ "КПІ", 2007. – 53 с.

8. Ямненко Р.Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 104 с.