КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

НАВЧАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Київ
2024

Навчальні завдання до практичних занять з функціонального аналізу// Укладачі В. Б. Брайман, О. Ю. Константінов, О. Н. Нестеренко. Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2024. — 60 с.

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. М.Ф. Городній

канд. фіз.-мат. наук, доц. Ю.А. Чаповський

Рекомендовано до друку вченою радою механіко–математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 12 від 14 березня 2024 року)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У цьому методичному посібнику наведені теми практичних занять з функціонального аналізу, умови задач, рекомендованих для розв'язання в аудиторії, а також задачі для домашньої роботи.

Ці навчальні завдання є результатом багаторічного досвіду викладання функціонального аналізу викладачами кафедри математичного аналізу. Вони охоплюють теми курсу функціонального аналізу, що читаються на механіко-математичного факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка у VI семестрі.

Головна мета практичних занять — активне засвоєння студентами основних понять і положень курсу, набуття навичок застосування їх до розв'язання стандартних задач, опанування деяких спеціальних методів. Кількість задач, що розв'язуються в аудиторії, часто залежить від рівня підготовки студентів та інколи може виявитися великою. Однак зменшення обсягу чи заміну задач для аудиторної роботи треба проводити обережно, оскільки певні результати мають бути відомими всім студентам.

Протягом семестру проводяться дві контрольні роботи, зразки умов яких наведено в тексті посібника.

Умовам задач в кожному занятті передують контрольні запитання, відповіді на які студенти мають підготувати вдома. У кожному занятті група задач **А** це задачі для аудиторної роботи, група **В** — для домашнього завдання. До складу завдань для кожного заняття включені також додаткові задачі, відмічені літерою **Д**. Вони містять матеріал підвищеної складності і можуть пропонуватися студентам, які успішно впоралися з основною частиною завдань. Наприкінці посібника для контролю наведено відповіді, до багатьох задач — вказівки або розв'язання.

Більшість наведених тут задач запозичена з відомої навчальної та монографічної літератури. Зокрема рекомендуємо збірник задач [2], укладений викладачами кафедри математичного аналізу, у якому наведено і приклади типових задач з детальними розв'язаннями, і велику кількість цікавих складних задач, причому до переважної більшості задач подано відповіді, вказівки чи короткі розв'язання.

Заняття 1
ЛІНІЙНІ НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ. БАНАХОВІ ПРОСТОРИ

Контрольні запитання

1. Означення банахового простору.
2. Означення норм у просторах $C([a,b])$; l_p, $1 \le p \le +\infty$; $L_p(T,\mu)$, $1 \le p \le +\infty$.
3. Означення лінійної оболонки(л.о.), замкненої лінійної оболонки (з.л.о.), тотальної множини.
4. Означення підпростору.
5. Теорема про ізоморфізм скінченновимірних ЛНП.
6. Еквівалентні норми.

А1

1. Чи є нормами у відповідних просторах наведені функції:

1) $C([-1,1]) \ni x \mapsto \varphi(x) = \max\limits_{0 \le t \le 1} |x(t)|$;

2) $C^1([0,1]) \ni x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_0^1 |x'(t)|dt$;

3) $C^1([0,1]) \ni x \mapsto \varphi(x) = |x(0)| + \int\limits_0^1 |x'(t)|dt$?

2. Знайти норму заданого елемента у даному просторі:

1) $x(t) = t^n$ в $C([0,1])$, $n \ge 1$;

2) $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ в l_2, в l_∞;

3) $x = (1+3i, 2-i, 0, \ldots)$ в l_4;

4) $x(t) = t$ в $L_4([0,1])$;

5) $x(t) = \chi_{\mathbb{Q}}(t)$ в $L_1([0,1])$;

6) $x(t) = 2^{it}$ в $L_p([0,1])$, $1 \le p \le +\infty$.

3. Чи збігається у просторі $C([0,1])$ задана послідовність елементів? Якщо так, знайти її границю.

1) $x_n(t) = t^n$;

2) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$;

3) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$;

4) $x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$.

4. Чи збігається у просторі l_p, $1 \le p \le +\infty$, задана послідовність елементів? Якщо так, знайти її границю.

1) $x^{(n)} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots)$;

2) $x^{(n)} = (0, \ldots, 0, \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{n}, 0, \ldots)$;

3) $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots)$;

4) $x^{(n)} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$.

5. Чи збігається у просторі $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, задана послідовність елементів? Якщо так, знайти її границю.

1) $x_n(t) = \frac{1}{t^4+1} \cdot \chi_{[n,+\infty)}(t)$; 2) $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t+\frac{1}{n}}} \cdot \chi_{[1,n]}(t)$?

6. Довести, що

1) система функцій $\{1, t, t^2, \ldots\}$ тотальна в $C([a,b])$ та в $L_p([a,b])$, $1 \leq p < +\infty$;

2) система функцій $\{t^{4k} : k \geq 0\}$ тотальна в $C([a,b])$ та в $L_p([a,b])$, $1 \leq p < +\infty$, при $a \geq 0$;

3) множина функцій $x \in C([a,b])$, для яких $x(a) = 0$, скрізь щільна в $L_p([a,b])$, $1 \leq p < +\infty$.

7. Довести, що

1) простір $C([a,b])$ з нормою $||x|| = \int\limits_a^b |x(t)|dt$ не є банаховим;

2) простір $C^1([a,b])$ з нормою $||x|| = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ не є банаховим.

8. Довести, що для довільного $m \in \mathbb{N}$ множина многочленів степеня не вище m є підпростором в $L_p([-1,1]), 1 \leq p < +\infty$.

9. Довести, що норми $\|x\| = \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$ та $\|x\| = \left(\int\limits_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < +\infty$, в $C([0,1])$ не еквівалентні.

Д1. За якої умови на послідовність $\{\alpha_n \ : \ n \geq 1\} \subset [0, +\infty)$ функція $l_2 \ni x \mapsto \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|^2\right)^{1/2}$ є нормою в l_2?

Д2. Нехай $(T, \mathcal{F}, \mu)$ — простір зі скінченною мірою та $x \in L_\infty(T, \mu)$. Довести, що $\|x\|_\infty = \lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p$.

Д3. Нехай $x \in L_1([a,b])$. Довести, що $\lim\limits_{h \to 0+} \int\limits_a^{b-h} |x(t+h) - x(t)|dt = 0$.

Д4. Довести, що ЛНП X банахів тоді й лише тоді, коли будь-який ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, для якого $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < +\infty$, збігається в X.

Д5. 1) Визначимо в l_∞ множину $c_0 = \left\{x \in l_\infty \,\middle|\, \lim\limits_{k \to \infty} x_k = 0\right\}$. Довести, що c_0 — підпростір в l_∞ та c_0 з нормою $\|x\|_\infty = \sup\limits_{i \geq 1} |x_i|$ — сепарабельний банахів простір.

2) Визначимо в l_∞ множину $c = \left\{x \in l_\infty \,\middle|\, \exists \lim\limits_{i \to \infty} x_i \in \mathbb{K}\right\}$. Довести, що c — підпростір в l_∞ та c з нормою $\|x\|_\infty = \sup\limits_{i \geq 1} |x_i|$ — сепарабельний банахів простір.

B1

1. Чи є нормами в $C([0,1])$ такі функції:

1) $\varphi(x) = \max\limits_{0 \le t \le \frac{1}{3}} |x(t)| + |x(1)|$; 2) $\varphi(x) = \max\limits_{0 \le t \le \frac{1}{2}} |x(t)| + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} |x(t)| dt$;

3) $\varphi(x) = \left(\int\limits_0^1 \alpha(t) |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$, де $\alpha \in C([0,1])$ та $\alpha(t) > 0$ при $t \in [0,1]$?

2. Знайти норму заданого елемента у даному просторі:

1) $x(t) = e^{-t}$ в $C([0,1])$;
2) $x = (1+i, 0, 0, \ldots)$ в l_p, $1 \le p \le +\infty$;
3) $x(t) = \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(t)$ в $L_2([0,1])$;
4) $x(t) = 1 - e^{3t}$ в $L_1([0,1])$;
5) $x(t) = \sin t + \cos t$ в $L_2([0,1])$;
6) $x(t) = t^2$ в $L_p([0,2])$, $1 \le p \le +\infty$.

3. Чи збігається у просторі $C([0,1])$ задана послідовність елементів? Якщо так, знайти її границю.

1) $x_n(t) = \sin t - \sin \frac{t}{n}$;
2) $x_n(t) = \frac{nt}{\sqrt{n^2+1}}$;
3) $x_n(t) = nte^{-nt}$;
4) $x_n(t) = n \sin \frac{t}{n}$;
5) $x_n(t) = n \ln(1 + \frac{t}{n})$;
6) $x_n(t) = t^n - t^{3n}$;
7) $x_n(t) = \varphi(t + \frac{1}{n})$, де $\varphi \in C(\mathbb{R})$ — фіксована функція.

4. Чи збігається у просторі $C^1([0,1])$ з нормою $\max\limits_{0 \le t \le 1} |x(t)| + \max\limits_{0 \le t \le 1} |x'(t)|$ задана послідовність елементів? Якщо так, знайти її границю.

1) $x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$;
2) $x_n(t) = \int\limits_0^t e^{-\frac{u^2}{2n}} du$.

5. Чи збігається у просторі l_p, $1 \le p \le +\infty$, задана послідовність елементів? Якщо так, знайти її границю.

1) $x^{(n)} = (1, 0, \ldots, 0, \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{n}, 0, \ldots)$;
2) $x^{(n)} = (\frac{1}{n}, 0, \ldots, 0, \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{n}, 0, \ldots)$;
3) $x^{(n)} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots)$;
4) $x^{(n)} = (\underbrace{\tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}}_{n^3}, 0, \ldots)$;
5) $x^{(n)} = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \ldots)$;
6) $x^{(n)} = (\underbrace{\tfrac{1}{\ln n}, \ldots, \tfrac{1}{\ln n}}_{n}, 0, \ldots)$;
7) $x^{(n)} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1, 0, \ldots)$;
8) $x^{(n)} = (\sqrt[n]{1}, \sqrt[n]{2}, \ldots, \sqrt[n]{n}, 0, \ldots)$;

9) $x^{(n)} = (\underbrace{(\frac{1}{2})^n, (\frac{2}{3})^n, ..., (\frac{n}{n+1})^n}_{n}, 0, 0, \ldots)$.

6. Чи збігається у просторі $L_p([0,1]),\ 1 \le p < +\infty$, задана послідовність елементів? Якщо так, знайти її границю.

1) $x_n(t) = \sqrt[3]{n}\, t^n$;
2) $x_n(t) = t^n - t^{2n+1}$;
3) $x_n(t) = n \cdot \chi_{[0, \frac{1}{n^2}]}(t)$;
4) $x_n(t) = ne^{-nt}$;
5) $x_n(t) = \cos t^n$;
6) $x_n(t) = \sqrt{n}(1 - nt)\chi_{[0, \frac{1}{n}]}(t)$.

7. Чи збігається у просторі $L_p(\mathbb{R}),\ 1 \le p < +\infty$, задана послідовність елементів? Якщо так, знайти її границю.

1) $x_n(t) = e^{-|t-n|}$; 2) $x_n(t) = \frac{\sqrt{n}}{1+t^2n^2}$; 3) $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt[7]{n}} \cdot \chi_{[n,4n]}(t)$.

8. Нехай $(T, \mathcal{F}, \mu)$ — простір зі скінченною мірою. Довести, що при $1 \le p_1 < p_2 \le +\infty$ має місце включення $L_{p_2}(T,\mu) \subset L_{p_1}(T,\mu)$, причому якщо $x_n \to x,\ n \to \infty$, в $L_{p_2}(T,\mu)$, то $x_n \to x,\ n \to \infty$, в $L_{p_1}(T,\mu)$.

9. 1) Довести, що при $1 \le p_1 < p_2 \le +\infty$ має місце включення $l_{p_1} \subset l_{p_2}$.

2) Довести, що простори $L_{p_1}(\mathbb{R})$ та $L_{p_2}(\mathbb{R})$ не вкладаються один в одний при жодних $1 \le p_1 < p_2 \le +\infty$.

10. Довести, що

1) система елементів $\{e_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots) : n \ge 1\}$ тотальна в $l_p,\ 1 \le p < +\infty$;

2) система функцій $\{1, \cos nt, \sin nt : n \ge 1\}$ тотальна в $L_p([0, 2\pi])$, $1 \le p < +\infty$;

3) система функцій $\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ тотальна в $L_p([0, 2\pi])$, $1 \le p < +\infty$;

4) система функцій $\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ тотальна в $C([a,b])$ тоді й лише тоді, коли $0 < b - a < 2\pi$;

5) система функцій $\{1, \sin nt : n \ge 1\}$ тотальна в $C([0,b])$ тоді й лише тоді, коли $0 < b < \pi$;

6) система функцій $\{1, \cos nt : n \ge 1\}$ тотальна в $C([0,b])$ тоді й лише тоді, коли $0 < b < \pi$.

11. Довести щільність в $L_p([a,b]),\ 1 \le p < +\infty$ таких множин:

1) східчастих функцій;
2) многочленів;
3) многочленів з раціональними коефіцієнтами;
4) многочленів з нульовою сумою коефіцієнтів;
5) парних многочленів, якщо $a \ge 0$;
6) неперервних функцій x таких, що $x(a) = x(b) = 0$;

7) многочленів від e^t.

12. Чи є підпросторами в $C([-1,1])$ такі підмножини:

1) монотонні функції;
2) неспадні функції;
3) парні функції;
4) непарні функції;
5) многочлени;
6) многочлени степеня не вище m, де $m \in \mathbb{N}$ фіксоване;
7) функції x, для яких $x(0) = 0$;
8) неперервно диференційовні функції;
9) функції x, для яких $\int\limits_{-1}^{1} x(t)dt = 0$.

Заняття 2
ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ

Контрольні запитання

1. Означення скалярного добутку; його властивості.
2. Означення гільбертового простору.
3. Рівність паралелограма та поляризаційна тотожність.
3. Ортогональне доповнення множини у гільбертовому просторі. Теорема про розклад гільбертового простору.
4. Означення ортогональної, ортонормованої, повної системи, ортонормованого базису.

A2

1. Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, де $\alpha_k > 0,\ k \geq 1$. Розглянемо $l_{2,\alpha}$ — множину всіх числових послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, які задовольняють умову $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|^2 < \infty$. Перевірити, що $l_{2,\alpha}$ є гільбертовим простором зі скалярним добутком $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \overline{y_k},\ x, y \in l_{2,\alpha}$.

2. Довести, що у банаховому просторі $C([0,1])$ норма не породжується скалярним добутком.

3. Нехай L і M — підмножини гільбертового простору H, причому $L \perp M$ та $H = L \bigoplus M$. Довести, що $M^{\perp} = L$, $L^{\perp} = M$. Зокрема, L, M — підпростори H.

4. Довести, що множина парних функцій в $L_2([-1,1])$ є підпростором. Знайти його ортогональне доповнення. *Примітка.* Функція $x \in L_2([-1,1])$ називається парною, якщо $x(t) = x(-t)$ для майже всіх $t \in [-1,1]$.

5. Нехай $L \subset H$. Довести, що $\text{з.л.о.}(L) = H$ тоді й лише тоді, коли $L^{\perp} = \{0\}$.

6. Знайти в $L_2([0,1])$ ортогональне доповнення до множини

1) $C([0,1])$; 2) усіх многочленів; 3) $\{t^k \,|\, k \geq 10\}$.

7. Знайти в $L_2([-\pi,\pi])$ ортогональне доповнення до множин:

1) $\{\sin kt \,|\, k \geq 1\}$; 2) $\{e^{ikt} \,|\, k \geq 5\}$; 3) $\{t^{2k} \,|\, k \geq 0\}$.

8. Знайти в l_2 ортогональне доповнення до множин

1) $\{(1,1,0,\ldots)\}$; 2) $\{e_k,\ 1 \leq k \leq n\},\ n \in \mathbb{N}$; 3) $\{e_{2k} \,|\, k \in \mathbb{N}\}$.

Д1. Розглянемо простір H, що складається з функцій $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x(t) \neq 0\}$ — не більш ніж зліченна множина, причому $\sum\limits_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|^2 < +\infty$. Довести, що H — несепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(x,y) = \sum\limits_{t\in\mathbb{R}} x(t)y(t),\ x,y \in H$.

Д2. Перевірити ортогональність у просторі H таких систем:

1) $x_n(t) = \begin{cases} (-1)^m, & t \in [\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}),\ m = 0,1,\ldots,2^n-1, \\ -1, & t = 1, \end{cases}$

$n \geq 1,$ — система функцій Радемахера, $H = L_2([0,1])$;

2) $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n,\ n \geq 0,$ — многочлени Лежандра, $H = L_2([-1,1])$;

3) $H_n(t) = e^{t^2/2}\frac{d^n}{dt^n}e^{-t^2},\ n \geq 0,$ — функції Ерміта, $H = L_2(\mathbb{R})$.

Д3. Довести, що у задачі **Д**2

1) система функцій Радемахера $\{x_n(t) : n \geq 1\}$ не є ортонормованим базисом в $L_2([0,1])$;

2) функції $\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(t) : n \geq 0\right\}$ утворюють ортонормований базис в $L_2([-1,1])$.

Д4. Нехай M, N — підпростори гільбертового простору H і для кожного $x \in H$ існують єдині $x_1 \in M$ та $x_2 \in N$ такі, що $x = x_1 + x_2$. Чи правильно, що $N = M^{\perp}$?

Д5. 1) Нехай $M = \big\{(x_1, 0, x_3, 0, \ldots) \mid x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l_2\big\}$, $N = \big\{(x_1, x_1, x_3, \frac{x_3}{3}, x_5, \frac{x_5}{5}, \ldots) \mid x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l_2\big\}$. Довести, що M і N — підпростори в l_2 та множина $M + N$ скрізь щільна в l_2, але $M + N \neq l_2$, тобто $M + N$ не є підпростором в l_2.

2) Нехай M і N — підпростори в гільбертовому просторі H та $M \perp N$. Довести, що $M + N$ — підпростір в H.

B2

1. Чи визначає скалярний добуток в $\mathbb{R}^2$ функція $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, якщо

1) $\varphi(x,y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$; 2) $\varphi(x,y) = x_2y_2$?

Чи визначає скалярний добуток в $\mathbb{C}^2$ функція $\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, якщо

3) $\varphi(x,y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$; 5) $\varphi(x,y) = x_1\overline{x_2} + 2y_1\overline{y_2}$;
4) $\varphi(x,y) = 3x_1\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2}$; 6) $\varphi(x,y) = x_1\overline{y_1} - 2x_2\overline{y_2}$?

Тут $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{K}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2. Довести, що у банахових просторах l_p, $L_p([a,b])$, $p \neq 2$, норма не породжується скалярним добутком.

3. Довести, що в гільбертовому просторі над числовим полем $\mathbb{K}$ елементи x і y ортогональні тоді й лише тоді, коли

1) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$;
2) $\|\lambda x + \mu y\|^2 = \|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2$ для довільних $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4. Нехай H — гільбертів простір, $\{x_n\} \subset H$, $\{y_n\} \subset H$, причому $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $n \geq 1$. Довести, що

1) $(x_n, y_n) \to 1, n \to \infty \ \Rightarrow\ \|x_n - y_n\| \to 0, n \to \infty$;
2) $\|x_n + y_n\| \to 2, n \to \infty \ \Rightarrow\ \|x_n - y_n\| \to 0, n \to \infty$.

5. Нехай $L = \{x \in L_2(\mathbb{R}) \,|\, x(t) = 0,\ t \geq 0 \,(\mathrm{mod}\, m)\}$. Довести, що L — підпростір $L_2(\mathbb{R})$, та знайти ортогональне доповнення до L.

6. Довести, що

1) для довільної множини $M \subset H$ ортогональне доповнення $M^\perp$ є підпростором;
2) якщо $M \subset N \subset H$, то $M^\perp \supset N^\perp$;
3) $M \subset (M^\perp)^\perp$ для довільного $M \subset H$;
4) рівність $M = (M^\perp)^\perp$ має місце тоді й лише тоді, коли M — підпростір.

7. Знайти в $L_2([0,1])$ ортогональне доповнення до множини

1) усіх многочленів від t^2;
2) усіх многочленів $x(t)$, для яких $x(0) = 0$;
3) усіх многочленів від e^t;
4) $\{t^{3k} \,|\, k \geq 1\}$.

8. Знайти в l_2 ортогональне доповнення до множин

1) $\{(2,0,3,0,0,\ldots)\}$; 3) $\left\{x = (1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^k, \ldots) \,|\, \alpha \in (0,1)\right\}$;
2) $\{e_{2k+1} \,|\, k \in \mathbb{N}\}$; 4) $\left\{x = (1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n^k}, \ldots) \,|\, n \geq 2\right\}$.

9. Знайти в $L_2([-1,1])$ ортогональне доповнення до множин

1) $\{t^k \,|\, k \geq 13\}$; 3) $\{t^{2k+1} \,|\, k \geq 0\}$;
2) $\{t^{2k} \,|\, k \geq 0\}$; 4) $\{t^{2k} \,|\, k \geq 7\}$.

10. Знайти в $L_2([-\pi,\pi])$ ортогональне доповнення до множин

1) $\{\cos kt \,|\, k \geq 1\}$; 2) $\{e^{-ikt} \,|\, k \geq 3\}$.

11. Нехай $\{x_k : k \geq 1\}$ — ортогональна система в гільбертовому просторі H. Довести, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ збігається в H тоді й лише тоді, коли $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty$.

12. У гільбертовому просторі H знайти відстань від елемента $y \in H$ до підпростору L, якщо

1) $y(t) = e^t$, $L = \text{л.о.}(\{1, t\})$, $H = L_2([-1, 1])$;
2) $y(t) = t^2$, $L = \text{л.о.}(\{1, t\})$, $H = L_2([0, 1])$;
3) $y(t) = t$, $L = \text{л.о.}(\{\sin t, \cos t\})$, $H = L_2([-\pi, \pi])$;
4) $y(t) = \sin 3t$, $L = \text{л.о.}(\{1, \cos t, \cos 2t\})$, $H = L_2([-\pi, \pi])$;
5) $y(t) = 1$, $L = \text{л.о.}(\{\chi_{[0,2]}, \chi_{[1,3]}\})$, $H = L_2([0, 5])$;
6) $y(t) = \chi_{[4,5]}$, $L = \text{л.о.}(\{\chi_{[0,2]}, \chi_{[1,3]}\})$, $H = L_2([0, 5])$.

Заняття 3
ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІОНАЛИ. СПРЯЖЕНІ ПРОСТОРИ

Контрольні запитання

1. Неперервні та обмежені лінійні функціонали.

2. Означення норми лінійного неперервного функціонала(ЛНФ).

3. Означення спряженого простору.

4. Теореми про загальний вигляд ЛНФ у просторах $C([a, b])$, $L_p(T, \mu)$, l_p, $1 \leq p < +\infty$, у гільбертовому просторі.

А3

1. З'ясувати, чи є наведені функціонали в $C([0, 1])$ лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти їхні норми за означенням.

1) $f(x) = x(0) - 2x(1)$;
2) $f(x) = 2x(0) - x(\frac{1}{2}) + 3x(1)$;
3) $f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)dt$;
4) $f(x) = \|x\|$;
5) $f(x) = \int\limits_0^{1/2} x(t)dt - \int\limits_{1/2}^1 x(t)dt$;
6) $f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)dt - 2x(1)$.

2. Довести, що наведені функціонали є лінійними неперервними, та знайти їхні норми за означенням або користуючись описом спряженого простору.

1) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n;$

2) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})x_n;$

3) $X = l_p$, $1 \le p < +\infty$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n};$

4) $X = l_1, l_2, l_\infty$, $f(x) = 2x_1 + 3x_2;$

5) $X = l_{\frac{4}{3}},\ f(x) = x_1 - (1+2i)x_3 + \sqrt{3}x_7.$

3. Довести, що наведені функціонали є лінійними неперервними, та знайти їхні норми.

1) $X = L_{\frac{3}{2}}([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 2tx(t)dt;$

2) $X = L_2([0,2]),\ f(x) = \int\limits_0^{\pi/2} x(t)e^{it}\sin t dt;$

3) $X = L_p([0,2]),\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt - 3i\int\limits_1^2 x(t)dt;$

4) $X = L_1(\mathbb{R}),\ f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} x(t)\,\mathrm{arctg}\, t dt.$

4. Користуючись описом спряженого простору, довести лінійність і неперервність наведених функціоналів на $C([0,1])$ та знайти їхні норми:

1) $f(x) = x(0) - 4x(\frac{1}{2});$

2) $f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)dt - 2x(1);$

3) $f(x) = x(0) + \int\limits_0^1 x(t)\cos\pi t\, dt;$

4) $f(x) = \int\limits_0^{1/3} x(t)dt - \int\limits_{2/3}^1 x(t)dt.$

Д1. Нехай X — ЛНП, f — лінійний функціонал на X. Довести, що

1) $\mathrm{Ker}\, f$ — лінійна множина, причому якщо $f \in X^*$, то $\mathrm{Ker}\, f$ — підпростір X;

2) якщо $z \in X \setminus \mathrm{Ker}\, f$, то

$$\forall\, x \in X\ \exists!\, y \in \mathrm{Ker}\, f\ \exists!\, \lambda \in \mathbb{K}\ :\ x = y + \lambda z.$$

Д2. Довести, що $L_1(T,\mu) \subset (L_\infty(T,\mu))^*$, тобто для довільного елемента $h \in L_1(T,\mu)$ функціонал $f(x) = \int\limits_T h(t)x(t)d\mu(t)$, $x \in L_\infty(T,\mu)$, є лінійним і неперервним на $L_\infty(T,\mu)$, а також $\|f\| = \|h\|_1$.

Д3. 1) Довести, що $c_0^* = l_1$, причому кожен лінійний неперервний функціонал на c_0 задається формулою $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n a_n$, $x \in c_0$, де $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in l_1$ — фіксований елемент, $\|f\| = \|a\|_1$.

2) Довести, що $c^* = l_1$, причому кожен лінійний неперервний функціонал на c задається формулою $f(x) = a_0 \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, $x \in c$, де $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in l_1$ — фіксований елемент, $\|f\| = \|a\|_1$.

(Означення просторів c_0 та c див. у задачі **Д**5 заняття **А1**.)

Д4. Нехай X — ЛНП над полем $\mathbb{K}$, f — лінійний необмежений функціонал на X. Довести, що f набуває всіх значень з поля $\mathbb{K}$ у довільному околі довільної точки.

Д5. Нехай X — ЛНП, $f \in X^*$. Довести, що $|f(x)| = \|f\| \cdot \rho(x, \operatorname{Ker} f)$ при всіх $x \in X$, де $\rho(x, \operatorname{Ker} f) = \inf\limits_{y \in \operatorname{Ker} f} \|x - y\|$.

Д6. Лінійний функціонал f на просторі $C([a,b])$ називають невід'ємним, якщо для довільного $x \in C([a,b])$ такого, що $x(t) \geq 0$, $t \in [a,b]$, виконується нерівність $f(x) \geq 0$. Довести, що

1) невід'ємний функціонал f на дійсному просторі $C([a,b])$ є неперервним, причому $\|f\| = f(e_0)$, де $e_0(t) = 1$, $t \in [a,b]$;

2) твердження пункту 1) правильне у комплексному просторі $C([a,b])$.

B3

1. Нехай $1 \leq p \leq +\infty$ фіксоване. Довести лінійність і неперервність наведених функціоналів у просторі $X = l_p$ та знайти їхні норми:

1) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x_n}{n+5}$;

2) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \operatorname{arctg} n$;

3) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n(n+1)}}$;

4) $X = l_\infty,\ f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{n^2-1}$;

5) $X = l_{\frac{4}{3}},\ f(x) = x_1 + \sqrt[4]{3} i x_3$;

6) $X = l_{\frac{7}{5}},\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_{3n}}{\sqrt[7]{n^4}}$;

7) $X = l_p,\ f(x) = 2ix_1 + 4x_2$;

8) $X = l_p,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$;

9) $X = l_3,\ f(x) = x_2 - 4x_3 + 9x_4 - 16x_5$;

10) $X = l_2,\ f(x) = (1+i)x_1 + (1+2i)x_2 + (1+3i)x_3$.

2. Довести лінійність і неперервність наведених функціоналів у просторі X та знайти їхні норми:

1) $X = \mathbb{R}^2$ з нормою $\|\cdot\|_3$, $f(x) = \sqrt[3]{49} x_1 - x_2$;

2) $X = \mathbb{C}^3$ з нормою $\|\cdot\|_\infty$, $f(x) = 2x_1 + 5x_2 + (3+2i)x_3$;

3) $X = \mathbb{C}^2$ з нормою $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq +\infty$, $f(x) = (1+i)^2 x_1 + x_2$.

3. Довести лінійність і неперервність наведених функціоналів у просторі $X = C([a,b])$ та знайти їхні норми:

1) $X = C([a,b]),\ f(x) = \frac{1}{2}(x(a) - x(b));$
2) $X = C([-1,1]),\ f(x) = x(0) - 2ix(-1) + (4+3i)x(1);$
3) $X = C([0,1]),\ f(x) = x(0) - \int\limits_0^1 t^2 x(t)dt;$
4) $X = C([-1,1]),\ f(x) = \int\limits_{-1}^0 x(t)dt - \int\limits_0^1 x(t)dt;$
5) $X = C([0,2]),\ f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)dt;$
6) $X = C([0,2]),\ f(x) = \int\limits_0^1 (1-2t)x(t)dt - x(0) + 2x(2);$
7) $X = C([0,\pi]),\ f(x) = \int\limits_0^\pi x(t)|\cos t|dt;$
8) $X = C([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^{\ln 2} e^t x(t)dt + 2x(1);$
9) $X = C([-1,2]),\ f(x) = \int\limits_{-1}^1 |t|x(t)dt + 3\int\limits_1^2 x(t)dt - 2x(0);$
10) $X = C([0,1]),\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} x(\frac{1}{n});$
11) $X = C([a,b]),\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k x(t_k)$, де $t_1, \ldots, t_n$ — набір різних точок з $[a,b]$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — набір комплексних чисел;
12) $X = C([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t^2)dt.$

4. Нехай $1 \le p \le +\infty$ фіксоване. Довести лінійність і неперервність наведених функціоналів у просторі $X = L_p(T)$ та знайти їхні норми:
1) $X = L_p(\mathbb{R}),\ f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} x(t)e^{-|t|}dt;$
2) $X = L_2([0,2\pi]),\ f(x) = \int\limits_0^\pi x(t)e^{it}\sin t dt;$
3) $X = L_p([1,4]),\ f(x) = \int\limits_1^2 tx(t)dt - 2\int\limits_3^4 x(t)dt;$
4) $X = L_3([-1,1]),\ f(x) = 4\int\limits_{-1}^0 t^2 x(t)dt + \int\limits_0^1 e^{3it}x(t)dt;$
5) $X = L_2(\mathbb{R}),\ f(x) = \int\limits_0^{\pi/2} x(t)\cos t dt + i\int\limits_\pi^{2\pi} x(t)dt;$

6) $X = L_p(\mathbb{R}),\ 1 \le p < +\infty,\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt + \int\limits_1^{+\infty} \frac{x(t)}{t}dt.$

5. Навести приклад функціонала $f \in C([0,1])^*$, для якого 1) не існує елемента $x_0 \in C([0,1])$ такого, що $\|x_0\| = 1$ та $f(x_0) = \|f\|$; 2) існує безліч таких елементів; 3) існує рівно один такий елемент.

6. Довести, що $f(x) = \int\limits_a^b p(t)x(t)dt,\ x \in C([a,b])$ є лінійним неперервним функціоналом, і знайти його норму, якщо

1) $p \in C([a,b])$ — фіксована функція;
2)* $p \in L_1([a,b])$ — фіксована функція.

7. Нехай $1 \le p < +\infty$ фіксоване. При яких $\alpha \in \mathbb{R}$ наведені функціонали належать відповідним спряженим просторам? Знайти норми цих функціоналів.

1) $X = l_p,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^\alpha};$

2) $X = L_p([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 \frac{x(t)}{t^\alpha}dt;$

3) $X = L_p([0,+\infty)),\ f(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}x(t)dt.$

Заняття 4
ТЕОРЕМА ГАНА–БАНАХА. СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ

Контрольні запитання

1. Теорема Гана–Банаха. Наслідки з неї.
2. Означення сильної та слабкої збіжності елементів, сильної та $*$-слабкої збіжності функціоналів.
3. Критерії слабкої збіжності у довільному ЛНП, у просторах $C([a,b])$, l_p, $L_p([a,b])$, $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < +\infty$.
4. Теорема Банаха–Штейнгауза.
5. Означення рефлексивного простору.

A4

1. Дослідити наведені послідовності на слабку та сильну збіжність у ЛНП X, для збіжних послідовностей знайти границі.

1) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \dots);$

2) $X = l_p,\ 1 \le p \le +\infty,\ x^{(n)} = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \dots);$

3) $X = L_p([0,1]),\ 1 \le p \le +\infty,\ x_n(t) = n\chi_{[0, \frac{1}{n^3}]}(t);$

4) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \cos^2 \pi n t;$

5) $X = C([0,1]),\ x_n(t) = t^{2n} - t^{3n};$

6) $X = C([0,1]),\ x_n(t) = t^n;$

7) $X = L_p(\mathbb{R}),\ 1 < p < +\infty,\ \ x_n(t) = \frac{1}{(t-n)^2}\chi_{[n+1, 2n]}(t).$

2. Довести, що послідовність функціоналів $\{f_n : n \ge 1\} \subset X^*$ є $*$-слабко збіжною.

1) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ f_n(x) = \int\limits_0^1 x(t) \cos^2 \pi n t dt;$

2) $X = C([0,1]),\ f_n(x) = n \int\limits_{1-\frac{1}{n}}^{1} x(t)dt;$

3) $X = L_p([a,b]),\ 1 < p < +\infty,\ f_n(x) = \int\limits_a^b t x(t) \sin nt dt.$

3. У просторі $\mathbb{R}^2$ на підпросторі $G = \{(x_1, 0) \,|\, x_1 \in \mathbb{R}\}$ задано функціонал $f(x) = \alpha x_1,\ x = (x_1, 0) \in G$, де $\alpha \in \mathbb{R}$ фіксоване. Описати всі лінійні продовження F функціонала f на $\mathbb{R}^2$. Для яких із цих продовжень $\|F\| = \|f\|$, якщо $\mathbb{R}^2$ розглядати з нормою $\|\cdot\|_p,\ 1 \le p \le +\infty$? В яких випадках продовження, що зберігає норму, єдине?

4. Нехай G — підпростір гільбертового простору H і $f \in G^*$. Описати всі лінійні неперервні продовження F функціонала f на H. Які з них зберігають норму?

5. Нехай X — ЛНП, A — деяка множина індексів. Системи

$$\{x_\alpha : \alpha \in A\} \subset X,\ \{f_\alpha : \alpha \in A\} \subset X^*$$

називають *біортогональними*, якщо $f_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta},\ \alpha, \beta \in A$, де $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера ($\delta_{\alpha\beta} = 0,\ \alpha \ne \beta,\ \delta_{\alpha\alpha} = 1$).

Нехай $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ — лінійно незалежна система. Довести, що 1) існує біортогональна до неї система; 2) для довільних $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ існує функціонал $f \in X^*$ такий, що $f(x_k) = c_k,\ k = 1, \dots, n$.

6. Нехай H — гільбертів простір, $x, x_n \in H,\ n \ge 1$. Довести, що якщо $x_n \xrightarrow{w} x$ та $\|x_n\| \to \|x\|,\ n \to \infty$, то $x_n \to x,\ n \to \infty$.

Д1. Нехай X — ЛНП. Множину $M \subset X$ називають *слабко замкненою*, якщо для кожної послідовності $\{x_n : n \ge 1\} \subset M$ з того, що $x_n \xrightarrow{w} x \in X$, випливає, що $x \in M$. Довести, що

1) кожна слабко замкнена множина в X є сильно замкненою;
2) твердження, обернене до твердження 1), хибне;
3) підпростір в X є слабко замкненою множиною;
4) замкнена куля $\overline{B}(0,r)$ в X є слабко замкненою множиною.

Д2. Дослідити наведені послідовності на слабку та сильну збіжність у ЛНП X, якщо

1) $X = L_2([0,1])$, $x_n(t) = \sin(ne^t)$;
2) $X = L_p([0,1])$, $1 < p < +\infty$, $x_n(t) = x_0(2^n t)$, $t \in [0,1]$, де $x_0(t) = (-1)^k$ при $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
3) $X = l_1$, $x^{(n)} = e_n$;
4) $X = L_1(\mathbb{R})$, $x_n(t) = \chi_{[n,n+1]}(t)$;
5) $X = l_\infty$, $x^{(n)} = e_n$.

Д3. 1) Довести, що існує функціонал $F \in l_\infty^*$ такий, що $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ при $x \in c$.

2) Довести, що включення $l_1 \subset l_\infty^*$ строге.

Д4. Довести, що функціонал $F(g) = \int\limits_0^{1/2} dg(t),\ g \in BV_0([0,1])$, є лінійним і неперервним на $BV_0([0,1])$. Вивести звідси нерефлексивність простору $C([0,1])$.

Д5. Нехай $1 \le p \le +\infty$, q — спряжений індекс до p та послідовність $a = \{a_n : n \ge 1\}$ така, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ збігається для довільного $x \in l_p$. Довести, що $a \in l_q$.

Д6. 1)* Нехай X — ЛНП, $f, f_1, \ldots, f_n$ — лінійні функціонали на X. Довести, що f є лінійною комбінацією функціоналів $f_1, \ldots, f_n$ тоді й лише тоді, коли $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} f_k \subset \operatorname{Ker} f$.

2) Нехай $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset X^*$ — лінійно незалежна система. Довести, що в X існує біортогональна до неї система (див. задачу 5).

В4

1. Дослідити наведені послідовності на слабку та сильну збіжність у просторі l_p, для збіжних послідовностей знайти границі.

1) $X = l_p$, $1 < p < +\infty$, $x^{(n)} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$;
2) $X = l_p, 1 \le p < +\infty, x^{(n)} = (\frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 1, 0, 0, \ldots)$;

3) $X = l_p$, $1 < p < +\infty$, $x^{(n)} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots)$;

4) $X = l_p$, $1 \le p < +\infty$, $x^{(n)} = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2n}}, 0, 0, \ldots)$;

5) $X = l_p$, $1 < p < +\infty$, $x^{(n)} = (\frac{1+n}{1+n}, \frac{1+n}{1+2n}, \ldots, \frac{1+n}{1+kn}, \ldots)$;

6) $X = l_p$, $1 \le p < +\infty$, $x^{(n)} = (\underbrace{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n^5}, 0, 0, \ldots)$;

7) $X = l_p$, $1 \le p < +\infty$,
$x^{(n)} = (1, 0, \frac{1}{3^2}, 0, \frac{1}{5^2}, \ldots, 0, \frac{1}{(2n-1)^2}, \frac{1}{(2n)^2}, \frac{1}{(2n+1)^2}, \ldots)$;

8) $X = l_p$, $1 \le p \le +\infty$, $x^{(n)} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \ln n, 0, 0, \ldots)$.

2. Дослідити наведені послідовності на слабку та сильну збіжність у просторі $X = L_p(T)$, для збіжних послідовностей знайти границі.

1) $X = L_p([0,1])$, $1 \le p \le +\infty$, $x_n(t) = \sqrt{n}\, \chi_{[0, \frac{1}{n})}(t)$;
2) $X = L_p([0,1])$, $1 < p < +\infty$, $x_n(t) = e^{int}$;
3) $X = L_p([0,1])$, $1 < p < +\infty$, $x_n(t) = \cos(n^2 t)$;
4) $X = L_p([0,1])$, $1 < p < +\infty$, $x_n(t) = \sin^3(nt)$;
5) $X = L_p([0,1])$, $1 < p < +\infty$, $x_n(t) = \sqrt{n}(1 - nt)\, \chi_{[0, \frac{1}{n})}(t)$;
6) $X = L_p([0,1])$, $1 \le p < +\infty$, $x_n(t) = \sin(t^n)$;
7) $X = L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < +\infty$, $x_n(t) = \frac{t}{n\sqrt{n}} \chi_{[2n, 3n]}(t)$;
8) $X = L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le +\infty$, $x_n(t) = \sqrt[4]{n} \chi_{[n, n+\frac{1}{n}]}(t)$;
9) $X = L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < +\infty$, $x_n(t) = \chi_{[n, n+1]}(t)$;
10) $X = L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le +\infty$, $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \chi_{[n, 2n]}(t)$.

3. Дослідити наведені послідовності на слабку та сильну збіжність у просторі $C([0,1])$, для збіжних послідовностей знайти границі.

1) $x_n(t) = t^n - t^{3n}$;
2) $x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$;
3) $x_n(t) = e^{-nt}$;
4) $x_n(t) = te^{-nt}$;
5) $x_n(t) = nte^{-nt}$;
6) $x_n(t) = \frac{n^2 t}{1 + n^4 t^2}$.

4. Довести, що послідовність функціоналів $\{f_n : n \ge 1\} \subset X^*$ є $*$-слабко збіжною, і з'ясувати, чи збігається вона сильно, якщо

1) $X = L_2([0,1])$, $f_n(x) = \int\limits_0^1 \cos^2 2\pi n t x(t) dt$;

2) $X = L_2([0,1])$, $f_n(x) = \int\limits_0^1 t^3 e^{2\pi i n t} x(t) dt$;

3) $X = C([0,1])$, $f_n(x) = n \int\limits_0^{\frac{1}{n}} (1-2nt)x(t)dt$;

4) $X = C([0,1])$, $f_n(x) = n \int\limits_0^1 x(t)t^n dt$.

5. Нехай $\alpha > 0$ задане, $G = \{(x_1, x_1) \,|\, x_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, $f(x) = \alpha x_1$, $x \in G$. Описати всі лінійні продовження F функціонала f на $\mathbb{R}^2$. Для яких із цих продовжень $\|F\| = \|f\|$, якщо $\mathbb{R}^2$ розглядати з нормою $\|\cdot\|_p$, $1 \le p \le +\infty$? В яких випадках продовження, що зберігає норму, єдине?

6. Нехай H — гільбертів простір, $G = \{x \in H \mid (x,h) = 0\}$, $f(x) = (x,a)$, $x \in G$, де $a, h \in H$ — фіксовані елементи. Описати всі лінійні неперервні продовження F функціонала f на H. Які з них зберігають норму?

7. Нехай $G = \{x \in C([0,1]) \mid x(0) = x(1) = 0\}$, $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $t \in [0,1]$. Побудувати лінійний неперервний функціонал на $C([0,1])$, який дорівнює нулю на G і такий, що 1) $f(x_1) = 2$, $f(x_2) = 3$; 2) $f(x_1) = 2$, $\|f\| = 2$, $f(x_2) \le 0$.

8. Нехай X — банахів простір, $x, x_n \in X$, $f, f_n \in X^*$, $n \ge 1$. Довести, що $f_n(x_n) \to f(x)$, $n \to \infty$, якщо виконується одна з таких умов:

1) $x_n \to x$, $f_n \to f$; 2) $x_n \xrightarrow{w} x$, $f_n \to f$; 3) $x_n \to x$, $f_n \xrightarrow{*-w} f$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА 1

Завдання індивідуальні. Зразок варіанта

1. Довести лінійність і неперервність функціоналів у просторі X та знайти їхні норми.

1) $X = l_3$, $f(x) = (2+i)x_2 - 3x_4 + (1+i)x_5$;

2) $X = L_3([-1,2])$, $f(x) = \int\limits_{-1}^0 t^4 x(t)dt + \int\limits_1^2 2ix(t)dt$;

3) $X = C([-2,2])$, $f(x) = \int\limits_0^2 e^t x(t)dt + 2x(-1) - 3x(1)$.

2. Дослідити послідовності на слабку та сильну збіжність у ЛНП X.

1) $X = L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < +\infty$, $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \chi_{[n,4n]}(t)$;

2) $X = l_p, 1 < p < +\infty, x^{(n)} = (\frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}, 0, 0, \ldots)$.

Заняття 5
ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ

Контрольні запитання

1. Означення лінійного оператора.

2. Означення неперервного і обмеженого оператора, зв'язок між ними.

3. Означення норми лінійного неперервного оператора (ЛНО).

А5

1. Знайти загальний вигляд лінійного оператора $A : \mathbb{C}_1^m \to \mathbb{C}_1^n$ і обчислити його норму. Тут $\mathbb{C}_1^m$ — простір $\mathbb{C}^m$ з нормою $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|$.

2. Нехай $\{\alpha_n : n \geq 1\}$ — обмежена послідовність. Довести, що діагональний оператор $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$ в l_p, $1 \leq p \leq \infty$, є лінійним неперервним, і знайти норму A.

3. Нехай $X = L_2(T, \mu)$, $\alpha \in L_\infty(T, \mu)$, μ — σ-скінченна. Довести, що оператор множення на α: $(Ax)(t) = \alpha(t)x(t)$ належить $\mathcal{L}(X)$, і знайти норму A.

4. Нехай X, Y — ЛНП, $f \in X^*$, $y \in Y$ та $Ax = f(x)y$, $x \in X$. Довести, що $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, та знайти $\|A\|$.

5. Нехай H — гільбертів простір, $y, z \in H$, $Ax = (x, y)z$, $x \in H$. Довести, що $A \in \mathcal{L}(H)$, і знайти $\|A\|$.

6. Нехай $\{y_k \,|\, 1 \leq k \leq n\}$ та $\{z_k \,|\, 1 \leq k \leq n\}$ — ортонормовані системи в гільбертовому просторі H, $\{c_k \,|\, 1 \leq k \leq n\} \subset \mathbb{C}$. Для оператора A, визначеного рівністю $Ax = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k (x, y_k) z_k$, довести, що $A \in \mathcal{L}(H)$ та $\|A\| = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |c_k|$.

7. Довести, що наведені інтегральні оператори є лінійними, неперервними. Знайти їхні норми.

1) $X = C([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 t^2 e^s x(s)ds;$

2) $X = L_3([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 ts^4 x(s)ds;$

3) $X = L_2([0,2\pi]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^{2\pi} \cos(t-2s)x(s)ds;$

4) $X = C([0,1]),\ (Ax)(t) = \big(3x(0) - 2\int\limits_0^1 sx(s)ds\big)\sin t;$

5) $X = C([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds.$

8. Довести лінійність і неперервність інтегрального оператора A з ядром $K \in L_2([a,b]^2)$, тобто оператора $A : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$, що діє за формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{[a,b]} K(t,s)x(s)ds,\ t \in [a,b]$. Довести оцінку

$\|A\| \le \|K\|_{L_2([a,b]^2)} = \Big(\int\limits_{[a,b]^2} |K(t,s)|^2 dtds \Big)^{1/2}.$

Д1. Довести, що інтегральний оператор $A : C([a,b]) \to C([a,b])$ з ядром $K \in C([a,b]^2)$, який діє за формулою $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$, $t \in [a,b],\ x \in C([a,b])$, є лінійним і неперервним. Довести також, що $\|A\| = \max\limits_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(t,s)|ds.$

Д2. Знайти норму оператора, визначеного рівністю $Ax = x$, який діє з $L_p([a,b])$ у $L_r([a,b])$, $1 \le r \le p \le \infty$.

Д3. 1) Довести, що ядро $\operatorname{Ker} A$ будь-якого лінійного неперервного оператора $A : X \to Y$, де X, Y — ЛНП, є підпростором в X.

2) Нехай $A : X \to Y$ — лінійний оператор, $\operatorname{Ker} A$ — підпростір в X. Чи випливає звідси, що A — обмежений оператор?

3) Навести приклад лінійного неперервного оператора A, область значень якого а) замкнена; б) незамкнена.

Д4. Нехай A — лінійний оператор у ЛНП X, який переводить будь-яку сильно збіжну послідовність у слабко збіжну. Довести, що A — обмежений оператор.

Д5. Нехай X — ЛНП, $A : X \to X$. Довести, що $A \in \mathcal{L}(X)$ тоді й лише тоді, коли для кожного $f \in X^*$ функціонал $f_0(x) = f(Ax)$, $x \in X$, є лінійним і неперервним.

В5

1. Знайти норму оператора $A : \mathbb{R}^m \to l_2$, якщо

$$Ax = (x_1, \ldots, x_m, \tfrac{x_1}{2}, \ldots, \tfrac{x_m}{2}, \tfrac{x_1}{3}, \ldots, \tfrac{x_m}{3}, \ldots),$$

$x = (x_1, \ldots x_m) \in \mathbb{R}^m$ (в $\mathbb{R}^m$ розглядається евклідова норма).

2. Нехай $\alpha = \alpha(t)$ — фіксована функція з $C([a,b])$, A — оператор множення на функцію α: $(Ax)(t) = \alpha(t)x(t)$. Довести, що A — лінійний неперервний оператор у просторі X, і знайти норму A, якщо 1) $X = C([a,b])$; 2) $X = L_p([a,b])$, $1 \le p \le +\infty$.

3. Довести, що наведені оператори $A : l_p \to l_p$, $1 \le p \le +\infty$, є лінійними, неперервними. Знайти їхні норми.

1) $Ax = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3} \ldots);$

2) $Ax = (\frac{4}{3}x_3, \frac{5}{4}x_4, \frac{6}{5}x_5, \frac{7}{6}x_6, \ldots);$

3) $Ax = (x_2, 2x_4, 3x_6, \ldots, 10x_{20}, 0, 0, \ldots);$

4) $Ax = (\frac{1}{4}x_3, \frac{2}{7}x_6, \frac{3}{10}x_9, \ldots, \frac{k}{3k+1}x_{3k}, \ldots).$

4. Нехай H — гільбертів простір, $G \subset H$ — підпростір, $Px = \mathrm{pr}_G\, x$. Довести, що оператор проектування P є лінійним і неперервним. Знайти норму P.

5. Нехай $u, v \in C([a, b])$ та $(Ax)(t) = \int\limits_a^b u(t)v(s)x(s)ds$. Довести, що $A \in \mathcal{L}(X)$, та знайти норму $\|A\|$, якщо 1) $X = L_p([a, b])$, $1 \le p \le +\infty$; 2) $X = C([a, b])$.

6. Довести, що наведені інтегральні оператори є лінійними, неперервними у просторі X. Знайти їхні норми.

1) $X = C([0, 1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 t^\alpha s^\beta x(s)ds,\ \alpha \ge 0, \beta > -1;$

2) $X = C([0, 1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{3t-2s}x(s)ds;$

3) $X = L_4([0, 1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 \sqrt{t}s^3 x(s)ds;$

4) $X = C([0, 2\pi]),\ (Ax)(t) = \left(\int\limits_0^\pi \sin s x(s)ds - \int\limits_\pi^{2\pi} x(s)ds\right)\cos t;$

5) $X = L_{\frac{3}{2}}([0, +\infty)),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-4t}}{s+1}x(s)ds;$

6) $X = L_2([0, 1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 t^\alpha s^\beta x(s)ds,\ \alpha > -\frac{1}{2},\ \beta > -\frac{1}{2}.$

7. Довести, що наведені оператори є лінійними, неперервними в $X = L_2(T)$. Знайти їхні норми.

1) $X = L_2([0, 2\pi]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^{2\pi} \cos(t - s)x(s)ds;$

2) $X = L_2([-\pi, \pi]),\ (Ax)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin(t + s) + 3)x(s)ds;$

3) $X = L_2([-1, 1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_{-1}^{1} (st - 4)x(s)ds;$

4) $X = L_2([0, 2\pi])$, $(Ax)(t) = \int\limits_0^{2\pi} (\cos 2t \sin s + 3 \sin t \sin 2s) x(s) ds$;

5) $X = L_2([-1, 1])$, $(Ax)(t) = \int\limits_{-1}^{1} (st + s^2) x(s) ds$;

6) $X = L_2([-\pi, \pi])$, $(Ax)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin t + 4 \cos 2s) x(s) ds$.

7) $X = L_2([-2, 2])$, $(Ax)(t) = 3x(t) - 2x(-t)$;

8) $X = L_2([0, 1])$, $(Ax)(t) = x(\sqrt[4]{t})$.

8. Довести, що наведені оператори є лінійними, неперервними в $C([0, 1])$. Знайти їхні норми.

1) $(Ax)(t) = t \int\limits_0^1 s^2 x(s) ds - x(0)$;

2) $(Ax)(t) = 2t^2 \int\limits_0^1 x(s) ds - e^t x(t) + 3x(1)$;

3) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 \sin \pi(t - s) x(s) ds$.

9. Довести, що оператор $A : C^1([a, b]) \to C([a, b])$, заданий рівністю $(Ax)(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $t \in [a, b]$, є лінійним і неперервним. Знайти його норму.

10. Знайти загальний вигляд лінійного оператора $A : \mathbb{R}^m_p \to \mathbb{R}^n_\infty$ і обчислити його норму у таких випадках: 1) $p = +\infty$; 2) $p = 1$.

Тут $\mathbb{R}^m_p$ — простір $\mathbb{R}^m$ з нормою $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|^p \right)^{1/p}$, $1 \le p < +\infty$, $\mathbb{R}^m_\infty$ — простір $\mathbb{R}^m$ з нормою $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \le k \le m} |x_k|$.

11. Нехай $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ — числова матриця, для якої $\sum\limits_{j,k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2 < \infty$. Довести, що оператор множення на цю матрицю, визначений рівностями $(Ax)_j = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{jk} x_k$, $j \ge 1$, є лінійним і неперервним у просторі l_2. Оцінити норму A.

12. Довести, що оператори $(Ax)(t) = tx(t)$, $(Bx)(t) = \int\limits_0^t x(s) ds$, $t \in [0, 1]$, є лінійними, неперервними в $L_2([0, 1])$ і не комутують.

Заняття 6
РІВНОМІРНА, СИЛЬНА, СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ ОПЕРАТОРІВ. ПРИНЦИП РІВНОМІРНОЇ ОБМЕЖЕНОСТІ

Контрольні запитання

1. Означення рівномірної, сильної, слабкої збіжності операторів.

2. Принцип рівномірної обмеженості.

3. Критерії сильної та слабкої збіжності операторів.

А6

1. Дослідити послідовність операторів $A_n : X \to X$, $n \geq 1$, на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо

1) $X = l_p$, $1 \leq p < +\infty$, $A_n x = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, x_1, x_2, \ldots)$;

2) $X = l_p$, $1 \leq p \leq +\infty$, $A_n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$;

3) $X = l_p$, $1 \leq p \leq +\infty$,
$$A_n x = (\tfrac{1+n}{1+n} x_1, \tfrac{1+n}{1+2n} x_2, \tfrac{1+n}{1+3n} x_3, \ldots, \tfrac{1+n}{1+kn} x_k, \ldots);$$

4) $X = C([0,1]),\ (A_n x)(t) = x(t^n)$;

5) $X = C([0,1]),\ (A_n x)(t) = (1-t)^n \int\limits_0^{t^n} x(s)ds$;

6) $X = L_p(\mathbb{R}),\ 1 < p < +\infty,\ (A_n x)(t) = x(t-n) \operatorname{arctg} t$;

7) $X = L_p(\mathbb{R}),\ 1 \leq p < +\infty,\ (A_n x)(t) = \frac{1}{1+|t|^n} x(t+1)$.

2. Нехай $\{u_n : n \geq 1\} \subset C([a,b])$ — фіксована послідовність,
$$(A_n x)(t) = u_n(t) x(t),\ t \in [a,b],\ x \in C([a,b]).$$
За яких умов на послідовність $\{u_n : n \geq 1\}$ послідовність операторів $\{A_n : n \geq 1\}$ збігається 1) рівномірно; 2) сильно; 3) слабко? Визначити вигляд граничного оператора.

3. Нехай X — банахів простір і $\{A, B, A_n, B_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X)$. Довести, що

1) $A_n \xrightarrow{s} A,\ B_n \xrightarrow{s} B \ \Rightarrow\ A_n B_n \xrightarrow{s} AB$;

2) $A_n \rightrightarrows A,\ B_n \rightrightarrows B \ \Rightarrow\ A_n B_n \rightrightarrows AB$;

3) $A_n \xrightarrow{w} A,\ B_n \xrightarrow{w} B \ \not\Rightarrow\ A_n B_n \xrightarrow{w} AB$.

Д1. Нехай X — ЛНП. Довести, що послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ слабко обмежена (тобто для кожного $f \in X^*$ числова послідовність $\{f(x_n) : n \geq 1\}$ обмежена) тоді й лише тоді, коли вона обмежена за нормою в X.
Д2. Нехай X_1, X_2 — банахові простори, $\{A, A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X_1, X_2)$, $A_n \xrightarrow{s} A$, $n \to \infty$, та M — компактна множина у просторі X_1. Довести, що $\{A_n x : n \geq 1\}$ збігається до Ax рівномірно на M.
Д3. Нехай X_1, X_2 — банахові простори.

1) Довести, що простір $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ повний відносно сильної збіжності операторів, тобто довільна послідовність $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X_1, X_2)$, для якої $\{A_n x : n \geq 1\}$ — фундаментальна послідовність елементів з X_2 при кожному $x \in X_1$, сильно збігається до деякого оператора $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$.

2) За якої умови на банахові простори X_1 та X_2 простір $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ є повним відносно слабкої збіжності?

Д4. За яких умов на число $\alpha \in \mathbb{C}$ послідовність операторів $A_n : l_p \to l_p$, $1 \leq p < +\infty$, визначена рівністю

$$A_n x = (\alpha^n x_1,\ \alpha^{n-1} x_2, \ldots, \alpha x_n, 0, 0, \ldots),\ x \in l_p,$$

збігається рівномірно, слабко, сильно?
Д5. Знайти необхідні та достатні умови на послідовність комплексних чисел $\{\alpha_n : n \geq 1\}$, за яких послідовність операторів $A_n : l_p \to l_p$, $1 \leq p \leq +\infty$, $n \geq 1$, збігається рівномірно, сильно, слабко, якщо

1) $A_n x = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, \alpha_n x_1, 0, 0, \ldots)$;
2) $A_n x = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n, 0, 0, \ldots)$;
3) $A_n x = (\alpha_n x_1, \alpha_{n+1} x_2, \ldots)$;
4) $A_n x = (\alpha_n x_1, \alpha_{n+1} x_2, \ldots, \alpha_{2n-1} x_n, 0, 0, \ldots)$.

Д6. Нехай A, B — лінійні оператори в гільбертовому просторі H такі, що $(Ax, y) = (x, By)$ при всіх $x, y \in H$. Довести, що $A, B \in \mathcal{L}(H)$.

В6

1. Якого вигляду набуває рівномірна, сильна та слабка операторні збіжності для операторів із $\mathcal{L}(X, \mathbb{C})$, де X — ЛНП, тобто для функціоналів?
2. Дослідити послідовність операторів $A_n : l_p \to l_p$, $n \geq 1$, на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо

1) $A_n x = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, x_n, 0, 0, \ldots),\ 1 \leq p < +\infty$;
2) $A_n x = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots),\ 1 \leq p < +\infty$;
3) $A_n x = (x_n, x_{n-1}, x_2, \ldots x_1, 0, 0, \ldots),\ 1 \leq p \leq +\infty$;

4) $A_nx=(\frac{x_1}{n},\frac{x_2}{n-1},\dots,\frac{x_n}{1},0,0,\dots),\ 1\le p<+\infty;$

5) $A_nx=(\underbrace{0,\dots,0}_{n-1},\sqrt{n}\,x_{2n},0,0,\dots),\ 1\le p\le+\infty;$

6) $A_nx=\Big(\sum\limits_{m=1}^{n}x_m,0,0,\dots\Big),\ 1\le p\le+\infty;$

7) $A_nx=(\sqrt[n]{n}x_1,\ \sqrt[n]{n}x_2,\dots,\ \sqrt[n]{n}x_n,0,0,\dots),\ 1\le p<+\infty;$

8) $A_nx=(\frac{x_n}{2n},\frac{x_{n+1}}{2n+1},\dots,\frac{x_{2n}}{3n},0,0,\dots),\ 1\le p\le+\infty;$

9) $X=l_2,\ A_nx=(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-1},x_1,x_3,x_5,0,0,\dots);$

10) $A_nx=(\frac{1+n}{1+n}x_1,\frac{1+n}{1+2n}x_2,\frac{1+n}{1+3n}x_3,\dots,\frac{1+n}{1+kn}x_k,0,0,\dots),$
$1\le p\le+\infty$, де $k\in\mathbb{N}$ — фіксоване.

3. Дослідити послідовність операторів $A_n : C([0,1])\to C([0,1])$ на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо

1) $(A_nx)(t)=e^{-nt}x(t);$

2) $(A_nx)(t)=\int\limits_0^1(t^n+s^n)x(s)ds;$

3) $(A_nx)(t)=\sin\frac{t}{n}\cdot x(t);$

4) $(A_nx)(t)=\int\limits_0^1\frac{(t+s)^n}{3}x(s)ds;$

5) $(A_nx)(t)=\int\limits_0^1\frac{(t+s)^n}{3^n}x(s)ds;$

6) $(A_nx)(t)=x\left(t^{1+\frac{1}{n}}\right);$

7) $(A_nx)(t)=(t^{10n}-t^{2n})x(t);$

8) $(A_nx)(t)=t\int\limits_0^1x\left(\sin^n\frac{\pi}{2}s\right)ds;$

9) $(A_nx)(t)=\int\limits_0^{t^n}x(s)ds;$

10) $(A_nx)(t)=\int\limits_0^t\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^ks^k}{k!}\right)x(s)ds.$

4. Дослідити послідовність операторів $A_n : L_p([0,1])\to L_p([0,1])$ на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо

1) $(A_nx)(t)=t^n\int\limits_0^1s^nx(s)ds,\ 1\le p<+\infty;$

2) $(A_nx)(t)=\cos^2nt\cdot x(t),\ 1<p<+\infty;$

3) $(A_nx)(t)=\cos ne^t\cdot x(t),\ 1<p<+\infty;$

4) $(A_nx)(t)=\sqrt[n]{t}\,x(t),\ 1\le p<+\infty;$

5) $(A_nx)(t)=\int\limits_0^1t^2(s^n-s^{2n})x(s)ds,\ 1\le p<+\infty.$

5. Дослідити послідовність операторів $A_n : L_p(\mathbb{R})\to L_p(\mathbb{R})$ на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо

1) $(A_nx)(t)=x(t+n),\ 1<p<+\infty;$

2) $(A_n x)(t) = x(t)\chi_{[n,+\infty)}(t),\ 1 \le p < +\infty;$
3) $(A_n x)(t) = \frac{1}{1+|t-n|}\, x(t),\ 1 \le p < +\infty;$
4) $(A_n x)(t) = x(t)\chi_{[\ln n, 2\ln n]}(t),\ 1 \le p < +\infty;$
5) $(A_n x)(t) = \operatorname{arctg} nt \cdot x(t),\ 1 \le p < +\infty;$
6) $(A_n x)(t) = \sin^2 nt \cdot x(t),\ 1 < p < +\infty;$
7) $(A_n x)(t) = \cos^3 \frac{t}{n} \cdot x(t+3),\ 1 \le p < +\infty;$
8) $(A_n x)(t) = \sqrt[3]{n}\, x(nt),\ 1 \le p < +\infty;$
9) $(A_n x)(t) = e^{-|t-n|} x(t+n),\ 1 \le p < +\infty;$
10) $(A_n x)(t) = \frac{n}{|t|+1} \sin \frac{t}{n}\, x(t-1),\ 1 \le p < +\infty.$

6. В $L_p(\mathbb{R}),\ 1 \le p < +\infty$, визначимо оператор зсуву

$$(A_s x)(t) = x(t+s),\ t \in \mathbb{R},\ x \in L_p(\mathbb{R}),\ s \in \mathbb{R}.$$

Нехай $s_n \to s$, $n \to \infty$, та $s_n \neq s$, $n \ge 1$. Довести, що $A_{s_n} \xrightarrow{s} A_s$, але $A_{s_n} \not\rightrightarrows A_s$.

7. Нехай X — банахів простір, $\{x,\, x_n : n \ge 1\} \subset X$, $\{A,\, A_n : n \ge 1\} \subset$ $\subset \mathcal{L}(X)$. Довести, що

1) $A_n \xrightarrow{s} A,\ x_n \to x\ \Rightarrow\ A_n x_n \to Ax;$
2) $A_n \xrightarrow{w} A,\ x_n \to x\ \Rightarrow\ A_n x_n \xrightarrow{w} Ax;$
3) $A_n \rightrightarrows A,\ x_n \xrightarrow{w} x\ \Rightarrow\ A_n x_n \xrightarrow{w} Ax;$
4) $A_n \xrightarrow{s} A,\ x_n \xrightarrow{w} x\ \not\Rightarrow\ A_n x_n \xrightarrow{w} Ax.$

8. Нехай X — банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X)$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ збігається в $\mathcal{L}(X)$ тоді й лише тоді, коли для деякого $k \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\|A^k\| < 1$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА 2

Завдання індивідуальні. Зразок варіанта

1. Довести, що оператор A є лінійним неперервним у просторі X, та знайти його норму.

1) $X = L_{\frac{4}{3}}([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 t^6 \sqrt{s}\, x(s)\,ds;$
2) $X = C([-1,3]),\ (Ax)(t) = t \int\limits_{-1}^{1} x(s)\,ds + 2x(0) - x(2)t^4;$

3) $X = L_2([-1,1])$, $(Ax)(t) = \int\limits_{-1}^{1} (t + 2s^3)x(s)ds.$

2. Дослідити послідовність операторів на рівномірну, сильну та слабку збіжність у ЛНП X.

1) $X = L_3(\mathbb{R})$, $(A_n x)(t) = \frac{x(t+n)}{1+t^2}$;
2) $X = l_5$, $A_n x = (x_{2n}, x_{2n-1}, \ldots, x_2, x_1, 0, 0, \ldots)$.

Заняття 7
ОБЕРНЕНІ ОПЕРАТОРИ

Контрольні запитання

1. Означення оберненого оператора.
2. Умови існування оберненого оператора.
3. Теорема Банаха про обернений оператор.

А7

1. Довести, що для лінійного оператора $A : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ наведені твердження рівносильні:

1) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$;
2) оператор A має алгебраїчний обернений;
3) оператор A має неперервний обернений;
4) матриця, якою задається оператор A, є невиродженою;
5) рівняння $Ax = y$ має розв'язок для кожного $y \in \mathbb{C}^m$.

2. Нехай $X = l_p$, $1 \le p \le +\infty$, оператор $A \in \mathcal{L}(l_p)$ визначено рівністю $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$, $x \in l_p$, де $\{\alpha_n : n \ge 1\} \subset \mathbb{K}$ — фіксована послідовність, $\sup\limits_{n\ge1} |\alpha_n| < +\infty$. Довести, що

1) $\operatorname{Ker} A = \{0\} \;\Leftrightarrow\; \alpha_n \ne 0$ при всіх $n \ge 1$;
2) A — неперервно оборотний $\Leftrightarrow\; \inf\limits_{n\ge1} |\alpha_n| > 0$.

3. Нехай $A \in \mathcal{L}(l_2)$ задається формулою $Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots)$, $x \in l_2$. Довести, що область значень $R(A)$ не замкнена в l_2.

4. Нехай $X = L_2([a,b]), p \in L_\infty([a,b]), (Ax)(t) = p(t)x(t)$. Довести, що

1) $\operatorname{Ker} A = \{0\} \;\Leftrightarrow\; |p(t)| > 0 \,(\operatorname{mod} m)$;
2) A — неперервно оборотний $\Leftrightarrow\; p^{-1} \in L_\infty([a,b])$.

5. Нехай $A : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, $(Ax)(t) = tx(t^3+1)$. Довести, що оператор A обмежений та неперервно оборотний. Знайти A^{-1}.

6. Нехай $A : l_2 \to l_2$, $Ax = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, 3x_3, x_4, x_5, \ldots)$. З'ясувати, чи є оператор A неперервно оборотним. Якщо так, знайти A^{-1}.

7. Нехай X — ЛНП. Довести, що оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ має неперервний обернений тоді й лише тоді, коли A^2 має неперервний обернений.

8. Нехай $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 (ts + t^2s^2)x(s)ds$. Довести, що $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$, зокрема, оператор A^{-1} не існує.

9. Позначимо X_0 та X_1 простір $\{x \in C^1([0,1]) \mid x(0) = 0\}$ з нормами $\|x\|_0 = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$ та $\|x\|_1 = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$ відповідно. Нехай $A_i : C([0,1]) \to X_i$, $(A_ix)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$, $i = 0,1$. Знайти A_i^{-1}. Довести, що A_1^{-1} неперервний, а A_0^{-1} не є неперервним.

Д1. Нехай X — ЛНП, $A, B \in \mathcal{L}(X)$.

1) Нехай оператори AB та BA мають алгебраїчні обернені. Чи обов'язково оператори A та B мають алгебраїчні обернені?

2) Нехай оператори AB та BA неперервно оборотні. Чи обов'язково оператори A та B неперервно оборотні?

Д2. Нехай X — ЛНП, $A, B \in \mathcal{L}(X)$ та оператор $I - AB$ неперервно оборотний. Довести, що оператор $I - BA$ неперервно оборотний.

Д3. Нехай X — банахів простір відносно норм $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$. Припустимо, що $\|\cdot\|_2$ *підпорядкована* $\|\cdot\|_1$, тобто існує таке $c > 0$, що $\|x\|_2 \le c\|x\|_1$, $x \in X$. Довести, що норми $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$ еквівалентні. Чи істотна повнота простору відносно обох норм?

Д4. За якої умови на функцію $\alpha \in C([a,b])$

1) $\|x\|_\alpha = \max\limits_{a\le t\le b} \alpha(t)|x(t)|$ є нормою в $C([a,b])$?

2) простір $C([a,b])$ з нормою $\|x\|_\alpha$ є повним?

Д5. Навести приклад ЛНП X і оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ таких, що $A : X \to X$ є бієкцією, але оператор A не є неперервно оборотним.

В7

1. Чи є оператор $A : l_2 \to l_2$ неперервно оборотним, якщо

1) $Ax = (x_1, x_3, x_2, x_4, x_5, \ldots)$;
2) $Ax = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_3, x_4, \ldots)$;
3) $Ax = (x_1 + x_2, x_3, 2x_1 + 2x_2, x_4, \ldots)$;
4) $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$;
5) $Ax = (x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots)$;

6) $Ax = (x_1 - x_2, x_2, x_3, \ldots)$;
7) $Ax = (x_1, x_1, x_2, x_3, \ldots)$;
8) $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_4, x_5, \ldots)$?

Знайти оператор A^{-1}, якщо він існує.

2. Довести, що оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, визначений формулою $(Ax)(t) = \alpha(t)x(t)$, $\alpha \in C([0,1])$, є неперервно оборотним тоді й лише тоді, коли $\alpha(t) \neq 0,\ t \in [0,1]$.

3. Нехай $X = L_p([0,1])$, $1 \leq p \leq +\infty$, $(Ax)(t) = tx(t^2)$, $t \in [0,1]$, $x \in X$. Довести, що $A \in \mathcal{L}(X)$. При яких p оператор A неперервно оборотний? Знайти A^{-1} при цих значеннях p.

4. Нехай $X = \{x \in C^1([0,1]) \mid x(0) = 0\}$ з нормою $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$. Довести, що оператор $A : X \to C([0,1])$ є неперервно оборотним, і знайти A^{-1}, якщо

1) $(Ax)(t) = 2x'(t) - 3x(t)$;
2) $(Ax)(t) = x'(t) - tx(t)$;
3) $(Ax)(t) = x'(t) + e^t x(t)$;
4) $(Ax)(t) = x'(t) + 2t^2 x(t)$;
5) $(Ax)(t) = e^t x'(t) - 2tx(t)$;
6) $(Ax)(t) = (t+1)x'(t) + tx(t)$;
7) $(Ax)(t) = x'(t) + \alpha(t)x(t),\ \alpha \in C([0,1])$.

5. Нехай X — ЛНП, $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Довести, що

1) якщо A та B неперервно оборотні, то оператор AB неперервно оборотний та $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

2) якщо A та BA неперервно оборотні, то оператор B неперервно оборотний;

3) з $(AB)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ не випливає, що існує $(BA)^{-1}$.

6. 1) Нехай X — банахів простір, $A, B \in \mathcal{L}(X)$, A має неперервний обернений A^{-1}, $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Довести, що $A + B$ неперервно оборотний, і знайти $(A+B)^{-1}$.

2) Довести, що множина неперервно оборотних операторів відкрита в $\mathcal{L}(X)$.

7. Нехай X — ЛНП. Довести, що якщо для оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ існує послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ така, що $\|x_n\| = 1$ та $Ax_n \to 0$, $n \to \infty$, то A не є неперервно оборотним.

8. У просторі $C([0,1])$ оператори A та B визначаються формулами $(Ax)(t) = (t+1)x(t)$, $(Bx)(t) = x(t^2)$, $t \in [0,1]$. Знайти $(AB)^{-1}$ та $(BA)^{-1}$.

9. Нехай $A, B : C([-1,1]) \to C([-1,1])$, де $(Ax)(t) = x(t^2)$, $(Bx)(t) = x(t^3)$, $t \in [-1,1]$. Довести, що $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$, а B є неперервно оборотним. Знайти B^{-1}.

Заняття 8
ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ. ПОНЯТТЯ СПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА

Контрольні запитання

1. Означення спряженого оператора в гільбертовому просторі.

2. Означення самоспряженого, унітарного, ізометричного, невід'ємного, нормального оператора, ортопроектора.

3. Означення білінійної та квадратичної форм.

4. Зв'язок між нормою оператора та нормою породженої ним білінійної форми.

A8

1. Знайти спряжений до оператора $A : H \to H$, якщо

1) $H = l_2,\ Ax = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$;

2) $H = l_2,\ Ax = (2x_1 + 3ix_2, -3ix_1 + 5x_2, x_3, 0, 0, \ldots)$;

3) $H = L_2(\mathbb{R}),\ (Ax)(t) = e^{it}x(t+1)$;

4) $H = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 (is + 2t)x(s)ds$;

5) $H = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = t^3 \int\limits_{t^2}^{t} x(s)ds$;

6) $Ax = (x, y)z$, де $y, z \in H$ — фіксовані елементи.

2. Нехай $(A_n x)(t) = n^2 x(n^4 t)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in L_2(\mathbb{R})$, $n \geq 1$.

1) Знайти A_n^*. Довести, що оператори A_n є унітарними.

2) Дослідити послідовність операторів A_n на рівномірну, сильну та слабку збіжність.

3. Нехай $(T, \mathcal{F}, \mu)$ — простір із σ-скінченною мірою, A — оператор множення на функцію $p \in L_\infty(T, \mu)$ у просторі $L_2(T, \mu)$. Довести, що

1) $A = A^* \ \Leftrightarrow$ функція p дійсна майже скрізь;

2) A — унітарний $\Leftrightarrow\ |p| = 1$ майже скрізь;

3) $A \geq 0 \ \Leftrightarrow\ p \geq 0$ майже скрізь;

4) A — ортопроектор $\Leftrightarrow\ p^2 = p$ майже скрізь, тобто $p = \chi_C \pmod{\mu}$, де $C \in \mathcal{F}$ — деяка множина.

4. Нехай H — гільбертів простір та $\{A,\ A_n \ :\ n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(H)$. Довести, що

1) $A_n \rightrightarrows A \ \Leftrightarrow\ A_n^* \rightrightarrows A^*$;

2) $A_n \xrightarrow{w} A \ \Leftrightarrow\ A_n^* \xrightarrow{w} A^*$;

3) $A_n \xrightarrow{s} A \;\not\Leftrightarrow\; A_n^* \xrightarrow{s} A^*$.

5. Нехай H — сепарабельний гільбертів простір і $\{e_n : n \geq 1\}$ — ортонормований базис в H. Довести, що оператор $Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} e_n$, $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H$, де $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — фіксована бієкція, є унітарним.

6. Нехай H — гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що $(R(A))^{\perp} = \operatorname{Ker} A^*$, $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \overline{R(A^*)}$ (риска означає замикання).

Д1. Нехай H — гільбертів простір над полем $\mathbb{K}$, $A \in \mathcal{L}(H)$, $A \geq 0$. Довести, що

1) $|(Ax, y)|^2 \leq (Ax, x)(Ay, y)$, $x, y \in H$;
2) $\|Ax\|^2 \leq \|A\|(Ax, x)$, $x \in H$.

Д2. Нехай $A \in \mathcal{L}(H)$. Чи є підпростором у гільбертовому просторі H множина $G = \{x \in H \mid (Ax, x) = 0\}$, якщо 1) $A^* = A$; 2) $A \geq 0$?

Д3. Нехай H — гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що

1) $\|A\| = \sup\limits_{x,y \in S(0,1)} |(Ax, y)|$;
2) якщо $A^* = A$, то $\|A\| = \sup\limits_{x \in S(0,1)} |(Ax, x)|$;
3) якщо $A^* = A$, то $A = 0$ тоді й лише тоді, коли $(Ax, x) = 0$ при всіх $x \in H$.

Д4. Нехай H — гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$ — самоспряжений оператор. Довести, що

1) A^n — самоспряжений оператор при всіх $n \geq 1$;
2) $\|A^n\| = \|A\|^n$, $n \geq 1$;
3) якщо $A \geq 0$, то $A^n \geq 0$ при всіх $n \geq 1$.

Д5. Нехай H — гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що $AA^* = A^*A$ тоді й лише тоді, коли $\|Ax\| = \|A^*x\|$ при всіх $x \in H$.

В8

1. Знайти спряжений до оператора $A : l_2 \to l_2$, якщо

1) $Ax = (x_3, x_6, \ldots, x_{3n}, \ldots)$;
2) $Ax = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$;
3) $Ax = (x_1, \ldots, x_j, 0, 0, \ldots)$;
4) $Ax = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, x_1, 0, 0, \ldots)$;
5) $Ax = (\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{j}, 0, 0, \ldots)$;
6) $Ax = (x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, \ldots)$;
7) $Ax = (\alpha_j x_j, \alpha_{j+1} x_{j+1}, \ldots)$;
8) $Ax = (0, 0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$;

9) $Ax = (x_1, 4x_2 + (7+i)x_3, (7-i)x_2 + 2x_3, 0, x_5, 0, 0, \ldots)$;
10) $Ax = (3x_1 - 2x_2, x_2, x_3, x_4, \ldots)$,

де $j \in \mathbb{N}$ фіксоване, $\{\alpha_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{C}$ — фіксована обмежена послідовність.

2. Знайти спряжений до оператора $A : H \to H$, якщо

1) $H = L_2(\mathbb{R}),\ (Ax)(t) = \chi_{[-\alpha,\alpha]}(t)x(t)$, де $\alpha > 0$;
2) $H = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = \sin t \cdot x(t)$;
3) $H = L_2(\mathbb{R}),\ (Ax)(t) = a(t)x(t+\tau)$, де $a \in L_\infty(\mathbb{R})$ — задана функція, $\tau \in \mathbb{R}$;
4) $H = L_2(\mathbb{R}),\ (Ax)(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$;
5) $H = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{i(t-s)}x(s)ds$;
6) $H = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = t^3 \int\limits_0^t x(s)ds$;
7) $H = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 (t^2 + is^3)x(s)ds$;
8) $H = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_{t^5}^t tsx(s)ds$;
9) $H = L_2([-1,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_{t^2}^1 (t - 3s^2)x(s)ds$;
10) $H = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = x(t^\alpha)$, де $0 < \alpha \leq 1$.

3. Нехай $s \in \mathbb{R}$, $(A_s x)(t) = x(t+s)$, $t \in \mathbb{R}, x \in L_2(\mathbb{R})$ — оператор зсуву.

1) Знайти A_s^* та A_s^{-1} і довести, що оператор A_s унітарний.

2) Покладемо $A = \frac{1}{2}(A_{s_1} + A_{s_2}),\ s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Довести, що $A^* = A$ тоді й лише тоді, коли $s_1 + s_2 = 0$.

4. Знайти спряжений до оператора $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що A унітарний.

1) $H = L_2(\mathbb{R}),\ (Ax)(t) = \sqrt{7}t^3 x(t^7 + 2)$;
2) $H = L_2([0,\infty)),\ (Ax)(t) = 2t\sqrt{t}x(t^4)$;
3) $H = L_2([0,\infty)),\ (Ax)(t) = \sqrt{10}e^{5t}x(e^{10t} - 1)$.

5. Нехай $\{\alpha_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{C}$ — фіксована обмежена послідовність, $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$. Виразити в термінах чисел $\alpha_n,\ n \geq 1$, такі твердження:

1) A — самоспряжений;
2) A — нормальний;
3) A — унітарний;
4) A — ізометричний;
5) A — ортопроектор;
6) A — невід'ємний.

6. Нехай H — гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що
1) A — ізометричний $\Leftrightarrow$ $\|Ax\| = \|x\|,\ x \in H$;
2) якщо H — скінченновимірний, то A унітарний тоді й лише тоді, коли A ізометричний;
3) A — ізометричний $\Leftrightarrow$ $A^*A = I$;
4) A — унітарний $\Leftrightarrow$ $A^*A = I$ та $AA^* = I$;
5) A може бути ізометричним, але не унітарним.

7. Нехай H — гільбертів простір та $\{A,\ A_n\ :\ n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(H)$. Довести, що

1) якщо $A_n = A_n^*,\ n \geq 1,\ A_n \xrightarrow{w} A,\ n \to \infty$, то $A = A^*$;

2) якщо $A_n \geq 0,\ n \geq 1,\ A_n \xrightarrow{w} A,\ n \to \infty$, то $A \geq 0$;

3) якщо $A_n \xrightarrow{w} A$ та $\|A_n x\| \to \|Ax\|$ при всіх $x \in H$, то $A_n \xrightarrow{s} A$; зокрема, якщо $A, A_n,\ n \geq 1$ — ізометричні, то $A_n \xrightarrow{w} A \ \Leftrightarrow A_n \xrightarrow{s} A$.

8. Нехай H — гільбертів простір над полем $\mathbb{C}$, $b : H \times H \to \mathbb{C}$ — білінійна форма, $b[x] = b(x,x),\ x \in H,$ — відповідна квадратична форма. Довести, що

$$4b(x,y) = b[x+y] - b[x-y] + ib[x+iy] - ib[x-iy],\ x,y \in H$$

(*поляризаційна тотожність*).

9. 1) Нехай H — комплексний гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що $A = 0$ тоді й лише тоді, коли $(Ax,x) = 0$ при всіх $x \in H$.

2) Навести приклад дійсного гільбертового простору H та ненульового оператора $A \in \mathcal{L}(H)$ таких, що $(Ax,x) = 0$ при всіх $x \in H$.

Заняття 9
КОМПАКТНІ МНОЖИНИ ТА ОПЕРАТОРИ

Контрольні запитання

1. Означення компактної та передкомпактної множин.
2. Теорема Асколі–Арцела про компактність множин в $C([a,b])$.
3. Означення компактного оператора.
4. Властивості компактних операторів.

А9

1. З'ясувати, чи є множини передкомпактними (компактними) у відповідних просторах:

1) $M = \{e_n : n \geq 1\}$ в l_p, $1 \leq p < +\infty$;
2) $M = \{x_n(t) = t^n,\ t \in [0,1] : n \geq 1\}$
в $C([0,1])$, в $L_p([0,1]), 1 \leq p < +\infty$;
3) $M = \Big\{x \in C^1([0,1]) \ \Big|\ |x(t)| \leq 1,\ |x'(t)| \leq 1,\ t \in [0,1]\Big\}$
в $C([0,1])$.

2. Нехай $\{a_n : n \geq 1\}$ — обмежена послідовність комплексних чисел. Розглянемо оператор $A : l_p \to l_p$, $1 \leq p \leq +\infty$, визначений рівністю $Ax = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots)$. Довести, що A компактний тоді й лише тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
3. Нехай X_1, X_2 — ЛНП, $A : X_1 \to X_2$ — лінійний оператор. Чи правильно, що $A \in S_\infty(X_1, X_2)$, якщо 1) $\dim X_1 < +\infty$; 2) $\dim X_2 < +\infty$?
4. Чи є компактним оператор $A : l_2 \to l_2$, визначений рівністю
1) $Ax = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots)$;
2) $Ax = (\frac{2}{3}x_2, \frac{4}{5}x_4, \ldots, \frac{2n}{2n+1}x_{2n}, \ldots)$?

5. Нехай $1 \leq p \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\{u_k \,|\, 1 \leq k \leq n\} \subset L_p([a,b])$, $\{v_k \,|\, 1 \leq k \leq n\} \subset L_q([a,b])$ — скінченні набори функцій та

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t)v_k(s),\ (t,s) \in [a,b]^2.$$

Довести, що оператор $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$ компактний в $L_p([a,b])$.
6. Чи є компактним оператор $A : X \to X$, якщо
1) $X = L_3([0,1])$, $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 \Big(\sqrt{\frac{1-t}{s}} + \sqrt[4]{\frac{1-s}{t}}\Big)x(s)ds$;
2) $X = C([0,1])$, $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 \sin(t - ts)x(s)ds$;
3) $X = L_2([0,2\pi])$, $(Ax)(t) = 2x(t) + \int\limits_0^{2\pi} \cos(t+3s)x(s)ds$?

7. 1) За якої умови на функцію $a \in C([0,1])$ оператор $(Ax)(t) = a(t)x(t)$ є компактним у просторі $C([0,1])$?
2) За якої умови на функцію $a \in L_\infty([0,1])$ оператор $(Ax)(t) = a(t)x(t)$ є компактним у просторі $L_2([0,1])$?
8. Нехай H — гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що оператори A, A^*, AA^* та A^*A одночасно компактні або некомпактні.

Д1. **(Мазур)** Нехай X — банахів простір, $\{A_n : n \geq 1\} \subset S_\infty(X)$, причому $A_n \xrightarrow{s} I,\ n \to \infty$. Довести, що множина $M \subset X$ передкомпактна тоді й лише тоді, коли виконуються такі умови: а) M — обмежена множина; б) $A_n x \to x$, $n \to \infty$, рівномірно за $x \in M$.

Д2. Довести, що обмежена множина M є передкомпактною у просторі l_p, $1 \leq p < +\infty$, тоді й лише тоді, коли $\sup\limits_{x \in M} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \to 0,\ n \to \infty$.

Д3. Нехай $A \in \mathcal{L}(l_p), 1 \leq p < +\infty$. Довести, що оператор A компактний тоді й лише тоді, коли існує послідовність скінченновимірних лінійних операторів, яка рівномірно збігається до A.

Д4. Довести компактність оператора $A : C([a,b]) \to C([a,b])$, заданого формулою $(Ax)(t) = \int\limits_a^b \frac{K_0(t,s)}{|t-s|^\alpha} x(s)ds,\ t \in [a,b]$, де $K_0 \in C([a,b]^2)$ та $\alpha < 1$.

Д5. 1) Нехай оператор $A : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$ задано формулою $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds,\ t \in [a,b]$, де $K : [a,b]^2 \to \mathbb{C}$ — вимірна за Лебегом функція, причому

$$c_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [a,b]} \int\limits_a^b |K(t,s)|ds < \infty,\ c_2 = \operatorname*{ess\,sup}_{s \in [a,b]} \int\limits_a^b |K(t,s)|dt < \infty.$$

Довести, що $A \in \mathcal{L}(L_2([a,b]))$ та $\|A\| \leq (c_1 c_2)^{\frac{1}{2}}$.

2) Довести компактність оператора $A : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$, заданого формулою $(Ax)(t) = \int\limits_a^b \frac{K_0(t,s)}{|t-s|^\alpha} x(s)ds,\ t \in [a,b]$, де $K_0 \in L_\infty([a,b]^2)$ та $\alpha < 1$.

В9

1. Довести, що множини передкомпактні в $C([a,b])$ (тут k_1, k_2 — фіксовані невід'ємні сталі):

1) $\left\{ \int\limits_a^t x(s)ds,\ t \in [a,b] \;\middle|\; x \in M \right\}$,

де M — обмежена в $C([a,b])$ множина;

2) $\{x \in C([a,b]) \mid |x(a)| \leq k_1,$
$|x(t_1) - x(t_2)| \leq k_2 |t_1 - t_2|,\ t_1, t_2 \in [a,b]\}$;

3) $\{x \in C^1([a,b]) \mid |x(t_0)| \leq k_1,\ |x'(t)| \leq k_2,\ t \in [a,b]\}$,

де $t_0 \in [a,b]$ фіксоване;

4) $\left\{ \int\limits_a^t K(t,s)x(s)du,\ t \in [a,b] \;\middle|\; x \in B(0,1) \right\}$, де $K \in C([a,b]^2)$;

5) $\left\{ x \in C^1([a,b]) \;\middle|\; |x(a)| \le k_1, \int\limits_a^b |x'(t)|^2 dt \le k_2 \right\}$;

6) $\{x \in C^2([a,b]) \mid |x(t)| \le k_1, |x''(t)| \le k_2,\ t \in [a,b]\}$;

7) одностайно неперервна множина неперервних функцій, значення яких обмежені однією сталою в деякій точці $t_0 \in [a,b]$;

8) обмежена множина многочленів степеня n.

Які з цих множин є компактними в $C([a,b])$?

2. Чи є компактним оператор $A : l_2 \to l_2$, якщо

1) $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$;
2) $Ax = (x_2, x_3, \ldots, x_{100}, 0, 0, \ldots)$;
3) $Ax = (x_4, x_8, x_{12}, \ldots, x_{4n}, \ldots)$;
4) $Ax = (0, 0, 4x_1, \frac{9}{4}x_2, \ldots, \frac{(n+1)^2}{n^2}x_n, \ldots)$;
5) $Ax = (x_1, x_2, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \ldots)$;
6) $Ax = (x_3, \frac{x_4}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n-2}, \ldots)$?

3. Чи є компактним оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, якщо

1) $(Ax)(t) = x(0) + t^2 x(1)$;
2) $(Ax)(t) = \int\limits_0^t s^3 x(s)ds$;
3) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{its} x(s)ds$;
4) $(Ax)(t) = tx(t) + \int\limits_0^1 x(s)ds$;
5) $(Ax)(t) = x(t^3)$;
6) $(Ax)(t) = 3x(t) + \int\limits_0^1 e^{ts} x(s)ds$;
7) $(Ax)(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(1-t))$;
8) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 x(s^2)ds$?

4. Чи є компактним оператор $A : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$, якщо

1) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 tsx(s)ds$;
2) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 (ts^2 + s)x(s)ds$;
3) $(Ax)(t) = x(t) + \int\limits_0^t x(s)ds$;
4) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 \left(\frac{s}{\sqrt[3]{t}} + \frac{t}{\sqrt[3]{s}} \right) x(s)ds$;
5) $(Ax)(t) = t^2 x(t) + \int\limits_0^1 e^{s+t} x(s)ds$;
6) $(Ax)(t) = \int\limits_0^t (t + s^2)x(s)ds$;
7) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 \operatorname{arctg}(s^2 + t^3)x(s)ds$?

5. Чи є компактним оператор вкладення ЛНП X_1 в ЛНП X_2, якщо

1) $X_1 = l_1$, $X_2 = l_2$;
2) $X_1 = C([0,1])$, $X_2 = L_2([0,1])$;
3) $X_1 = L_2([0,1])$, $X_2 = L_1([0,1])$?

6. Довести, що оператор ортогонального проектування в гільбертовому просторі є компактним тоді й лише тоді, коли він скінченновимірний.

7. Чи є компактним оператор $A : X_1 \to X_2$, $(Ax)(t) = x'(t)$, $t \in [0,1]$, якщо

1) $X_1 = C^1([0,1])$, $X_2 = C([0,1])$;
2) $X_1 = C^2([0,1])$, $X_2 = C^1([0,1])$;
3) $X_1 = C^2([0,1])$, $X_2 = C([0,1])$?

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

А1

1. 1), 2) Ні. 3) Так.

2. 1) 1; 2) $\|x\|_2 = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$, $\|x\|_\infty = 1$; 3) $\sqrt[4]{125}$; 4) $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$; 5) 0; 6) 1.

3. Тут і далі позначаємо x_0 границю збіжної послідовності в $C([0,1])$, $L_p(\mathbb{R})$ та $x^{(0)}$ — в l_p.

1) Ні; 2) так, $x_0(t) = 0$; 3) ні; 4) так, $x_0(t) = 1$.

4. 1) Ні; 2) так, $x^{(0)} = 0$; 3) так лише при $1 < p \le +\infty$, $x^{(0)} = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$; 4) ні.

5. 1) Так, $x_0(t) = 0$; 2) так лише при $2 < p < +\infty$, $x_0(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \chi_{[1,\infty)}(t)$.

Д1. Необхідно і достатньо, щоб $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in l_\infty$ та $\alpha_k > 0$, $k \ge 1$. Якщо $\alpha \notin l_\infty$, то існує послідовність $\{k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots\} \subset \mathbb{N}$ така, що $\alpha_{k_n} \ge n$ при всіх $n \ge 1$. Розглянути $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_{k_n}$.

Д3. Спочатку довести твердження для деякої тотальної в $L_1([a,b])$ множини, наприклад, для неперервних функцій.

Д4. *Необхідність.* Показати, що зі збіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ випливає фундаментальність, а отже і збіжність, послідовності часткових сум ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$. *Достатність.* Нехай $\{y_n : n \ge 1\} \subset X$ — фундаментальна послідовність. Для кожного $k \ge 1$ існує N_k таке, що $\|y_n - y_m\| < \frac{1}{2^k}$ при всіх $n, m \ge N_k$. Покладемо $n_1 = N_1$ та $n_k = \max\{n_{k-1}+1, N_k\}$, $k \ge 2$. Тоді $\|y_{n_1}\| + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \|y_{n_k} - y_{n_{k-1}}\| < \|y_{n_1}\| + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} < +\infty$. Тому ряд $y_{n_1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} (y_{n_k} - y_{n_{k-1}})$ збігається до деякого $y \in X$, тобто $y_{n_k} \to y$, $k \to \infty$. Тепер із фундаментальності випливає, що $y_n \to y$, $n \to \infty$.

В1

1. 1) Ні; 2), 3) Так.

2. 1) 1; 2) $\sqrt{2}$; 3) 1; 4) $\frac{e^3-4}{3}$; 5) $\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2}$; 6) $\|x\| = \left(\frac{2^{2p+1}}{2p+1}\right)^{1/p}$, $1 \le p < +\infty$, $\|x\|_\infty = 4$.

3. Тут і далі позначаємо x_0 границю збіжної послідовності в $C([0,1])$, $C^1([0,1])$, $L_p([0,1])$, $L_p(\mathbb{R})$ та $x^{(0)}$ — в l_p.

1) Так, $x_0(t) = \sin t$; 2) так, $x_0(t) = t$; 3) ні; 4) так, $x_0(t) = t$; 5) так, $x_0(t) = t$; 6) ні; 7) так, $x_0(t) = \varphi(t)$.

4. 1) Так, $x_0(t) = 0$; 2) так, $x_0(t) = t$.

5. 1) Так, $x^{(0)} = (1,0,0,\ldots)$; 2) так, $x^{(0)} = 0$; 3) так лише при $1 < p \le +\infty$, $x^{(0)} = 0$; 4) так лише при $3 < p \le +\infty$, $x^{(0)} = 0$; 5) так лише при $2 < p \le +\infty$, $x^{(0)} = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots)$; 6) так лише при $p = +\infty$, $x^{(0)} = 0$; 7)–9) ні.
6. 1) Так лише при $1 \le p < 3$, $x_0(t) = 0$; 2) так, $x_0(t) = 0$; 3) так лише при $1 \le p < 2$, $x_0(t) = 0$; 4) ні; 5) так, $x_0(t) = 1$; 6) так лише при $1 \le p < 2$, $x_0(t) = 0$.
7. 1) Ні; 2) так лише при $1 \le p < 2$, $x_0(t) = 0$; 3) так лише при $p > 7$, $x_0(t) = 0$.
8. Використати нерівність Гельдера.
9. 2) Розглянути функції $x(t) = t^{-\alpha}\chi_{(0,1]}(t)$ та $y(t) = t^{-\beta}\chi_{[1,+\infty)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Підібрати $\alpha \ge 0$ та $\beta \ge 0$ так, що $x \in L_{p_1}(\mathbb{R}) \setminus L_{p_2}(\mathbb{R})$ та $y \in L_{p_2}(\mathbb{R}) \setminus L_{p_1}(\mathbb{R})$.
12. 1),2),5),8) — ні. 3),4),6),7),9) — так.

А2

2. Використати рівність паралелограма.
4. Множина всіх непарних функцій.
6. 1)–3) {0}.
7. 1) Множина всіх парних функцій; 2) $\text{з.л.о.}(\{e^{ikt} \mid k \le 4\})$; 3) множина всіх непарних функцій.
8. 1) $\{x \in l_2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$, 2) $\text{з.л.о.}(\{e_k \mid k > n\})$;
3) $\text{з.л.о.}(\{e_{2k-1} \mid k \in \mathbb{N}\})$.
Д1. Для доведення несепарабельності розглянути $\left\{\chi_{\{c\}} \mid c \in \mathbb{R}\right\}$.
Д2. 2), 3) Скористатися інтегруванням частинами.
Д3. 1) Показати, що функція $\chi_{[0,\frac{1}{4})} - \chi_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4})} + \chi_{[\frac{3}{4},1]}$ ортогональна до всіх x_n. 2) Використати, що

$$\text{л.о.}(\{P_0(t), P_1(t), \ldots, P_n(t)\}) = \text{л.о.}(\{1, t, \ldots, t^n\}),\ n \ge 0,$$

та множина многочленів скрізь щільна в $L_2([-1,1])$.

Д4. Ні. Розглянути $M = \{x \in l_2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$ та $N = \text{л.о.}(\{e_1\})$.
Д5. 1) $M + N = \left\{(x_1, x_2, x_3, \frac{x_4}{3}, x_5, \frac{x_6}{5}, x_7, \frac{x_8}{7}, \ldots) \mid x \in l_2\right\}$. Множина $M + N$ скрізь щільна в l_2, бо $\text{л.о.}(\{e_n : n \ge 1\}) \subset (M + N)$. Але $M + N \ne l_2$, бо $(1, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \ldots) \in l_2 \setminus (M + N)$. 2) Лінійність множини $M + N$ очевидна, доведемо її замкненість. Розглянемо збіжну послідовність $\{x_n + y_n : n \ge 1\}$, де $x_n \in M$, $y_n \in N$, $n \ge 1$. Оскільки $M \perp N$, то $\|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\|^2 = \|(x_n - x_m) + (y_n - y_m)\|^2 = \|x_n - x_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2$, $n, m \ge 1$. Тому послідовності $\{x_n : n \ge 1\}$ і $\{y_n : n \ge 1\}$ фундаментальні, а отже збіжні. Множини M та N замкнені, тому існують $x \in M$, $y \in N$ такі, що $x_n \to x$, $y_n \to y$, $n \to \infty$. Звідси $x_n + y_n \to x + y \in M + N$, $n \to \infty$.

B2

1. 1), 4) Так; 2), 3), 5), 6) ні.
2. Використати рівність паралелограма.
4. Записати квадрат норми як скалярний добуток і скористатися його властивостями.
5. $L^{\perp} = \{x \in L_2(\mathbb{R}) \,|\, x(t) = 0,\ t \leq 0 \,(\operatorname{mod} m)\}$.
6. 4) Встановити, що $(M^{\perp})^{\perp} = \text{з.л.о.}(M)$.
7. 1)–4) $\{0\}$.
8. 1) $\{x \in l_2 \mid 2x_1 + 3x_3 = 0\}$, 2) $\text{з.л.о.}(\{e_{2k} \mid k \in \mathbb{N}\})$; 3), 4) $\{0\}$. Нехай $y = (a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots) \in l_2$ належить шуканому ортогональному доповненню. Розглянемо функцію $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ (степеневий ряд збігається принаймні при $|t| < 1$ внаслідок нерівності Коші–Буняковського). В пунктах 3),4) маємо $f(\alpha) = 0,\ \alpha \in (0,1)$ та $f(\frac{1}{n}) = 0,\ n \geq 2$ відповідно. З кожної з цих умов випливає, що $f \equiv 0$.
9. 1) $\{0\};\ 2), 4)$ множина всіх непарних функцій; 3) множина всіх парних функцій.
10. 1) $\text{з.л.о.}(\{1, \sin kt \mid k \geq 1\})$, тобто множина функцій вигляду $x(t) + c$, де $x(t)$ — непарна функція, а $c \in \mathbb{K}$ — стала; 2) $\text{з.л.о.}(\{e^{-ikt} \,|\, k \leq 2\})$.
11. Скористатися тим, що $\left\| \sum\limits_{k=n}^{m} x_k \right\|^2 = \sum\limits_{k=n}^{m} \|x_k\|^2$, $1 \leq n \leq m$.
12. 1) $\sqrt{1 - \frac{7}{e^2}}$; 2) $\frac{1}{6\sqrt{5}}$; 3) $\sqrt{\frac{2}{3}(\pi^3 - 6\pi)}$; 4) $\sqrt{\pi}$; 5) $\sqrt{\frac{7}{3}}$; 6) 1.

A3

1. 1) $\|f\| = 3$; 2) $\|f\| = 6$; 3) $\|f\| = \frac{1}{2}$; 4) нелінійний, неперервний; 5) $\|f\| = 1$; 6) $\|f\| = 2\frac{1}{2}$.
2. 1), 2) $\|f\| = 1$; 3) $\|f\| = 1$ при $p = 1$, $\|f\| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} \right)^{1/q}$ при $1 < p < +\infty$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; 4) $\|f\| = 3$ при $p = 1$, $\|f\| = \sqrt{13}$ при $p = 2$, $\|f\| = 5$ при $p = +\infty$; 5) $\|f\| = \sqrt[4]{35}$.
3. 1) $\|f\| = \sqrt[3]{2}$; 2) $\|f\| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; 3) $\|f\| = 3$ при $p = 1$, $\|f\| = (1 + 3^q)^{\frac{1}{q}}$ при $1 < p \leq +\infty$; 4) $\|f\| = \frac{\pi}{2}$.
4. 1) $\|f\| = 5$; 2) $\|f\| = 2\frac{1}{2}$; 3) $\|f\| = \frac{2}{\pi}$; 4) $\|f\| = \frac{2}{3}$.
Д1. 2) Нехай $x \in X$ — довільний фіксований елемент та $y = x - \lambda z$, де $\lambda \in \mathbb{K}$. Тоді $y \in \operatorname{Ker} f$, тобто $f(y) = f(x) - \lambda f(z) = 0$, тоді й лише тоді, коли $\lambda = \frac{f(x)}{f(z)}$ (тут $f(z) \neq 0$, бо $z \notin \operatorname{Ker} f$).
Д3. 2) Скористатися тим, що $x = e_0 \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k - \lim\limits_{n\to\infty} x_n) e_k$,

$x \in c$, де $e_0 = (1, \ldots, 1, \ldots)$, $e_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots)$, $n \geq 1$.

Д4. При кожному $n \in \mathbb{N}$ існує $x_n \in X$ таке, що $\|x_n\| = 1$ та $|f(x_n)| \geq n$. Для довільних $\alpha \in \mathbb{K}$ та $z \in X$ покладемо $y_n = \frac{\alpha - f(z)}{f(x_n)} x_n + z$, $n \geq 1$. Тоді $y_n \to z$, $n \to \infty$, та $f(y_n) = \alpha$, $n \geq 1$.

Д5. При $x \in \operatorname{Ker} f$ рівність є очевидною. Надалі будемо вважати, що $x \notin \operatorname{Ker} f$. Зауважимо, що

$$\|f\| \cdot \rho(x, \operatorname{Ker} f) = \inf_{y \in \operatorname{Ker} f} \|x - y\| \cdot \|f\| \geq \inf_{y \in \operatorname{Ker} f} |f(x - y)| = |f(x)|.$$

З іншого боку, будь-який елемент $z \in X \setminus \operatorname{Ker} f$ має вигляд $z = y + \lambda x$, де $y \in \operatorname{Ker} f$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Тому $\frac{|f(z)|}{\|z\|} = \frac{|\lambda| \cdot |f(x)|}{|\lambda| \cdot \|x - (-\frac{y}{\lambda})\|} \leq \frac{|f(x)|}{\rho(x, \operatorname{Ker} f)}$, звідки $\|f\| \cdot \rho(x, \operatorname{Ker} f) \leq |f(x)|$.

Д6. 1) З лінійності і невід'ємності випливає, що $f(x) \leq f(y)$ для всіх x, $y \in C([a,b])$ таких, що $x(t) \leq y(t)$, $t \in [a,b]$. Оскільки для будь-якої функції $x \in \overline{B}(0,1)$ маємо $-1 = -e_0(t) \leq x(t) \leq e_0(t) = 1$, $t \in [a,b]$, то $-f(e_0) \leq f(x) \leq f(e_0)$. Отже, $|f(x)| \leq f(e_0)$, $x \in \overline{B}(0,1)$, причому при $x = e_0$ досягається рівність.

2) Кожна дійсна функція є різницею двох невід'ємних функцій, тому якщо $x(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [a,b]$, то $f(x) \in \mathbb{R}$. Аналогічно якщо $\frac{1}{i} x(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [a,b]$, то $f(\frac{1}{i} x) = \frac{1}{i} f(x) \in \mathbb{R}$. Звідси випливає, що $f(\operatorname{Re} x) = \operatorname{Re} f(x)$ та $f(\operatorname{Im} x) = \operatorname{Im} f(x)$ для всіх $x \in C([a,b])$.

Зафіксуємо довільну функцію $x \in C([a,b])$ та оберемо $\alpha \in \mathbb{C}$ так, що $|\alpha| = 1$ та $f(\alpha x) = |f(x)|$. Тоді

$$|f(x)| = f(\alpha x) = \operatorname{Re} f(\alpha x) = f(\operatorname{Re}(\alpha x)) \leq \|x\| \, f(e_0),$$

бо $\operatorname{Re}(\alpha x)(t) \leq |x(t)| \leq \|x\| e_0(t)$, $t \in [a,b]$. При $x = e_0$ досягається рівність.

В3

1. 1) $\|f\| = \frac{1}{6}$; 2) $\|f\| = \frac{\pi}{2}$; 3) $\|f\| = 1$; 4) $\|f\| = \frac{3}{4}$; 5) $\|f\| = \sqrt{2}$; 6) $\|f\| = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{2/7}$; 7) $\|f\| = 4$ при $p = 1$, $\|f\| = (2^q + 4^q)^{1/q}$ при $1 < p \leq +\infty$; 8) $\|f\| = \frac{1}{2}$ при $p = 1$, $\|f\| = \left(\frac{1}{2^q - 1}\right)^{1/q}$ при $1 < p \leq +\infty$; 9) $\|f\| = 100^{2/3}$; 10) $\|f\| = \sqrt{17}$.

2. 1) $\|f\| = 4$; 2) $\|f\| = 7 + \sqrt{13}$; 3) $\|f\| = 2$ при $p = 1$, $\|f\| = (2^q + 1)^{1/q}$ при $1 < p \leq +\infty$.

3. 1) $\|f\| = 1$; 2) $\|f\| = 8$; 3) $\|f\| = \frac{4}{3}$; 4) $\|f\| = 2$; 5) $\|f\| = \frac{1}{2}$; 6) $\|f\| = \frac{7}{2}$; 7) $\|f\| = 2$; 8) $\|f\| = 3$; 9) $\|f\| = 6$; 10) $\|f\| = \frac{\pi^2}{6}$;

11) $\|f\| = \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|$; 12) $\|f\| = 1$.

4. 1) $\|f\| = 1$ при $p = 1$, $\|f\| = (\frac{2}{q})^{1/q}$ при $1 < p \leq +\infty$; 2) $\|f\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; 3) $\|f\| = 2$ при $p = 1$, $\|f\| = \left(\frac{2^{q+1}-1}{q+1} + 2^q\right)^{1/q}$ при $1 < p \leq +\infty$; 4) $\|f\| = 3^{2/3}$; 5) $\|f\| = \sqrt{\frac{5\pi}{4}}$; 6) $\|f\| = 1$ при $p = 1$, $\|f\| = (\frac{q}{q-1})^{1/q}$ при $1 < p < +\infty$.

5. 1) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt - x(0)$; 2) $f(x) = x(0)$; 3) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt$.

6. $\|f\| = \int\limits_a^b |p(t)|dt$. 1) Скористатися рівністю $f(x) = \int\limits_a^b x(t)dP(t)$, де P — первісна p. 2) Розглянути послідовність функціоналів $f_n(x) = \int\limits_a^b p_n(t)x(t)dt$, $x \in C([a,b])$, де $p_n \in C([a,b])$, $n \geq 1$. Показати, що якщо $p_n \to p$ в $L_1([a,b])$, то $\|f_n - f\| \to 0$, а тому $\|f_n\| \to \|f\|$, $n \to \infty$.

7. 1) якщо $p = 1$, то $\alpha \geq 0$ та $\|f\| = 1$; якщо $1 < p < +\infty$, то $\alpha > \frac{1}{q}$ та $\|f\| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha q}}\right)^{1/q}$; 2) якщо $p = 1$, то $\alpha \leq 0$ та $\|f\| = 1$; якщо $1 < p < +\infty$, то $\alpha < \frac{1}{q}$, $\|f\| = \left(\frac{1}{1-\alpha q}\right)^{1/q}$; 3) якщо $p = 1$, то $\alpha \geq 0$ та $\|f\| = \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha}$ при $\alpha > 0$, $\|f\| = 1$ при $\alpha = 0$; якщо $1 < p < +\infty$, то $\alpha > -\frac{1}{q}$ та $\|f\| = \frac{1}{q^{\alpha}}\left(\frac{1}{q}\Gamma(\alpha q + 1)\right)^{1/q}$, де Γ — гамма-функція.

A4

1. Будемо позначати x_0 границю збіжних послідовностей у просторах $C([0,1])$, $L_p(T)$ та $x^{(0)}$ — границю в l_p.

1) Слабко, $x^{(0)} = 0$; 2) при $p > 2$ сильно, $x^{(0)} = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{k}}, \ldots)$, при $1 \leq p \leq 2$ не збігається; 3) при $1 \leq p < 3$ сильно, $x_0 = 0$; при $p = 3$ слабко, $x_0 = 0$; при $3 < p \leq +\infty$ не збігається; 4) слабко, $x_0(t) = \frac{1}{2}$, $t \in [0,1]$; 5) слабко, $x_0 = 0$; 6) не збігається; 7) слабко, $x_0 = 0$.

3. $F(x) = \alpha x_1 + a_2 x_2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, де $a_2 \in \mathbb{R}$ — довільне число. Якщо $p = 1$, то $\|F\| = \|f\|$ за умови, що $a_2 \in [-|\alpha|, |\alpha|]$, продовження єдине тоді й лише тоді, коли $\alpha = 0$. Якщо $1 < p \leq +\infty$, то $\|F\| = \|f\|$ за умови, що $a_2 = 0$; отже, продовження функціонала f, що зберігає норму, єдине.

4. Якщо $f(x) = (x, a)$, $x \in G$, де $a \in G$ фіксоване, то $F(x) = (x, b)$, $x \in H$, де $b \in H$ фіксоване та $b - a \in G^{\perp}$. Продовження зберігає норму тоді й лише тоді, коли $b = a$.

5. 1) Покласти $f_k(x) = a_k$, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k \in G = \text{л.о.}(\{x_1, \ldots, x_n\})$, $k = 1, \ldots, n$, і застосувати теорему Гана–Банаха.
6. Показати, що $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - (x_n, x) - (x, x_n) + \|x\|^2 \to 0$, $n \to \infty$.
Д1. 2) Перевірити, що множина $M = \{e_n \,|\, n \geq 1\} \subset l_2$ є сильно замкненою. Ця множина не є слабко замкненою, бо $e_n \xrightarrow{w} 0 \notin M$, $n \to \infty$. 3) Скористатися наслідком 1 з теореми Гана–Банаха. 4) Нехай $x_n \xrightarrow{w} x$, $n \to \infty$, та $\|x_n\| \leq r$, $n \geq 1$. При $x \neq 0$ за наслідком 2 з теореми Гана–Банаха існує $f \in X^*$ такий, що $\|f\| = 1$ та $f(x) = \|x\|$. Тому

$$\|x\| = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \leq r.$$

Д2. 1) Слабко, $x_0 = 0$. 2) Слабко, $x_0 = 0$. 3) Не збігається. Розглянути $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $x \in l_1$. 4) Не збігається. Розглянути $f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} x(t)dt$, $x \in L_1(\mathbb{R})$. 5) Слабко, $x^{(0)} = 0$. Якщо $e_n \stackrel{w}{\not\to} 0$, то існують $f \in l_\infty^*$, $\varepsilon > 0$ та $\{n_k : k \geq 1\}$ такі, що $|f(e_{n_k})| \geq \varepsilon$, $k \geq 1$. Оберемо числа α_k так, що $|\alpha_k| = 1$ та $f(\alpha_k e_{n_k}) = |f(e_{n_k})|$. При $y^{(N)} = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k e_{n_k}$ маємо $\|y^{(N)}\| = 1$ та $|f(y^{(N)})| = \sum\limits_{k=1}^{N} |f(e_{n_k})| \geq N\varepsilon$, $N \geq 1$, що суперечить обмеженості f.
Д4. Припустити існування функції $x_0 \in C([0,1])$, для якої

$$F(g) = \int\limits_0^1 x_0(t)dg(t) = \int\limits_0^{1/2} dg(t), \; g \in BV_0([0,1]),$$

і показати, що $x_0(t) = \chi_{(0,\frac{1}{2})}(t)$, $t \in (0,1)\backslash\{\frac{1}{2}\}$, а це неможливо.
Д5. Застосувати теорему Банаха–Штейнгауза до послідовності функціоналів $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$, $x \in l_p$, $n \geq 1$.
Д6. 1) *Необхідність.* Якщо f — лінійна комбінація функціоналів $f_1, \ldots, f_n$ та $f_k(x) = 0$, $1 \leq k \leq n$, то $f(x) = 0$. *Достатність.* Без обмеження загальності для кожного $1 \leq i \leq n$ існує $z_i \in \bigcap\limits_{k\neq i} \operatorname{Ker} f_k \setminus \operatorname{Ker} f_i$ (якщо при деякому i це не так, то $\bigcap\limits_{k\neq i} \operatorname{Ker} f_k = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} f_k \subset \operatorname{Ker} f$ і достатньо довести, що f є лінійною комбінацією функціоналів f_k, $k \neq i$). Покладемо $c_i = \frac{f(z_i)}{f_i(z_i)}$, $1 \leq i \leq n$, та покажемо, що $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$ при кожному

$x \in X$. Справді, при $y = x - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f_i(x)}{f_i(z_i)} z_i$ для кожного $1 \le k \le n$ маємо

$$f_k(y) = f_k\Big(x - \frac{f_k(x)}{f_k(z_k)} z_k\Big) - \sum_{i \ne k} \frac{f_i(x)}{f_i(z_i)} f_k(z_i) = f_k(x) - \frac{f_k(x)}{f_k(z_k)} f_k(z_k) = 0,$$

отже $y \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} f_k \subset \operatorname{Ker} f$. Таким чином, $f(y) = 0$ та

$$f(x) = f\Big(y + \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(x)}{f_i(z_i)} z_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(x)}{f_i(z_i)} f(z_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x).$$

2) Згідно із 1) для кожного $1 \le i \le n$ існує $z_i \in \bigcap\limits_{k \ne i} \operatorname{Ker} f_k \setminus \operatorname{Ker} f_i$. Покласти $x_i = \frac{z_i}{f(z_i)}$, $1 \le i \le n$.

B4

1. У наступних задачах будемо позначати x_0 границю збіжних послідовностей у просторах $C([0,1]), L_p(T)$ та $x^{(0)}$ — границю в l_p.

1) Слабко, $x^{(0)} = 0$; 2) при $p > 3$ слабко, $x^{(0)} = 0$, при $1 \le p \le 3$ не збігається; 3) не збігається; 4) при $p > 2$ сильно, $x^{(0)} = 0$, при $p = 2$ слабко, $x^{(0)} = 0$, при $1 \le p < 2$ не збігається; 5) сильно, $x^{(0)} = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots)$; 6) при $p > 5$ сильно, $x^{(0)} = 0$, при $p = 5$ слабко, $x^{(0)} = 0$, при $1 \le p < 5$ не збігається; 7) сильно, $x^{(0)} = (1, 0, \frac{1}{3^2}, 0, \frac{1}{5^2}, \ldots)$; 8) не збігається.

2. 1) при $1 \le p < 2$ сильно, $x_0 = 0$; при $p = 2$ слабко, $x_0 = 0$; при $2 < p \le +\infty$ не збігається; 2)–4) слабко, $x_0 = 0$; 5) при $1 \le p < 2$ сильно, $x_0 = 0$; при $p = 2$ слабко, $x_0 = 0$; при $2 < p \le +\infty$ не збігається; 6) сильно, $x_0 = 0$; 7) при $1 \le p < 2$ не збігається; при $p = 2$ слабко, $x_0 = 0$; при $2 < p \le +\infty$ сильно, $x_0 = 0$; 8) при $1 \le p < 4$ сильно, $x_0 = 0$; при $p = 4$ слабко, $x_0 = 0$; при $4 < p \le +\infty$ не збігається; 9) слабко, $x_0 = 0$; 10) при $1 \le p < 3$ не збігається; при $p = 3$ слабко, $x_0 = 0$; при $3 < p \le +\infty$ сильно, $x_0 = 0$.

3. 1) Слабко, $x_0 = 0$; 2) сильно, $x_0(t) = 1$; 3) не збігається; 4) сильно, $x_0 = 0$; 5),6) слабко, $x_0 = 0$.

4. Сильної збіжності немає. Позначимо f_0 $*$-слабку границю послідовності $\{f_n : n \ge 1\}$. 1) $f_0(x) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x(t)dt$; 2) $f_0 = 0$; 3) $f_0 = 0$. Розглянути тотальну множину $\{t^k,\ t \in [0,1] : k \ge 0\}$; 4) $f_0(x) = x(1)$.

5. $F((x_1, x_2)) = a_1 x_1 + a_2 x_2$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, де $a_1 + a_2 = \alpha$. При $1 \le p < +\infty$ продовження зберігає норму, якщо $a_1 = a_2 = \frac{\alpha}{2}$, а при $p = +\infty$ — якщо $a_1 \in [0, \alpha]$. Таке продовження єдине при $1 \le p < +\infty$.

6. $F(x) = (x, a + \alpha h)$, $x \in H$, де $\alpha \in \mathbb{K}$ фіксоване; $\|F\| = \|f\|$ тоді й

лише тоді, коли $a + \alpha h = \mathrm{pr}_G\, a$, тобто при $\alpha = -\frac{(a,h)}{\|h\|^2}$.
7. 1) $f(x) = -x(0) + 3x(1)$; 2) $f(x) = 2x(0)$.

А5

1. Якщо $\{e_1, \ldots, e_m\} \subset \mathbb{C}^m$, $\{g_1, \ldots, g_n\} \subset \mathbb{C}^n$ — стандартні базиси в $\mathbb{C}^m$ та $\mathbb{C}^n$, то $Ax = \sum\limits_{j=1}^{n}\Big(\sum\limits_{k=1}^{m} a_{jk}x_k\Big)g_j$, $x = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k e_k$, де $(a_{jk})_{j=1,k=1}^{n\ \ m}$ — числова матриця така, що $(a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk})$ — координати вектора Ae_k в базисі $\{g_1, \ldots, g_n\}$; $\|A\| = \max\limits_{1\le k\le m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{jk}|$.
2. $\|A\| = \sup\limits_{n\ge 1}|\alpha_n|$.
3. $\|A\| = \|\alpha\|_\infty$.
4. $\|A\| = \|f\| \cdot \|y\|_Y$.
5. $\|A\| = \|y\| \cdot \|z\|$.
7. 1) $\|A\| = e-1$; 2) $\|A\| = (\frac{1}{4})^{1/3}(\frac{1}{7})^{2/3}$; 3) $\|A\| = \pi$; 4) $\|A\| = 4\sin 1$; 5) $\|A\| = 1$.
8. Скористатися теоремою Фубіні та нерівністю Коші–Буняковського.
Д1. Розглянути функціонали $f_t(x) = (Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$, $x \in C([a,b]), t \in [a,b]$. Перевірити, що $\|A\| = \max\limits_{t\in[a,b]}\|f_t\|$, та використати задачу 6 з **В3**.
Д2. $\|I\| = (b-a)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}$ при $p < +\infty$, $\|I\| = (b-a)^{\frac{1}{r}}$ при $p = +\infty$. Скористатися нерівністю Гельдера.
Д3. 2) Ні. Нехай $X = C^1([a,b])$ з рівномірною нормою, $Y = C([a,b])$, $(Ax)(t) = x'(t)$, $t \in [a,b]$, $x \in X$. 3) а) I; б) Нехай $X = Y = l_2$, $Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots)$. Тоді множина $R(A)$ скрізь щільна в l_2, бо містить усі фінітні послідовності, але $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots) \notin R(A)$.
Д4. Якщо оператор A необмежений, то існують $x_n \in X$ такі, що $\|x_n\| = 1$ та $\|Ax_n\| \ge n, n \ge 1$. Тоді при $y_n = \frac{x_n}{\sqrt{n}}$ маємо $y_n \to 0$, але послідовність $\{Ay_n : n \ge 1\}$ не є слабко збіжною, бо необмежена.
Д5. *Достатність.* Якщо A не лінійний, то існують $x, y \in X$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ такі, що $A(\alpha x+\beta y) \ne \alpha Ax+\beta Ay$. За наслідком 3 з теореми Гана–Банаха існує функціонал $f \in X^*$ такий, що $f(A(\alpha x+\beta y)) \ne f(\alpha Ax+\beta Ay) = \alpha f(Ax) + \beta f(Ay)$, тобто функціонал f_0 не лінійний, суперечність. Нехай оператор A лінійний. За умовою якщо $x_n \to x$, то $Ax_n \xrightarrow{w} Ax$, $n \to \infty$. Тому згідно із задачею **Д**4 оператор A обмежений.

B5

1. $\|A\| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

2. 1),2) $\|A\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |\alpha(t)|$.

3. 1) $\|A\| = 1$; 2) $\|A\| = \frac{4}{3}$; 3) $\|A\| = 10$; 4) $\|A\| = \frac{1}{3}$.

4. $\|P\| = 1$ при $G \neq \{0\}$, $\|P\| = 0$ при $G = \{0\}$.

5. 1) $\|A\| = \|u\|_p \cdot \|v\|_q$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; 2) $\|A\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |u(t)| \cdot \int\limits_a^b |v(s)| ds$.

6. 1) $\|A\| = \frac{1}{\beta+1}$; 2) $\|A\| = \frac{1}{2}e^3(1-e^{-2})$; 3) $\|A\| = (\frac{1}{3})^{1/4}(\frac{1}{5})^{3/4}$; 4) $\|A\| = 2+\pi$; 5) $\|A\| = (\frac{1}{6})^{2/3}(\frac{1}{2})^{1/3}$; 6) $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{(2\alpha+1)(2\beta+1)}}$.

7. 1) $\|A\| = \pi$; 2) $\|A\| = 6\pi$; 3) $\|A\| = 8$. Використати, що $\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}t$ — ортонормована система в $L_2([-1,1])$. 4) $\|A\| = 3\pi$; 5) $\|A\| = \frac{2}{\sqrt{5}}$; 6) $\|A\| = 4\sqrt{2}\pi$; 7) $\|A\| = 5$. Рівність $\|Ax\| = 5\|x\|$ досягається для всіх непарних функцій $x \in L_2([-2,2])$. 8) $\|A\| = 2$. Оскільки $\|Ax\|^2 = = \int\limits_0^1 |x(\sqrt[4]{t})|^2 dt = \left|s = \sqrt[4]{t}\right| = \int\limits_0^1 \left|2s^{3/2}x(s)\right|^2 ds$, то оператор A має таку ж норму, як оператор множення на функцію $2t^{3/2}$.

8. 1) $\|A\| = \frac{4}{3}$; 2) $\|A\| = e+5$. Показати, що $\|Ax\| \leq (e+5)\|x\|$, $x \in C([0,1])$. Далі розглянути послідовність функцій $\{x_n : n \geq 3\}$ таких, що $x(t) = 1$ при $t \in [0, \frac{n-2}{n}] \cup \{1\}$, $x(\frac{n-1}{n}) = -1$ та x_n є лінійною на відрізках $[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}]$ і $[\frac{n-1}{n}, 1]$. 3) $\|A\| = \frac{2}{\pi}$.

9. $\|A\| = 1$.

10. Якщо $\{e_1,\ldots,e_m\} \subset \mathbb{R}^m$, $\{g_1,\ldots,g_n\} \subset \mathbb{R}^n$ — стандартні базиси в $\mathbb{R}^m$ та $\mathbb{R}^n$, то $Ax = \sum\limits_{j=1}^{n}\Big(\sum\limits_{k=1}^{m} a_{jk}x_k\Big)g_j$, $x = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k e_k$, де $(a_{jk})_{j=1,k=1}^{n\ \ m}$ — числова матриця така, що $(a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk})$ — координати вектора Ae_k в базисі $\{g_1,\ldots,g_n\}$;

1) $\|A\| = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{k=1}^{m} |a_{jk}|$; 2) $\|A\| = \max\limits_{1\leq j\leq n,\ 1\leq k\leq m} |a_{jk}|$. Розглянути функціонали $f_j(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{jk}x_k$, $x \in \mathbb{R}^m$. Оскільки $\|Ax\|_\infty = = \max\limits_{1\leq j\leq n} |f_j(x)|$, $x \in \mathbb{R}^m$, то $\|A\| = \max\limits_{1\leq j\leq n} \|f_j\|$.

11. $\|A\| \leq \Big(\sum\limits_{j,k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2\Big)^{1/2}$.

А6

1. Будемо позначати A границю послідовності $\{A_n : n \geq 1\}$, якщо вона існує. 1) При $p = 1$ не збігається; при $1 < p < +\infty$ слабко, $A = 0$; 2) при $1 \leq p < +\infty$ сильно, $A = 0$; при $p = +\infty$ не збігається; 3) рівномірно, $Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots)$; 4) не збігається; 5) рівномірно, $A = 0$; 6) слабко, $A = 0$; 7) сильно, $(Ax)(t) = x(t+1)\chi_{[-1,1]}(t)$.

2. Граничний оператор — це оператор множення на деяку функцію $u \in C([a,b])$. 1), 2) $u_n \to u$, $n \to \infty$, в $C([a,b])$; 3) $u_n \xrightarrow{w} u$, $n \to \infty$, в $C([a,b])$ (тобто послідовність $\{u_n : n \geq 1\}$ обмежена в $C([a,b])$ і поточково збігається до u).

3. 3) Розглянути $X = l_2$ та оператори A_n, B_n, визначені рівностями $A_n x = (x_n, x_{n+1}, \ldots)$, $B_n x = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, x_1, x_2, \ldots)$, $x \in l_2$, $n \geq 1$.

Перевірити, що $A_n \xrightarrow{w} 0$, $B_n \xrightarrow{w} 0$, $n \to \infty$, та $A_n B_n = I$, $n \geq 1$.

Д1. *Необхідність.* Застосувати теорему Банаха–Штейнгауза до послідовності $\{F_{x_n} : n \geq 1\} \subset X^{**}$, де $F_x(f) = f(x)$, $f \in X^*$, $x \in X$.

Д2. За теоремою Банаха–Штейнгауза існує $C > 0$ таке, що $\|A\| \leq C$ та $\|A_n\| \leq C$, $n \geq 1$. За критерієм Гаусдорфа при довільному $\varepsilon > 0$ існує скінченна $\frac{\varepsilon}{4C}$-сітка $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset X$ для M. Оберемо N так, що $\|(A_n - A)x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $1 \leq i \leq m$, $n \geq N$. Для кожного $x \in M$ існує x_i таке, що $\|x - x_i\| < \frac{\varepsilon}{4C}$. Тоді при $n \geq N$ маємо

$$\|(A_n - A)x\| \leq \|(A_n - A)x_i\| + \|(A_n - A)(x - x_i)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C \cdot \frac{\varepsilon}{4C} = \varepsilon.$$

Д3. 2) Необхідно і достатньо, щоб простір X_2 був повним відносно слабкої збіжності.

Д4. Послідовність збігається рівномірно при $\alpha = 0$, а сильно та слабко при $|\alpha| < 1$ та при $\alpha = 1$.

Д5. 1) При $1 < p \leq +\infty$ рівномірно, сильно $\Leftrightarrow$ $\alpha_n \to 0$, слабко $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n : n \geq 1\}$ обмежена; при $p = 1$ рівномірно, сильно, слабко $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\alpha_n \to 0$. 2) При $1 \leq p < +\infty$ сильно, слабко $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n : n \geq 1\}$ обмежена, рівномірно $\Leftrightarrow$ $\alpha_n \to 0$; при $p = +\infty$ рівномірно, сильно, слабко $\Leftrightarrow$ $\alpha_n \to 0$. 3) Рівномірно, сильно, слабко $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n : n \geq 1\}$ збігається. 4) При $1 \leq p < +\infty$ рівномірно $\Leftrightarrow$ $\alpha_n \to 0$, сильно, слабко $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n : n \geq 1\}$ збігається; при $p = +\infty$ рівномірно, сильно, слабко $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\alpha_n \to 0$.

Д6. Розглянемо функціонали $f_y(x) = (Ax, y) = (x, By)$, $x, y \in H$. При всіх $x \in H$ та $y \in \overline{B}(0,1)$ маємо $|f_y(x)| \leq \|Ax\| \cdot \|y\| \leq \|Ax\|$, тому за теоремою Банаха–Штейнгауза існує таке $C > 0$, що $\|f_y\| = \|By\| \leq C$ при всіх $y \in \overline{B}(0,1)$. Отже, $B \in \mathcal{L}(H)$. Аналогічно $A \in \mathcal{L}(H)$.

B6

1. Рівномірна збіжність в $\mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ рівносильна збіжності за нормою в X^*, а сильна та слабка — $*$-слабкій збіжності в X^*.

2. Будемо позначати A границю послідовності $\{A_n : n \geq 1\}$, якщо вона існує. 1), 2) сильно, $A = 0$; 3) при $p = 1$ та $p = +\infty$ не збігається; при $1 < p < +\infty$ слабко, $A = 0$; 4) сильно, $A = 0$; 5) не збігається; 6) при $p = 1$ сильно, $Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_1$; при $1 < p \leq +\infty$ не збігається; 7) сильно, $A = I$; 8) рівномірно, $A = 0$; 9) слабко, $A = 0$; 10) рівномірно, $Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_k}{k}, 0, \ldots)$.

3. 3), 5) Рівномірно, $A = 0$; 1), 2), 4), 9) збіжності немає; 6) сильно, $A = I$; 7) слабко, $A = 0$; 8) сильно, $(Ax)(t) = x(0)t$; 10) рівномірно, $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)e^{-s}ds$.

4. 1) рівномірно, $A = 0$; 2) слабко, $A = \frac{1}{2}I$; 3) слабко, $A = 0$; 4) сильно, $A = I$; 5) при $p = 1$ сильно, при $1 < p < +\infty$ рівномірно, $A = 0$.

5. 1) слабко, $A = 0$; 2) - 4) сильно, $A = 0$; 5) сильно, $(Ax)(t) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} t \cdot x(t)$; 6) слабко, $(Ax)(t) = \frac{1}{2}I$; 7) сильно, $(Ax)(t) = x(t+3)$; 8) при $1 \leq p < 3$ рівномірно, при $p = 3$ слабко, при $p > 3$ не збігається; 9) сильно, $A = 0$; 10) сильно, $(Ax)(t) = \frac{t}{|t|+1}x(t-1)$.

7. 4) Для $X = l_2$, $A_n x = (x_n, x_{n+1}, \ldots)$, $x \in l_2$, та $x^{(n)} = e_n$ перевірити, що $A_n \xrightarrow{s} 0$, $x^{(n)} \xrightarrow{w} 0$, $n \to \infty$, та $A_n x^{(n)} = e_1$, $n \geq 1$.

A7

1. Рівносильність тверджень 1), 2), 4) та 5) відома з лінійної алгебри, рівносильність тверджень 2) та 3) випливає з того, що будь-який лінійний оператор у скінченновимірному просторі неперервний.

3. Врахувати, що $R(A)$ скрізь щільна в l_2, бо містить усі елементи вигляду $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$, але $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots) \notin R(A)$.

5. $(A^{-1}y)(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t-1}} y(\sqrt[3]{t-1})$, $t \in \mathbb{R}$, $y \in L_2(\mathbb{R})$.

6. Так, $A^{-1}y = (2y_1 - y_2, y_2 - y_1, \frac{y_3}{3}, y_4, y_5, \ldots)$, $y \in l_2$.

7. *Достатність.* Якщо $R(A^2) = X$, то $R(A) = X$. Нехай $m > 0$ є таким, що $\|A^2x\| \geq m\|x\|$, $x \in X$. Тоді $\|Ax\| \geq \frac{\|A^2x\|}{\|A\|} \geq \frac{m}{\|A\|}\|x\|$, $x \in X$.

9. $(A_i^{-1}y)(t) = y'(t)$, $t \in [0, 1]$, $y \in X_i$, $i = 0, 1$.

Д1. 1) Так. Показати, що $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B = \{0\}$. 2) Так. Оскільки $\operatorname{Ker} BA \subset \operatorname{Ker} A$ та $R(AB) \subset R(A)$, то $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ та $R(A) = X$. Тому існує алгебраїчний обернений оператор $A^{-1} : X \to X$. Довести, що $A^{-1} = (BA)^{-1} \cdot B \in \mathcal{L}(X)$.

Д2. Покласти $C = I + B(I - AB)^{-1}A$ і довести, що $(I - BA)C =$

$= C(I - BA) = I$.

Д3. Позначимо X_i простір X з нормою $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2$. Розглянемо тотожний оператор $A : X_1 \to X_2$. Оскільки A — бієкція та за умовою $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$, то $A^{-1} \in \mathcal{L}(X_2, X_1)$ за теоремою Банаха про обернений оператор. Тому $\|x\|_1 \le \|A^{-1}\| \cdot \|x\|_2$, $x \in X$. Повнота істотна. Наприклад, нехай $X = C([0,1])$, $\|x\|_1 = \max\limits_{0 \le t \le 1} |x(t)|$ та $\|x\|_2 = \int\limits_0^1 |x(t)|dt$. Тоді норма $\|\cdot\|_2$ підпорядкована нормі $\|\cdot\|_1$, проте ці норми не еквівалентні.

Д4. Необхідно і достатньо, щоб 1) $\alpha(t) \ge 0$, $t \in [a,b]$, причому $\alpha > 0$ на скрізь щільній множині з $[a,b]$; 2) $\alpha(t) > 0$, $t \in [a,b]$. Очевидно, що норма $\|\cdot\|_\alpha$ підпорядкована рівномірній нормі $\|\cdot\|$. Тому внаслідок задачі **Д**3 якщо простір $(C([a,b]), \|\cdot\|_\alpha)$ повний, то норми $\|\cdot\|_\alpha$ та $\|\cdot\|$ еквівалентні.

Д5. Нехай $X = \{x \in l_2 \,|\, \exists\, n \in \mathbb{N} \ : \ x_k = 0, \ k \ge n\}$ (множина фінітних елементів в l_2) з нормою $\|x\| = \Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\Big)^{1/2}$. Розглянути оператор $Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots)$, $x \in X$.

В7

1. 1) Так, $A^{-1} = A$; 2) так, $A^{-1}y = (y_1 - y_2 - y_3, y_2 + y_3, y_3, y_4, \ldots)$, $y \in l_2$; 3)–5) ні; 6) так, $A^{-1}y = (y_1 + y_2, y_2, y_3, \ldots)$, $y \in l_2$; 7) ні; 8) так, $A^{-1}y = \big(\frac{1}{2}(y_2 + y_3), \frac{1}{2}(y_1 - y_2), \frac{1}{2}(y_1 - y_3), y_4, y_5, \ldots\big)$, $y \in l_2$.

3. При $p = 1$; $(A^{-1}y)(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} y(\sqrt{t})$, $t \in [0,1]$, $y \in L_1([0,1])$.

4. Скористатися методом розв'язання лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. 1) $(A^{-1}y)(t) = \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}t} \int\limits_0^t e^{-\frac{3}{2}s} y(s)ds$;
2) $(A^{-1}y)(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \int\limits_0^t e^{-\frac{s^2}{2}} y(s)ds$; 3) $(A^{-1}y)(t) = e^{-e^t} \int\limits_0^t e^{e^s} y(s)ds$;
4) $(A^{-1}y)(t) = e^{-\frac{2}{3}t^3} \int\limits_0^t e^{\frac{2}{3}s^3} y(s)ds$; 5) $(A^{-1}y)(t) = e^{-2te^{-t} - 2e^{-t}} \times$ $\times \int\limits_0^t e^{2se^{-s} + 2e^{-s} - s} y(s)ds$; 6) $(A^{-1}y)(t) = e^{-t}(t+1) \int\limits_0^t \frac{e^s}{(s+1)^2} y(s)ds$;
7) $(A^{-1}y)(t) = \int\limits_0^t \exp\Big(-\int\limits_s^t \alpha(u)du\Big) y(s)ds$, $t \in [0,1]$, $y \in C([0,1])$.

5. 1) Для $C = B^{-1}A^{-1}$ перевірити, що $(AB)C = C(AB) = I$. 2) Врахувати, що $B = (BA)A^{-1}$. 3) У просторі $X = l_2$ розглянути $Ax = (x_2, x_3, \ldots)$, $Bx = (0, x_1, x_2, \ldots)$, $x \in l_2$. Перевірити, що $AB = I$ та $\mathrm{Ker}\, BA \ne \{0\}$.

6. 1) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(A^{-1}B)^n A^{-1}$. Використати рівність $A+B = A(I+A^{-1}B)$.

8. $\big((AB)^{-1}y\big)(t) = \frac{y(\sqrt{t})}{\sqrt{t}+1}$, $\big((BA)^{-1}y\big)(t) = \frac{y(\sqrt{t})}{t+1}$, $t \in [0,1]$, $y \in$ $\in C([0,1])$.

9. $(B^{-1}y)(t) = y(\sqrt[3]{t})$, $t \in [-1,1]$, $y \in C([-1,1])$.

A8

1. 1) $A^*y = (y_2, y_3, y_4, \ldots)$; 2) $A^* = A$; 3) $(Ax)(t) = e^{-i(t-1)}x(t-1)$; 4) $(A^*y)(t) = \int\limits_0^1 (-it+2s)y(s)ds$; 5) $(A^*y)(t) = \int\limits_t^{\sqrt{t}} s^3 y(s)ds$; 6) $A^*u =$ $= \overline{(z,u)}y$.

2. 1) $(A_n^*y)(t) = \frac{1}{n^2}y(\frac{t}{n^4})$. 2) $A_n \xrightarrow{w} 0$, $n \to \infty$.

4. 3) Нехай $H = l_2$, $A_n x = (x_n, x_{n+1}, \ldots)$, $x \in l_2$. Перевірити, що $A_n \xrightarrow{s} 0$ та $A_n^* \stackrel{s}{\not\to} 0$, $n \to \infty$.

Д1. 1) Перевірити, що функція $(x,y)_\varepsilon = \big((A+\varepsilon I)x, y\big)$, $x, y \in H$, є скалярним добутком на H при довільному $\varepsilon > 0$. Записати нерівність Коші–Буняковського для цього скалярного добутку і перейти до границі у нерівності при $\varepsilon \to 0+$. 2) Використати нерівність 1) при $y = Ax$.

Д2. 1) Ні. Нехай $H = \mathbb{R}^2$, $Ax = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)x$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Тоді $e_1, e_2 \in G$, але $e_1 + e_2 \notin G$. 2) Так. Внаслідок задачі **Д**1(2) якщо $x \in G$, то $Ax = 0$. Звідси випливає, що $G = \operatorname{Ker} A$.

Д3. 2) Будемо вважати, що H — комплексний гільбертів простір (для дійсного простору доведення аналогічне). Покладемо $c_A = \sup\limits_{x \in S(0,1)} |(Ax,x)|$.

Очевидно, що $c_A \le \|A\|$. Неважко перевірити, що для самоспряженого оператора

$$\big(A(u+v), u+v\big) - \big(A(u-v), u-v\big) = 4\operatorname{Re}(Au, v),\ u, v \in H.$$

Використовуючи рівність паралелограма, дістаємо, що при $u, v \in S(0,1)$

$$4\operatorname{Re}(Au,v) \le c_A(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) = 2c_A(\|u\|^2 + \|v\|^2) = 4c_A.$$

Для довільних $x, y \in S(0,1)$ можна обрати $\alpha \in \mathbb{C}$ так, що $|\alpha| = 1$ та $\operatorname{Re}(Ax, \alpha y) = |(Ax,y)|$. Тому $|(Ax,y)| = \operatorname{Re}(Ax, \alpha y) \le c_A$, звідки $\|A\| \le c_A$.

Д4. 1) Якщо $(A^n)^* = A^n$, то $(A^{n+1})^* = (A^n \cdot A)^* = A^* \cdot (A^n)^* =$ $= A \cdot A^n = A^{n+1}$. 2) Довести за індукцією, що $\big\|A^{2^k}\big\| = \|A\|^{2^k}$, $k \ge 1$. Для довільного $n \ge 1$ оберемо k так, що $2^k > n$. Тоді

$$\big\|A^{2^k}\big\| \le \|A^n\| \cdot \|A\|^{2^k - n} \le \|A\|^{2^k} = \big\|A^{2^k}\big\|,$$

отже обидві нерівності перетворюються на рівності та $\|A^n\| = \|A\|^n$. 3) Якщо $n = 2m$, то $(A^n x, x) = (A^m x, A^m x) = \|A^m x\|^2 \geq 0$, $x \in H$. Якщо $n = 2m+1$, то $(A^n x, x) = \big(A(A^m x), A^m x\big) \geq 0$, $x \in H$, бо $A \geq 0$.

Д5. Перевірити, що оператор $B = A^*A - AA^*$ самоспряжений, і скористатися задачею **Д**3(3).

B8

1. 1) $A^*y = (0, 0, y_1, 0, 0, y_2, \ldots$; 2) $A^*y = (0, y_1, y_2, \ldots)$; 3) $A^* = A$; 4) $A^*y = (y_j, 0, 0, \ldots)$; 5) $A^*y = (y_1 + \ldots + y_j, 0, 0, \ldots)$; 6) $A^* = A$; 7) $A^*y = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, \overline{\alpha_j} y_1, \overline{\alpha_{j+1}} y_2, \ldots)$; 8) $A^*y = (\overline{\alpha_1} y_3, \overline{\alpha_2} y_4, \overline{\alpha_3} y_5, \ldots)$;

9) $A^* = A$; 10) $A^*y = (3y_1, -2y_1 + y_2, y_3, y_4, \ldots)$.

2. 1), 2) $A^* = A$; 3) $(A^*y)(t) = \overline{a(t-\tau)} y(t-\tau)$; 4), 5) $A^* = A$; 6) $(A^*y)(t) = \int\limits_t^1 s^3 y(s) ds$; 7) $(A^*y)(t) = \int\limits_0^1 (-it^3 + s^2) y(s) ds$; 8) $(A^*y)(t) = = \int\limits_t^{\sqrt[5]{t}} tsy(s) ds$; 9) $(A^*y)(t) = \chi_{[0,1]}(t) \cdot \int\limits_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} (s - 3t^2) y(s) ds$; 10) $(A^*y)(t) = = \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} y(t^{\frac{1}{\alpha}})$.

3. 1) $(A_s^{-1}x)(t) = (A_s^* x)(t) = x(t-s)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in L_2(\mathbb{R})$.

4. 1) $(A^*y)(t) = \frac{y((t-2)^{1/7})}{\sqrt{7}(t-2)^{3/7}}$; 2) $(A^*y)(t) = \frac{y(t^{1/4})}{2t^{3/8}}$; 3) $(A^*y)(t) = = \frac{1}{\sqrt{10(t+1)}} y\big(\frac{\ln(t+1)}{10}\big)$.

5. 1) $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$; 2) $\alpha_n \in \mathbb{C}$ довільні, $n \geq 1$; 3), 4) $|\alpha_n| = 1$, $n \geq 1$; 5) $\alpha_n \in \{0, 1\}$, $n \geq 1$; 6) $\alpha_n \geq 0$, $n \geq 1$.

6. 1) Скористатися поляризаційною тотожністю для скалярного добутку. 2) Нехай $\dim H = n$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормований базис в H та A — ізометричний оператор. Довести, що $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ — ортонормована система, а отже є базисом в H. 5) Розглянути $H = l_2$, $Ax = = (0, x_1, x_2, \ldots)$, $x \in l_2$.

7. 1) При всіх $x, y \in H$ маємо

$$(Ax, y) = \lim_{n\to\infty} (A_n x, y) = \lim_{n\to\infty} (x, A_n y) = (x, Ay).$$

3) Скористатися задачею 6 з **A4**.

9. 1) Скористатися задачею 8. 2) $H = \mathbb{R}^2$, $Ax = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) x$.

A9

1. 1) Не є передкомпактною; 2) в $C([0,1])$ не є передкомпактною, в $L_p([0,1])$ передкомпактна, не є компактною; 3) передкомпактна, не є компактною.

3. 1) Так; 2) ні, бо A може не бути неперервним.
4. 1) Компактний; 2) не компактний.
6. 1, 3) Компактні; 2) не компактний.
7. 1), 2) Необхідно і достатньо, щоб $a = 0$. 1) Якщо $a(t_0) \neq 0$, то при $x_n(t) = e^{-n|t-t_0|}$, $t \in [0,1]$, $n \geq 1$, послідовність $\{Ax_n : n \geq 1\}$ не містить збіжної підпослідовності. 2) Для послідовності $x_n(t) = e^{int}$, $t \in [0,1]$, $n \geq 1$, перевірити, що $x_n \xrightarrow{w} 0$, $n \to \infty$, в $L_2([0,1])$. Тоді $Ax_n \to 0$, $n \to \infty$, тобто $\|Ax_n\|_2 = \|a\|_2 \to 0$, $n \to \infty$. Це означає, що $a(t) = 0 \pmod m$.
8. Нехай $A^*A \in S_\infty(H)$. Тоді для будь-якої обмеженої послідовності $\{x_n : n \geq 1\}$ існує збіжна, а отже фундаментальна, підпослідовність $\{A^*Ax_{n_k} : k \geq 1\}$. Оскільки за нерівністю Коші–Буняковського

$$\|Ay\|^2 = (Ay, Ay) = (A^*Ay, y) \leq \|A^*Ay\| \cdot \|y\|,\ y \in H,$$

то послідовність $\{Ax_{n_k} : k \geq 1\}$ теж є фундаментальною, а отже збіжною. Отже, $A \in S_\infty(H)$. З доведеного випливає, що якщо $AA^* = (A^*)^*A^* \in \in S_\infty(H)$, то $A^* \in S_\infty(H)$.
Д1. Необхідність умови б) випливає із задачі **Д**2 з **А6**. *Достатність.* Для довільного $\varepsilon > 0$ оберемо n так, що $\|A_nx - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $x \in M$. Тоді скінченна $\frac{\varepsilon}{2}$-сітка для передкомпактної множині $A_n(M)$ буде ε-сіткою для множини M. За критерієм Гаусдорфа множина M передкомпактна.
Д2. Застосувати твердження задачі **Д**1 до послідовності операторів

$$A_nx = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots),\ x \in l_p,\ n \geq 1.$$

Д3. *Необхідність.* Нехай $Ax = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)e_k$, де $\{e_k,\ k \geq 1\}$ — стандартний базис в l_p. Тоді $f_k \in l_p^*$, $k \geq 1$. Розглянути скінченновимірні оператори $A_nx = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)e_k$, $n \geq 1$. Якщо оператор A компактний, то множина $\{Ax \mid \|x\| \leq 1\}$ є передкомпактною в l_p. Внаслідок задачі **Д**2 $\sup\limits_{\{\|x\| \leq 1\}} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|^p \to 0,\ n \to \infty$, звідки $A_n \rightrightarrows A$, $n \to \infty$.
Д4. Перевірити, що множина $A(B(0,1))$, де $B(0,1)$ — куля в $C([a,b])$, задовольняє умови теореми Асколі–Арцела.

Д5. 1) За нерівністю Коші–Буняковського при всіх $x, y \in L_2([a,b])$

$$\Big|\int\limits_a^b (Ax)(t)y(t)dt\Big| \leq \int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(t,s)x(s)y(t)|dsdt \leq$$

$$\leq\Big(\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(t,s)|\cdot|x(s)|^2dtds\Big)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(t,s)|\cdot|y(t)|^2dsdt\Big)^{\frac{1}{2}} \leq c_1^{\frac{1}{2}}c_2^{\frac{1}{2}}\|x\|\|y\|,$$

звідки $\|Ax\| = \sup\limits_{\|y\|=1}\Big|\int\limits_a^b (Ax)(t)y(t)dt\Big| \leq c_1^{\frac{1}{2}}c_2^{\frac{1}{2}}\|x\|$.

2) Розглянути інтегральні оператори $(A_nx)(t) = \int\limits_a^b K_n(t,s)x(s)ds$, $t \in [a,b]$, де $K_n(t,s) = \frac{K_0(t,s)}{|t-s|^\alpha}\chi_{\{|t-s|>\frac{1}{n}\}}$, $(t,s) \in [a,b]^2$. Оператори A_n компактні, бо $K_n \in L_2([a,b]^2)$, $n \geq 1$. За допомогою нерівності з 1) перевірити, що $A_n \rightrightarrows A$, $n \to \infty$.

В9

1. У пунктах 1)–7) скористатися теоремою Асколі–Арцела. У пункті 5) для доведення одностайної неперервності використати, що внаслідок формули Ньютона–Лейбніца та нерівності Коші–Буняковського при всіх $t_1, t_2 \in \in [a,b]$, $t_1 < t_2$, маємо

$$|x(t_2)-x(t_1)|^2 = \Big|\int\limits_{t_1}^{t_2} x'(s)ds\Big|^2 \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} ds\cdot\int\limits_{t_1}^{t_2}|x'(s)|^2ds \leq k_2(t_2-t_1).$$

Компактними є множина з 2), а також множини з 7) і 8) за умови, що вони замкнені.

2. 1), 3, 4) Не компактні. Перевірити, що послідовність $\{Ae_n : n \geq 1\}$ не містить збіжної підпослідовності. 2), 5) Компактні як скінченновимірні. 6) Компактний як рівномірна границя послідовності скінченновимірних операторів.

3. 1), 8) Компактні як скінченновимірні. 2) Компактний як інтегральний оператор Вольтерри з неперервним ядром. 3) Компактний як інтегральний оператор Фредгольма з неперервним ядром. 4)–7) Не компактні. У пунктах 4), 5), 7) показати, що при $x_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$, $n \geq 1$, послідовність $\{Ax_n : n \geq 1\}$ не містить збіжної підпослідовності. У пункті 6) використати, що $A = 3I + B$, де $(Bx)(t) = \int\limits_0^1 e^{ts}x(s)ds$, причому оператор B компактний як інтегральний оператор Фредгольма з неперервним ядром.

4. 1), 2), 4) Компактні як скінченновимірні. 3) Не компактний, бо $A = I+B$, де $(Bx)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$; оператор B компактний як інтегральний оператор Вольтерри з ядром $K \in L_2(\{(t,s)\,|\,0 \le s \le t \le 1\})$. 5) Не компактний, бо $A = B+C$, де $(Bx)(t) = t^2 x(t)$ та $(Cx)(t) = \int\limits_0^1 e^{s+t}x(s)ds$, причому оператор B не компактний внаслідок задачі 7(2) з **А9**, а оператор C компактний як скінченновимірний. 6) Компактний як інтегральний оператор Вольтерри з ядром $K \in L_2(\{(t,s)\,|\,0 \le s \le t \le 1\})$. 7) Компактний як інтегральний оператор Фредгольма з ядром $K \in L_2([0,1]^2)$.

5. 1)–3) Ні. У пункті 1) довести, що послідовність $\{Ae_n : n \ge 1\}$ не містить збіжної підпослідовності. У пунктах 2), 3) показати, що при $x_n(t) = e^{int}$, $t \in [0,1]$, $n \ge 1$, послідовність $\{Ax_n : n \ge 1\}$ не містить збіжної підпослідовності.

7. 1), 2) Ні. 3) Так.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функціональний аналіз. – Львів, І.Е. Чижиков, 2014.

[2] Брайман В.Б., Константінов О.Ю., Кукуш О.Г., Мішура Ю.С., Нестеренко О.Н., Чайковський А.В. Збірник задач з функціонального аналізу. Видання друге, виправлене і доповнене. — К., 2023.

[3] Городецький В.В., Нагнибіда М.І., Настасієв П.П. Методи розв'язування задач з функціонального аналізу. У 2 ч. — К., Ін-т математики НАН України, 1997.

[4] Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри: підручник. – Львів, І.Е. Чижиков, 2012.

[5] Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К., Вища школа, 1974.

[6] Константінов О.Ю. Функціональний аналіз. – К., 2021.

[7] Akhiezer N. I., Glazman I. M. Theory of linear operators in Hilbert space. New York, Dover Publ., 1993.

[8] Halmos P. R., A Hilbert space problem book. 2nd ed. New York – Berlin, Springer-Verlag, 1982.

[9] Kantorovich L. V., Akilov G. P. Functional analysis. 2nd edition. Oxford–Elmsford, New York, Pergamon Press, 1982.

[10] Kirillov A. A., Gvishiani A. D. Theorems and problems in functional analysis. New York – Berlin, Springer-Verlag, 1982.

[11] Lusternik L. A., Sobolev V. J. Elements of functional analysis. New York, John Wiley& Sons, 1974.

[12] Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis. 2nd ed. New York, Academic Press, 1980.

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел.

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел.

$\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел.

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел.

$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел.

$\mathbb{K}$ — числове поле ($\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$).

$C(M)$ — множина функцій зі значеннями в полі $\mathbb{K}$, неперервних на множині M.

$C^n(M)$ — множина функцій зі значеннями в полі $\mathbb{K}$, які мають n неперервних похідних на множині M.

$C^\infty(M)$ — множина функцій зі значеннями в полі $\mathbb{K}$, які є нескінченно диференційовними на множині M.

$R([a,b])$ — клас функцій, інтегровних за Ріманом на відрізку $[a,b]$.

$BV([a,b])$ — клас функцій обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$.

$BV_0([a,b]) = \{f \in BV([a,b]) \,|\, f$ — неперервна справа на (a,b), $f(a)=0\}$.

$V(f,[a,b])$ — варіація функції f на відрізку $[a,b]$.

$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$ — характеристична функція множини A.

m — міра Лебега у просторі $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$.

$f_n \to f \,(\mathrm{mod}\,\mu)$ — послідовність функцій $\{f_n : n \geq 1\}$, збігається до функції f майже скрізь відносно міри μ при $n \to \infty$.

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$, $n \to \infty$, — послідовність функцій $\{f_n : n \geq 1\}$ збігається до функції f за мірою μ.

$f_n \rightrightarrows f$, $n \to \infty$, — послідовність функцій $\{f_n : n \geq 1\}$ збігається до функції f рівномірно на заданій множині.

$\int\limits_A f(x)d\mu(x)$ — інтеграл Лебега від функції f по множині A відносно міри μ.

$\int\limits_A f(x)dx$ — інтеграл Лебега від функції f по множині A відносно міри Лебега m.

$\| \cdot \|$ (заняття 1) — норма в лінійному нормованому просторі (ЛНП).

$B(x_0, r)$ (заняття 1) — відкрита куля в ЛНП з центром в точці x_0 і радіусом $r \geq 0$.

$\overline{B}(x_0, r)$ (заняття 1) — замкнена куля в ЛНП з центром в точці x_0 і радіусом $r \geq 0$.

$S(x_0, r)$ (заняття 1) — сфера в ЛНП з центром в точці x_0 і радіусом $r \geq 0$.

$\rho(x, A)$ (заняття 1) — відстань від точки x до множини A.

$\text{л.о.}(M)$ (заняття 1) — лінійна оболонка множини M.

$\text{з.л.о.}(M)$ (заняття 1) — замкнена лінійна оболонка множини M.

$\dim X$ (заняття 1) — розмірність простору X.

$L_p(T, \mu) = L_p(T, \mathcal{F}, \mu)$ (заняття 1) — простір $\mathcal{F}$-вимірних функцій, модуль яких інтегровний в p-му степені на T відносно міри μ, $1 \leq p < +\infty$.

$L_p(T)$ (заняття 1) — простір вимірних за Лебегом функцій, модуль яких інтегровний в p-му степені на борелевій множині $T \subset \mathbb{R}^n$ відносно міри Лебега m, $1 \leq p < +\infty$.

$L_\infty(T, \mu) = L_\infty(T, \mathcal{F}, \mu)$ (заняття 1) — простір $\mathcal{F}$-вимірних істотно обмежених відносно міри μ функцій на T.

$L_\infty(T)$ (заняття 1) — простір вимірних за Лебегом істотно обмежених відносно міри Лебега m функцій на борелевій множині $T \subset \mathbb{R}^n$.

l_p (заняття 1) — простір послідовностей зі скінченною нормою $\| \cdot \|_p$.

$e_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, 0, \ldots),\ n \geq 1$ (заняття 1) — стандартний базис у просторі l_p при $1 \leq p < +\infty$, лінійно незалежна система у просторі l_∞.

$\| \cdot \|_p$ (заняття 1) — норма на $L_p(T), l_p, \mathbb{R}^m$ або $\mathbb{C}^m$, $1 \leq p \leq +\infty$.

$(\cdot, \cdot)$ (заняття 2) — скалярний добуток.

$\overline{z}$ — число, спряжене до комплексного числа z.

$x \perp y$ (заняття 2) — вектор x ортогональний вектору y.

$M^\perp$ (заняття 2) — ортогональне доповнення множини M у передгільбертовому просторі.

$\operatorname{pr}_M x$ (заняття 2) — проекція (ортогональна) вектора x на множину M.

$M \oplus N$ (заняття 2) — ортогональна сума множин M і N.

X^* (заняття 3) — простір, спряжений до ЛНП X.

$\operatorname{Ker} f$ (заняття 3) — ядро функціонала f.

$x_n \xrightarrow{w} x,\ n \to \infty$ (заняття 4) — послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ елементів ЛНП слабко збігається до елемента x.

$f_n \xrightarrow{*-w} f,\ n \to \infty$ (заняття 4) — послідовність $\{f_n : n \geq 1\}$ лінійних неперервних функціоналів $*$-слабко збігається до лінійного функціонала f.

$\mathcal{L}(X_1, X_2)$ ($\mathcal{L}(X)$) (заняття 5) — простір лінійних неперервних операторів, що діють з ЛНП X_1 в ЛНП X_2 (діють з ЛНП X в ЛНП X).

$\operatorname{Ker} A$ (заняття 5) — ядро лінійного оператора A.

$R(A)$ (заняття 5) — множина значень лінійного оператора A.

$A_n \rightrightarrows A,\ n \to \infty$ (заняття 6) — послідовність лінійних неперервних операторів $\{A_n : n \geq 1\}$ рівномірно збігається до лінійного оператора A.

$A_n \xrightarrow{s} A,\ n \to \infty$ (заняття 6) — послідовність лінійних неперервних операторів $\{A_n : n \geq 1\}$ сильно збігається до лінійного оператора A.

$A_n \xrightarrow{w} A,\ n \to \infty$ (заняття 6) — послідовність лінійних неперервних операторів $\{A_n : n \geq 1\}$ слабко збігається до лінійного оператора A.

A^{-1} (заняття 7) — оператор, обернений до оператора A.

A^* (заняття 8) — оператор, спряжений до оператора A, що діє в гільбертовому просторі.

$A \geq 0$ (заняття 8) — оператор A є невід'ємним.

P_G (заняття 8) — ортопроектор у гільбертовому просторі на підпростір G.

$S_\infty(X_1, X_2)$ ($S_\infty(X)$) (заняття 9) — простір компактних операторів, що діють з ЛНП X_1 в ЛНП X_2 (діють у ЛНП X).