МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

О. В. ПЕРЕГУДА
А.Ю. РИЖОВ

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Практикум з розв'язування олімпіадних задач» Частина I

для студентів спеціальності 111 Математика (ОП «Середня освіта») механіко-математичного факультету

КИЇВ 2024

Рецензенти:

доктор технічних наук, професор   В.В. Собчук
кандидат фізико-математичних наук, доцент   О.В. Борисейко

Затверджено
вченою радою механіко-математичного факультету
(протокол № від березня 2024 року)

Перегуда О.В., Рижов А.Ю.
Практикум з розв’язування олімпіадних задач. Частина 1. метод. розробка / О. В. Перегуда, А.Ю.Рижов.–Електронне видання, 2024.– 77 с.

У навчально-методичній розробці для самостійної роботи, що відповідає загальноосвітнім стандартам, викладено основні методи розв’язування математичних задач олімпіадного характеру за темами: подільність і остачі, принцип Діріхле, метод математичної індукції, Діофантові рівняння. Основною метою навчально-методичній розробки є ознайомлення та застосовування нестандартних методи для розв’язування задач математичних олімпіад і турнірів.

Рекомендовано для студентів фізико-математичних спеціальностей вищих навчальних закладів, вчителів математики та учнів, що цікавляться розв'язуванням нестандартних математичних задач.

З М І С Т

Передмова

Олімпіадні задачі в математиці – це задачі, для розв’язування яких потрібний нестандартний і оригінальний підхід. Відповідь на запитання “Як розв’язати задачу?”, особливо, якщо це олімпіадна задача, не завжди лежить на поверхні – тому, що пошук її є творчий процес. І єдиного підходу до таких задач знайти неможливо, але, як показує практика, є ряд методів та прийомів, використовуючи які, можна навчитися розв’язувати задачі. Вміння розв’язувати нестандартні задачі є одним з основним показником рівня математичного розвитку, глибини засвоєння навчального матеріалу. У вивченні стандартного курсу елементарної математики навчанню розв’язування задач приділяється багато часу, але основним методом такого навчання є демонстрація способів розв’язування певних видів (класів) задач, і зовсім не даються так необхідні знання аналізу суті задачі та її розв’язку. В учнів не виробляються уміння і навики в діях, що входять у загальну діяльність по розв’язуванню задач, не стимулюється постійний аналіз учнями своєї діяльності у цьому напрямку, по виділенню в ній загальних методів та підходів, що дало б можливість, у подальшому, будувати власну стратегію дослідження та розв’язання задач такого класу.

Навчально-методична розробка адресована насамперед студентам освітньої програми 014 «Середня освіта» з предметною спеціалізацією спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)» для кращого оволодінням знаннь з курсу «Практикум з розв’язування олімпіадних задач».

Основне завдання - ознайомити студентів з нестандартними методами розв’язування математичних задач олімпіадного характеру, навчити студентів застосовувати нестандартні методи для розв’язування задач математичних олімпіад і турнірів Поданий матеріал в навчально-методичній розробці базується, окрім знань шкільного курсу математики, на знаннях курсів математичного аналізу, алгебри, геометрії, математичної логіки, теорії чисел та зорієнтований на ознайомлення з деякими методами і прийомами розв’язування олімпіадних задач з математики різних етапів (шкільного, районного, обласного, всеукраїнського).

У навчально-методичні розробці “Практикум з розв’язування олімпіадних задач. Частина 1.” розглядаються найбільш поширені методи розв'язування олімпіадних задач з розділів: подільність чисел, метод математичної індукції, принцип діріхле, діофантові рівняння. Кожен розділ містить завдання для самостійної роботи.

Навчально-методична розробка розрахована на студентів фізико-математичних спеціальностей вищих навчальних закладів, вчителів математики та учнів, що цікавляться розв'язуванням нестандартних математичних задач.

ПОДІЛЬНІСТЬ І ОСТАЧІ

Значна кількість задач математичних олімпіад, так чи інакше, містять задачі про натуральні або цілі числа. А так як операція ділення на натуральні або цілі числах виконується не завжди, то виникає необхідність розглянути випадки, коли ця операція можлива. У цьому випадку доцільно застосувати елементи теорії подільності.

Нагадаємо основні означення понять теорії подільності, які можуть стати в нагоді при вирішенні завдань по цій темі.

Дільником числа *a* називається число, на яке число *a* ділиться без остачі.

Кратним числа *a* називається число, яке ділиться на число *a* без остачі.

Прості числа - це натуральні числа, які мають тільки два різних дільника: одиницю й саме число.

Складені числа - це натуральні числа, які мають більше двох різних дільників.

НСД (найбільший спільний дільник) - найбільше число, на яке діляться дані числа.

НСК (найменше спільне кратне) - найменше число, яке ділиться на задані числа.

Взаємно прості числа - числа, НСД яких дорівнює 1.

Найпростіші ознаки подільності.

Ознака подільності на 2. На 2 діляться ті числа, запис яких закінчується парною цифрою.

Ознака подільності на 3 та на 9. На 3 та на 9 діляться ті числа, сума цифр яких ділиться на 3 та на 9 відповідно.

Ознака подільності на 4. На 4 діляться ті числа, в записі яких останні дві цифри утворюють число, що ділиться на 4.

Ознака подільності на 5. На 5 діляться ті числа, запис яких закінчується цифрами 0 і 5.

Ознака подільності на 7. Число ділиться на 7 тільки тоді, коли різниця між самим числом без останньої цифри та подвоєнною останньою цифрою ділиться на 7.

Ознака подільності на 10. На 10 діляться тільки ті натуральні числа, запис яких закінчується цифрою нуль.

Ознака подільності на 11. На 11 діляться ті числа, у яких сума цифр, що займають непарні місця, або дорівнює сумі цифр, що займають парні місця, або відрізняється від неї на число, що ділиться на 11.

Ознака подільності на 13. Число ділиться на 13 тільки тоді, коли число його десятків, складене з числом одиниць збільшеним в чотири рази, кратне 13.

Ознака подільності на 17. Число ділиться на 17 тільки тоді, коли різниця між числом його десятків і числом одиниць збільшеним в п’ять разів, кратне 17.

Ознака подільності на 19. Число ділиться на 19 тоді, коли число його десятків, складене з подвоєним числом одиниць, кратне 19.

Наведемо важливі теоретичні відомості

1. Якщо числа a і b діляться на число c, то їх сума $a+b$ та їх різниця a-b ділиться на число c.

2. Якщо один з множників ділиться на задане число, то і добуток ділиться націло на це число.

3. Якщо число a ділиться на число c, та число b ділиться на число d, то добуток чисел ab ділиться на добуток чисел cd.

4. Сума двох довільних натуральних чисел і сума їх остач при діленні на деяке натуральне число дають однакові остачі.

5. Добуток двох довільних натуральних чисел і добуток їх остач при діленні на деяке натуральне число дають однакові остачі.

6. Якщо цілі числа a і b діляться на число d, то для будь-яких цілих чисел x і y число $ax+by$ також ділиться на d.

7. Найбільший спільний дільник чисел a і b $(a<b)$ дорівнює найбільшому спільному дільнику числа a та остачі від ділення b на a.

Приклад 1.1. Доведіть, що добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 6.

Розв'язання Серед трьох послідовних натуральних чисел одне ділиться на 3 і принаймні одне парне. Оскільки числа 2 і 3 взаємно прості, то добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться на $2 \cdot 3 = 6$.

Приклад 1.2. Дано p — просте число. Скільки існує натуральних чисел: а) менших за p і взаємно простих з ним; б) менших за p^2 і взаємно простих з ним?

Розв'язання а) Оскільки число p має тільки два дільники: 1 і p, то кожне натуральне число має тільки один спільний дільник із числом p — це число 1. Отже, всі числа, менші від p, взаємно прості з p, тому таких чисел $p - 1$.

б) Кожне число, менше за p^2 і не, кратне p, не може мати з числом p^2 інших спільних дільників, крім 1. Тому чисел, менших за p^2 і взаємно простих з ним, має бути p^2–1–(p–1)=p–p. (Тут p–1 — кількість чисел, кратних p і менших від p^2.)

Приклад 1.3. Яке найменше натуральне л, якщо л! ділиться на 990?

Розв'язання 990 ділиться на 11 тому, якщо n! ділиться на 990, то n! повинно ділитися на просте число 11. Якщо n < 11, то n! не ділиться на 11. Очевидно, що 11! ділиться на 9, на 10 і на 11. А оскільки ці числа взаємно прості, то 11! ділиться на 990. Отже, шукане значення n = 11.

Приклад 1.4. Хлопчик написав на дошці приклад на множення двох двозначних чисел, а потім замінив у ньому всі цифри на букви, причому однакові цифри — на однакові букви, а різні — на різні. В результаті він дістав $\overline{АБ} \cdot \overline{ВГ} = \overline{ДДЕЕ}$. Доведіть, що він помилився.

Розв'язання $\overline{ДДЕЕ} = 10Д \cdot 11 + Е \cdot 11$. Отже, $\overline{ДДЕЕ}$ ділиться на 11. Але ні $\overline{АБ}$, ні $\overline{ВГ}$ не ділиться на 11, оскільки двозначні числа, що діляться на 11, записуються однаковими цифрами.

Приклад 1.5. Чи може число, в десятковому записі якого використано 100 одиниць, 100 двійок, а решта цифр — нулі, бути точним квадратом?

Розв'язання Ні, не може, бо сума цифр цього числа дорівнює 300. Отже, воно ділитися на 3. Тоді, щоб число було точним квадратом, воно повинно ділитися і на 9, але на 9 воно не ділиться.

Приклад 1.6. Чи можна всі двоцифрові числа від 32 до 86 включно виписати у певному порядку одне за одним так, щоб дістати запис простого числа?

Розв'язання В якому б порядку не були записані дані числа, сума цифр, що стоятимуть на непарних місцях, дорівнюватиме 300. Сума ж цифр, які стоятимуть на парних місцях, дорівнюватиме 245. Різниця 300–245=55 ділиться на 11. Тому дістанемо число, яке ділиться на 11, яке не є простим.

Приклад 1.7. Відомо, що $56a=65b$, причому дій — натуральні числа. Доведіть, що $a+b$ — складене число.

Розв'язання Можемо записати у вигляді $65(a+b)=65a+65b=65a+56a=121a$.

Оскільки, 65 і 121 — взаємно прості числа, то $a+b$ ділиться на 121. Але 121 — складене число. Тому і $a+b$ складене.

Приклад 1.8. Знайдіть остачі від ділення: а) $2003 \cdot 2004 \cdot 2005+2004^3$ на 7; б) 9^{100} на 8.

Розв'язання а) При діленні на 7 число 2003 дає в остачі 1; 2004 — дає в остачі 2; 2005 — дає в остачі 3. Тому даний вираз при діленні на 7 дасть таку саму остачу,які$1\cdot 2\cdot 3+2^3$ = 14, тобто 0.

б) При діленні 9 на 8 маємо в остачі 1. Але $1^{100} = 1$. Тому остача від ділення 9^{100} на 8 дорівнює 1.

Приклад 1.9. Доведіть, що n^3+2n ділиться на 3 при будь-якому натуральному n.

Розв'язання Число n при діленні на 3 дає одну з трьох остач: 0, 1, 2. Тому можливі три випадки: $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$.

У першому випадку n^3 і $2n$ діляться на 3, а тому і n^3+2n також ділиться на 3.

У другому випадку n^3 дає остачу 1, $2n$ — остачу 2, а 1+2 ділиться на 3.

У третьому випадку n^3 дає остачу 2, $2n$ — остачу 1, а 2+1 ділиться на 3.

Приклад 1.10. Визначте дві останні цифри числа 2^{2m}.

Розв'язання Переформулюємо нашу задачу інакше: знайдіть остачу від ділення числа 2^{2004} на 100. Знайдемо послідовність остач від ділення на 100 чисел вигляду 2^n. Вона має вигляд: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52, 4, ... Бачимо, що, починаючи з другої остачі 4 для $n = 22$, остачі від ділення повторюються з періодом 20. Оскільки 2004 при діленні на 20 дає остачу 4, то останні дві цифри числа 2^{2004} такі ж, як дві останні цифри числа 2^4, тобто 1 та 6.

Приклад 1.11. Доведіть, що квадрати натуральних чисел при діленні на 4 можуть давати лише остачі 0 або 1.

Розв'язання Кожне натуральне число можна подати або у вигляді $n=2k$, або у вигляді $n=2k+1$ ($k = 0, 1, 2, ...$). У першому випадку $n^2 - 4k^2$ — ділиться на 4. У другому випадку $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ при діленні на 4 дає в остачі 1.

Приклад 1.12. Доведіть, що квадрати натуральних чисел при діленні на 3 можутьдавати лише остачі 0 та 1.

Розв'язання Число n при діленні на 3 може давати остачі 0, 1, 2.

Якщо $n = 3k$, то $n^2 = 9k^2$ ділиться на 3.

Якщо $n = 3k + 1$, то $n^2 = 9k^2 + 6k + 1$ дає в остачі 1.

Якщо $n = 3k + 2$, то $n^2 = 9k^2 + 12k + 4$дає в остачі 1.

Приклад 1.12. При яких л число $2^n + 3^n + 4^n$ є точним квадратом?

Розв'язання При $n = 1\cdot$ число $2^n + 3^n + 4^n = 3^2$ є точним квадратом.

Нехай $n > 1$. Тоді для $n = 2k$ маємо, що $2^n + 3^n + 4^n = 4^k + 3^{2k} + 4^{2k}$ при діленні на 3 дає остачу 2. При $n = 2k + 1$ число $2^n + 3^n + 4^n = 2\cdot 4^k + 3\cdot 9^k + 4^{2k+1}$ при діленні на 4 дає остачу 3. Отже, при $n > 1$ число $2^n + 3^n + 4^n$ не є точним квадратом.

Приклад 1.13. Доведіть, що $p^2–q^2$ ділиться на 24, якщо p і q — прості числа, більші від 3.

Розв'язання Доведемо спочатку, що $p^2 - 1$ ділиться на 24. Оскільки $24 = 8\cdot 3$, то доведемо окремо, що $p^2 - 1$ ділиться на 8 і ділиться на 3. $p^2 - l = (p - 1)(p + l)$ — ділиться на 8, як добуток двох послідовних парних чисел.

Оскільки $p \neq 3k$, то остача від ділення p^2 на 3 не дорівнює 0, але дорівнює 1. Отже, $p^2 - 1$ ділиться на 3.

Ми довели, що $p^2 - 1$ ділиться на 24. Далі $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1)$. За доведеним раніше $(p^2 - 1)$ ділиться на 24 і $(q^2 - 1)$ ділиться на 24.

Отже, $p^2 - q^2$ ділиться на 24.

Приклад 1.14. Відомо, що p, $p + 10$, $p + 14$ — прості числа. Знайдіть p.

Розв'язання Якщо $p > 3$, то $p = 3k + 1$ або $p = 3k + 2$.

Якщо $p = 3k + 1$, то $p + 14 = 3k + 15$ — ділиться на 3 і не є простим числом.

Якщо $p = 3k + 2$, то $p + 10 = 3k + 12$ — ділиться на 3 і теж не є простим числом.

Отже, $p \leq 3$, тому $p = 3$.

Приклад 1.15. Доведіть, що сума квадратів п'яти послідовних натуральних чиселне є точним квадратом.

Розв'язання Серед п'яти послідовних натуральних чисел є або три, або два парних, квадрати яких діляться на 4. Якщо маємо два парних, то непарних чисел буде три і квадрати кожного з них при діленні на 4 дають в остачі 1, а тому сума квадратів всіх п'яти чисел дає в остачі 3.

Якщо ж парних чисел три, то непарних два і сума квадратів усіх п'яти чисел при діленні на 4 дає в остачі 2. Отже, ця сума не може бути точним квадратом.

Приклад 1.16. Доведіть, що куби натуральних чисел:

а) при діленні на 7 можуть давати лише остачі 0, 1, 6;

б) при діленні на 9 можуть давати лише остачі 0, 1, 8.

Розв'язання а) Число n при діленні на 7 може давати остачі 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Тоді для n^3 відповідно остачі такі ж, які і остачі для чисел 0^3, 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, $б^3$,тобто 0, 1, 1, 6, 1, 6, 6.

б) Доводиться аналогічним чином.

Приклад 1.17. Доведіть, що число $6n^3 + 3$ не може бути шостим степенем цілого числа при жодному натуральному n.

Розв'язання Оскільки $k^6 = (k^2)^3$, то досить довести, що $6n^3 + 3$ не може бути кубом натурального числа. Розглянемо остачі при діленні $6n^3 + 3$ на 7.

Відомо, що при діленні на 7 число n^3 може давати остачі 0, 1, 6.

Якщо n^3 дає остачу 0, то $6n^3 + 3$ дає остачу 3.

Якщо n^3 дає остачу 1, то $6n^3 + 3$ дає остачу 2.

Якщо n^3 дає остачу 6, то $6n^3 + 3$ дає остачу 4.

Отже, жодного разу при діленні $6n^3 + 3$ на 7 ми не маємо остачу 0, 1, 6. Тому $6n^3 + 3$ не може бути кубом натурального числа, а тому не може бути й шостим степенем цілого числа.

Приклад 1.18. Числа x, y і z — натуральні, причому $x^2+y^2 =z^2$. Доведіть, що добуток xy ділиться на 12.

Розв'язання Якщо з чисел x, y жодне не ділиться на 3, то z^2 дає остачу 2 при діленні на 3, що неможливо. Отже, кожне з чисел x, y ділиться на 3.

Доведемо, що добуток xy ділиться на 4.

Зазначимо: 1) квадрат непарного числа при діленні на 8 дає остачу 1;

2) квадрат парного числа, що не ділиться на 4, дає остачу 4;

3) квадрат числа кратного 4 дає остачу 0.

Числа x^2 і y^2 не можуть бути обидва непарними, бо тоді їх остачі при діленні на 8, дорівнюють 1, а остача парного числа z^2 або 4, або 0.

Якщо x^2 і y^2 обидва парні, то добуток xy кратний 4.

Залишилося розглянути випадок, коли серед x і y одне число парне, а інше — непарне.

Нехай x — парне, y — непарне. Тоді z^2 — непарне. Тоді при діленні на 8 z^2 дає остачу 1, y^2 — остачу 1, а x^2 — або остачу 0, або остачу 4. Остача 4 неможлива, отже, x^2 дає остачу 0, а тому x ділиться на 4 і добуток xy ділиться на 4. Отримаємо, що добуток xy ділиться на 4 і на 3. Отже, добуток xy ділиться на 12.

Приклад 1.19. Знайдіть усі натуральні числа x, y, z, для яких виконується рівність $100^x + 211^y = 106^z$.

Розв'язання При $z \geq 3$ число 106^z ділиться на 8. Оскільки $105 = 8 \cdot 13+1$, то при кожному натуральному x число 105^x при діленні на 8 дає остачу 1.

Оскільки $211=8 \cdot 26+3$, а степені трійки при діленні на 8 почергово дають остачі 3 та 1, то і в числах 211^y ці дві остачі теж будуть чергуватися. Тому при $z \leq 3$ рівність виконуватись не може.

При $z = 1$, очевидно, рівність теж не виконується.

Перевіримо $z = 2$. Оскільки $211^2 > 106^2$, то $y = 1$. Тоді $x = 2$. Отже, $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$ — єдиний розв'язок задачі.

Приклад 1.20. Доведіть, що існує нескінченна кількість простих чисел.

Розв'язання Припустимо, що це не вірно. Нехай тоді $p_1, p_2, ..., p_n$ — усі прості числа. Розглянемо число $p_1p_2...p_n + 1$. Це число не ділиться на жодне з чисел $p_1, p_2, ..., p_n$, а тому не може бути розкладене в добуток простих чисел. Протиріччя доводить, що простих чисел нескінченна кількість.

Приклад 1.21. Доведіть, що існує таке натуральне n, що числа $n+1$, $n+2$, $n+2004$ —складені.

Розв'язання Доведемо, що такій умові відповідає число 2005!+1. Зауважимо, що число $n!$ ділиться на кожне з чисел 2, 3. ..., n. Тому для всіх k, для яких $2 \leq k \leq n$, число $n!+k$ ділиться на k, тобто, є складеним. Отже, якщо вибрати $n = 2005$, то матимемо 2004 послідовні натуральні числа, серед яких немає жодного простого.

Приклад 1.22. Знайдіть НСД (1381955; 690713).

Розв'язання Застосовуємо алгоритм Евкліда:

НСД (1381955; 690713) = НСД (690713; 529) = НСД (529; 368) = НСД (368; 161) = НСД (161; 46) = НСД (46; 23) = НСД (23; 0) = 23.

Приклад 1.23.Знайдіть НСД(2n+13; n+7).

Розв'язання НСД (2n+13; n+7) = НСД(n+7; n+6) = НСД(n+6; 1) = 1.

Приклад 1.24. Доведіть, що дріб $\frac{12n+1}{30n+2}$ — нескоротний при жодному натуральному n.

Розв'язання НСД(30n+2; 12n+1) = НСД(12n+1; 6n) = НСД(6n; 1) = 1, тому даний дріб нескоротний.

Конгруенції та їх властивості

З курсу елментарної математики відомо, що коли натуральне число a не ділиться націло на натуральне число b ($a > b$), то можна виконати дію ділення з остачею. Наприклад, при діленні числа 47 на 5 у частці отримуємо 9, а в остачі 2. Пишуть; 47:5 =9(ост 2) або 47 = 5•9+2 і кажуть, що число 47 при діленні на 5 дає в остачі число 2.

Узагальненим поняттям «ділення з остачею» на випадок, коли ділене є цілим числом є поняття конгруентності за модулем.

Означення. Цілі числа a і b називають конгруентними за модулем m ($m \in \mathbb{N}$), якщо остачі при діленні їх на число m є рівними. Записують $a \equiv b \pmod m$.

Такий запис називають конгруенцією. Читають: a конгруентне b за модулем m. Поняття конгруентності за модулем впровадив у математику видатний німецький математик Карл Фрідріх Гаусс.

Теорема. *Для того щоб цілі числа a і b були конгруентними за модулем m, де $m \in \mathbb{N}$, необхідно й достатньо, щоб різниця a - b ділилася націло на m.*

Основні властивості конгруенцій

1. Якщо $a \equiv b \ (mod\ m)$, $b \equiv c \ (mod\ m)$, то $a \equiv c \ (mod\ m)$.
2. Якщо $a \equiv b \ (mod\ m)$, то $a + c \equiv b + c \ (mod\ m)$.
3. Якщо $a \equiv b \ (mod\ m)$, то $ac \equiv bc \ (mod\ m)$.
4. Якщо $a \equiv b \ (mod\ m)$ і $c \equiv d \ (mod\ m)$, то $a \pm c \equiv b \pm d \ (mod\ m)$.
5. Якщо $a \equiv b \ (mod\ m)$ і $c \equiv d \ (mod\ m)$, то $ac \equiv bd \ (mod\ m)$.
6. Якщо $a \equiv b \ (mod\ m)$, то $an \equiv bn \ (mod\ m)$.

Застосування конгруенцій до розв’язування олімпіадних задач

Приклад 1.25 Знайти остачу від ділення числа 11^{43} на 7.

Розв'язання Очевидно, що $11^2 \equiv 2 \ (mod\ 7)$, застосуємо властивість 6) і піднесемо до кубу праву і ліву частину конгруентності: $11^3 \equiv 2^3 \ (mod\ 7)$, $11^6 \equiv 8 \ (mod\ 7)$.

Так як $8 \equiv 1 \ (mod\ 7)$, то за властивістю 1) маємо: якщо $11^6 \equiv 8 \ (mod\ 7)$ і $8 \equiv 1 \ (mod\ 7)$, то $11^6 \equiv 1 \ (mod\ 7)$.

Застосуємо до одержаної конгруенції властивість 6) та піднесемо праву і ліву частину конгруентності до сьомого степеня: $11^{42} \equiv (1)^7 \ (mod\ 7)$, або
$11^{42} \equiv 1 \ (mod\ 7)$.

Застосуємо властивість 3), домноживши праву і ліву частину конгруентності на 11, отримаємо: $11^{43} \equiv 11 \ (mod\ 7)$.

Очевидно, що $11 \equiv 4 \ (mod\ 7)$, за властивістю 1) маємо:

якщо $11^{43} \equiv 11$ $(mod\ 7)$ і $11 \equiv 4$ $(mod\ 7)$, то $11^{43} \equiv 4$ $(mod\ 7)$.

Отже, остача від ділення числа 1143 на дорівнює 4.

Приклад 1.26 Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $2^{4n+3}+13\cdot 3^{2n}$ кратне 7.

Розв'язання За умовою прикладу маємо: $2^{4n+3}+13\cdot 3^{2n}=8\cdot 16^n+13\cdot 3^{2n}$.

Очевидно, що $16 \equiv 9(mod\ 7)$. Застосовуючи послідовно властивості конгруенцій, маємо:

$16 \equiv 9(mod\ 7)$, $8\cdot 16 \equiv 8\cdot 9(mod\ 7)$,

$8\cdot 16^n+13\cdot 9^n \equiv 8\cdot 9^n+13\cdot 9^n\ (mod\ 7)$.

Отже отримаємо, що $8\cdot 16^n+13\cdot 9^n \equiv 21\cdot 9^n(mod\ 7)$.

Права частина останньої конгруенції при діленні на 7 дає в остачі 0, а це означає, що і лівій частині притаманна ця властивість.

Приклад 1.27 Знайти остачу від ділення числа 7^{29} на число 5.

Розв'язання Задача зводиться до того, щоб знайти ціле число x, яке задовольняє дві умови:

$0 \le x < 5$ і $7^{29} \equiv x\ (mod\ 5)$.

Отримаємо: $7^2 \equiv -1(mod\ 5)$, $7^{28} \equiv (-1)^{14} \equiv 1(mod\ 5)$.

Отже маємо: $7^{29} \equiv 7 \equiv 2(mod\ 5)$. Шукана остача дорівнює 2.

Приклад 1.28 . Довести, що число $n^5 + 4n$ ділиться націло на число 5 при будь-якому натуральному значенні n.

Розв'язання При діленні натурального числа n на 5 можна отримати такі результати:

1) $n \equiv 1\ (mod\ 5)$. За властивостями конгруенції, маємо $n^5 \equiv 1\ (mod\ 5)$, $4n \equiv 4\ (mod\ 5)$. Отже, $n^5 + 4n \equiv 5\ (mod\ 5)$, тобто $n^5 + 4n \equiv 0\ (mod\ 5)$. Отримаємо, що число $n^5 + 4n$ ділиться на 5 націло.

2) $n \equiv 2\ (mod\ 5)$. За властивостями конгруенції, маємо $n^5 \equiv 2\ (mod\ 5)$, $4n \equiv 3\ (mod\ 5)$. Отже, $n^5 + 4n \equiv 5\ (mod\ 5)$, тобто $n^5 + 4n \equiv 0\ (mod\ 5)$.Отримаємо, що число $n^5 + 4n$ ділиться на 5 націло.

3) $n \equiv 3\ (mod\ 5)$. За властивостями конгруенції, маємо $n^5 \equiv 3\ (mod\ 5)$, $4n \equiv 2\ (mod\ 5)$ Отже, $n^5 + 4n \equiv 5\ (mod\ 5)$, тобто $n^5 + 4n \equiv 0\ (mod\ 5)$. Отримаємо, що число $n^5 + 4n$ ділиться на 5 націло.

4) $n \equiv 4\ (mod\ 5)$. За властивостями конгруенції, маємо $n^5 \equiv 4\ (mod\ 5)$, $4n \equiv 1\ (mod\ 5)$. Отже, $n^5 + 4n \equiv 5\ (mod\ 5)$, тобто $n^5 + 4n \equiv 0\ (mod\ 5)$. Отримаємо, що число $n^5 + 4n$ ділиться на 5 націло.

Якщо число $n^5 + 4n$ ділиться на 5, то твердження прикладу є очевидним.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Доведіть, що добуток довільних п'яти послідовних натуральних чисел ділиться на 120.
2. Скількома нулями закінчується число 2004!?
3. Доведіть, що для довільних натуральних чисел m і n справедлива рівність НСД(m; n)·НСК(m; n) = mn.
4. Доведіть, що $n^5 + 4n$ ділиться на 5 при довільному

натуральному n.

5. Числа a і b — натуральні, причому $a^2 + b^2$ ділиться на 21. Доведіть, що воно ділиться на 441.
6. Доведіть, що сума квадратів трьох натуральних чисел, зменшена на 7, не ділиться на 8.
7. Якою цифрою закінчується число 777^{777}?
8. Доведіть, що$2222^{5555} +5555^{2222}$ ділиться на 7.
9. Числа p і $8p^2 + 1$ — прості. Знайдіть p.
10. Доведіть, що $n^9 – n^3$ ділиться на 504 при кожному натуральному n.
11. Доведіть, що сума n послідовних непарних натуральних чисел при $n > 1$ є складеним числом.
12. Доведіть, що число $\overline{abcdef}$ ділиться на 37 тоді й тільки тоді, коли $\overline{abc}+\overline{def}$ ділиться на 37.
13. Доведіть, що існує нескінченно багато трійок цілих чисел, квадрати яких утворюють арифметичну прогресію.
14. Знайдіть НСД($2^{100} – 1;2^{120} – 1$).
15. Знайдіть НСД(111...111; 11..11) — у запису першого числа — 100 одиниць, у запису другого – 60.
16. Довести, що:

а) Квадрат непарного числа при діленні на 8 дає остачу 1;

б) при простих $p> 5$ число p^2-25 ділиться на 24 націло;

в) при простих $p> 7$ число (p^4-1) ділиться на 240 націло;

17. Довести, що для довільного натурального n :

а) $7^{2n} - 5^{2n}$ ділиться націло на 24;

б) n^7-n ділиться націло на 42;

в) 2^{2n-1}-$9n^2$+21^n-14 ділиться націло на 27;

г) n^9-n^4 ділиться націло на 10;

д) 4^n+6^{n-1} ділиться націло на 9.

18. Знайти остачу від ділення:

а) $3^{105}+4^{105}$ на 181;

б) $2^{60}+7^{30}$ на 13;

в) $1^{100}+2^{100}+...+1980^{100}$ на125;

г) 2^p на 13, де p–просте число;

19. Знайти останню цифру чисел: а)2^3; б)19^{91}; в)9^9; г)19877^{1989}.

ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ

Для розв’язування задач олімпад певного класу, застосовують принцип Діріхле. Назву цей метод отримав на честь відомого німецького математика Петера Лежена Діріхле (1805- 1859), який перший за допомогою такого простого твердження отримав глибокі результати про наближення ірраціональних чисел раціональними. Найчастіше принцип Діріхле використовують в узагальненому формулюванні.

Узагальнений принцип Діріхле: Якщо $nk+1$ *предмет розкладено в* n *ящиків, то принаймні в одному з ящиків знаходиться не менше ніж* $k+1$ *предмет.*

Інколи принцип Діріхле зручно застосовувати у термінах теорії множин, а саме: *Якщо множина із* N *елементів розбита на* n *підмножин, жодні дві з яких не мають спільних елементів, і при цьому* $N > kn$, *то знайдеться підмножина, що містить не менше ніж* $k+1$ *елемент.*

Буває корисним ще таке переформулювання принципу Діріхле: *Якщо одне з кількох чисел більше від їх середнього арифметичного, то серед цих чисел знайдеться інше, що є меншим від їх середнього арифметичного.*

Приклад 2.1 В ящику лежать кулі двох різних кольорів: чорного і білого. Яку найменшу кількість куль требі взяти із ящика, не розглядаючи, так, щоб серед них напевно було дві кульки одного кольору?

Розв'язання Дістанемо з ящика 3 кулі, оскільки кольорів 2. Тоді, за принципом Діріхле, знайдуться принаймні дві кулі одного кольору. З іншого боку, зрозуміло, що двох куль може й не вистачити.

Приклад 2.2 Задано 12 цілих чисел. Доведіть, що серед них можна вибрати два, різниця яких ділиться на 11.

Розв'язання При діленні на 11 можна дістати одинадцять різних остач: 0, 1,2, ..., 10. За принципом Діріхле, при діленні дванадцяти чисел на 11 знайдуться принаймні два, які даватимуть однакову остачу. Тоді різниця цих двох чисел ділиться на 11 без остачі.

Приклад 2.3 У квадраті зі стороною 1 см взяли 51 точку. Доведіть, що деякі три із цих точок можна накрити квадратом зі стороною $\frac{1}{5}$ см.

Розв'язання Розіб'ємо цей квадрат на 25 менших квадратів зі стороною $\frac{1}{5}$ см.

Оскільки 51 > 25·2, то в один з цих менших квадратів попаде принаймні три точки.

Приклад 2.4 У клітинках таблиці 3х3 розставлено числа -1; 0; 1. Доведіть, що деякі дві із 8 сум по всіх рядках, всіх стовпцях і двох головних діагоналях будуть рівні.

Розв'язання Можливо мати лише 7 варіантів сум: -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3. Отже, за принципом Діріхле, якийсь варіант має повторитися.

Приклад 2.5 Доведіть, що в будь-якій компанії з 5 осіб є двоє, що мають однакове число знайомих у цій компанії.

Розв'язання Можливі два випадки: коли в компанії є хтось, хто знає чотирьох осіб, і коли в компанії такого немає. В першому випадку в цій компанії немає нікого, хто знав би 0 осіб. Отже, тоді маємо чотири варіанти знайомих: 1; 2; 3; 4. У другому випадку теж маємо чотири варіанти кількості знайомих: 0; 1; 2 і 3. Оскільки 5 > 4, то, за принципом Діріхле, серед п'яти осіб є принаймні дві, які мають однакову кількість знайомих.

Приклад 2.6 Доведіть, що для кожного натурального n існує число вигляду 11...100..0 (спочатку записані лише одиниці, а далі — тільки нулі), яке ділиться на n без остачі.

Розв'язання Розглянемо n+1 число вигляду 1, 11, 111, ..., 11...1 (останнє записане з допомогою n+1 одиниць). При діленні на n можна мати не більше ніж n різних остач. А тому, за принципом Діріхле, знайдуться два числа, що дадуть однакову остачу при діленні на n.

Різниця цих чисел ділиться не n і є числом потрібного вигляду.

Приклад 2.7 Відомо, що для простого числа $p > 3$, число p^k записується 20-ма цифрами. Доведіть, що принаймні три його цифри однакові.

Розв'язання Жодні три цифри числа p^k на будуть однаковими лише тоді, коли кожна цифра буде використана двічі. Але тоді сума його цифр повинна дорівнювати $2(1+2+3+...+9) = 90$; тому таке число має ділитися на 3. Але якщо просте число $p > 3$, то p^k не ділиться на 3.

Приклад 2.8 Кожна точка площини пофарбована в один із двох кольорів: чорний чи білий. Доведіть, що існує відрізок довжиною їм, кінці якого мають однаковий колір.

Розв'язання Розглянемо довільний правильний трикутник зі стороною 1 м. За принципом Діріхле, принаймні дві вершини його будуть одного кольору. Вони і є кінцями шуканого відрізка.

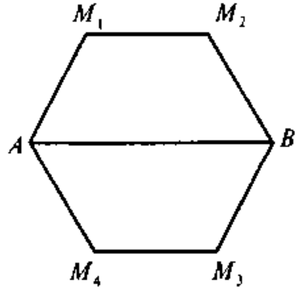
Приклад 2.9 Кожна точка площини пофарбована в один з двох кольорів: чорний чи білий. Доведіть, що існує прямокутник, усі вершини якого одного кольору.

Розв'язання Нехай a, b, c — три паралельні прямі, що лежать у даній площині. Прямі $d_1, d_2, ..., d_9$ — паралельні між собою, що перпендикулярні прямим a, b, c. Позначимо точки перетину кожної прямої d_1 з прямими a, b, c відповідно A_1, B_1, C_1. Існує $2^3 = 8$ варіантів розфарбування трьох точок. А оскільки таких трійок маємо 9, то принаймні дві трійки точок пофарбовано однаково. Позначимо ці трійки A_m, B_m, C_m та A_n, B_n, C_n.

У першій трійці принаймні дві точки мають один колір. Відповідні їм точки другої трійки мають такий самий колір. Отже, маємо чотири точки одного кольору і ці точки є вершинами прямокутника.

Приклад 2.10 Кожна точка площини пофарбована в білий або чорний колір. Доведіть, що на цій площині знайдеться трикутник з кутами 30°, 60°, 90° і гіпотенузою 2 см, вершини якого однокольорові.

Розв'язання Легко довести, що існує відрізок довжиною 2 см, кінці якого одного кольору (приклад 2.8). Позначимо його AB. Розглянемо правильний шестикутник $AM_1M_2BM_3M_4$.



Якщо якась із вершин M_1, M_2, M_3, M_4 має той самий колір, що A й B, то ця вершина разом із A й B є вершинами шуканого трикутника. Якщо ж кожна вершина M_1, M_2, M_3, M_4 має інший колір, ніж A й B, то трикутник $M_1M_2M_4$, задовольняє умову задачі.

Приклад 2.11 У ряд виписані 2^n прості числа. Відомо, що серед них не менше ніж n різних. Доведіть, що можна вибрати послідовність із чисел, що розташовані поруч, так, щоб їх добуток був повним квадратом.

Розв'язання Для розв'язання задачі досить довести, що існує така послідовність чисел, що розташовані поруч, в якій кожне просте число зустрічається парну кількість разів. Нехай у даній послідовності $\{a_1, a_2, ..., a_{2^n}\}$ зустрічається m різних простих чисел p_1, p_2, ..., p_m. За умовою $m > n$. Позначимо C_{ij} степінь числа p_i $(1 \le i \le m)$, в якому це число входить у добуток $a_1a_2...a_j$ перших j простих чисел даної послідовності, $1 \le j \le 2^n$.

Нехай d_{ij} — остача від ділення C_{ij} на 2: $C_{ij} = 2l_{ij} + d_{ij}$, d_{ij} може набувати значення 0 або 1. Кожен набір вигляду

$(d_{1j}, d_{2j}, ..., d_{mj})$ складається з m нулів і одиниць, усього таких наборів 2^n, оскільки $1 \le j \le 2^n$.

Зазначимо, що всього існує 2^m різних наборів $(d_1, ..., d_m)$, де $d_{j \in \{0;1\}}$. Оскільки $2^m < 2^n$ за умовою, то серед побудованих 2^n наборів знайдуться два однакові

$$(d_{1j}, d_{2j}, ..., d_{mj}) = (d_{1k}, d_{2k}, ..., d_{mk}),$$

для яких $1 \le j \le к \le 2^n$. Тому $d_{ij} = d_{ik}$ для всіх $1 \le i \le m$.

Отже маємо, що

$$C_{ik} - C_{ij} = 2(l_{ik} - l_{ij}) + (d_{ik} - d_{ij}) = 2(l_{ik} - l_{ij})$$

ділиться на 2 при кожному $1 \le i \le m$.

Зазначимо, що за визначенням C_{ij} число p_i зустрічається в добутку $a_{j+1}a_{j+2}...a_k = \dfrac{a_1a_2...a_k}{a_1a_2...a_j}$ рівно $C_{ik} - C_{ij}$ разів. Тому кожне число p_j входить у добуток $a_{j+1}a_{j+2}...a_k$ у парному степені, тобто $a_{j+1}a_{j+2}...a_k$ – точний квадрат.

Приклад 2.12 Доведіть, що для будь-якого натурального числа m знайдуться цілі числа a і b такі, що $|a| \le m$, $|b| \le m$ та $0 < a + b\sqrt{2} < \dfrac{1+\sqrt{2}}{m+2}$.

Розв'язання Розглянемо множину чисел $S=\{a+b\sqrt{2}, 0\le a\le m, 0\le b\le m, a, b\in Z\}$.

Усі числа множини S різні (інакше дістанемо, що $\sqrt{2}$ подається у вигляді відношення цілих чисел), їх кількість $(m+1)^2$. Усі вони належать числовому відрізку $[0; m+m\sqrt{2}]$ і розбивають цей відрізок на $(m+1)^2-1=m^2+2m$ частин, причому серед цих частин є різні. Тому довжина найменшої з цих частин строго менша, ніж $\frac{m+m\sqrt{2}}{m^2+2m}=\frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$.

Нехай цей найменший проміжок утворений числами $a_1+b_1\sqrt{2}$ та $a_2+b_2\sqrt{2}$, $a_1+b_1\sqrt{2}<a_2+b_2\sqrt{2}$. Тоді отримаємо:

$$0<a_2+b_2\sqrt{2}-a_1-b_1\sqrt{2}=(a_2-a_1)+(b_2-b_1)\sqrt{2}<\frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$$

і числа $a=a_2-a_1$,$b=b_2-b_1$ задовольняють умову задачі.

Приклад 2.13 Кілька футбольних команд проводять турнір в одне коло. Доведіть, що в будь-який момент турніру знайдуться дві команди, що зіграли до цього моменту однакову кількість матчів.

Розв'язання Нехай n – кількість команд, що проводять турнір. Розглянемо два випадки: 1) у даний момент турніру знайдеться команда, що не провела жодної гри; 2) протилежний.

Припустимо, що у випадку 1) така команда одна. Якби їх було дві, то все доведено. Тому у випадку 1) не буде жодної команди, що зіграла $n–1$ матч до даного моменту. Тоді, згідно з принципом Діріхле, серед $n–1$ команд (крім тієї, що не зіграла жодного матчу) можна вибрати дві, що зіграли однакову кількість матчів.

У випадку 2) кількість матчів, що провели команди до даного моменту, змінюється від 1 до $n–1$. І тому знову, за принципом Діріхле, серед n команд знайдуться дві, що зіграли однакову кількість матчів.

Приклад 2.14 Картки пронумеровані послідовно цілими числами від 1 до $2n+1$. Яку найбільшу кількість карток можна вибрати так, щоб жоден із номерів не дорівнював сумі якихось двох інших номерів карток?

Розв'язання Припустимо, що таких карток існує не менше ніж $n+2$. Розташувавши вибрані картки в порядку зростання їх номерів, віднімемо від усіх номерів найменший номер картки. Отримаємо $n+1$ різних чисел, відмінних від 0. Тоді, згідно з принципом Діріхле, отримана множина має принаймні один спільний з початковою номер (без картки з найменшим номером), тобто умови задачі не виконуються.

Легко перевірити, що для $n+1$ картки з непарними номерами $\{1,3,5,..., 2n+1\}$ умови задачі вже виконуються.

Застосування принципу Діріхле в геометричній інтерпритації

Принцип Діріхле для зручності розв’язування певних класів геометричних задач, застосовують в геометричній формі. Наприклад:

а) якщо відрізок довжиною l розбито на n відрізків, що не мають спільних внутрішніх точок, то довжина найбільшого відрізка не менша від $\frac{l}{n}$*, а довжина найменшого відрізка не більша за* $\frac{l}{n}$*;*

б) якщо на відрізку довжини l розташовано декілька відрізків, сума довжин яких більша від l, то принаймні два з цих відрізків мають спільну точку;

в) якщо всередині фігури з площею S розташовано декілька фігур, сумаплощ яких більша за S, то принаймні дві з цих фігур мають спільну точку.

Приклад 2.15 Усередині квадрата зі стороною 1 розташовано декілька кіл, сума довжин яких дорівнює 10. Доведіть, що існує пряма, яка перетинає принаймні чотири із цих кіл.

Розв'язання Спроектуємо всі кола на одну зі сторін квадрата. Проекцію кола довжини l є відрізок довжини $\frac{l}{\pi}$. Тому сума довжин проекцій усіх даних кіл дорівнюватиме $\frac{10}{\pi}$. Але $\frac{10}{\pi} > 3$. Отже, на стороні квадрата знайдеться точка, яка належить принаймні чотирьом проекціям. Тому пряма, що проходить через цю точку перпендикулярно до сторони квадрата, перетне принаймні 4 кола.

Приклад 2.16 У квадраті з площею 6 розташовані три прямокутники, кожний з площею 3. Доведіть, що площа спільної частини принаймні двох із прямокутників не менша від 1.

Розв'язання Нехай S_{12}, S_{13}, S_{23} відповідно площі спільних частин першого і другого, першого і третього та другого і третього прямокутників. Тоді разом ці прямокутники покривають площу, не меншу за $3 \cdot 3 - (S_{12} + S_{13} + S_{23})$, де $3 \cdot 3 = 9$ — сума площ даних прямокутників (величину $S_{12} + S_{13} + S_{23}$ потрібно відняти, щоб не враховувати двічі площі спільних частин). Оскільки всі три прямокутники розташовані у квадраті з площею 6, то

$$9 - (S_{12} + S_{13} + S_{23}) \leq 6.$$

Тому $S_{12} + S_{13} + S_{23} \geq 3$. А отже, принаймні одне з чисел S_{12}, S_{13}, S_{23} не менше ніж 1.

Приклад 2.17 Доведіть, що в кожному дев'ятикутнику існує пара діагоналей, кут між якими менше ніж 7°.

Розв'язання Усього в дев'ятикутнику $(9 \cdot 6):2=27$ діагоналей, оскільки з кожної вершини виходить по 6 діагоналей. Проведемо через довільну точку O площини 27 прямих, паралельних діагоналям дев'ятикутника. Ці прямі розбивають повний кут у 360° на 54 частини. Якщо серед 54 таких кутів немає кута, меншого за 7°, то сума всіх кутів є більшою, ніж $7° \cdot 54 = 368° > 360°$. Тому існує кут, менший за 7°. Оскільки при паралельному перенесенні прямих кут між ними не змінюється, то твердження задачі доведено.

Приклад 2.18. П’ять точок $A_1, A_2, ..., A_5$ лежать в одній площині і вони мають цілочисельні координати. Доведіть, що серед усіх трикутників з вершинами в даних точках є принаймні три, площі яких виражаються цілими числами.

Розв'язання Нехай $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ – вершини де-якого трикутника з цілими координатами. Зауважмо, що якщо одну з координат змінити на парне число, то площа відповідного трикутника зміниться на ціле число.

Таким чином, замінивши координати точок $A_1, A_2, ..., A_5$ числами 0 чи 1 залежно від їх парності, згідно з принципом Діріхле, деяким двом точкам відповідатимуть однакові координати. Нехай це будуть точки A_1 і A_2. Тоді площі трикутників $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_5$ виражаються цілими числами.

Приклад 2.19 У колі радіуса 1 проведено кілька хорд, сумарна довжина яких більша за 7. Доведіть, що знайдеться діаметр, який перетинає не менше ніж 8 хорд.

Розв'язання Оскільки довжина хорди менша за довжину відповідної дуги, то сума довжин відповідних дуг також більша за 7. Розглянемо довільний діаметр кола і відобразимо симетрично відносно центра О одне з півкіл.

Отже, друге півколо буде покрите дугами, які матимуть сумарну довжину, більшу за 7. Тоді, згідно з принципом Діріхле, одна з точок півкола покривається принаймні 8 разів. А тому відображений діаметр, що проходить через цю точку, перетинає 8 хорд.

Приклад 2.19 Доведіть, що останні цифри членів послідовності Фібоначчі, починаючи з певного номеру, періодично повторюються. (Послідовністю Фібоначчі називається послідовність натуральних чисел (u_n), така, що $u_1 = u_2 = 1$, а для будь-якого $n > 2$ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$).

Розв'язання Позначимо через a_n останню цифру числа u_n і розглянемо послідовність пар

$(a_1; a_2)$, $(a_2; a_3)$. $(a_3; a_4)$, … .

Оскільки число пар нескінченне, а число різних пар не більше ніж 10^2, то знайдуться такі номери k та p, що $a_k = a_p$, $a_{k+1} = a_{p+1}$. Оскільки значення a_{k+2} повністю визначається значеннями a_k та a_{k+1}, для будь-якого $i \geq k$ маємо: $a_i = a_{i+p+k}$.

Приклад 2.20 Доведіть, що в послідовності Фібоначчі є число, яке ділиться націло на 2024.

Розв'язання Позначимо через a_n остачу від ділення u_n на 2004. Розглянемо послідовність пар остачі $(a_1; a_2)$, $(a_2; a_3)$, $(a_3; a_4)$, … . Кількість таких різних пар дорівнює 2024^2, а загальна кількість пар нескінченна. Тому в цій послідовності знайдуться дві однакові пари. Тобто для деяких k і p $(k<p)$ будуть мати місце рівності $a_k = a_p$, $a_{k+1} = a_{p+1}$. Тому $a_{k-1} = a_{p-1}$, $a_{к-2} = a_{p-2}$, …, $a_2 = a_{p-к+2}$, $a_1 = a_{p-к+1}$ Оскільки $a_k = a_n = 1$, то u_{p-k+2} та u_{p-k+1} при діленні на 2024 дають однакові остачі. Тому число $u_{p-k} = u_{p-k+2} - u_{p-k+1}$ ділиться на 2024.

Приклад 2.21 У правильному 9-кутнику одні вершини пофарбовані білим, а інші — чорним кольором. Доведіть, що існують два рівні трикутники (з вершинами, що є вершинами даного 9-кутника), вершини кожного з яких зафарбовано в один колір.

Розв'язання Із 9 вершин, зафарбованих у два кольори, принаймні п'ять мають однаковий колір. Можна вважати, що цей колір – білий. П'ять білих вершин утворюють $C_5^3 = 10$ одноколірних (білих) трикутників. Зауважимо, що поворот на кут $\frac{2k\pi}{9}$, k = 0, 1,..., 8 відносно центра O даного 9-кутника не міняє множини M вершин цього 9-кутника. Тому після повороту кожного з 10 білих трикутників на кут $\frac{2k\pi}{9}$, 0 < k < 8 відносно O ми отримаємо 10 · 9 = 90 трикутників з вершинами у множині M. Усі вони не можуть бути різними, оскільки загальна кількість різних трикутників з вершинами у множині M дорівнює $C_9^3 = 78 < 90$. Отже, знайдуться два білі трикутники Δ_1 і Δ_2, які після декількох поворотів суміщаються з одним і тим самим трикутником Δ.

Зауважимо, що трикутники Δ_1 і Δ_2 рівні, але різні. Дійсно, два однакові трикутники не можна дістати різними поворотами (які ми використовували) з одного і того ж трикутника. Оскільки кожен трикутник Δ_1 і Δ_2 суміщається після повороту самого з трикутником Δ, то і Δ_2 можна дістати із Δ_1 за допомогою деякого повороту. Отже, трикутники Δ_1 і Δ_2 — шукані.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Доведіть, що серед будь-яких трьох цілих чисел можна знайти два, сума яких ділиться на 2.

2. Доведіть, що серед будь-яких 10 цілих чисел можна вибрати одне чи декілька, сума яких ділиться на 10.

3. 10 школярів на олімпіаді розв'язали 35 задач, причому відомо, що серед них є школярі, які розв'язали рівно одну задачу, школярі, які розв'язали рівно дві задачі, і школярі, які розв'язали рівно три задачі. Доведіть, що є школяр, який розв'язав не менше ніж п'ять задач.

4. Усередині правильного шестикутника зі стороною 3 см довільно розміщено 55 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Доведіть, що серед них знайдуться три точки, що утворюють трикутник, площа якого не перевищує $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ см^2.

5. У класі 25 учнів. Серед будь-яких трьох із них двоє дружать між собою. Доведіть, що є учень, у якого не менше ніж 12 друзів.

6. На площині дано шість точок, жодні три з них не лежать на одній прямій. Будь-які дві точки з'єднано відрізком, кожен відрізок пофарбовано або в червоний, або в синій колір. Доведіть, що знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, усі сторони якого мають один колір.

7. Площина розфарбована в 100 кольорів. Доведіть, що знайдеться прямокутник з вершинами одного кольору.

8. Із аркуша клітчатого паперу розміром 29x29 вирізали 99 квадратиків, кожен з яких складається із чотирьох клітинок. Доведіть, що можна вирізати ще один такий самий квадратик.

9. Комісія з 60 осіб провела 40 засідань, причому на кожному були присутні рівно 10 членів комісії. Доведіть, що якісь два члени комісії зустрічались на засіданнях хоча б двічі.

10. На числовій прямій взято інтервал довжиною, меншою від $\frac{1}{n}$ (n —натуральне). Доведіть, що в цьому інтервалі міститься не більше ніж $\frac{n+1}{2}$ нескоротних дробів вигляду $\frac{p}{q}$, де p та q — цілі числа, $1 \le q \le n$.

11. З натуральним числом $к$ проводиться така операція: спочатку його розкладають на прості множники $k = p_1, p_2, \ldots, p_n$ (не обов'язково всі різні), а потім знаходять суму $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + 1$. Із здобутим числом проводять таку саму операцію і т. д. Доведіть, що здобута числова послідовність з якогось моменту буде періодичною.

12. Під кожним членом послідовності Фібоначчі напишемо три останні його цифри (якщо цих цифр менше ніж три, число доповнюється зліва нулями): 001, 001, 002, 003, 005, 008, 013, 021, 034, ... Доведіть, що здобута послідовність періодична.

13. У колі з радіусом 1 проведено декілька хорд так, що кожен діаметр перетинає не більше ніж чотири із них. Доведіть, що сума довжин хорд не перевищує 13.

14. На відрізку довжиною 10 декілька менших відрізків, що не перетинаються, пофарбовані в червоний колір, причому жодні дві червоні точки не знаходяться на відстані 1. Доведіть, що сума довжин зафарбованих відрізків не перевищує 5.

15. У колі з радіусом 1 проведено кілька хорд, сумарна довжина яких більша за 7π. Доведіть, що знайдеться діаметр, який перетинає не менше ніж вісім хорд.

16. Усередині круга з радіусом 16 розміщено 650 точок. Доведіть, що знайдеться кільце шириною 1 і внутрішнім радіусом 2, яке містить не менше ніж 10 з цих точок.

17. . До ліфта вантажопідйомністю 320 кг підійшли 12 осіб, загальною масою 960 кг. Доведіть, що з них можна підібрати 4 людей, котрі разом зможуть піднятися ліфтом.

18. Чи можна вивезти з каменеломні 50 кам'яних брил, маси яких відповідно дорівнюють 372, 374, 376, ..., 468 кг, на 7 тритонних машинах?

19. На площині дано скінчену кількість точок. Доведіть: якщо деякі з них з'єднати відрізками, то завжди знайдуться дві точки, із яких виходить однакова кількість відрізків.

20. Дано п+1 різних натуральних чисел, менших за 2п. Доведіть, що серед них можна вибрати три таких числа, що одне з них дорівнює сумі двох інших.

21. Деякі з 9 мушкетерів викликали один одного на дуель. Доведіть, що серед них є 3, котрі викликали на дуель один одного, або 4, між котрими дуель не відбулася.

22. У класі 25 учнів. Відомо, що серед довільних трьох учнів є двоє друзів. Доведіть, що є учень, у якого не

менше ніж 12 друзів.

23. Доведіть, що серед 25 чотирицифрових чисел, записаних за допомогою цифр 1; 2; 3; 4, обов'язково знайдуться два однакових.

24. Доведіть, що з довільних 100 натуральних чисел, які не перевищують 100, а їх сума дорівнює 200, можна вибрати кілька чисел так, щоб їх сума дорівнювала 100.

25. Дано 2000 різних натуральних чисел, які не перевищують 4000. Доведіть, що серед їх попарних додатних різниць є принаймні 500 однакових.

МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

Метод математичної індукції застосовується при доведенні теорем, тверджень, нерівностей, тотожностей, тощо. Цей метод якісно працює в найрізноманітніших областях математики. Оскільки цей метод вводиться на множині натуральних чисел, то найчастіше він застосовується в арифметиці, алгебрі і теорії чисел.. Алгоритмічність методу значно спрощує доведення деяких тверджень і властивостей, що в свою чергу покращує сприйняття матеріалу різних розділів математики здобувачами освіти. Зокрема, застосування цього методу в геометрії особливо цікаве і ефективне. Метод математичної індукції, для перевірки деякого твердження, для всіх натуральних чисел працює наступним чином: спочатку перевіряється істинність твердження з номером $n(1)$ який називається базою індукції. Потім робимо припущення, що твердження з номером k, теж вірне. Якщо вдасться довести, що твердження виконується для наступного елемента, з номером $k + 1$ - крок індукції, то робимо висновок, що дане твердження виконується для всіх натуральних чисел.

Принцип математичної індукції:

Якщо деяке твердження $T(n)$: 1) виконується для $n = 1$; 2) з припущення, що дане твердження є правильне для $n = k$ можна вивести правильність твердження для $n = k + 1$; то твердження виконується для будь-якого натурального числа $n \in N$.

Приклад 3.1 Відомо, що $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ при $n \geq 1$. Знайдіть a_n.

Розв'язання. Обчислимо $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 15$, $a_5 = 31$. Можемо помітити, що $a_1 = 2^1 - 1$, $a_2 = 2^2 - 1$, $a_3 = 2^3 - 1$, $a_4 = 2^4 - 1$, $a_5 = 2^5 - 1$.

Виникає гіпотеза, що $a_k = 2^k - 1$. Перевіримо крок індукції: $a_{k+1} - 2a_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$.

Отже, на основі принципу математичної індукції для кожного натурального n $a_n = 2^n - 1$.

Приклад 3.2 Доведіть, що при кожному натуральному n стверджується рівність

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

Розв'язання. Якщо $n = 1$, то $1 = 1^2$.

Припустимо, що при $n = k$, рівність

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$ - вірна.

Якщо $n = k + 1$, то $1+3+...+(2k-1)+2(k+1)-1=k^2+2(k+1)-1=(k+1)^2$.

Індуктивний перехід правильний, а тому рівність доведено.

Приклад 3.3 Доведіть, що для кожного натурального n вираз $5^{2n+1} \cdot 2^{n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ ділиться на 19.

Розв'язання. Якщо $n = 1$, то $5^3 - 2^2 + 3^3 - 2^3$ ділиться на 19.

Нехай при $n = k$ $5^{2k+1} - 2^{k+1} + 3^{k+2} - 2^{2k+1}$ ділиться на 19.

Доведемо, що при $n = k+1$ твердження також правильне, тобто, що $5^{2k+3} – 2^{k+2} + 3^{k+3} – 2^{2k+3}$ ділиться на 19.

$$5^{2k+3} \cdot 2^{k+3} + 3^{k+3} - 2^{2k+3} = 50 \cdot 5^{2k+1} \cdot 2^{k+1} + 12 \cdot 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} =$$
$$= 12(5^{2k+1} \cdot 2^{k+1} + 3^{k+2} \cdot 2^{k+1}) + 38 \cdot 5^{2k+1} \cdot 2^{k+1}.$$

Перший доданок суми ділиться на 19 за припущенням, другий доданок, очевидно, ділиться на 19, тому вся сума ділиться на 19. Отже, твердження задачі справедливе для всіх натуральних *n*.

Приклад 3.4 Доведіть, що для всіх натуральних *n*

виконується нерівність $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Розв'язання База індукції: при $n = 1$ маємо правильну нерівність $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Припустимо, що нерівність справедлива при $n = k$, тобто $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2k} < \dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$.

Доведемо тепер, що нерівність справедлива при $n = k + 1$, тобто, що $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2k+2)} < \dfrac{1}{\sqrt{2k+3}}$.

З урахуванням припущення індукції для цього досить довести нерівність $\dfrac{2k+1}{2k+2} < \dfrac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}}$.

Оскільки $k > 1$, то достатньо довести, що $\sqrt{2k+1}\cdot\sqrt{2k+3} < 2k+2$.

Піднесемо цю нерівність до квадрата (ліва і права частини додатні): $(2k+1)(2k+3) < 4k^2 + 8k + 4$.

Ця нерівність еквівалентна нерівності 3 < 4. На основі принципу математичної індукції робимо висновок, що твердження задачі справедливе для всіх натуральних *n*.

Приклад 3.5 Доведіть для кожного натурального *n* нерівність $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}$.

Розв'язання Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що нерівність справедлива при $n = 1$.

Припустимо тепер, що ця нерівність справедлива при $n = k$, і доведемо її справедливість при $n = k+1$.

За припущенням індукції, маємо:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\le 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Доведемо, що $2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\le 1-\frac{1}{k+1}$ або

$$\frac{1}{(k+1)^2}\le\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},\text{ що рівносильне }\frac{1}{(k+1)^2}\le\frac{1}{k(k+1)}.$$

Остання нерівність є очевидною, тому можна зробити висновок, що твердження задачі справджується для всіх натуральних *n*.

Є різні варіанти застосування методу математичної індукції. Іноді як крок треба перевірити, що твердження T(n) справедливе, якщо справедливі всі попередні (n<k).

Приклад 3.6 Відомо, що $x+\dfrac{1}{x}$ ціле число. Доведіть, що при будь-якому натуральному *n* число $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ теж ціле.

Розв'язання При *n*=2 отримаємо,що $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$ ціле.

Припустимо, що при всіх $n \le к$ $x^k+\dfrac{1}{x^k}$ ціле. Доведемо, що $x^{k+1}+\dfrac{1}{x^{k+1}}$ також ціле.

$x^{k+1}+\dfrac{1}{x^{k+1}}=\left(x^k+\dfrac{1}{x^k}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\left(x^{k-1}+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)$ — різниця цілих чисел, за припущенням індукції. Отже, $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ ціле при всіх натуральних *n*.

Приклад 3.7 Знайдіть цілу частину числа $\sqrt{2-\sqrt{2-...\sqrt{2-\sqrt{2}}}}$ (2024 знаки кореня).

Розв'язання Розглянемо цю задачу для випадку *n* радикалів. Позначимо задане число через a_n.

Нехай $n = 2k+1$.

База індукції: $1 < a_{2к+1} < 2$. Тоді при $n = 2k+3$ маємо: $a_{2k+3}=\sqrt{2-\sqrt{2-a_{2k+1}}}$.

Звідки $\sqrt{2-\sqrt{2-1}} < a_{2k+3} < \sqrt{2-\sqrt{2-2}}$ або $1 < a_{2k+1} < 2$. Таким чином, $[a_{2k+3}] = 1$, а тому для непарних n маємо: $[a_n] = 1$.

Нехай тепер $n = 2k$.

База індукції: $a_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 0{,}8$.

Крок індукції: припустимо, що $0 < a_{2k} < 1$. Тоді $a_{2k+2} = \sqrt{2-\sqrt{2-a_k}}$.

Отже, $\sqrt{2-\sqrt{2-0}} < a_{2k+3} < \sqrt{2-\sqrt{2-1}}$, $0 < a_{2k+2} < 1$. Отримаємо, що $[a_{2k+2}] = 0$.

Згідно з припущенням математичної індукції,

$$[a_n] = \begin{cases} 1, \text{ якщо } n = 2k+1, \\ 0, \text{ якщо } n = 2k. \end{cases}$$

Тому $[a_{2024}] = 0$.

Приклад 3.8 Доведемо нерівність Бернуллі тобто, якщо $n > 2$ і $x > 0$, то справедлива нерівність

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

Розв'язання Доведемо нерівність методом математичної індукції.

1) При $n = 2$ нерівність справедлива, справді $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$. Оскільки $x^2 \geq 0$, то відкинувши додатній доданок отримаємо вираз менший ніж вихідний.

2) Припустимо, що нерівність справедлива при $n = k$. Отже, $(1 + x)^k > 1 + kx$. Доведемо, що твердження виконується для $n = k + 1$ тобто має місце нерівність $(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x$.

Згідно припущення має місце нерівність: $(1+x)^k > 1+kx$. Домноживши обидві частини цієї нерівності на додатнє число $(1 + x)$, одержимо $(1 + x)\ k\ (1 + x) > (1 + kx) \cdot (1 + x)$.

Тоді отримаємо, що

$(1 + x)^{k+1} > (1 + kx) \cdot (1 + x) = 1 + (k + 1) \cdot x + kx^2 > 1 + (k + 1) \cdot x$.

Отже, з послідовності міркувань отримуємо, що

$$(1 + x)^{k+1} > 1 + (k + 1)x.$$

Що й треба було довести. Отже, на основі принципу математичної індукції можна стверджувати, що нерівність Бернуллі справедлива для будь-якого $n > 2$.

Приклад 3.9 Доведіть, що число, яке записується за допомогою 3^n одиниць ділиться на 3^n, для будь-якого натурального числа $n \in N$ (мається на увазі десятковий запис числа).

Розв'язання Доведемо твердження методом математичної.

1) Очевидно при $n = 1$ число, яке записується за допомогою 3 1 одиниць ділиться на 3 1 без остачі. Справді $111 \vdots 3 = 37$. Тобто, твердження справедливе, для першого елемента.

2) Припустимо, що твердження справедливе, коли $n=k$: число, яке записується за допомогою 3^k одиниць $P_k = 111 \ldots 11$ ділиться на 3^k без остачі.

3) Доведемо, що твердження справджується при $n= k + 1$, тобто, що число, яке записується за допомогою 3^{k+1} одиниць

P_{k+1} = 111 … 111 ділиться на 3^{k+1} без остачі.
Розглянемо частку від ділення: $P_{k+1} \div P_k$. Очевидно, що в частці отримаємо число, яке складається з одиниць і нулів і яке можна подати у вигляді $100^{3k} + 10^{3k} + 1$. Зрозуміло, що число $100^{3k} + 10^{3k} + 1$ містить три одиниці і нулі, тобто ділиться на 3 без остачі.

Таким чином має місце представлення $P_{k+1} = P_k \cdot (100^{3k} + 10^{3k} + 1)$, де перший множник ділиться на 3^k за припущенням, а другий ділиться на 3 за вище приведеними міркуваннями.

Отже, число, що записується за допомогою 3^{k+1} одиниць ділиться на 3^{k+1} без остачі.

Приклад 3.10 Нехай задано деякий опуклий многокутник $V_1V_2 \dots V_n$. Назвемо многокутник «модним», якщо виконуються наступні умови: 1) кожна вершина фігури Vi де i=1,2,… ,n зафарбована в один з трьох запропонованих кольорів K_1,K_2,K_3; 2) будь-які дві сусідні вершини многокутника пофарбовані в різні кольори; 3) для кожного з трьох запропонованих кольорів знайдеться хоча б одна вершина, яка зафарбована в цей колір. Доведіть, що будь який «модний» n – кутник ($n \geq 3$) можна розділити діагоналями, які не перетинаються, на «модні трикутники».

Розв'язання Доведемо твердження методом математичної індукції. 1) Очевидно при n = 3 твердження виконується, ми отримаємо «модний трикутник» всі вершини якого пофарбовані за умовами задачі і ніяких розрізів робити непотрібно. Тобто, твердження справедливе, для першого елемента.

2) Припустимо, що твердження справедливе, коли n= k, тобто будь який «модний» k–кутник ($k \geq 3$) можна розділити діагоналями, які не перетинаються, на «модні трикутники».

Розглянемо довільний «модний» k+1 – кутник. Доведемо використовуючи припущення, що його можна розбити діагоналями, які виходять з однієї вершини і не перетинаються на «модні трикутники». Занумеруємо послідовно вершини многокутника наступним чином V_1 V_2 V_3 … V_k V_{k+1}.

Якщо в деякий з трьох кольорів пофарбована лише одна вершина розглядуваного багатокутника, такий випадок може бути, якщо розглядається «модний» чотирикутник або п'ятикутник, тоді з'єднавши цю вершину з іншими несусідніми вершинами за допомогою діагоналей отримаємо потрібне розбиття k+1 – кутника на «модні трикутники».

Якщо в кожен з трьох кольорів пофарбовані дві і більше вершин k+1 – кутника, то в цьому випадку в розфарбуванні беруть участь всі три кольори K_1,K_2,K_3.

Нехай вершина V_1 зафарбована кольором K_1, а вершина V_2 зафарбована кольором K_2. Нехай p – номер першої вершини Vp, яка зафарбована в колір K_3. Відітнемо від k+1 – кутника, «модний» трикутник $\Delta VpVp{-}1Vp{-}2$, оскільки згідно підбору вершин всі три вершини будуть розфарбовані в різні кольори. Тоді можливі два випадки: якщо залишається «модний» многокутник в якому є більше ніж одна вершина з кольором K_3, то проводимо міркування аналогічні до попередніх. Якщо залишається «модний» многокутник в якому є тільки одна вершина кольору K_3, то почергово сполучаємо її з усіма рештою вершинами, що залишилися. Многокутник, що залишається після відтинання трикутника $\Delta V_pV_{p-1}V_{p-2}$, також буде «модний» і згідно припущення його можна розбити на «модні трикутники».

Приклад 3.11 Обчисліть суму

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!$$

Розв'язання. Обчислимо: $S_1 = 1 \cdot 1! = 1$, $S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5$, $S_3 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23$, $S_4 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119$.

Можемо помітити, що $S_1 = 2! - 1$, $S_2 = 3! - 1$, $S_3 = 4! - 1$, $S_4 = 5! - 1$.

Висуваємо гіпотезу, що для кожного натурального n сума

$$S_n = (n + 1)! - 1.$$

Перевіримо правильність нашої гіпотези: при $n = 1$ гіпотеза виконується, так як $S_1 = 1 \cdot 1! = 2! - 1 \Rightarrow 1 = 1$.

Припустимо, що дане твердження справедливе для $n = k$, тобто $S_k = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! = (k + 1)! - 1$, де k – де-яке натуральне число.

Доведемо, що гіпотеза справджується при $n = k + 1$. Тобто, що має місце рівність $S_{(k+1)} = (k + 2)! - 1$.

Справді,

$S_{(k+1)} = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! + (k + 1) \cdot (k + 1)! =$

$= Sk + (k + 1) \cdot (k + 1)! = (k + 1)! - 1 + (k + 1) \cdot (k + 1)!$
$=$

$= ((k + 1) \cdot (k + 1)! + (k + 1)!) - 1 = (k + 1)! \cdot ((k + 1) +$
$1) - 1 =$

$(k + 1)! \cdot (k + 2) - 1 = (k + 2)! - 1.$

Рівність виконується при $n = k + 1$, отже, на основі принципу математичної індукції робимо висновок, що дана гіпотеза виконується для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$.

Приклад 3.12 Доведіть, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9.

Розв'язання. 1) Очевидно сума $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$ ділиться на 9. Тобто, твердження справедливе, коли перший доданок 1.

2) Припустимо, що твердження справедливе, коли перший доданок $k \in N$. Тобто, $k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3$ ділиться на 9 без остачі.

3) Доведемо, що гіпотеза справджується при $n = k + 1$.

$(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3 = (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 = (k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3) + 9(k^2 + 3k + 3).$

Перший доданок ділиться на 9 за припущенням, а другий доданок ділиться на 9 бо є добутком дев'ятки на деяке натуральне число $(k^2 + 3k + 3)$.

Отже, згідно методу математичної індукції, твердження доведено.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Доведіть, що при всіх натуральних *n:*

а) $1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1\cdot 2+2\cdot 3+...+(n-1)n=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

в) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+...+\dfrac{1}{(n-1)n}=\dfrac{(n-1)}{n}$;

г) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+...+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

д) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n},\ n\geq 2$.

2. Доведіть, що при всіх натуральних *n:*
   а) $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ ділиться на 9;

   б) $4^n + 6n - 1$ ділиться на 9;

   в) $3^{2n+2} + 8n - 9$ ділиться на 16;

   г) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ділиться на 133;

   д)2^n ділиться на 3^{n+1}.

3. Обчисліть суми: а) $1^3 + 2^3 + ... +(2n)^3$;
   б) $1^3 + 3^3 + ... + (2n - 1)^3$.

4. Доведіть нерівність $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot...\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\leq\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ для всіх натуральних *n.*

5. Доведіть, що для всіх $n \geq 2$ виконується нерівність $2^n > 1+\sqrt{2^{n-1}}$.

6. Доведіть, що кожне натуральне число дорівнює сумі кількох (можливо, одного) різних чисел Фібоначчі.
7. Доведіть, що для довільного натурального $n > 3$ число $n!$ можна розкласти на множники, відношення яких буде не менше від $\frac{2}{3}$ і не більше за $\frac{3}{2}$.
8. Доведіть, що для довільних додатних чисел x_1, x_2, ... , x_n справедлива нерівність $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ (нерівність Коші).

Вказівка. Застосуйте таку схему індукції: спочатку переходами від $n = 2^k$ до $n = 2^{k+1}$ доведіть нерівність для всіх *n,* що є степенями двійки. Після цього доведіть, що якщо нерівність справедлива для n чисел, то вона справедлива і для $n - 1$ чисел (зворотна індукція).

ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ

Лінійні діофантові рівняння

Діофантовими називаються алгебраїчні рівняння і системи алгебраїчних рівнянь з цілими коефіцієнтами, що мають число невідомих, переважаюче число рівнянь. Система стає невизначеною і тому знаходять цілі або раціональні розв`язки.

В інших джерелах можна знайти наступне визначення діофантового рівняння. ***Діофантовими рівняннями*** називаються рівняння виду $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$.

Лінійним діофантовим рівнянням із двома невідомими називається рівняння виду $ax + by = c,$ де a, b, c - цілі числа, $(a, b) = 1$.

Це рівняння має безліч розв`язків: $\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases},$

де (x_0, y_0) - будь-який розв`язок, $t \in Z$.

1. Метод спуску.

Для розв`язування діофантових рівнянь першого степеня з двома невідомими можна використовувати <u>***метод спуску***</u>. Розглянемо даний метод на прикладі.

Приклад 4.1. Розв`язати в цілих числах рівняння $5x + 8y = 39$.

Розв`язання Виберемо змінну, що має найменший коефіцієнт, і виразимо його через іншу змінну: $x = \dfrac{39 - 8y}{5}$, виділимо цілу частину: $x = 7 - y + \dfrac{4 - 3y}{5}$.

Все число буде цілим, якщо цілим виявиться значення $\dfrac{4 - 3y}{5}$.. Це можливо тоді, коли число $4 - 3y$ без остачі поділиться на 5. Вводимо нову змінну z, тоді останнє рівняння запишемо у вигляді: $4 - 3y = 5z$.

Ми прийшли до рівняння такого ж типу як і вихідне рівняння, але вже з меншими коефіцієнтами. Розв`язувати його потрібно відносно змінних y і z . Аналогічно:

1. $$y = \frac{4 - 5z}{3} = 1 - z + \frac{1 - 2z}{3},$$

$$1 - 2z = 3u.$$

$$z = \frac{1 - 3u}{2} = \frac{1 - u}{2} - u,$$

2. $$1 - u = 2v,$$

$$u = 2v - 1.$$

Дробових виразів більше нема, спуск завершено.

3. Тепер необхідно „піднятися нагору”. Виразимо через змінну v спочатку z , потім y і x .

$$z=\frac{1-u}{2}-u=\frac{1-1+2v}{2}-1+2v=3v-1,$$

$$z=3v-1.$$

$$y=\frac{4-5z}{3}=\frac{4-5(3v-1)}{3}=3-5v,$$

$$y=3-5v.$$

$$x=\frac{39-8y}{5}=\frac{39-8(3-5v)}{5}=3+8v,$$

$$x=3+8v.$$

4. Формули $\begin{cases} x=3+8v \\ y=3-5v \end{cases}, v\in Z$ становлять загальний розв'язок рівняння в цілих числах.

Відповідь: $\begin{cases} x=3+8v \\ y=3-5v \end{cases}, v\in Z$

Приклад 4.2 Розв'язати в цілих числах рівняння $23x+53y=109$ методом спуску.

Розв'язання Виразимо змінну з найменшим коефіцієнтом $x=\frac{109-53y}{23}=4-2y+\frac{17-7y}{23}$;

1) $\frac{17-7y}{23}=t, \quad 17-7y=23t, t\in Z;$

2) $y=\frac{17-23t}{7}=2-3t+\frac{3-2t}{7};$

3) $\frac{3-2t}{7}=t_1, \; 7t_1+2t=3,$

4) $t=\frac{3-7t_1}{2}=1-3t_1+\frac{1-t_1}{2};$

5) $\dfrac{1-t_1}{2}=t_{2,}$

$2t_2+t_1=1,$

$t_1=1-2t_2, t_1\in Z;$

6) $t=1-3t_1+t_2=1-3(1-2t_2)+t_2=-2+7t;$

7) $y=2-3t+t_1=2-3(-2+7t_2)+(1-2t_2)=9-23t_2;$

8) $x=4-2y+t=4-2(9-23t_2)+(-2+7t_2)=-16+53t_{2.}$

$$\begin{cases} x=-16+53t_2 \\ y=9-23t_2 \end{cases}, t_2\in Z.$$

Відповідь: $\begin{cases} x=-16+53t_2 \\ y=9-23t_2 \end{cases}, t_2\in Z.$

Приклад 4.3 Розв'язати в цілих числах рівняння $12x+31y=189$ методом спуску.

Розв'язання Для змінної з найменшим коефіцієнтом отримаємо вираз $x=\dfrac{189-31y}{12}=15-2y+\dfrac{9-7y}{12}$.

Далі виконаємо перетворення і визначимо значення для змінних: $\dfrac{9-7y}{12}=t\Rightarrow 9-7y=12t, t\in Z;$

$x=15-2y+t.$

$y=\dfrac{9-12t}{7}=1-t+\dfrac{2-5t}{7};$

$\dfrac{2-5t}{7}=t_1\Rightarrow 2-5t=7t_1, t_1\in Z;$

$y=1-t+t_1.$

$$t=\frac{2-7t_1}{5}=\frac{2-2t_1}{5}-t_1;$$

$$\frac{2-2t_1}{5}=t_2 \Rightarrow 2-2t_1=5t_2, t_2\in Z;$$

$$t=t_2-t_1.$$

$$t_1=\frac{2-5t_2}{2}=1-2t_2-\frac{t_2}{2};$$

$$\frac{t_2}{2}=t_3 \Rightarrow t_2=2t_3, t_3\in Z;$$

$$t_1=1-2t_2-t_3=1-4t_3-t_3=1-5t_3;$$

$$t=t_2-t_1=2t_3-1+5t_3=7t_3-1;$$

$$y=1-t+t_1=1-7t_3+1+1-5t_3=3-12t_3;$$

$$x=15-2y+t=15-2(3-12t_3)+7t_3-1=$$
$$=15-6+24t_3+7t_3-1=8+31t_3;$$

$$\begin{cases} x=8+31t_3 \\ y=3-12t_3 \end{cases}, t_3\in Z.$$

Відповідь: $\begin{cases} x=8+31t_3 \\ y=3-12t_3 \end{cases}, t_3\in Z.$

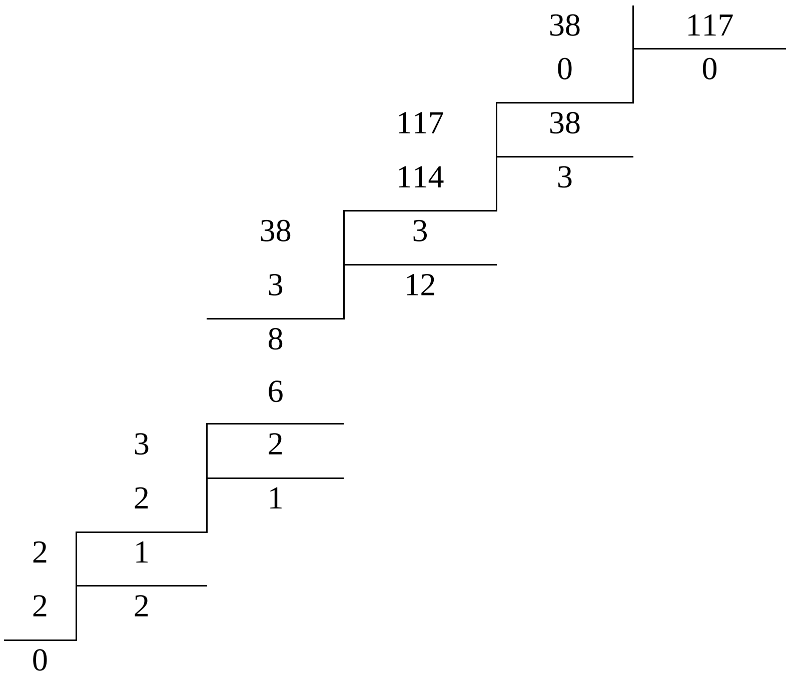
2. Метод ланцюгових дробів

Загальний розв`язок в цілих числах невизначеного рівняння $ax+by=c$, де $(a,b)=1$, можна записати у вигляді: $\begin{cases} x=(-1)^{n-1}cQ_{n-1}+bt, \\ y=(-1)^{n}cP_{n-1}-at, \end{cases}$, де $t\in Z$. Розглянемо на прикладі застосування цього методу.

Приклад 4.4. Розв`язати в цілих числах рівняння $38x + 117y = 209$

Розв`язання З рівняння $38x + 117y = 209$, отримаємо, що числа 38 та 117 мають спільний дільник 1

Розкладемо дріб $\frac{38}{117}$ у ланцюговий дріб, одержимо:



$$\frac{38}{117} = [0;3,12,1,2]$$

Складаємо таблицю:

n		0	1	2	3	4
q_n		0	3	12	1	2

P_n	1	0	1	12	13	38
Q_n	0	1	3	37	40	117

Отримаємо, що

$$P_{n-1} = P_3 = 13$$

$$Q_{n-1} = Q_3 = 40$$

Тоді загальний розв’язок запишемо у вигляді

$$\begin{cases} -x = (-1)^3 \cdot 209 \cdot 40 + 117t \\ y = (-1)^4 \cdot 209 \cdot 13 - 38t \end{cases}, t \in Z.$$

$$\begin{cases} x = -8360 + 117t \\ y = 2717 - 38t \end{cases}, t \in Z.$$

Отже отримаємо, що $71 \cdot 117 = 8307$, тоді приймаючи $t = 71$, одержимо: $\begin{cases} x = -53 + 117l \\ y = 19 - 38l \end{cases}, l \in Z$.

Відповідь: $\begin{cases} x = -53 + 117l \\ y = 19 - 38l \end{cases}, l \in Z$

Приклад 4.5. Розв’яжіть в цілих числах рівняння $-117x + 343y = 119$ методом ланцюгових дробів.

Розв’язання Для заданого рівняння визначимо НСД(117,343) і запишемо представлення у вигляді ланцюгового дробу

$$\text{НСД}(117,343) = 1, \quad \frac{117}{343} = [0; 2,1,13,1,1,1,2]$$

$$\begin{array}{ccc}
 & 117 & \multicolumn{1}{|l}{343} \\ \cline{3-3}
 & 0 & \multicolumn{1}{|l}{0} \\ \cline{2-2}
343 & \multicolumn{1}{|l}{117} & \\ \cline{2-2}
234 & \multicolumn{1}{|l}{2} & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

117 | 109
109 | 1
109 | 8
8 | 13
29
24
8 | 5
5 | 1
5 | 3
3 | 1
3 | 2
2 | 1
2 | 1
2 | 2
0

Складаємо таблицю

n		0	1	2	3	4	5	6	7
q_n		0	2	1	13	1	1	1	2
P_n	1	0	1	1	14	15	29	14	117
Q_n	0	1	2	3	41	44	85	129	343

Для нашого випадку отримаємо, що

$P_{n-1} = P_6 = 44$

$Q_{n-1} = Q_6 = 129.$

$$\begin{cases} -x = (-1)^6 \cdot 119 \cdot 129 + 343t \\ y = (-1)^7 \cdot 119 \cdot 44 - 117t \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x = -15351 - 343t \\ y = -5236 - 117t \end{cases}.$$

$45 \cdot 343 = 15435$, тоді надаючи значення $t = 45$, одержимо: $\begin{cases} x = 84 - 343l \\ y = 29 - 117l \end{cases}, \ l \in Z.$

Відповідь: $\begin{cases} x = 84 - 343l \\ y = 29 - 117l \end{cases}, \ l \in Z$

Приклад 4.6. Розв’яжіть в цілих числах рівняння $12x + 31y = 189$ методом ланцюгових дробів.

Розв’язання Аналогічно прикладу 4.5, маємо:

$\text{НСД}(31,12) = 1,$ $\qquad \frac{12}{31} = [0; 2,1,1,2,2].$

					12	31
					0	0
				31	12	
				24	2	
			12	7		
			7	1		
		7	5			
		5	1			
	5	2				
	4	2				
2	1					
2	2					
0						

n		0	1	2	3	4	5
q_n		0	2	1	1	2	2

P_n	1	0	1	1	2	5	12
Q_n	0	1	2	3	5	13	31

$n = 5, \quad \frac{P_n}{Q_n} = \frac{5}{13}.$

$$x = 189 \cdot 13 + 31t,$$

$$y = -189 \cdot 5 - 12t, t \in Z.$$

$$\begin{cases} x = 2457 + 31t \\ y = -945 - 12t \end{cases}, \quad t \in Z.$$

Отримаємо, що $t = -79$.

Тоді $\begin{cases} x = 8 + 31l \\ y = 3 - 12l \end{cases}, \ l \in Z.$

Відповідь: $\begin{cases} x = 8 + 31l \\ y = 3 - 12l \end{cases}, \ l \in Z.$

Існує де кілька способів знаходження частинного розв'язку діофантового рівняння. Один з найпростіший сметодів – ***метод підстановки***.

3. *Метод підстановки*

1) Виражаємо x через y, або y через x.

2) Надаємо цілі (або натуральні) значення одній зі зміних і отримаємо необхідні значення іншої змінної. Відповідний перебір є скінченимю.

Даний метод базується на теоремі: *якщо НСД* $(a,b)=1$ *, то серед чисел* $0,1,2,...,(c-1)$ *завжди знайдеться одне число* y *, при якому вираз* $(c-by)$ *буде кратний* a .

Приклад 4.7. Знайти частинний розв'язок рівняння $7x-4y=2$.

Розв'язання Нехай $y = \frac{7x-2}{4}$, тоді надаючи значення змінній $x = 0; 1; 2,$ отримаємо частинний розв'язок

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 3 \end{cases} \text{ - частинний розв'язок.}$$

Діофантові рівняння вищих степенів

Діофантовим рівнянням вищих степенів називається діофантове рівняння степінь якого не менший другого.

Під час розв'язування таких рівнянь є корисними такі факти.

I. *Розв'язки рівняння можна знайти, якщо виразити одну змінну через іншу і дослідити, для яких значень другої змінної перша змінна набуває цілих значень.*

Приклад 4.8 Розв'язати в натуральних числах рівняння $x^2 - xy + 2x - 3y = 11$.

Розв'язання Виразимо змінну *y* через змінну *x:*

$(x+3)y = x^2 + 2x - 11,$

$$y = \frac{x^2 + 2x - 11}{x+3} = \frac{x^2 + 2x - 3 - 8}{x+3} = \frac{(x-1)(x+3) - 8}{x+3} = (x-1) - \frac{8}{x+3}.$$

Оскільки *y* та *x* – натуральні числа, то вираз $\frac{8}{x+3}$ має бути натуральним числом, а $(x+3)$ - дільником числа 8. Отже, $x + 3 = 4$ або $x + 3 = 8$, звідки

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 3 \end{cases}.$$

Задовольняє умові задачі тільки розв'язок $x = 5, y = 3$.

II. *Якщо ліва частина рівняння розкладається на множники, які набувають цілих значень для цілих значень змінних, а права частина рівняння – ціле число, то дане рівняння можна замінити рівносильною йому сукупністю систем рівнянь.*

Наприклад, рівняння $x^2 - y^2 = 13$ рівносильне сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 13 \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 13 \\ x + y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -13 \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = -13 \\ x + y = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

III. *Рівняння не має розв'язків у цілих числах, якщо для довільних цілих значень змінної в лівій і правій частинах рівняння отримуються цілі числа, для яких виконується хоча б одна з таких умов:*

1) Ліва і права частини під час ділення на деяке ціле число дають різні остачі.

Наприклад, у рівнянні $x^3 - x = 3y^2 + 1$ для довільних цілих чисел ліва частина рівняння, тобто вираз

$x(x-1)(x+1)$, ділиться на 3, а права частина під час ділення на 3 дає в остачі 1.

2) Остання цифра числа в лівій частині інша, ніж остання цифра числа в правій частині.

Наприклад, у рівнянні $x^2+x-1=3^{2y+1}$ для довільних натуральних x та y числа, які можливо отримати в лівій частині, закінчуються цифрами 1;5 і 9, а числа, які можливо отримати в правій частині, закінчуються цифрами 3 і 7.

3) Одна з частин рівняння є точним квадратом (кубом), але друга частина такою не є.

Наприклад, у рівнянні $4^x=3y+2$ ліва частина для довільного натурального x є точним квадратом, тоді як права частина ні для якого натурального y не може бути точним квадратом (точний квадрат під час ділення на 3 дає в остачі нуль або 1).

Приклад 4.9 Розв'язати в натуральних числах рівняння $x^4+5x^2+13=y^4$.

Розв'язання Права частина рівняння може закінчуватися цифрами 0;1;5;6.

Якщо число x закінчується цифрами 0 або 5, то ліва частина рівняння закінчується цифрою 3.

Якщо ж змінна x закінчується цифрами 1,2,3,4,6,7,8,9, то ліва частина рівняння закінчується цифрою 9.

Отже, рівняння розв'язків немає.

Приклад 4.10 Довести, що довільне просте число

$p > 2$ єдиним способом можна подати у вигляді різниці квадратів двох натуральних чисел.

Розв'язання За умовою прикладу маємо,що $x^2 - y^2 = p, \quad (x-y)(x+y) = 1 \cdot p$,де x,y натуральні числа.

Оскільки $x>y$, та x-y<x+y, то отримаємо настунпну систему відповідних рівнянь $\begin{cases} x+y=p \\ x-y=1 \end{cases}$.

Або $\begin{cases} x = \dfrac{p+1}{2} \\ y = \dfrac{p-1}{2} \end{cases}$.

Тобто розв'язок рівняння єдиний.

Приклад 4.11 Розв'язати в цілих числах рівняння $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$.

Розв'язання Розкладемо ліву частину рівняння на множники

$$(x-y)(x-2y) = 3.$$

Оскільки $3 = 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = (-1) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-1)$, то отримаємо сукупність усіх можливих варіантів систем для множників у відповідному розкладі лівої частини рівняння:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=1\\x-2y=3\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=3\\x-2y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=-1\\x-2y=-3\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=-3\\x-2y=-1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}\\ \begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=-5\\y=-2\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: (-1;-2), (5;2), (1;2), (-5;-2).

Приклад 4.12. Знайти натуральні розв'язки рівняння $x(y+1)^2 = 243y$.

Розв'язання Виразимо одну зі змінних через іншу: $x = \frac{243y}{(y+1)^2}$. Так як $(y; y+1) = 1,$ то $(y+1)^2$ - дільник числа 243. Має місце представлення $243 = 3^5$.

З отриманих міркувань, отримаємо відповідну сукупність:

$$\left[\begin{array}{l}(y+1)^2 = 1\\(y+1)^2 = 3^2\\(y+1)^2 = 9^2\end{array}\right.$$

Розглянувши варіанти розв'язків даної сукупності, маємо:

$$\begin{cases}y_1 = 0\\x_1 = 0\end{cases}, \begin{cases}y_2 = 2\\x_2 = \dfrac{243\cdot 2}{9} = 54\end{cases}, \quad \begin{cases}y_3 = 8\\x_3 = \dfrac{243\cdot 8}{81} = 24\end{cases}$$

Відповідь: (24;8), (54;2).

Приклад 4.13. Розв'язати в натуральних числах рівняння $x^2 - xy + 2x - 3y = 11$.

Розв'язання Виразимо змінну *y* через змінну *x:*

$(x+3)y = x^2 + 2x - 11,$

$$y = \frac{x^2 + 2x - 11}{x+3} = \frac{x^2 + 2x - 3 - 8}{x+3} =$$

$$\frac{(x-1)(x+3) - 8}{x+3} = (x-1) - \frac{8}{x+3}.$$

Оскільки *y* та *x* – натуральні числа, то вираз $\frac{8}{x+3}$ має бути натуральним числом, а $(x+3)$ - дільником числа 8. Отже, $x+3=4$ або $x+3=8$, звідки

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -2 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 3 \end{cases}.$$

Задовольняє умові задачі $x = 5, y = 3$.

Приклад 4.14. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$.

Розв'язання Розкладемо ліву частину рівняння на множники, відносно однієї зв змінних.

Отримаємо:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 3,$$
$$(x-y)(x-2y) = 3.$$

Оскільки $3 = 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = (-1) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-1)$, то

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=1\\x-2y=3\end{cases}\\\begin{cases}x-y=3\\x-2y=1\end{cases}\\\begin{cases}x-y=-1\\x-2y=-3\end{cases}\\\begin{cases}x-y=-3\\x-2y=-1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}\\\begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x=-5\\y=-2\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: (-1;-2), (5;2), (1;2), (-5;-2).

Приклад 4.15. Знайдіть усі прості числа, що задовольняють рівняння $x^2 - 2y^2 = 1$.

Розв'язання Оскільки $x^2 = 2y^2 + 1$— непарне, то й x — непарне. Нехай $x = 2n + 1$, x – натуральне значення.

Тоді $y^2 = 2(n^2 + n)$ – парне. Отже, y — парне число. Але існує єдине парне просте число 2. Підставимо це значення в рівняння і знаходимо $x = 3$. Отже, єдина проста пара, що задовольняє умову рівняння — це (3; 2).

Приклад 4.16. Знайти всі цілі числа, які є розв'язками рівняння $7(x+z+xyz)=10(1+yz)$.

Розв'язання Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{x+z+xyz}{1+yz}=\frac{10}{7}.$$

Представимо кожен із дробів у вигляді ланцюгових дробів.

$$\frac{10}{7}=\frac{7\cdot 1+3}{7}=1+\frac{3}{7}=1+\frac{3}{6+1}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{3}};$$

$$\frac{10}{7}=\frac{7\cdot 2-4}{7}=2-\frac{4}{7}=2+\frac{4}{-8+1}+2=\frac{1}{-2+\frac{1}{4}};$$

$$\frac{x+z+xyz}{1+yz}=\frac{x(1+yz)+z}{1+yz}=x+\frac{z}{1+yz}=x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}.$$

Перевіримо і отримаємо, що

$x=1, y=2, z=3;$

$x=2, y=-2, z=4.$ - розв’язки рівняння.

Приклад 4.16. Розв'яжіть у цілих числах рівняння

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=-14.$$

Розв'язання Перепишемо задане рівняння у вигляді

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=0.$$

Очевидно, що рівняння має єдиний розв'язок:

$$x=1, y=-2, z=3.$$

Приклад 4.17 Розв’язати рівняння $2^x+3^x=y^z, x$ - просте число, $z\geq 2$.

Розв'язання Якщо *x=2*, то $y^z=13$, що неможливо, оскільки $z>1$. Отже, $x\neq 2$.

Якщо *x=3*, то $y^z=35$, що неможливо, оскільки $z>1$. Отже, $x\neq 3$.

При $x = 5$, $y^z = 275$. Але ж тоді $y^z \vdots 11, y \vdots 11$, тобто $y^z \vdots 11^2$, що суперечить рівності $275 = 25 \cdot 11$.

Нехай $x \geq 7$, x – просте непарне число.

Використовуючи біном Ньютона, отримаємо:

$$2^x + 3^x = 2^x + (5-2)^x =$$
$$= 2^x + \left(5^2 \cdot k + x \cdot 5 \cdot 2^{x-1} - 2^x\right) =$$
$$= 5\left(5k + x \cdot 2^{x-1}\right), k \in Z.$$

Оскільки $x \neq 5$, то $5\left(5k + x \cdot 2^{x-1}\right)$ ділиться на 5 і не ділиться на 5^2, тобто y^z ділиться на 5 і не ділиться на 5^2, що неможливо, оскільки $z > 1$.

Відповідь: рівняння розв’язків немає.

Приклад 4.18. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

Розв'язання Очевидно, що n не ділиться на 3. Тому можливі випадки, коли n при діленні на 3 дає остачу 1 і коли n дає остачу 2.

Розглянемо обидва випадки.

1) $n = 3k + 2$. Тоді $3 \cdot 2^m + 1 = 9k^2 + 12k + 4$ або $2^m = 3k^2 + 4k + 1 = (3k+1)(k+1)$.

Отже, і $k+1$, і $3k+1$ — степені числа 2. А це можливо тільки коли $k = 0$ і $k = 1$.

При $k \geq 2$ $4(k+1) > 3k+1 > 2(k+1)$, а тому $k+1$ і $3k+1$ не можуть одночасно бути степенями двійки. Отже, розгляд першого випадку дає розв'язки: $n = 2$, $m = 1$ і $n = 5$, $m = 3$.

2) $n = 3k+1$. Тоді $3 \cdot 2^m + 1 = 9k^2 + 6k + 1$ або $2^m = 3k^2 + 2k = k(3k+2)$. Отже, і k, і $3k+2$ — степені числа 2. Очевидно, що $k = 1$ не задовольняє, а $k = 2$ — задовольняє. При $k \geq 3$

маємо: $4k > 3k + 2 > 2k$, а тому k і $3k + 2$ не можуть бути степенями числа 2. Розглянувши цей випадок, маємо ще один розв'язок: $n=7$, $m=4$.

Приклад 4.19. Знайти всі двозначні числа, які діляться на добуток своїх цифр.

Розв'язання Позначимо через x – кількість десятків, а через y – кількість одиниць у шуканих числах.

За умовою $10x + y = kxy$, де k - ціле число, $x \le 9, y \le 9$.

$10 + \frac{y}{x} = ky \Rightarrow \frac{y}{x}$ - повинен бути цілим числом.

Якщо $y=x$, то $\begin{cases} 11 = k \cdot x \\ x \le 9 \end{cases}$. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Шукане число 11.

Якщо $y=2x$, то $12 = 2kx \Rightarrow 6 = kx$.

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$.

Шукані числа 12; 24; 36.

Якщо $y=3x$, то $13 = 3kx$,

$y = 4x$, то $14 = 4kx$, то можливих значень для x немає.

Якщо $y=5x$, то $15 = 5kx$,

$$3 = kx, \qquad x = 1.$$

Шукане число 15.

Якщо $y=6x$, $y=7x$, $y=8x$ і т.д., то значення $x \in \varnothing$.

Відповідь: 11; 12; 24; 36; 15.

Приклад 4.20. Знайти натуральні розв’язки рівняння $x(y+1)^2 = 243y$.

Розв'язання Виразимо одну змінну через іншу, отримаємо:

$$x = \frac{243y}{(y+1)^2},$$

$$(y; y+1) = 1$$

$(y+1)^2$ - дільник числа 243.

Запришемо представлення числа $243 = 3^5$. Тоді маємо систему рівяннь відносно змінної y:

$$\left[\begin{array}{l} (y+1)^2 = 1 \\ (y+1)^2 = 3^2 \\ (y+1)^2 = 9^2 \end{array}\right.$$

З розв’язування системи рівнянянь отримаємо:

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_2 = 2 \\ x_2 = \dfrac{243 \cdot 2}{9} = 54 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_3 = 8 \\ x_3 = \dfrac{243 \cdot 8}{81} = 24 \end{cases}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

а) $x^2 = 14 + y^2$; б) $x^2 + y^2 = x + y + 2$.

2. Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

а) $x^2 - 7y = 10$; б) $15x^2 - 7y^2 = 9$.

3. Знайдіть усі розв'язки рівняння $19x + 99y = 2002$ у натуральних числах.

4. Учневі прислали 20 задач. За кожну розв'язану задачу він отримує 8 балів, неправильно розв'язану — лише 5 балів, і задачу, яку він не брався розв'язувати — 0 балів. Скільки задач пробував розв'язати учень, якщо він набрав 13 балів?

5. Знайдіть усі цілі розв'язки рівняння:

а) $21x + 48y = 6$; б) $1990x - 173y = 11$.

6. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння $3^m + 7 = 2^n$.

7. Чи існують натуральні числа x, y, які задовольняють рівняння $x^3 - x = 3y^2 + 2003$?

8. Доведіть, що коли рівняння $x^2 + y^2 = n$ має розв'язки в натуральних числах, то й рівняння $x^2 + y^2 = 2n$ також має розв'язки в натуральних числах. Чи правильним є обернене твердження?

9. Знайдіть усі цілі розв'язки рівняння:

а) $2^x + 1 = 3^y$; б) $2^x + 1 = y^z$.

10. Розв'яжіть у простих числах рівняння:

а) $x^y + 1 = z$; б) $xyz = 5(x + y + z)$.

11 Знайти трицифрове число, квадрат якого дорівнює п'ятому степеню суми його цифр .

12. Є 100 важків масою 1 грам, 10 та 50 грамів. Відомо, що їх спільна маса становить 500 грамів. Скільки є важків кожної маси?

13. Розв'яжіть у цілих числах рівняння

$$x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2.$$

14. Доведіть, що не існує простих чисел a, b, c, d, які задовольняють рівняння $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abed + 4$. Чи може це рівняння мати розв'язки в натуральних числах?

15. Розв'яжіть рівняння $1! + 2! + ... + x! = y^2$.

Список рекомендованих джерел

1. Алгебраїчний тренажер: Посібник для школярів та абітурієнтів / А.Г Мерзляк, В.Б Полонський, М.С. Якір. – К.: А.С.К., 1997.-320.: 115 іл.

2. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Конкурсні задачі з математики. – К.: «Вища школа», 2001. – 432 с.

3. Вороний О.М. Готуємось до олімпіад з математики. – Харків: Видавнича група «Основа», 2008. – 256 с.

4. Горделадзе Ш.Г., Кухарчук М.М., Яремчук Ф.П. Збірник конкурсних задач з математики. – К.: «Вища школа», 1988. – 328 с.

5. Коваль Т.В. 400 задач з математичних олімпіад. – Тернопіль: «Мандрівець», 2001. – 80 с.

6. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: Підручник для 8 класів з поглибленим вивченням математики. – Х.: Гімназія, 2008. – 368 С.

7. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. — К.: Видавництво А.С.К., 2004. — 344 с.: іл. 8. Ясінський В.В. Математика. Навчальний посібник для слухачів ФДПНТУУ «КПІ» - 3-є вид.,доп./ за редакцією чл..-кор. НАН України В.С. Мельника. - К.: НТУУ «КПІ», 2012. -368с.

8. Конет І.М., Сиваківський Б.Я, Сиваківський П.Б. Вибрані питання шкільного курсу математики / за ред. І.М. Конета. Кам’янець-Подільський : ФОП Сисин О.В., 2008. 365 с.

9. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Математичні олімпіади школярів України 2001-2006 рік. Львів : Каменяр, 2008. 348 с.

10. Федак І.В. Методи розв’язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх : посібник для підготовки до математичних олімпіад. Чернівці : Зелена Буковина, 2002. 340 с.

11. Конет І.М., Радченко В.М., Теплінський Ю.В. Обласні олімпіади з математики / за ред. І.М. Конета. Кам’янецьПодільський : Абетка, 2010. 388 с.

12. Конет І.М. Тригонометрія: Теорія і практика. Кам’янецьПодільський : Абетка, 2006. 244 с.

13. Конет І.М. Теорія ймовірностей та математична статистика в прикладах і задачах. Кам’янець-Подільський : Абетка, 2001. 220 с.

14. Прус А.В., Швець В.О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики : навчально-методичний посібник. Житомир : Вид-во «Рута», 2016. 468 с.