КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З

МАТЕМАТИЧНИХ ОСНОВ ЙМОВІРНІСНОЇ ТЕОРІЇ ІНВЕСТУВАННЯ

для студентів освітньої програми
"Актуарна та фінансова математика"

2024

Збірник завдань до практичних занять з математичних основ ймовірнісної теорії інвестування/ упоряд. А. В. Лужняк, В. М. Радченко. – Електронне видання, 2024 р. – 44 с.

Упорядники:
Лужняк Анна Вікторівна, магістр за освітнім напрямком "Актуарна та фінансова математика";
Радченко Вадим Миколайович, доктор фіз.-мат. наук, професор (відповідальний за випуск).

Рецензенти:
Станжицький Олександр Миколайович, доктор фіз.-мат. наук, професор;
Боднарчук Семен Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент.

Затверджено Вченою Радою механіко–математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 9 від 23 січня 2024 р.).

Рекомендовано для студентів першого року магістратури освітнього напрямку "Актуарна та фінансова математика".

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Програма даного курсу створена на основі матеріалів для іспиту CM2 – фінансова інженерія та резервування втрат (за попередніми класифікаціями, CM2 – фінансова математика та резервування втрат, CT8 – фінансова економіка), що проводиться Інститутом та факультетом актуаріїв з Великої Британії, див actuaries.org.uk. Значну кількість задач даного посібника взято з матеріалів цих іспитів.

Для успішної роботи з курсом необхідними є знання основ теорії ймовірностей, бажаними – теорії випадкових процесів, стохастичного аналізу.

Посібник розраховано на проведення 7 практичних занять. В кожному занятті задачі частини А пропонуються для аудиторної роботи, частини Б – для домашнього завдання. До всіх задач наведено розв'язання.

Відмітимо, що в розв'язаннях числові рівності, як правило, записуються з певними округленнями (строго кажучи, в цих випадках треба було використовувати знак "$\approx$" замість "$=$").

Бажаємо успіхів в роботі з матеріалом посібника!

ЗАНЯТТЯ 1
МІРИ ІНВЕСТИЦІЙНОГО РИЗИКУ. ТЕОРІЯ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ (МРТ)

Контрольні запитання

1. *Поняття дисперсії, напівдисперсії, ймовірності недостачі, значення ризикованості.*
2. *Основні припущення теорії інвестиційного портфеля (Modern Portfolio Theory, MPT).*
3. *Знаходження портфеля найменшої дисперсії.*
4. *Вибір оптимального портфеля для інвестора.*

А1.

1.1. Інвестор бажає оцінити інвестиційний ризик для акції, дохід за якою має наступний розподіл:

Стан	Дохід	Ймовірність
1	10%	0.5
2	20%	0.3
3	50%	0.2

(i) Обчислити міри інвестиційного ризику для цієї акції. Де необхідно, можна припустити, що граничний рівень дорівнює 25%.

(ii) (a) Вказати дві ключові властивості значення ризикованості (VaR).

(b) Значення ризикованості часто обчислюється за умови нормального розподілу доходів. Напишіть переваги і недоліки цього підходу.

1.2. Інвестор розглядає інвестицію з доходом R грн,

$$R = 300,000 - 500,000U,$$

де випадкова величина U має рівномірний розподіл на [0,1]. Обчислити кожну з наступних чотирьох мір ризику:

(i) дисперсію доходу;

(ii) нижню напівдисперсію доходу;

(iii) ймовірність недостачі, де граничний рівень дорівнює 100,000 грн;

(iv) значення ризикованості на рівні 5%.

1.3. Інвестор розглядає інвестицію з доходом, розподіл якого має щільність

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0.5, \\ c/t^4, & t \geq 0.5, \end{cases}$$

де $c = 0.375$, усі значення доходу дано в мільйонах грн.
При цьому величина початкової інвестиції дорівнює 0.7 млн грн. Обчислити наступні дві міри ризику:

(i) нижню напівдисперсію доходу;

(ii) значення ризикованості на рівні 5% для величини чистого прибутку.

1.4. Інвестор може побудувати портфель використовуючи тільки дві акції A і B з наступними властивостями:

	A	B
Дисперсія доходу	24%%	12%%
Коефіцієнт кореляції між доходами акцій	0.25	

(i) Визначити склад портфеля інвестора з найменшою дисперсією.

(ii) Пояснити переваги диверсифікації в загальному випадку.

1.5. Три акції мають наступні характеристики:

Акція (i)	Сподівання прибутку (E_i)	Середньоквадратичне відхилення прибутку (σ_i)
1	6%	5%
2	7%	15%
3	8%	20%

Коефіцієнт кореляції між доходами будь-яких двох акцій дорівнює 0.5.

(i) Записати функцію Лагранжа, з допомогою якої можна знайти портфель з мінімальною дисперсією, сподівання прибутку якого дорівнює 7%.

(ii) Взявши частинні похідні у (i), записати п'ять рівнянь, які можна розв'язати, щоб визначити портфель з мінімальною дисперсією, пов'язаний з очікуваним прибутком 7% . (Не потрібно знаходити портфель з мінімальною дисперсією.)

(iii) Визначити склад кутового портфеля з мінімальною дисперсією, в якому немає активу 1.

1.6. Три акції мають наступні характеристики:

Акція (i)	Сподівання прибутку (E_i)	Середньоквадратичне відхилення прибутку (σ_i)
1	5%	10%
2	8%	20%
3	10%	30%

Коефіцієнт кореляції між доходами для кожної пари акцій дорівнює 0.2.

Отримайте рівняння межі ефективності для портфелів, складених з вказаних акцій, на координатній площині (E, σ).

Б1.

1.7. Інвестор розглядає інвестицію з доходом R грн,

$$R = 250,000 - 100,000N,$$

де випадкова величина N має нормальний розподіл з параметрами (1, 1). Обчислити кожну з наступних чотирьох мір ризику:

(a) дисперсію доходу;

(b) нижню напівдисперсію доходу;

(c) ймовірність недостачі, де граничний рівень дорівнює 50,000 грн;

(d) значення ризикованості на рівні 5%.

1.8. Написати вирази для наступних мір інвестиційного ризику:

(i) (a) дисперсії доходу;
(b) нижньої напівдисперсії доходу.

Нехай доход R має показниковий розподіл з параметром $\lambda = \frac{1}{2}$. Знайти значення:

(ii) (a) дисперсії доходу;
(b) нижньої напівдисперсії доходу.

1.9. Акції A і B мають наступні розподіли доходів у різних станах:

Стан	Акція A	Акція B	Ймовірність
1	10%	-2%	0.2
2	8%	15%	0.2
3	25%	0%	0.3
4	-14%	6%	0.3

(i) Обчислити коефіцієнт кореляції між доходами акції A і акції B.

(ii) Обчислити частку інвестиції, які слід інвестувати в акцію A, щоб отримати портфель з мінімальним ризиком.

(iii) Інвестор вирішує тримати 25% свого статку у акції A і 75% у акції B. Обчислити найменше значення коефіцієнта кореляції між доходами від A і B, для яких інвестор отримує переваги диверсифікації, утримуючи 25% інвестиції у акції A. (Припускаємо, що дисперсії не змінилися.)

ЗАНЯТТЯ 2

МОДЕЛІ ДОХОДУ ВІД АКЦІЙ. МОДЕЛІ ОЦІНЮВАННЯ АКТИВІВ (CAPM)

Контрольні запитання

1. *Багатофакторні моделі.*
2. *Основні припущення моделі оцінювання активів (Capital Asset Pricing Model, CAPM).*
3. *Портфель ринку (Market Portfolio).*
4. *Ринкова пряма капіталу (Capital Market Line).*
5. *Ринкова ціна ризику (Market Price of Risk).*

A2.

2.1. Нехай дана наступна інформація для доходу від цінних паперів I та Z:

	I	Z
α	0.04	0.09
β	1.20	1.50
σ_ε	0.25	0.40

$\mathsf{E}(R_\mathsf{M}) = 0.16$ і σ_M=0.20.

Процес генерації доходів виглядає наступним чином:

$$R = \alpha + \beta R_\mathsf{M} + \varepsilon,$$

$$\sigma^2 = \beta^2 \sigma_\mathsf{M}^2 + \sigma_\varepsilon^2,$$

де R – випадкова величина, яка представляє величину доходу, отриманого від цінного паперу; R_M – випадкова величина, яка представляє величину доходу на ринку; ε – випадкова складова, що не пов'язана з ринком; σ^2,σ_M^2 і σ_ε^2 – дисперсії величини доходу від цінного паперу, величини доходу на ринку і ε відповідно. Випадкові величини ε для цінних паперів I та Z не корелюють між собою і їх математичне сподівання рівне нулю.

Обчислити:

(i) математичне сподівання і дисперсію величини доходу від кожного цінного паперу;

(ii) коваріацію між величинами доходу цінних паперів;

(iii) бета-множник портфеля з рівними долями двох цінних паперів;

(iv) очікуваний дохід і дисперсію портфеля з рівними долями двох цінних паперів.

2.2. Інвестор може інвестувати тільки у дві акції з наступними характеристиками (щорічно):

Акція	Сподівання прибутку (E)	Середньоквадратичне відхилення прибутку (σ)
A	10%	20%
B	5%	0%

(i) Показати, що межею ефективності для інвестора є пряма лінія, що проходить через точки (0, 0.05) та (0.1, 0.075) на координатній площині (σ, E).

Третя акція C стає доступною для інвестора. Вона має річний очікуваний прибуток 6% та річне стандартне відхилення 10%. Вона некорельована з A і B .

(ii) Визначити портфель, використовуючи лише A та C, які максимізують:

$$\frac{\text{очікуваний прибуток} - 5\%}{\text{стандартне відхилення}}.$$

(iii) Використовуючи (ii), або іншим способом показати, що нова межа ефективності, яка використовує A, B і C проходить через точку (0.1,0.0769).

2.3. Інвестор має право вибору із наступних акцій, які забезпечують такі ставки доходу в кожному з чотирьох можливих станів:

Стан	Ймовірність	Акція 1	Акція 2	Акція 3
1	0.2	5%	5%	6%
2	0.3	5%	12%	5%
3	0.1	5%	3%	4%
4	0.4	5%	1%	7%
Капіталізація акцій		10.000	17.546	82.454

Знайти ринкову ціну ризику, якщо припущення CAPM справджуються.

2.4. На ринку є три типи акцій A, B і C з капіталізацією 22 млрд грн, 33 млрд грн і 22 млрд грн відповідно. Річні доходи трьох ризикових цінних паперів (R_{A}, R_{B} і R_{C}) мають наступні характеристики:

Акція	Стандартне відхилення
A	40%
B	20%
C	10%

Очікуваний дохід від ринкового портфелю дорівнює 22.86% щорічно.
Кореляція між доходами кожної пари окремих цінних паперів становить 0.5.
Безризикова ставка доходу – 3.077% щорічно. Протягом року коригування портфеля інвестора неможливе.

(i) Показати, що очікуваний дохід від A, B і C дорівнює 40%, 20% і 10% відповідно, якщо припущення CAPM дані.

(ii) Побудувати одноіндексну модель (з індексом R_{M} – доходу від ринкового портфеля) з таким ж очікуваними доходами і дисперсіями, що і в CAPM. Вам потрібно обчислити значення всіх параметрів в моделі.

(iii) Показати, що одноіндексна модель не повністю узгоджується з моделлю CAPM.

2.5. (i) (a) Звичайна одноіндексна модель визначається наступним чином:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_{\mathsf{M}} + \varepsilon_i,$$

де R_i – величина доходу, від i-го цінного паперу,
α_i, β_i – специфічні параметри цінного паперу,
R_{M} – величина доходу на ринку,
ε_i – випадкова величина з нульовим математичним сподіванням,

$$\mathsf{Cov}\,(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad i \neq j,$$

$$\mathsf{Cov}\,(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = \sigma^2_{\varepsilon_i}.$$

Детально пояснити зменшення об'єму даних, досягнутих за допомогою моделі, які є необхідними для вибору середньоквадратичного портфеля.

(b) Якщо кількість цінних паперів, що аналізуються, дорівнює 50, яка різниця між кількістю елементів даних, необхідних для одноіндексної моделі і повної коваріаційної моделі?

(ii) Пояснити основну концептуальну різницю між одноіндексною моделлю і базовою моделлю CAPM.

(iii) Припустимо, що бета-множник цінного паперу, оцінений на основі історичних даних за 60 місяців, становить 1.5.
Протягом наступних 12 місяців, індекс доходу від акцій на ринку становить 10%. Дохід від безризикової акції за цей самий період становить 5%.

(a) Який очікуваний дохід від цінного паперу згідно CAPM?

(b) Припустимо, що дохід від цінного паперу становить 6%. Вказати чотири причини, по яким реалізований дохід не співпадає з відповіддю на питання (a).

2.6. Припустимо, що виконуються припущення CAPM і прибутковість формується відповідно до форми одноіндексної моделі.

(i) Враховуючи, що річна безризикова ставка доходу становить 5% і очікувана величина доходу на ринку становить 6%, а очікувана величина доходу за обраним портфелем становить 7%, розрахуйте бета-множник вибраного портфеля.

(ii) Коротко поясніть словами, що мається на увазі під систематичним та специфічним ризиком.

(iii) Обчисліть систематичний та специфічний ризики (тобто, відповідні дисперсії) акції з очікуваним доходом 5,5% і стандартним відхиленням доходу 30%. Припустимо, що очікувана величина доходу від портфеля на ринку і безризикова ставка доходу така ж як і в частині (i), а стандартне відхилення доходу портфеля на ринку складає 20%.

Б2.

2.7. Розглянемо багатофакторну модель доходу цінних паперів за один період:

$$R_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{K} \beta_{ij} I_j + \varepsilon_i,$$

де:
R_i – величина доходу, отриманого від i-го цінного паперу,
α_i, β_{ij} – специфічні параметри цінного паперу,
ε_i – незалежні випадкові складові доходу, які також незалежні від всіх I_j,
I_j – незалежні величини, що виражають зміни факторів.

(i) Виведіть вираз для коваріації між величинами доходів двох цінних паперів з точки зору статистичних властивостей факторів, використовуючи модель вище.

(ii) Поясніть значення вашого виразу в (i) для побудови диверсифікованого портфеля.

2.8. В наступній таблиці наведені доходи всіх чотирьох акцій на інвестиційному ринку в трьох можливих станах.

	Акції				
Стан	A	B	C	D	Ймовірність
1	5%	5%	5%	2%	0.3
2	4%	7%	5%	6%	0.2
3	7%	3%	5%	9%	0.5
Капіталізація акцій	10,000	20,000	невідомо	10,000	

(i) Обчисліть ринкову ціну ризику за CAPM.

(ii) Опишіть обмеження CAPM.

2.9. Інвестиційний ринок складається з наступних чотирьох ризикових акцій:

Акція i	Очікуваний дохід E_i	Ринкова капіталізація
1	5%	250,000
2	7%	250,000
3	9%	750,000
4	10%	50,000

Додатково інвестори можуть інвестувати у безризикову акцію з величиною доходу 3% щорічно.
Припустимо, що прибутковість акцій некорельована і виконуються припущення CAPM.

(i) Визначте склад портфеля, який вибере раціональний інвестор, якщо він бажає очікуваний дохід 6%.

(ii) Звертаючись до математичної форми CAPM, вкажіть чотири причини, через які фактична прибутковість портфеля в (i) буде змінюватися протягом наступних років.

ЗАНЯТТЯ 3
ГІПОТЕЗА ЕФЕКТИВНИХ РИНКІВ. СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ ЦІН ЦІННИХ ПАПЕРІВ. БРОУНІВСЬКИЙ РУХ І СТОХАСТИЧНЕ ЧИСЛЕННЯ

Контрольні запитання

1. *Три форми гіпотези ефективних ринків (Efficient Market Hypothesis, EMH).*
2. *Логнормальна модель.*
3. *Модель Вілкі (Wilkie model).*
4. *Броунівський рух.*
5. *Формула Іто. Стохастичні диференціальні рівняння.*

А3.

3.1. (i) Опишіть форми гіпотези ефективних ринків(EMH).

(ii) Окреслити роль, яку мають менеджери портфелів, навіть якщо ринок ідеальний і повністю ефективний.

3.2. Розглянемо наступні моделі з дискретним часом для цін акцій та ставок дивідендів:

$$\ln S_{t+1} = \ln S_t + \mu + \sigma Z_{t+1},$$

$$\ln D_{t+1} = \ln \delta + \alpha(\ln D_t - \ln \delta) + \eta W_{t+1},$$

де S_t – ціна акції в час t, D_t – ставка дивідендів в час t. Випадкові величини W_t, Z_t мають розподіл $N(0,\ 1)$, корелюють між собою для рівних t і не корелюють для різних, μ, σ, δ і η є додатними параметрами та $0 < \alpha < 1$.

(i) Пояснити величину і знак коефіцієнта кореляції, якого Ви очікуєте між W_t і Z_t (не потрібно обчислювати коефіцієнт кореляції чи виводити для нього вираз).

(ii) Вказати дві властивості моделі доходів від дивідендів і прокоментувати їх реалізм.

(iii) Вказати три властивості моделі ціни акцій і прокоментувати їх із врахуванням емпіричних даних та, якщо це доречно, гіпотези ефективних ринків.

3.3. Модель Вілкі пропонує процес авторегресії $AR(1)$ для сили інфляції $I(t)$, який можна записати так:

$$I(t) = a + bI(t-1) + \varepsilon(t),$$

де $\varepsilon(t)$ має розподіл $N(0, \sigma^2)$, a та b є константами, $-1 < b < 1$.

(i) Вивести вираз для довгострокової середньої сили інфляції через a та b.

(ii) Навести економічне обґрунтування використання процесу $AR(1)$ в моделі інфляції.

(iii) Пояснити, чому модель наведеної вище форми, не підходить для цін на акції.

(iv) Пояснити, чому для розрахунку цін на акції можна використовувати логнормальну модель, і вкажіть її слабкі сторони.

3.4. Нехай Z — випадкова величина, що має стандартний нормальний розподіл. Довести, що процес $X(t) = \sqrt{t}Z$ має ті ж одновимірні розподіли, що й вінерівський процес, але не є вінерівським.

3.5. Знайти стохастичний диференціал $dZ(t)$, якщо:

(i) $Z(t) = e^{\alpha t}$;

(ii) $Z(t) = \int\limits_0^t g(s)\, dW(s)$;

(iii) $Z(t) = \exp\{\alpha X(t)\}$, де процес X має стохастичний диференціал $dX(t) = \mu\, dt + \sigma\, dW(t)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

3.6. Нехай процес $X(t)$ має стохастичний диференціал $dX(t) = \alpha X(t)\, dt + \sigma(t)\, dW(t)$, де $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathsf{L}_2$. Знайти $m(t) := \mathsf{E}[X(t)]$.

3.7. Нехай $Z(t) = \exp\{\alpha t + \beta W(t)\}$. Знайти стохастичне диференціальне рівняння, розв'язком якого є $Z(t)$.

Б3.

3.8. Прокоментувати наступне твердження: існування фондових менеджерів, які продають свої послуги на підставі їх здатності вибирати найбільш ефективні сектори і акції і таким чином збільшувати вартість портфелів, демонструє, що ринки капіталу неефективні.

3.9. В моделі Вілкі сила інфляції від часу $t-1$ до t, моделюється як

$$I(t) = Qmu + QA[I(t-1) - Qmu] + QSD \cdot QZ(t),$$

де $QZ(t)$ має розподіл $N(0,1)$, Qmu, QA та QSD є фіксованими параметрами:

$$Qmu = 0.03, \quad QA = 0.55, \quad QSD = 0.045.$$

Побудувати 95% довірчий інтервал для сили інфляції в наступному році, враховуючи, що інфляція в минулому році склала 2,75%.

3.10. Нехай $W(t)$ і $\widehat{W}(t)$ — два незалежні вінерівські процеси, $|\rho| \leq 1$. Довести, що процес

$$X(t) := \rho W(t) + \sqrt{1-\rho^2}\,\widehat{W}(t)$$

є вінерівським.

3.11. Знайти стохастичний диференціал $dZ(t)$, якщо:

(i) $Z(t) = e^{\alpha W(t)}$;

(ii) $Z(t) = X^{-1}(t)$, де $dX(t) = \alpha X(t)\,dt + \sigma X(t)\,dW(t)$;

(iii) $Z(t) = X^n(t), n \in \mathbb{N}$, де $dX(t) = \alpha X(t)\,dt + \sigma X(t)\,dW(t)$.

ЗАНЯТТЯ 4
ВСТУП ДО ОЦІНЮВАННЯ ПОХІДНИХ ЦІННИХ ПАПЕРІВ. БІНОМІАЛЬНА МОДЕЛЬ

Контрольні запитання

1. *Умова відсутності арбітражу.*
2. *Внутрішня вартість цінного паперу.*
3. *Ціна форвардного контракту.*
4. *Паритет продажу та купівлі (put-call parity).*
5. *Біноміальна модель. Міра, нейтральна до ризику (risk-neutral measure).*
6. *Дефляторний підхід в оцінюванні.*

А4.

4.1. На ринку є акція з поточною вартістю 10 грн, безризикова ставка складає 7% річних (і нараховується неперервно). Визначити справедливу ціну форвардного контракту на цю акцію з виконанням через 20 місяців, якщо:

(i) за акцією не сплачуються дивіденди;

(ii) за акцією виплачуються дивіденди в розмірі 3% від ціни акції кожні 6 місяців, і наступні дивіденди виплачуються через місяць.

4.2. Акція в даний час коштує 600 грн. Ціна шестимісячного Європейського опціону купівлі з ціною виконання 620 грн дорівнює 42 грн. Обчислити ціну шестимісячного Європейського опціону продажу з такою ж ціною виконання, якщо безризикова відсоткова ставка складає 7% річних і дивіденди не виплачуються протягом строку дії опціону. Сформулюйте припущення, які ви робите в цьому розрахунку.

4.3. Поточна ціна на акцію дорівнює 110 грн. Ціна Європейського опціону продажу, що дає право продажу однієї акції за страйковою ціною 120 грн, дорівнює 14 грн.

(i) Обчислити внутрішню вартість (intrinsic value) опціону.

(ii) Обчислити поточну вартість (time value) опціону.

(iii) Вказати фактори, які можуть викликати збільшення поточної вартості без зміни внутрішньої вартості.

(iv) Якщо ціна акції знизиться на 50 грн в момент закінчення дії опціону, обчислити прибуток/збиток для власника і продавця опціону.

(v) Обчислити найбільші можливі збитки для продавця опціонів.

4.4. Розглянемо двоперіодну біноміальну модель зміни ціни акції, кожен період – один рік. Початкова ціна акції S_0 складає 100 грн, в кожен період ціна або збільшується на 40%, або зменшується на 20%. Річна безризикова ставка r дорівнює 5%.

(i) Дати означення можливості арбітражу. Показати, що в цій моделі відсутній арбітраж.

(ii) Обчислити значення p та q для безризикової мартингальної міри для даної акції.

(iii) Знайти справедливу ціну Європейського опціону купівлі (call option), що дає право покупки однієї акції за страйковою ціною $K = 120$ грн в час $T = 2$.

(iv) Знайти справедливу ціну деривативу, за яким в час $T = 2$ сплачуються 50 грн тоді і тільки тоді, коли ціна акції за вказаний період змінилася не менше ніж на 20 грн.

4.5. Розглянемо двоперіодну біноміальну модель зміни ціни акції. Початкова ціна акції S_0 складає 100 грн, в кожен період ціна або збільшується на 10%, або зменшується на 5%. Річна безризикова ставка r дорівнює 4% за один період і нараховується неперервно. Розглядається Європейський опціон купівлі, випущений за цією акцією зі страйковою ціною $K = 103$ грн і часом виконання $T = 2$.

Знайти вартість цього опціону двома способами:

(a) використати формулу зі сподіванням відносно мартингальної міри;

(b) побудувати відтворюючі портфелі для даної вимоги на виплату в моменти часу $t = 1$ і $t = 0$, знайти вартість портфеля в момент $t = 0$.

4.6. Акція, за якою не виплачуються дивіденди, має поточну ціну 800 грн. В моменти часу $t = 0$ і $t = 1$ ціна акції або збільшується на 25%, або зменшуються на 20%. Грошова сума, рівна 1 грн на момент часу t, після нарахування відсотків дорівнює 1.04 грн в момент $t + 1$. Ціна базової акції в момент часу t позначається S_t.

(i) Обчислити для цієї моделі ймовірнісну міру, нейтральну до ризику.

(ii) Обчислити ціну (при $t = 0$) деривативу, за яким в час $t = 2$ сплачується 1000 грн тоді і лише тоді, коли $S_2 \neq 800$ грн (в іншому випадку сплачується 0).

4.7. Розглянемо двоперіодну біноміальну модель для акції з ціною S_t, значення S_t змінюється за правилом:

$$S_{t+1} = \begin{cases} S_t u \text{ з ймовірністю } p, \\ S_t d \text{ з ймовірністю } 1 - p, \end{cases}$$

де $u > d > 0$, ud=1, $t = 0,\ 1$. Також існує безризикова ставка, що нараховується неперервно в розмірі 5% за період.

Дефлятор ціни в цій моделі за один період дорівнює:

$$A_1 = \begin{cases} 0.7610 \text{ коли } S_1 = S_0 u, \\ 1.5220 \text{ коли } S_1 = S_0 d. \end{cases}$$

Розглядається дериватив, за яким в момент часу 2 сплачується 1 якщо $S_2 < S_0$. Ціна цього деривативу в момент часу 0 дорівнює 0.1448.

(i) Обчислити значення p.

(ii) Обчислити ймовірнісну міру, нейтральну до ризику.

(iii) Обчислити ціну в момент часу 0 деривативу, за яким виплачується 1 в момент часу 2, якщо $S_2 > S_0$.

4.8. Припустимо, що ціна акції моделюється двоперіодною рекомбінованою біноміальною моделлю з наступними параметрами: $r = 5\%$ – безризикова відсоткова ставка (нараховується неперервно), $\sigma = 40\%$ – волатильність базової акції, $S_0 = 100$ – ціна в час 0, $u = \exp(\sigma/365^{1/2})$ – множник зростання ціни акції за період, $ud = 1$. Припустимо, що для всіх розрахунків 365 днів в році, і що кожний період відповідає одному дню.

Нехай $s_1,\ s_2,\ s_3$ позначають три можливі ціни акцій в кінці другого дня: s_1 позначає ціну акції, отриману в результаті двох кроків вверх, s_2 – результат кроку вгору, а потім вниз (або вниз, а потім вгору), а s_3 – результат двох кроків вниз.

Відомо, що дефлятор цін є наступним:

Стан	Ціна	Дефлятор ціни
1	s_1	0.81977
2	s_2	1.00981
3	s_3	1.24390

(i) Оцінити очікувану норму прибутку на акцію протягом двох днів (виражається як денна ставка).

(ii) Спеціальний тип опціону купівлі із дводенним терміном виконання має наступну функцію виплат:

$$V = \begin{cases} \max(S_2 - 75, 0), \text{ якщо } s < 100, \\ 2(S_2 - 75), \text{ якщо } 100 \leq s < 102, \\ 3(S_2 - 75) \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

(S_2 позначає ціну акції в кінці другого дня.)

Використовуючи наведені вище дефлятори цін, визначити вартість цього спеціального опціону купівлі в момент часу 0.

(iii) Визначаючи портфель хеджування в кожному стані при $t = 0$ і $t = 1$, показати, що значення в (ii) відповідає значенню портфеля хеджування в момент часу 0.

4.9. Розглянемо рекомбіновану біноміальну модель для ціни акції, де:

безризикова відсоткова ставка	$r = 4\%$ щорічно (еквівалентно 0.016% протягом торгового дня),
волатильність	$\sigma = 20\%$ щорічно,
початкова ціна акції	$S_0 = 100.$

Відношення ціни акції після стрибка вгору (вниз) у порівнянні з ціною акції перед стрибком визначається як $u = \exp(\sigma * 250^{-1/2})$ ($d = \exp(-\sigma * 250^{-1/2})$). В році 250 торгових днів і дивіденди ігноруються окрім спеціально визначених.

(i) Обчислити ціну в момент часу 0 опціону продажу Європейського типу з страйковою ціною 101 грн, що має час виконання 2 дні.

(ii) Вивести, використовуючи біноміальну решітку, ціну опціону купівлі Європейського типу з ціною виконання 101 грн, що має час виконання 2 дні.

(iii) Порівняти результат (ii) з результатом (i), використовуючи паритет купівлі і продажу.

Припустимо зараз, що інвестор тримає опціон купівлі та опціон продажу, обидва з ціною виконання 101 грн, які можуть бути виконані по опціону інвестора в кінці дня 1 або в кінці дня 2. В кінці дня 1, перед тим як інвестору буде дозволено виконати опціони, компанія неочікувано оголошує, що дивіденди в розмірі 3 грн на акцію будуть виплачені в кінці дня 2, безпосередньо перед виконанням опціонів.

(iv) (a) Побудувати біноміальну решітку цін акцій, враховуючи виплату дивідендів.

(b) Пояснити умови, при яких тримачі опціонів продажу і купівлі їх виконають в кінці дня 1 після оголошення про дивіденди.

Б4.

4.10. Акція в даний час коштує 100 грн. Ціна Європейського опціону продажу зі страйковою ціною 95 грн дорівнює 5 грн, час виконання опціону – через 9 місяців. Обчисліть ціну Європейського опціону купівлі з такою ж страйковою ціною і тим же часом виконання, якщо безризикова відсоткова ставка складає 5% річних.

4.11. Розглянемо двоперіодну біноміальну модель зміни ціни акції, кожен період — один рік. Початкова ціна акції S_0 складає 200 грн, в кожен період ціна або збільшується на 30%, або зменшується на 20%. Річна безризикова ставка r дорівнює 8%.

(i) Дайте означення можливості арбітражу. Покажіть, що в цій моделі відсутній арбітраж.

(ii) Обчисліть значення p та q для безризикової мартингальної міри для даної акції.

(iii) Знайдіть справедливу ціну Європейського опціону купівлі (call option), що дає право покупки однієї акції за страйковою ціною $K = 210$ грн в час $T = 2$.

(iv) Знайдіть справедливу ціну Європейського опціону продажу (put option), що дає право продажу однієї акції за страйковою ціною $K = 210$ грн в час $T = 2$.

(v) Перевірте виконання паритету продажу та купівлі для двох вказаних опціонів в час $T = 2$.

4.12. Розглядається двоперіодна біноміальна модель. Акція (за якою не сплачуються дивіденди) має початкову ціну $S_0 = 1000$ грн, ціну акції в момент часу t позначаємо через S_t. Перед моментами $t = 1$ і $t = 2$ ціна акції або збільшується на 25%, або зменшується на 20%. Безризикова відсоткова ставка складає 5% за один період.

(i) Знайти ймовірнісну міру, нейтральну до ризику для моделі.

(ii) (a) Знайти ціну опціону, що залежить від шляху, на акцію з моментом закінчення дії опціону $t = 2$, за яким виплачується $S_2 - M_2$, де $M_2 = \min_{0 \le t \le 2} S_t$.

(b) Знайти відтворюючий портфель для цього опціону в момент часу $t = 1$, якщо $S_1 = 800$ грн.

ЗАНЯТТЯ 5
МОДЕЛІ В НЕПЕРЕРВНОМУ ЧАСІ. МОДЕЛЬ БЛЕКА – ШОУЛСА

Контрольні запитання

1. *Припущення моделі Блека – Шоулса.*
2. *Формула Блека – Шоулса.*
3. *Наслідувана волатильність (implied volatility).*

А5.

5.1. Дано модель Блека–Шоулса, в якій ціна акції задовольняє стохастичне рівняння

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t), \quad \mu = 0.1, \quad \sigma = 0.2.$$

Річна безризикова ставка $r = 0.05$ (ставка нараховується неперервно). Початкова ціна акції S_0 складає 130 грн.

(i) Знайти справедливу ціну Європейського опціону купівлі (call option), що дає право купівлі однієї акції за страйковою ціною $K = 130$ в час $T = 1$.

(ii) Знайти справедливу ціну Європейського опціону продажу (put option), що дає право продажу однієї акції за страйковою ціною $K = 120$ в час $T = 0.5$.

5.2. Дано модель Блека–Шоулса, в якій ціна акції задовольняє стохастичне рівняння

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t), \quad \mu = 0.2.$$

Річна безризикова ставка $r = 10\%$ (ставка нараховується неперервно). Початкова ціна акції S_0 складає 100 грн.

Відомо, що справедлива ціна Європейського опціону купівлі зі страйковою ціною $K = 100$ грн і часом виконання $T = 1$ рік дорівнює 15 грн.

(i) Знайти значення σ (наслідувану волатильність, implied volatility) з точністю ± 0.02.

(ii) Використовуючи знайдене значення σ, знайти ймовірність $\mathsf{P}\{S_1 > 105\}$.

5.3. Роботодавець укладає договір зі своїм персоналом: він передасть кожному із них по 1000 акцій через один ріку за умови, що ціна акцій збільшиться з поточного рівня 1 грн до рівня не меншого ніж 1.5 грн в кінці року. Припустимо, що має місце модель Блека – Шоулса з наступними параметрами:

- безризикова відсоткова ставка: 4% річних,
- волатильність базової акції: 30% річних.

(i) Обчислити поточну вартість контракту з кожним працівником, враховуючи формулу Блека – Шоулса.

Тепер роботодавець хоче обмежити прибуток кожного працівника (загальну вартість акцій, що він отримає) зверху значенням 2000 грн.

(ii) Обчислити поточну вартість цього переглянутого контракту.

(iii) Працівник заявив, що вважає, що початковий контракт без обмеження коштує 300 грн. Він визначив це, сказавши, що на його думку, існує 30% шанс того, що ціна акції становитиме не менше 1.5 грн, тому 30%$\times$ 1000 грн=300 грн.

   (a) Порівняти підхід працівника і підхід, який використовується у (i).

   (b) Прокоментувати наслідки порівняння у (iii)(a) для випадку, якщо б в таких контрактів існував ринок.

5.4. (i) За спеціальним опціоном на акцію виплачується 1 грн в момент часу T тоді і тільки тоді, коли ціна акції в момент часу T знаходиться на інтервалі $[a, b]$.

Довести, що ціна такого опціону в час 0 визначається як

$$e^{-rT}[\Phi(d(b)) - \Phi(d(a))], \quad \text{де} \quad d(x) = \frac{\ln(x/S_0) - (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

де Φ – функція стандартного нормального розподілу, S_0 – ціна базової акції, r – ставка безризикового прибутку і σ – параметр волатильності процесу зміни акцій в моделі Блека – Шоулса.

За початковим договором, керуючий фондом в кінці річного контракту стягує щорічну комісію за управління в розмірі 0.5% від вартості коштів, що знаходяться в управлінні в момент $t = 0$.

Вартість коштів, що знаходяться в управлінні, регулюється наступним СДР:

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t),$$

де S_t – вартість коштів під управлінням, W_t – стандартний броунівський рух, $\mu = 0.08$, $\sigma = 0.25$, час вимірюється в роках.

Фонди не приносять доходу протягом року. Безризикова відсоткова ставка складає 5% річних.

Власник фондів бажає змінити розмір комісії за управління, щоб вона залежала від результатів діяльності.

Зокрема, розмір комісії KS_1 встановлюється наступним чином так, що:

$$K = \begin{cases} 0.1\% \text{ якщо } S_1 < S_0, \\ 1\% \text{ якщо } S_1 > U, \\ 0.5\% \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

(ii) Обчислити розмір комісії за управління в момент часу 0 при початковій структурі комісійних, якщо $S_0 = 100$.

(iii) Розрахувати $U > S_0$ так, щоб розмір комісії KS_1 на момент часу 0 мав ту ж саму вартість, що і фіксована комісія в (ii).

Вказівка: комісія може бути записана як базова комісія плюс два опціони купівлі плюс два опціони, аналогічні розглянутим в (i).

5.5. Існує платіжне зобов'язання, за яким потрібно виплатити 10,000 грн рівно через один рік. В даний час у фонді, створеному для виконання цього зобов'язання, є 9,000 грн, і вони інвестуються в акції без дивідендів з ціною S_t, що задовольняють рівняння

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t),$$

де $\mu = 0.10$, $\sigma = 0.20$, t – час в роках, $S_0 = 1$, безризикова відсоткова ставка складає 5% річних.

(i) Обчислити наступні міри ризику, застосовані до надлишку схеми, де надлишок схеми визначається як різниця між вартістю фонду та зобов'язанням на кінець року:

(a) дисперсію;

(b) ймовірність недостачі відносно рубіжного рівня в 0 грн.

(ii) Обчислити вартість опціону продажу, який захищає нас від негативного надлишку в кінці року. (Тобто, яку суму треба сплатити зараз, щоб гарантувати отримання 10,000 грн від даних акцій в кінці року.)

5.6. Інвестор купує опціон купівлі на бездивідендну акцію за ціною 187.06 грн, поточна ціна акції складає 5,000 грн. Страйкова ціна опціону дорівнює 5,250 грн і час виконання – 6 місяців. Безризикова відсоткова ставка за цей період складає 5% в рік.

(i) Обчислити ціну опціону продажу з тим же часом виконання і страйковою ціною, як і в опціону купівлі.

(ii) Інвестор купує опціон продажу зі страйковою ціною 4,750 і з тим же часом виконання. Обчислити ціну опціону продажу, якщо волатильність була такою ж, як і в (i). (Необхідно оцінити волатильність з точністю до 1%.)

Зобразити графік доходу інвестора в залежності від S_T, якщо інвестор купує опціон продажу з $K = 4.750$ і опціон купівлі з $K = 5.250$ одночасно.

(iii) Пояснити, чому ринкова ціна опціону продажу може відрізнятися від обчисленої в (ii).

Б5.

5.7. Дано модель Блека – Шоулса, в якій ціна акції задовольняє стохастичне рівняння

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t), \quad \mu = 0.1, \quad \sigma = 0.3.$$

Річна безризикова ставка $r = 0.07$ (ставка нараховується неперервно). Початкова ціна акції S_0 складає 200 грн.

(i) Знайти справедливу ціну Європейського опціону продажу (put option), що дає право продажу однієї акції за страйковою ціною $K = 200$ в час $T = 1$.

(ii) Знайти справедливу ціну Європейського опціону купівлі (call option), що дає право купівлі однієї акції за страйковою ціною $K = 180$ в час $T = 2$.

5.8. Дано модель Блека–Шоулса, в якій ціна акції задовольняє стохастичне рівняння

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t), \quad \mu = 0.1.$$

Річна безризикова ставка $r = 5\%$ (ставка нараховується неперервно). Початкова ціна акції S_0 складає 100 грн.

Відомо, що справедлива ціна Європейського опціону продажу зі страйковою ціною $K = 110$ грн і часом виконання $T = 1$ рік дорівнює 10 грн.

(i) Знайти значення σ (наслідувану волатильність, implied volatility) з точністю ± 0.02.

(ii) Використовуючи знайдене значення σ, знайти ймовірність $\mathsf{P}\{S_2 < 120\}$.

ЗАНЯТТЯ 6
ПОДАЛЬШИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛІ БЛЕКА – ШОУЛСА. ГРЕЦЬКІ СИМВОЛИ

Контрольні запитання

1. *Грецькі символи:* Δ, Γ, $\mathcal{V}$, ρ, λ, θ.
2. *Значення грецьких символів для управління портфелем інвестора.*
3. *Формула для значення* Δ *в моделі Блека – Шоулса.*

А6.

6.1. Розглянемо опціон купівлі на базовий актив, за яким не сплачуються дивіденди:

Дата виконання	60 днів,
Базова ціна	100 грн,
Страйкова ціна	100 грн,
Безризикова відсоткова ставка	5%,
Волатильність	20%.

(Відсотки тут наведено в розрахунку на рік.)

Результати оцінки параметрів опціону в комп'ютерній моделі наступні:

Теоретичне значення вартості	3.65 грн,
Дельта	0.556,
Гамма	0.049 грн$^{-1}$,
Тета	-0.034 грн / день,
Вега	0.16 грн / %,
Ро	0.086 грн / %.

Через день ціна базового активу зросте до 102 грн, волатильність досягне 22% і безризикова відсоткова ставка – 4%.

(i) Оцінити теперішню вартість опціону, використовуючи наведені значення грецьких символів.

(ii) Теоретично нова ціна становить 5.03 грн. Поясніть чому ваша оцінка відрізняється від теоретичної ціни.

6.2. Інвестиційний банк виписав N Європейських опціонів купівлі на бездивідендну акцію з страйковою ціною 2 грн, поточною ціною 1.8 грн, часом виконання 6 місяців при безризиковій відсотковій ставці 3% щорічно. Банк здійснює дельта-хеджування позиції опціонів, припускаючи, що модель Блека – Шоулса має місце, в даний момент володіє 250,000 акцій і має борг в розмірі 413,057 грн.

(i) Використовуючи позицію хеджування і формулу Блека-Шоулса для ціни опціону, виведіть два рівняння, яким задовольняють N і σ – волатильність акції.

(ii) Оцінити σ, використовуючи інтерполяцію.

(iii) Обчислити значення N.

6.3. Бездивідендна акція має волатильність $\sigma = 25\%$ щорічно і безризикова відсоткова ставка дорівнює $r = 12\%$ щорічно. Теоретична ціна деривативу на акцію складає $S^3 e^{2rt+3\sigma^2 t}$, де S – поточна ціна, t – час до виконання.

Використовуйте наближення біноміальною решіткою з

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, \qquad u = e^{\sigma \Delta t}, \qquad \Delta t = 1 \text{ день}, \qquad d = 1/u,$$

щоб оцінити Γ коли $S = 1$ і $t = 1$ рік. Припустимо, що в році 365 днів.

Порівняйте цю оцінку із значенням, отриманим шляхом диференціювання (за необхідності) формули ціни деривативу та прокоментуйте.

6.4. Спеціальний опціон купівлі в європейському стилі передбачує наступну функцію виплат в момент часу $t = T$:

$$V = \begin{cases} 0, & S_T < 100, \\ S_T - 100, & 100 \le S_T < 200, \\ 1.5\, S_T - 200, & 200 \le S_T, \end{cases}$$

де S_t – ціна базової акції в момент часу t.

Безризикова відсоткова ставка r складає 5% річних, волатильність $\sigma = 50\%$ щорічно, за акціями не виплачуються дивіденди і формула Блека – Шоулса застосовується для визначення ціни Європейських опціонів купівлі.

(i) Показати, що вказаний вище спеціальний опціон купівлі можна побудувати як портфель з різних Європейських опціонів купівлі.

(ii) Використовуючи портфель з (i), або іншим чином обчислити вартість спеціального опціону купівлі за 6 місяців до часу виконання і поточною ціною акції 120 грн.

(iii) Оцінити дельту спеціального опціону при $S_0 = 150$ грн та $S_0 = 250$ грн.

(iv) Розглядаючи зміни в дельті від $S_0 = 150$ грн до $S_0 = 250$ грн для спеціального опціону купівлі і для простого опціону купівлі з ціною виконання 100 грн, прокоментувати відносне значення гамми для цих двох опціонів та наслідки для відповідних стратегій хеджування.

6.5. Розглянемо дві бездивідентні акції $S^{(1)}$ та $S^{(2)}$. Ціна за акцію $S^{(i)}$ в момент часу t, $S_t^{(i)}$, має волатильність σ_i для $i = 1,\ 2$. Коефіцієнт кореляції між $\ln S^{(1)}$ та $\ln S^{(2)}$ позначається через ρ.

Опціон обміну – це право (але не обов'язок) обмінювати одну акцію $S^{(2)}$ на одну акцію $S^{(1)}$ в заданий час T. Таким чином, функція виплат для нього:

$$\max(S_T^{(1)} - S_T^{(2)}, 0).$$

(i) Розглядаючи ціни на акції $S^{(1)}$ не в грошових одиницях, а в одиницях акцій $S^{(2)}$, і зазначаючи, що

$$\max(S_T^{(1)} - S_T^{(2)}, 0) = S_T^{(2)} \times \max\Big(\frac{S_T^{(1)}}{S_T^{(2)}} - 1, 0\Big),$$

довести, що вартість опціону обміну в момент часу 0 в грошових одиницях дорівнює

$$S_0^{(1)} \Phi\Big(\frac{\ln(S_0^{(1)}/S_0^{(2)}) + v^2 T/2}{v\sqrt{T}}\Big) - S_0^{(2)} \Phi\Big(\frac{\ln(S_0^{(1)}/S_0^{(2)}) - v^2 T/2)}{v\sqrt{T}}\Big),$$

де $v^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$, Φ – функція стандартного нормального розподілу.

(ii) Вивести вирази для дельти опціону обміну відповідно до $S^{(1)}$ та $S^{(2)}$.

(iii) Вказати складові компоненти реплікаційного портфеля.

(iv) Поточна ціна $S^{(1)}$ дорівнює 200 грн та $S^{(2)}$ – 175 грн. 6-місячний Європейський опціон купівлі на акцію $S^{(1)}$ з ціною виконання 150 грн має вартість 53 грн. Волатильність $S^{(2)}$ становить 45% щорічно і $\rho = 1/2$. Безризикова відсоткова ставка дорівнює 4.5% щорічно. Визначити вартість опціону обміну з терміном виконання 6 місяців.

Підказка: Вам потрібно буде оцінити волатильність $S^{(1)}$ із точністю до 1% в рік.

Б6.

6.6. Розглянемо опціон продажу на акцію, за якою сплачуються дивіденди:

Дата виконання	90 днів,
Базова ціна	200 грн,
Страйкова ціна	220 грн,
Безризикова відсоткова ставка	8%,
Волатильність	15%,
Ставка виплати дивідендів	10%.

(Відсотки тут наведено в розрахунку на рік.)

Результати оцінки параметрів опціону наступні:

Теоретичне значення вартості	21.20 грн,
Дельта	-0.883,
Гамма	0.0011 грн$^{-1}$,
Тета	-0.019 грн / день,
Вега	0.1642 грн / %,
Ро	-0.4876 грн / %,
Ламбда	0.44 грн / %.

Через 5 днів ціна базового активу зросте до 205 грн, волатильність досягне 20% і безризикова відсоткова ставка – 10%, ставка виплати дивідендів зменшиться до 7%.

Оцінити вартість опціону продажу після вказаних змін, використовуючи наведені значення грецьких символів.

6.7. Розглядаються наступні опціони купівлі на одну і ту ж базову акцію:

Опціон	Тип опціону	Страйкова ціна (грн)	Час до виконання
A	Американський	100 грн	3 роки
B	Американський	100 грн	2 роки
C	Американський	110 грн	3 роки
D	Європейський	100 грн	3 роки
E	Європейський	100 грн	2 роки

Виписати якомога більше нерівностей між цінами цих опціонів, що обов'язково виконуються.

6.8. Розглядається Європейський опціон купівлі акції з часом виконання через рік і страйковою ціною 60 грн. Поточна ціна акції становить 55 грн. Вартість цього опціону на ринку – 6 грн. Волатильність цієї акції $\sigma = 20\%$.

(i) Припускаючи, що має місце модель Блека – Шоулса, оцінити безризикову річну відсоткову ставку з точністю до 0,5%.

Випущено новий похідний цінний папір за цією акцією. За ним через рік буде виплачено суму $D = S_1^2/100$ грн (де S_1 позначає ціну акції через рік).

(ii) Розрахувати справедливу ціну цього нового похідного цінного паперу.

(iii) Визначити початковий портфель хеджування (в одиницях базової акції та готівки) для цього нового похідного цінного паперу. Припускаємо, що інвестор дотримується дельта-хеджування.

ЗАНЯТТЯ 7
ЧАСОВА СТРУКТУРА ВІДСОТКОВИХ СТАВОК

Контрольні запитання

1. *Основні вимоги до моделі відсоткової ставки.*
2. *Ринкова ціна ризику для змінної відсоткової ставки.*
3. *Моделі Васічека (Vašíček), Кокса – Інгерсола – Роса (Cox – Ingersoll – Ross, CIR), Халла – Уайта (Hull & White, HW).*

А7.

7.1. Описати основні характеристики наступних моделей відсоткової ставки.

(i) Модель Рендлемана – Бартера (Rendleman – Bartter model): $dr_t = \mu r_t\,dt + \sigma r_t\,dW_t$, μ і σ – додатні константи.

(ii) Модель Хо – Лі (Ho – Lee model): $dr_t = \theta(t)\,dt + \sigma\,dW_t$.

(iii) Модель Блека – Дермана – Тоя (Black – Derman – Toy model): $d\ln r_t = \theta(t)\,dt + \sigma\,dW_t$.

(iv) Модель Блека – Карасінскі (Black – Karasinski model): $d\ln r_t = (\mu - a\ln r_t)\,dt + \sigma\,dW_t$.

7.2. Наступна незвичайна модель була запропонована для поведінки короткострокової відсоткової ставки

$$dr_t = \mu r_t\,dt + \sigma\,dW_t,$$

де μ і σ – фіксовані додатні константи, W – стандартний броунівський рух відносно реальної ймовірнісної міри P.

Відносно тієї ж міри P, безкупонна облігація з часом виконання T має ціну в момент часу t

$$B(t,T) = \exp\{-(T-t)r_t + \sigma^2(T-t)^3/6\}.$$

(i) Вивести стохастичне диференціальне рівняння, якому задовольняє $B(t,T)$.

(ii) Визначити ринкову ціну ризику.

7.3. (i) Порівняти властивості моделей Васічека та Кокса – Інгерсолла – Росса для відсоткових ставок.

(ii) В рамках моделі Васічека цінова модель деякого деривативу виглядає наступним чином:

$$P(R,t) = \exp\left[-D(t)R - (t - D(t))L - (\beta/2)D(t)^2\right],$$

де $D(t) = [1 - \exp(-\alpha t)]/\alpha$, α і β – числові параметри, t – час, R – короткострокова ставка, L – довгострокова ставка.

Вивести вирази для:

(a) спотової ставки;

(b) форвардної ставки;

(c) границі спотової та форвардної ставки при прямуванні t до нуля.

7.4. Нехай відсоткова ставка r_t задовольняє стохастичне рівняння

$$dr_t = \mu(r_t,t)\,dt + \sigma(r_t,t)\,dW_t,$$

де W – вінерівський процес відносно ризик-нейтральної міри на цьому ринку.

(i) Дано платіжне зобов'язання з вартістю $f(t,r_t)$ (тобто, вартість залежить лише від часу та величини безризикового відсотка), f є достатньо гладкою функцією. Довести, що f задовольняє наступне рівняння в частинних похідних:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - rf = 0.$$

(ii) Позначимо через $B(t,T)$ вартість в час t облігації, за якою в момент $T > t$ сплачується сума 1. Використовуючи рівняння з (i), знайти $B(t,T)$, якщо справджується рівняння

(a) $dr_t = 0$, тобто r_t – константа;

(b) $dr_t = \mu\,dt + \sigma\,dW_t$, де μ і σ – додатні константи;

(iii) Нехай $dr_t = tc^2\,dt + c\,dW_t$, де c – додатна константа (тобто, має місце частинний випадок моделі Хо – Лі). Показати, що

$$B(t,T) = \exp\left\{-(T-t)r_t - \frac{(T-t)^2}{2}tc^2\right\}.$$

Б7.

7.5. Розглядається наступна модель для стохастичної поведінки короткострокової відсоткової ставки:

$$dr_t = \mu r_t\,dt + \sigma\,dW_t,$$

де $\mu > 0$ і σ – фіксовані додатні параметри, W – стандартний броунівський рух відносно реальної міри P.

(i) Прокоментувати переваги і недоліки використання цієї моделі.

Як альтернативна, використовується модель Васічека:

$$dr_t = \alpha(\mu - r_t)\,dt + \sigma\,dW_t,$$

де $\alpha > 0$ – фіксований параметр.

(ii) Обчислити $\int_t^T r(u)\,du$.

(iii) Знайти розподіл випадкової величини $\int_t^T r(u)\,du$ (при заданому невипадковому значенні $r(t)$).

7.6. Відносно реальної ймовірнісної міри P ціна безкупонної облігації з часом виконання T визначається наступною рівністю:

$$B(t,T) = \exp\{-T(T-t)r_t + \sigma^2(T-t)^3/6\}.$$

Тут r_t – безризикова відсоткова ставка в момент часу t, що задовольняє стохастичне диференціальне рівняння відносно реальної міри P:

$$dr_t = \mu r_t\,dt + \sigma\,dW_t,$$

де μ і σ – фіксовані додатні параметри, W – стандартний броунівський рух відносно реальної міри P.

Вивести ринкову ціну ризику в цій моделі.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Заняття 1

А 1

1.1. (i) Математичне сподівання доходу дорівнює

$$0.1 \times 0.5 + 0.2 \times 0.3 + 0.5 \times 0.2 = 21\%,$$

дисперсія доходу –

$$(0.1 - 0.21)^2 \times 0.5 + (0.2 - 0.21)^2 \times 0.3 + (0.5 - 0.21)^2 \times 0.2 = 2.29\%,$$

напівдисперсія доходу –

$$(0.1 - 0.21)^2 \times 0.5 + (0.2 - 0.21)^2 \times 0.3 = 0.608\%,$$

ймовірність недостачі –

$$50\% + 30\% = 80\%.$$

(ii) (a) 1) Це статистична міра ризику значних втрат. 2) Воно оцінює потенційно мінімальні втрати за заданий час з заданим рівнем значущості.

(b) Переваги: з нормальним розподілом легко оперувати, обчислення VaR можливе на основі всього двох параметрів. Недоліки: результати можуть бути неточними через асиметричність реального розподілу доходу, наявність "важкого хвосту" у цього розподілу.

1.2. (i) $\mathsf{Var}\,(R) = 500,000^2 \mathsf{Var}\,(U) = 2.5 \times 10^{11} \times 1/12 = 2.08333 \times 10^{10}$.

(ii) Оскільки розподіл R симетричний, нижня напівдисперсія дорівнює половині дисперсії, тобто 1.04166×10^{10}.

(iii) $\mathsf{P}(R < 100,000) = \mathsf{P}(U > 0.4) = 0.6$.

(iv) Якщо $\mathsf{VaR}_{5\%} = t$ тоді $\mathsf{P}(R \le -t) = 0.05$ звідси

$$\mathsf{P}(300,000 - 500,000U \le -t) = \mathsf{P}(U \ge 0.6 + (t/500,000)) = 5\%,$$

отже, використовуючи, що $\mathsf{P}(U > x) = 1 - x$, маємо

$$0.4 - (t/500,000) = 0.05, \qquad t = 500,000(0.35) = 175,000.$$

1.3. (i) Нижня напівдисперсія: $\mathsf{DSVar} = \int_{0.5}^{\mu} (t-\mu)^2 f(t)\,dt,$ де

$$\mu = \int_{0.5}^{\infty} t f(t)\,dt = -\frac{c}{2t^2}\bigg|_{0.5}^{\infty} = 0.75.$$

Тому

$$\mathsf{DSVar} = c\left\{\int_{0.5}^{0.75} t^{-2}\,dt - 2\mu \int_{0.5}^{0.75} t^{-3}\,dt + \mu^2 \int_{0.5}^{0.75} t^{-4}\,dt\right\} =$$

$$c\left\{-t\bigg|_{0.5}^{0.75} - 1.5(-\frac{t^{-2}}{2})\bigg|_{0.5}^{0.75} + 0.75^2(-\frac{t^{-3}}{3})\bigg|_{0.5}^{0.75}\right\} = 0.02083 \quad (\text{млн грн})^2.$$

(ii) $\mathsf{P}(R > x) = \int_x^{\infty} f(t)\,dt = \frac{c}{3}x^{-3}$. Для величини чистого прибутку S маємо

$$\mathsf{P}(S \le -t) = \mathsf{P}(R \le 0.7 - t) = 1 - \mathsf{P}(R > 0.7 - t) = 1 - \frac{c}{3}(0.7 - t)^{-3}.$$

Для VaR з рівнем значущості 5% отримуємо

$$\mathsf{P}(S \le -t) = 1 - \frac{c}{3}(0.7 - t)^{-3} = 0.05.$$

Отже, $t = 0.1914$.

1.4. (i) За формулою для портфеля з найменшою дисперсією,

$$x_{\mathsf{A}} = \frac{12\%\% - 0.25 \times (24\%\% \times 12\%\%)^{1/2}}{24\%\% + 12\% - 2 \times 0.25 \times (24\%\% \times 12\%\%)^{1/2}} = 28.2\%.$$

(ii) З допомогою диверсифікації портфеля внесок специфічного ризику будь-якого одного компонента можна зробити як завгодно малим. Дисперсія доходу при цьому буде зменшуватись (хоча не може стати меншою за значення систематичного ризику.)

1.5. (i) Функція Лагранжа: $W = V - \lambda(\mathsf{E} - 0.07) - \mu(\Sigma_i x_i - 1)$, де
λ і μ – множники Лагранжа, $\mathsf{E} = \Sigma x_i \mathsf{E}_i$, $V = \Sigma_i \Sigma_j x_i x_j C_{ij}$,
E_i – очікуваний дохід від акції i, C_{ij} – коваріація між i та j, x_i – частина інвестована у i.
(ii) Частинні похідні функції Лагранжа дорівнюють:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = 2\Sigma_i x_j C_{ij} - \lambda \mathsf{E}_i - \mu, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda} = -(\Sigma_i \mathsf{E}_i x_i - 0.07), \qquad \frac{\partial W}{\partial \mu} = -(\Sigma_i x_i - 1).$$

Поклавши ці похідні рівними нулю, отримаємо рівності:

$$\begin{aligned}
&x_1 \times 6\% + x_2 \times 7\% + x_3 \times 8\% = 7\%,\\
&x_1 + x_2 + x_3 = 1,\\
&2(x_1 \times (5\%)^2 + x_2 \times 0.5 \times 5\% \times 15\% + x_3 \times 0.5 \times 5\% \times 20\%) = \lambda \times 6\% + \mu,\\
&2(x_1 \times 0.5 \times 5\% \times 15\% + x_2(15\%)^2 + x_3 \times 0.5 \times 15\% \times 20\%) = \lambda \times 7\% + \mu,\\
&2(x_1 \times 0.5 \times 5\% \times 20\% + x_2 \times 0.5 \times 15\% \times 20\% + x_3(20\%)^2) = \lambda \times 8\% + \mu.
\end{aligned}$$

(iii) Для кутового портфеля x_1=0. У випадку двох змінних x_2 і x_3 ми не можемо задавати значення сподівання прибутку портфеля. Беремо рівняння з частини (ii), де не використовуємо похідні за x_1 і λ, і отримуємо:

$$\begin{aligned}
&x_2 + x_3 = 1,\\
&2 \times 0.15(0.15x_2 + 0.5 \times 0.2(1 - x_2)) - \mu = 0.015x_2 + 0.03 - \mu = 0,\\
&2 \times 0.2(0.5 \times 0.15x_2 + 0.2(1 - x_2)) - \mu = -0.05x_2 + 0.08 - \mu = 0,
\end{aligned}$$

звідки $x_2 = 77\%,\ x_3 = 23\%$.

1.6. Нехай x_i – сума, вкладена в акцію i. Ми маємо шукати мінімум функції

$$\sigma^2 = 0.1^2 x_1^2 + 0.2^2 x_2^2 + 0.3^2 x_3^2 + 2 \times 0.2(0.1 \times 0.2 x_1 x_2 + 0.2 \times 0.3 x_2 x_3 + 0.3 \times 0.1 x_3 x_1)$$

при умовах

$$\begin{aligned}
0.05x_1 + 0.08x_2 + 0.1x_3 &= \mathsf{E},\\
x_1 + x_2 + x_3 &= 1.
\end{aligned}$$

Будемо шукати мінімум зведенням до квадратичної функції, не використовуючи функцію Лагранжа. Маємо

$$\begin{aligned}
x_3 &= 1 - x_1 - x_2; \quad 0.05x_1 + 0.08x_2 + 0.1(1 - x_1 - x_2) = \mathsf{E}\\
\Rightarrow x_2 &= 5 - 50\mathsf{E} - 2.5x_1, \quad x_3 = 50\mathsf{E} + 1.5x_1 - 4,\\
\sigma^2 &= 0.1^2 x_1^2 + 0.2^2(5 - 50\mathsf{E} - 2.5x_1)^2 + 0.3^2(50\mathsf{E} + 1.5x_1 - 4)^2\\
&+ 2 \times 0.2(0.1 \times 0.2x_1(5 - 50\mathsf{E} - 2.5x_1) + 0.2 \times 0.3(5 - 50\mathsf{E} - 2.5x_1)(50\mathsf{E} + 1.5x_1 - 4)\\
&+ 0.3 \times 0.1(50\mathsf{E} + 1.5x_1 - 4)x_1)\\
&= 0.3705x_1^2 + x_1(18.9\mathsf{E} - 1.668) + (265\mathsf{E}^2 - 45.2\mathsf{E} + 1.96).
\end{aligned}$$

Ця квадратична функція набуває свого мінімуму при

$$x_1 = \frac{1.668 - 18.9\mathsf{E}}{0.741} = 2.25 - 25.51\mathsf{E}.$$

Так для портфеля найменшої дисперсії отримуємо зв'язок між σ та E

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= 0.3705(2.25 - 25.51\mathsf{E})^2 + (2.25 - 25.51\mathsf{E})(18.9\mathsf{E} - 1.668) + (265\mathsf{E}^2 - 45.2\mathsf{E} + 1.96)\\
&= 23.97\mathsf{E}^2 - 2.66\mathsf{E} + 0.08\\
\Leftrightarrow\ & \sigma^2 - 23.97(\mathsf{E} - 0.055)^2 = 0.087^2.
\end{aligned}$$

Б 1.

1.7. (a) $\mathsf{Var}\,(R) = 100,000^2 \mathsf{Var}\,(N) = 10^{10}$.

(b) Оскільки розподіл R симетричний, нижня напівдисперсія дорівнює половині дисперсії, тобто 5×10^9.

(c) $\mathsf{P}(R < 50,000) = \mathsf{P}(N > 2) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$. ($\Phi$ – функція розподілу стандартного нормального розподілу).

(d) Якщо $\mathsf{VaR}_{5\%} = t$, то $\mathsf{P}(R \le -t) = 0.05$, і ми маємо

$$\mathsf{P}(250,000 - 100,000N \le -t) = \mathsf{P}(N > 2.5 + (t/100,000)) = 0.05.$$

. Оскільки N-1 має стандартний нормальний розподіл,

$$\Phi(1.5 + (t/100,000)) = 0.95 \ \Rightarrow\ 1.5 + (t/100,000) = 1.65 \ \Rightarrow\ t = 100,000(1.645 - 1.5) = 14,500 \text{ грн.}$$

1.8. (i) (a) Дисперсія: $\mathsf{Var}\,(R) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu - x)^2 f(x)\,dx$.

(b) Нижня напівдисперсія $\mathsf{DSVar} = \int_{-\infty}^{\mu} (\mu - x)^2 f(x)\,dx$.

(ii) (a) $\mathsf{Var}\,(R) = \frac{1}{\lambda^2} = 4$.

(b) Враховуючи, що $\mu = \frac{1}{\lambda} = 2$, отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathsf{DSVar} &= \int_{-\infty}^{2} (2-x)^2 f(x)\,dx = \int_{0}^{2} (4 - 4x + x^2)\lambda e^{-\lambda x}\,dx \\
&= \left[-4e^{-\lambda x} - 4\lambda\Big(\frac{xe^{-\lambda x}}{-\lambda} - \frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda^2}\Big) + \lambda\Big(\frac{x^2 e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big) - \int \frac{2xe^{-\lambda x}}{-\lambda}\,dx \right]\Bigg|_0^2 \\
&= 4 - 8e^{-1} = 1.05696.
\end{aligned}$$

1.9. (i) $\mathsf{Cov}\,(\mathsf{A},\mathsf{B}) = \sigma_{\mathsf{AB}} = \mathsf{E}[(\mathsf{A} - \mathsf{E}(\mathsf{A}))(\mathsf{B} - \mathsf{E}(\mathsf{B}))] = \mathsf{E}(\mathsf{AB}) - \mathsf{E}(\mathsf{A})\mathsf{E}(\mathsf{B})$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(\mathsf{A}) &= 0.2 \times 0.18 + 0.3 \times 0.11 = 6.9\%, \\
\mathsf{E}(\mathsf{B}) &= 0.2 \times 0.13 + 0.3 \times 0.06 = 4.4\%, \\
\sigma_{\mathsf{AB}} &= 0.2(0.1 \times (-0.02) + (0.08 \times 0.15) + 0.3(0.25 \times 0 + (-0.14) \times 0.06)) - 0.069 \times 0.044 \\
&= 0.002 - 0.00252 - 0.003036 = -0.003556, \\
\sigma_{\mathsf{A}}^2 &= \mathsf{E}(\mathsf{A}^2) - [\mathsf{E}(\mathsf{A})]^2 = 0.2(0.1^2 + 0.08^2) + 0.3(0.25^2 + 0.14^2) - 0.069^2 \\
&= 0.00328 + 0.02463 - 0.004761 = 0.023149, \\
\sigma_{\mathsf{B}}^2 &= 0.2(0.02^2 + 0.15^2) + 0.3(0^2 + 0.06^2) - 0.044^2 = 0.00458 + 0.00108 - 0.001936 = 0.003724.
\end{aligned}$$

Маємо значення коефіцієнту кореляції

$$\rho_{\mathsf{AB}} = \frac{\sigma_{\mathsf{AB}}}{\sigma_{\mathsf{A}}\sigma_{\mathsf{B}}} = \frac{-0.003556}{0.152148 \times 0.061025} = -0.383.$$

(ii) В портфелі з найменшою дисперсією, доля акції А складає

$$x_{\mathsf{A}} = \frac{\sigma_{\mathsf{B}}^2 - \sigma_{\mathsf{AB}}}{\sigma_{\mathsf{A}}^2 + \sigma_{\mathsf{B}}^2 - 2\sigma_{\mathsf{AB}}} = 21.42\%.$$

(iii) Ніяких переваг від диверсифікації не залишається, коли дисперсія портфеля буде не меншою дисперсії портфеля з вкладенням тільки в акції В, тобто $\mathsf{Var}\,(R_P) \ge \mathsf{Var}\,(\mathsf{B})$ (вибираємо саме акцію В, оскільки вона менш ризикована, ніж А). Враховуючи, що $x_{\mathsf{A}} = 0.25$, $x_{\mathsf{B}} = 0.75$, отримуємо:

$$x_{\mathsf{A}}^2\sigma_{\mathsf{A}}^2 + x_{\mathsf{B}}^2\sigma_{\mathsf{B}}^2 + 2x_{\mathsf{A}}x_{\mathsf{B}}\sigma_{\mathsf{AB}} \ge 0.003724 \ \Rightarrow\ \sigma_{\mathsf{AB}} \ge 0.000486 \ \Rightarrow\ \rho_{\mathsf{AB}} \ge \frac{0.000486}{0.152148 \times 0.061025} = 0.052.$$

Заняття 2

А 2.

2.1. (i) $\mathsf{E}(R) = \alpha + \beta\mathsf{E}(R_{\mathsf{M}})$

$\Rightarrow\ \mathsf{E}(R_I) = 0.04 + 1.20 \times 0.16 = 23.2\%, \quad \mathsf{E}(R_Z) = 0.09 + 1.50 \times 0.16 = 33\%.$

$\sigma^2 = \beta^2\sigma_{\mathsf{M}}^2 + \sigma_\varepsilon^2$

$\Rightarrow\ \sigma_I^2 = 1.2^2 \times 0.04 + 0.0625 = 0.1201, \quad \sigma_Z^2 = 1.5^2 \times 0.04 + 0.0625 = 0.1201.$

(ii) $\sigma_{IZ} = \beta_I \beta_Z \sigma^2_{\mathsf{M}} = 1.20 \times 1.50 \times 0.04 = 0.072.$

(iii) $\beta_P = 0.5 \times 1.20 + 0.5 \times 1.5 = 1.35.$

(iv) $\mathsf{E}(R_P) = 0.5 \times 23.2 + 0.5 \times 33 = 28.1\%,$
$\sigma^2_P = \beta^2_P \sigma^2_{\mathsf{M}} + \sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma^2_{e_i} = 1.35^2 \times 0.04 + 0.5^2 \times 0.0625 + 0.16 = 0.1285.$

2.2. (i) Межа ефективності є прямою в координатах (σ, E) (ринковою прямою капіталу). Ця пряма має проходити через точки (0.2, 0.1) і (0, 0.05). Середина відрізка, що з'єднує вказані точки, має координати (0.1, 0.075).

(ii) Якщо суму x інвестовано в A, а $(1-x)$ інвестовано в C, портфель має очікуваний дохід $0.06 + 0.04x$ з середньоквадратичним відхиленням $\sqrt{0.04x^2 + 0.01(1-x)^2}$. Таким чином ми шукаємо x, щоб максимізувати

$$f(x) = \frac{0.01 + 0.04x}{\sqrt{0.04x^2 + 0.01(1-x)^2}}.$$

Використовуючи диференціювання, отримаємо, що функція має максимум при $x = 5/9$. Тому шуканий портфель дорівнює (5/9, 4/9). (Це буде портфель ринку, на якому є тільки акції A і C, він визначає межу ефективності на цьому ринку.)

(iii) Межа ефективності при наявності безризикової акції – це дотична до межі ефективності, взятої без врахування безризикової акції. Вона проходить через точку на площині (σ, E), що відповідає безризиковій акції. В даній задачі – це пряма через (0, 0.05) з максимальним градієнтом, що проходить через деяку точку межі ефективності.

Розглянемо точку, що відповідає портфелю в частині (ii) – вона знаходиться на межі ефективності для пари A і C, а пряма від (0, 0.05) до неї має кутовий коефіцієнт

$$f(5/9) = \left.\frac{0.01 + 0.04x}{\sqrt{0.04x^2 + 0.01(1-x)^2}}\right|_{x=5/9} = 0.2692.$$

Отже, ця пряма має рівняння $y = 0.05 + 0.2692x$, і вона проходить через (0.1, 0.076926).

2.3. Ринкова ціна ризику визначається як $(\mathsf{E}_{\mathsf{M}} - r)/\sigma_{\mathsf{M}}$, де акція 1 є безризиковою акцією із ставкою $r = 5\%$. Маємо, що

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{\mathsf{M}} =& (17,546/100,000) \times (0.2 \times 5\% + 0.3 \times 12\% + 0.1 \times 3\% + 0.4 \times 1\%) + \\
&+ (82,454/100,000) \times (0.2 \times 6\% + 0.3 \times 5\% + 0.1 \times 4\% + 0.4 \times 7\%) = 5.79472\%, \\
\sigma^2_{\mathsf{M}} =& 0.2 \times (0.17546 \times 5\% + 0.82454 \times 6\% - 5.79472\%)^2 \\
&+ 0.3 \times (0.17546 \times 12\% + 0.82454 \times 5\% - 5.79472\%)^2 \\
&+ 0.1 \times (0.17546 \times 3\% + 0.82454 \times 5\% - 5.79472\%)^2 \\
&+ 0.4 \times (0.17546 \times 1\% + 0.82454 \times 7\% - 5.79472\%)^2 = 0.000045402 = (0.674\%)^2.
\end{aligned}$$

Тому ринкова ціна ризику дорівнює $(5.79472\% - 5\%)/0.674\% = 1.179 = 118\%.$

2.4. (i) Ринковий портфель містить акції в пропорції $(2/7, 3/7, 2/7)$, тому

$$R_{\mathsf{M}} = (2R_{\mathsf{A}} + 3R_{\mathsf{B}} + 2R_{sC})/7.$$

За лінійністю коваріації,

$$\mathsf{Cov}\,(R_i, R_{\mathsf{M}}) = [2\mathsf{Cov}\,(R_i, R_{\mathsf{A}}) + 3\mathsf{Cov}\,(R_i, R_{\mathsf{B}}) + 2\mathsf{Cov}\,(R_i, R_{\mathsf{C}})]/7.$$

Звідси

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Cov}\,(R_{\mathsf{A}}, R_{\mathsf{M}}) = [2 \times (0.4)^2 + 3 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.2 + 2 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.2]/7 = 0.06857, \\
&\mathsf{Cov}\,(R_{\mathsf{B}}, R_{\mathsf{M}}) = 0.22/7 = 0.3143, \qquad \mathsf{Cov}\,(R_{\mathsf{C}}, R_{\mathsf{M}}) = 0.09/7 = 0.01286, \\
&\sigma^2_{\mathsf{M}} = \mathsf{Cov}\,(R_{\mathsf{M}}, R_{\mathsf{M}}) = [2\mathsf{Cov}\,(R_{\mathsf{M}}, R_{\mathsf{A}}) + 3\mathsf{Cov}\,(R_{\mathsf{M}}, R_{\mathsf{B}}) + 2\mathsf{Cov}\,(R_{\mathsf{M}}, R_{\mathsf{C}})]/7 = 0.03674.
\end{aligned}$$

Використовуючи рівність $\beta_i = \mathsf{Cov}\,(R_i, R_{\mathsf{M}})/\sigma^2_{\mathsf{M}}$, знаходимо

$$\beta_{\mathsf{A}} = 1.8664, \quad \beta_{\mathsf{B}} = 0.8555, \quad \beta_{\mathsf{C}} = 0.3500.$$

Розв'язуючи рівності

$$\mathsf{E}_i - r = \beta_i(\mathsf{E}_{\mathsf{M}} - r), \quad i = \mathsf{A},\ \mathsf{B},\ \mathsf{C}, \qquad \mathsf{E}_{\mathsf{M}} = 0.2286, \qquad r = 0.03077,$$

отримаємо $\mathsf{E}_{\mathsf{A}} = 0.4$, $\mathsf{E}_{\mathsf{B}} = 0.2$ і $\mathsf{E}_{\mathsf{C}} = 0.1$.

(ii) Оскільки

$$\mathsf{E}_i = (1-\beta_i)r + \beta_i \mathsf{E}_\mathsf{M},$$

відповідна одноіндексна модель має вигляд

$$R_i = (1-\beta_i)r + \beta_i R_\mathsf{M} + \varepsilon_i,$$

де ε_i некорельовані між собою і з R_M, $\mathsf{E}(\varepsilon_i) = 0$ і ε_i мають дисперсію рівну $\sigma^2_{\varepsilon_i} = \mathsf{Var}\,(R_i) - \beta_i^2 \sigma^2_\mathsf{M}$. Тому

$$\sigma^2_{\varepsilon_\mathsf{A}} = 0.0320, \quad \sigma^2_{\varepsilon_\mathsf{B}} = 0.0131, \quad \sigma^2_{\varepsilon_\mathsf{C}} = 0.0055.$$

(iii) Коваріації доходів від акцій є різними у двох моделях. У одноіндексній моделі

$$\mathsf{Cov}\,(R_i, R_j) = \beta_i \beta_j \sigma^2_\mathsf{M},$$

тому, наприклад,

$$\mathsf{Cov}\,(R_\mathsf{A}, R_\mathsf{B}) = 0.0587,$$

В той же час, у моделі CAPM

$$\mathsf{Cov}\,(R_\mathsf{A}, R_\mathsf{B}) = 0.04.$$

2.5. (i) (a) В одноіндексній моделі

$$\begin{aligned}
\mathsf{Var}\,(R_i) &= \beta_i^2 \mathsf{Var}\,(R_\mathsf{M}) + \mathsf{Var}\,(\varepsilon_i),\\
\mathsf{E}(R_i) &= \alpha_i + \beta_i \mathsf{E}(R_\mathsf{M}),\\
\mathsf{Cov}\,(R_i, R_j) &= \beta_i \beta_j \mathsf{Var}\,(R_\mathsf{M}).
\end{aligned}$$

Тому нам потрібно знати $\beta_j, \alpha_i, \sigma^2_{\varepsilon_i}$ для кожного цінного паперу плюс $\mathsf{Var}\,(R_\mathsf{M})$ і $\mathsf{E}(R_\mathsf{M})$, тобто $3N+2$ параметри.

В загальному випадку нам потрібно знати $\dfrac{N(N+1)}{2}$ елементів матриці коваріацій і N математичних сподівань, тобто $\dfrac{N(N+3)}{2}$ елементів.

(b) При N=50 в одноіндексній моделі потрібно знати 152 параметра, в загальному випадку – 1325 параметра. Різниця дорівнює 1173.

(ii) Одноіндексна модель – це модель отримання доходу, заснована на емпіричному досвіді. Вона не дає передбачень цін для цінних паперів і не може бути використана для ідентифікації недооцінених або переоцінених цінних паперів без додаткових припущень.

CAPM – це модель ціноутворення вартості фінансових активів, яка одночасно моделює очікувані доходи від всіх портфелів на ринку.

(iii) (a) $\mathsf{E}(R) = r + \beta(\mathsf{E}(R_\mathsf{M}) - r) \quad \Rightarrow \quad \mathsf{E}(R) = 5\% + 1.5(10\% - 5\%) = 12.5\%.$

(b)
1. Випадковість. CAPM дає математичне сподівання доходу, а не прогнозований фактичний дохід.
2. Помилка оцінки β. Статистична помилка оцінки може означати, що справжнє значення β не дорівнює 1.5.
3. Дохід за ринковим індексом – це не теж саме, що очікуваний дохід ринку (треба розглядати весь ринок, а не тільки цінні папери у індексі).
4. β-коефіцієнт може змінюватися з часом, оскільки структура боргу або операційний характер базової фірми може змінюватися з часу вимірювання β.

2.6. (i) $\mathsf{E}(R) - r = \beta(\mathsf{E}(R_\mathsf{M}) - r) \quad \Rightarrow \quad 7\% - 5\% = \beta(6\% - 5\%) \quad \Rightarrow \quad \beta = 2.$

(ii) Систематичний ризик відноситься до всього ринку. Його не можна диверсифікувати, тому інвестори в обмін на його наявність повинні отримати в середньому більш високий дохід.

Специфічний ризик пов'язаний з конкретними факторами цінних паперів. Його можна диверсифікувати, і тому інвестори не вимагають компенсації за його прийняття.

(iii) $\mathsf{E}(R) - r = \beta(\mathsf{E}(R_\mathsf{M}) - r) \quad \Rightarrow \quad 5.5\% - 5\% = \beta(6\% - 5\%) \quad \Rightarrow \quad \beta = 0.5.$
$\mathsf{Var}_1 = \beta^2 \mathsf{Var}\,(\mathsf{M}) = (0.5)^2 \times 0.2^2 = 0.01$ (систематичний ризик),
$\mathsf{Var}_2 = \mathsf{Var}\,(R) - \mathsf{Var}_1 = 0.3^2 - 0.01 = 0.08$ (специфічний ризик).

Б 2.

2.7. (i) $\mathsf{Cov}\,(R_i, R_j) = \sum\limits_k \sum\limits_l \beta_{ij}\beta_{jl}\mathsf{Cov}\,(I_k, I_l) + \sum\limits_k \beta_{ik}\mathsf{Cov}\,(I_k, \varepsilon_j) + \sum\limits_k \beta_{ik}\mathsf{Cov}\,(I_k, \varepsilon_i) = \sum\limits_k \beta_{ik}\beta_{jk}\mathsf{Var}\,(I_k)$
(ми використали незалежність відповідних доданків).

(ii) Отримаємо малу коваріацію, якщо добутки бета-коефіцієнтів є малими. Тому треба вибирати цінні папери з різною чутливістю до факторів.

2.8. (i) Ринкова ціна ризику визначається як $(\mathsf{E}_\mathsf{M} - r)/\sigma_\mathsf{M}$. Акція C є безризиковою акцією із ставкою $r = 5\%$.

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_\mathsf{M} =& (10,000 \times (0.3 \times 5\% + 0.2 \times 4\% + 0.5 \times 7\%) \\
&+ 20,000 \times (0.3 \times 5\% + 0.2 \times 7\% + 0.5 \times 3\%) \\
&+ 10,000 \times (0.3 \times 2\% + 0.2 \times 6\% + 0.5 \times 9\%))/40,000 = 5.225\%, \\
\sigma^2_\mathsf{M} =& \left(\frac{10,000 \times 5\% + 20,000 \times 5\% + 10,000 \times 2\%}{40,000} - 5.225\%\right)^2 \times 0.3 \\
&+ \left(\frac{10,000 \times 4\% + 20,000 \times 7\% + 10,000 \times 6\%}{40,000} - 5.225\%\right)^2 \times 0.2 \\
&+ \left(\frac{10,000 \times 7\% + 20,000 \times 3\% + 10,000 \times 9\%}{40,000} - 5.225\%\right)^2 \times 0.5 \\
=& 4.4312 \times 10^{-5} = 0.66567\%^2.
\end{aligned}$$

Звідси ринкова ціна ризику дорівнює $(5.225\% - 5\%)/0.66567\% = 33.8\%$.

(ii) Модель не враховує податки, інфляцію або відсутність безризикових акцій.
Модель не враховує тривалі періоди часу чи оптимізацію споживання за деякий час.

2.9. (i) Ринковий портфель має очікуваний дохід

$$\begin{aligned}
&\frac{5\% \times 250,000 + 7\% \times 250,000 + 9\% \times 750,000 + 10\% \times 50,000}{250,000 + 250,000 + 750,000 + 50,000} = 7.88\% \\
&\Rightarrow \quad x \times 7.88\% + (1 - x) \times 3\% = 6\% \quad \Rightarrow \quad x = 0.615.
\end{aligned}$$

Отже, інвестор вкладає 38,5% в безризикову акцію та 61,5% в ринковий портфель, де складові утримуються пропорційно до ринкової капіталізації.

(ii) Математична форма CAPM:

$$\mathsf{E}(R_P) = \beta_P[\mathsf{E}(R_\mathsf{M}) - r] + r.$$

Дохід буде варіюватися, тому що мають місце:

(a) Випадкові відхилення від значення математичного сподівання $\mathsf{E}(R_P)$.

(b) Зміна очікуваних доходів (бети) акцій β_P.

(c) Помилки в оцінюванні очікуваних доходів (бети).

(d) Зміни в очікуваних ринкових доходах $\mathsf{E}(R_\mathsf{M})$.

Заняття 3

А 3.

3.1. (i) Слабка форма гіпотези: ціни на базову акцію відображають всю інформацію, що може бути отримана із вивчення минулих ринкових даних щодо даної акції.

Напівсильна: ціни на базову акцію відображають всю загальнодоступну інформацію про акції на ринку.

Сильна: ціни на базову акцію відображають всю наявну інформацію, навіть включаючи інформацію, доступну тільки "інсайдерам" компанії.

(ii) Навіть на досконалому ефективному ринку менеджери портфелів будуть відігравати важливу роль в побудові і реалізації інтегрованого набору кроків для створення і підтримки існуючих комбінацій інвестиційних активів.

Цими кроками є:

(1) Визначити і кількісно оцінити толерантність інвесторів до ризику, необхідний дохід, часовий проміжок, податкові міркування, форму потреби в доходах (приріст капіталу або дивіденди), ліквідність, правові і нормативні обмеження ...

(2) Моніторинг і оцінка ринкових умов. Відповідні фактори, такі як економіка, політична ситуація ...

(3) Моніторинг обставин інвестора.

(4) Коригування портфеля в результаті значних змін у відповідних змінних.

3.2. (i) Ми очікуємо сильну від'ємну кореляцію. Дохід від дивідендів=дивіденди/ціна, тому у випадку сильного зростання ціни, це, швидше за все, відповідає зменшенню доходу.

(ii) Модель дає повернення до середнього – це відповідає історичним даним на більшості ринків.
В моделі зберігається невід'ємність ставки – і на реальному ринку дохід від дивідендів не може бути від'ємним.

(iii) Модель не дає повернення до середнього – це відповідає слабкій формі ЕМН. Тут емпіричні дані неоднозначні.

В моделі наявна постійна волатильність – це не відповідає емпіричним даним.

Модель дає нормальний розподіл для приросту логарифма – на реальному ринку трапляються "стрибки" значень, а розподіли доходів мають "важкі хвости", тому маємо суперечність з емпіричними даними.

Проте протягом невеликого відрізку часу дана модель дає хорошу апроксимацію реального ринку.

3.3. (i) $I_\infty = a + bI_\infty \quad \Rightarrow \quad I_\infty = \dfrac{a}{1-b}.$

(ii) Значення інфляції в багатьох країнах, як правило, повертаються до середнього, оскільки центральні банки та уряди намагаються тримати її близькою до цільових діапазонів. AR(1) дає математичну модель для такої властивості.

Наприклад, із зростанням інфляції, відсоткові ставки можуть бути збільшені, щоб спробувати спонукати зростання цін до уповільнення або навіть падіння.

Якщо інфляцію не "повернути" до деякого "розумного" рівня, то ринкова економіка може зазнати краху, як, наприклад, Німеччина в міжвоєнний період.

(iii) Модель з AR(1) має наступні властивості, що не узгоджуються зі змінами цін акцій на ринку:

- Процес AR є стаціонарним, з властивістю повернення до середнього. В той же час, ціни на акції з часом мають тенденцію до збільшення.
- AR(1) передбачає систематичний елемент зміни цін, що не узгоджується з високим ризиком та непередбачуваністю при роботі з акціями.
- Є багато свідчень відмінного від нормального розподілу та "стрибків" в динаміці цін на акції.
- Ціни в моделі можуть AR(1) бути від'ємними.

(iv) Сильні сторони:

- Логнормальний розподіл спрощує математичні розрахунки для цін опціонів.
- Доходи в періоди, що не перетинаються, незалежні, що відповідає, наприклад, ЕМН.
- В моделі не допускаються від'ємні цін на акції.
- Математичне сподівання та дисперсія пропорційні періоду часу, що близьке до поведінки акцій на реальному ринку.

Слабкі сторони (невідповідність моделі реальному ринку):

- Дисперсія може бути нестабільною з часом.
- Середнє значення може з часом не бути постійним.
- Ціни акцій можна вважати такими, що повертаються до середнього.
- Ціни на акції демонструють стрибки.

3.4. Легко перевірити, що $X(t) \sim N(0,\ t)$, але цей процес не має незалежних приростів.

3.5. Відповіді:

(i) $dZ(t) = e^{\alpha t}\,dt$;

(ii) $dZ(t) = g(t)\,dW(t)$;

(iii) $dZ(t) = \alpha\exp\{\alpha X(t)\}\,dX(t) + \dfrac{\alpha^2\sigma^2}{2}\exp\{\alpha X(t)\}\,dt = \alpha\exp\{\alpha X(t)\}\Big[\Big(\mu + \dfrac{\alpha\sigma^2}{2}\Big)\,dt + \sigma\,dW(t)\Big]$,
де $X(t) = X(0) + \mu t + \sigma W(t)$.

3.6. Маємо, що

$$X(t) = X(0) + \alpha\int_0^t X(s)\,ds + \int_0^t \sigma(s)\,dW(s).$$

Взявши математичне сподівання і врахувавши, що сподівання від інтеграла Іто дорівнює нулю, отримуємо

$$m(t) = X(0) + \alpha\int_0^t m(s)\,ds \quad\Rightarrow\quad dm(t) = \alpha m(t)\,dt \quad\Rightarrow\quad m(t) = X(0)\exp\{\alpha t\}.$$

3.7. Використовуючи формулу Іто, маємо:

$$\begin{aligned} dZ(t) &= \exp\{\alpha t + \beta W(t)\}\,d(\alpha t + \beta W(t)) + \frac{\beta^2}{2}\exp\{\alpha t + \beta W(t)\}\,dt \\ &= Z(t)\Big(\alpha + \frac{\beta^2}{2}\Big)\,dt + \beta Z(t)\,dW(t). \end{aligned}$$

Б 3.

3.8. Наявність таких менеджерів не суперечить ефективності ринку і може бути пояснена наступними причинами:

- Це збільшення вартості не є постійним, зокрема менеджер не може гарантувати отримання надлишкових показників за будь-який рік.
- Збільшення вартості відбувається до обліку нарахувань. Після включення зборів існує вкрай обмежена кількість свідчень стабільної переваги.
- Необхідно враховувати ризик позицій. Портфель з більш високим ризиком повинен забезпечувати в середньому більш високий дохід для компенсації ризику. Для розумних порівнянь потрібен дохід з поправкою на ризик.
- Фондові менеджери також наймаються для створення і підтримки диверсифікованих портфелів або спеціалізованих портфелів із конкретними повноваженнями (етичними або високими ризиками). Ефективний ринок не означає, що деякі інвестори не потребують спеціальних портфелів.
- Враховуючи різноманітність інвестиційних послуг, ми могли б очікувати, що деякі менеджери будуть мати досвід роботи вище середнього.
- Ринки капіталу ближчі до ідеалізованих "досконалих ринків". Швидше за все, неефективність виникає на ринку купівлі-продажу інвестиційних послуг, а не на ринках купівлі/продажу цінних паперів.

3.9. Нехай $Q(t)$ – індекс інфляції в час t

$$\frac{Q(t-1)}{Q(t-2)} = 1.0275 = e^{I(t-1)},$$

тому $I(t-1) = \ln(1.0275)$. Ми знаходимо 95-відсотковий довірчий інтервал для $I(t)$, звідси верхня межа

$$I_1(t) = 0.03 + 0.55(\ln(1.0275) - 0.03) + 0.045 \times 1.96 = 0.116$$

і нижня межа

$$I_2(t) = 0.03 + 0.55(\ln(1.0275) - 0.03) - 0.045 \times 1.96 = -0.06.$$

3.10. Процес $X(t)$ має гаусівський розподіл (як сума незалежних гаусівських величин), має неперервні траєкторії та незалежні прирости. Легко обчислюється, що

$$\mathsf{E}X(t) = \rho\mathsf{E}W(t) + \sqrt{1-\rho^2}\mathsf{E}\widehat{W}(t), \quad \mathsf{Var}\,X(t) = \rho^2\mathsf{Var}\,W(t) + (1-\rho^2)\mathsf{Var}\,\widehat{W}(t) = t.$$

Це все характеризує $X(t)$ як вінерівський процес.

3.11. Відповіді:

(i) $dZ(t) = \dfrac{\alpha^2}{2} e^{\alpha W(t)}\, dt + \alpha e^{\alpha W(t)}\, dW(t)$;

(ii) $dZ(t) = -X^{-2}(t)\, dX(t) + \sigma^2 X^2(t) X^{-3}(t)\, dt = X^{-1}(t)((-\alpha + \sigma^2)dt - \sigma\, dW(t))$;

(iii) $dZ(t) = nX^{n-1}(t)\, dX(t) + \dfrac{n-1}{2}\sigma^2 X^2(t) X^{n-2}(t)\, dt = X^n(t)\Big(\Big(n\alpha + \dfrac{n-1}{2}\sigma^2\Big)\, dt + n\sigma\, dW(t)\Big)$.

Заняття 4

А 4.

4.1. (i) $V = S_0 e^{rT} = 10 \exp\Big\{0.07 \times \dfrac{20}{12}\Big\} = 11.237$ грн.

(ii) *Спосіб 1.* Виплата дивідендів матиме місце чотири рази за вказані 20 місяців. Якщо власник акції буде одразу вкладати дивіденди в купівлю акції, в момент $t=$20 місяців він буде мати 1.03^4 акцій – це відповідає вартості активу, якби за ним не сплачувалися дивіденди, і, за (i), його вартість у форвардному контракті дорівнює 11.237 грн. Тому $1.03^4 v_0 =$11.237 грн, і шукана вартість $v_0 = 9.984$ грн.

Спосіб 2. Розглянемо портфель, який спочатку складається з одного короткого форвардного контракту (тобто, контракту на продаж однєї акції), s акцій і грошового боргу c. При кожній виплаті дивіденди використовуються для придбання додаткових акцій. На момент виконання форвардного контракту портфель містить $1.03^4 s$ акцій (оскільки було чотири виплати дивідендів) і грошовий борг ce^{rt}, де r – безризикова відсоткова ставка, $t = 20/12$ – час виконання контракту.

Одразу після виконання контракту портфель містить $1.03^4 s - 1$ акцій і грошовий борг $ce^{rt} - p$, де p – форвардна ціна.

При $s = 1.03^{-4}$ і $c = pe^{-rt}$ портфель нічого не містить. Звідси випливає, що портфель повинен мати нульову початкову вартість, $0 = 10s - c$, так що $p = ce^{rt} = 10se^{rt} = 9.984$ грн.

4.2. Паритет продажу та купівлі записується наступним чином:

$$c_t + Ke^{-r(T-t)} = p_t + S_t,$$

де c_t – ціна Європейського опціону купівлі в момент часу t, p_t – ціна Європейського опціону продажу в момент часу t, K – страйкова ціна для обох опціонів, S_t – ціна базової акції в момент часу t, T – момент виконання обох опціонів.

Враховуючи дані задачі, отримуємо:

$$42 + 620e^{-0.07\times 0.5} = p_t + 600 \qquad \Rightarrow \qquad p_t = 40.68 \text{ грн.}$$

Тут ми припускаємо, що на ринках, на яких торгуються акції та опціони, немає арбітражу.

4.3. (i) Внутрішня вартість – це прибуток від виконання опціону в даний момент, $120 - 110 = 10$ грн.

(ii) Поточна вартість – це ціна опціону мінус внутрішня вартість, $14 - 10 = 4$ грн.

(iii)
- Підвищення ринкової очікуваної волатильності ціни акцій.
- Зниження безризикової відсоткової ставки.
- Зниження виплат дивідендів.

(iv) Власник опціону може виконати його, щоб реалізувати внутрішню ціну $120 - 50 = 70$ грн. Якщо врахувати премію в розмірі 14 грн, чистий прибуток становить $70 - 14 = 56$ грн.

Продавець опціону заплатить 120 грн за акції вартістю 50 грн. Втрата в 70 грн частково компенсується отриманням премії в розмірі 14 грн. Таким чином, чистий збиток продавця складає $70 - 14 = 56$ грн.

(v) Максимальні збитки для продавця виникнуть у випадку, якщо ціна акції впаде до нуля. Вони будуть рівні страйковій ціні мінус отримана премія, $120 - 14 = 106$ грн.

4.4. (i) $0.8 < 1 + r < 1.4$.

(ii) Мартингальна ймовірність зростання $q = \frac{(1+r)-d}{u-d} = \frac{1.05-0.8}{1.4-0.8} = 0.42$, спадання – $p = 0.58$.

(iii) Ціна вища за 120 можлива лише при 2 зростаннях

$$c_0 = 1.05^{-2}\big(0.42^2 \times (196-120) + 0 + 0\big) = 12.16.$$

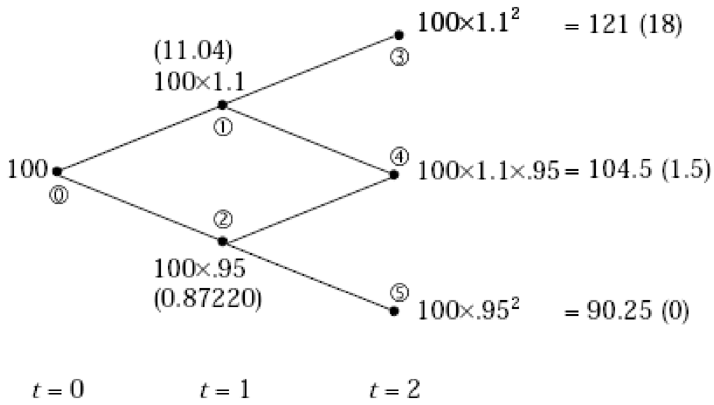
(iv) Ціна змінюється більше при двох зростаннях або двох спаданнях,

$$v_0 = 1.05^{-2}\big(0.42^2 \times 50 + 0 + 0.58^2 \times 50\big) = 15.43.$$

4.5. (a) Мартингальна міра: $q = \dfrac{e^{0.04} - 0.95}{1.1 - 0.95} = 0.6054$, $1 - q = 0.3946$. Ціна опціону:

$$c_0 = e^{-2\times 0.04}((121-103) \times 0.6054^2 + 2 \times (104.5 - 103) \times 0.6054 \times 0.3946) = 6.752 \text{ грн.}$$

(b) Маємо наступні можливі зміни ціни акції та прибутки від використання опціону:



Будемо позначати через ϕ кількість акцій в портфелі, через ψ – внесок на банківський рахунок.

Для хеджуючого портфеля у випадку 1 маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 121\phi + e^{0.04}\psi = 18, \\ 104.5\phi + e^{0.04}\psi = 1.5, \end{cases} \quad \Rightarrow \phi = 1,\ \psi = -98.96 \quad \Rightarrow V_1 = 110\phi + \psi = 11.04.$$

Для хеджуючого портфеля у випадку 2 маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 104.5\phi + e^{0.04}\psi = 1.5, \\ 90.25\phi + e^{0.04}\psi = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \phi = 0.105,\ \psi = -9.13 \quad \Rightarrow V_2 = 95\phi + \psi = 0.8722.$$

Для хеджуючого портфеля у випадку 0 маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 110\phi + e^{0.04}\psi = 11.04, \\ 95\phi + e^{0.04}\psi = 0.8722, \end{cases} \quad \Rightarrow \phi = 0.67785,\ \psi = -61.033 \quad \Rightarrow V_0 = 100\phi + \psi = 6.752.$$

Останнє значення відповідає вартості опціону в час $t = 0$.

4.6. (i) Мартингальна ймовірність зростання $q = \frac{(1+r)-d}{u-d} = \frac{1.04-0.8}{1.25-0.8} = \frac{8}{15}$, спадання: $1 - q = \frac{7}{15}$.

(ii) Ціна деривативу дорівнює $v_0 = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[X/(1+r)^2]$, де X – кінцева вартість деривативу, Q – мартингальна міра з (i). Таким чином,

$$v_0 = 1000\mathsf{Q}(S_2 \neq 800)/1.04^2 = 1000 \times ((8/15)^2 + (7/15)^2)/1.04^2 = 464.33 \text{ грн.}$$

4.7. (i) Дериватив виплачується при умові двох зменшень ціни. Дефлятор A використовується для знаходження ціни через реальні ймовірності, тому (використовуючі очевидні позначення), маємо:

$$0.1448 = A(2, dd) \times (1-p)^2 \times 1 \quad \Rightarrow \quad A(2, dd) = A(1, d)^2 = 2.316 \quad \Rightarrow \quad p = 0.75.$$

(ii) $A(1,u) = 0.7610 = \exp(-0.05) \times q/p$. Знаючи p, ми отримаємо, що $q = 0.6$.

Спосіб 2 для (i) та (ii). p і q можуть бути отримані шляхом розв'язання рівняння для дефлятора цін. Відомо, що

$$A_1 = \begin{cases} e^{-r}q/p, \text{ якщо } S_1 = S_0 u, \\ e^{-r}(1-q)/(1-p), \text{ якщо } S_1 = S_0 d. \end{cases}$$

Це дає $p = 0.75$ та $q = 0.6$. При цьому не використовується умова, що ціна деривативу дорівнює 0,1448.

(iii) Ціна $= 0.6^2 \times \exp(-0.05 \times 2) \times 1 = 0.3257$.

4.8. (i) Маємо, що

$$u = \exp\left(\frac{0.4}{\sqrt{365}}\right) = 1.0211597 \quad \Rightarrow \quad d = 0.9792807.$$

Нейтральна до ризику ймовірність:

$$q = \frac{e^{\frac{0.05}{365}} - 0.97928}{1.02116 - 0.97928} = 0.498018.$$

Маємо відповідні множники для трьох значень ціни:

$$\begin{array}{lrcl} s_1: & 1 \times 0.498018^2 \times e^{-\frac{0.05\times 2}{365}} & = & 0.24795, \\ s_2: & 1 \times 2 \times 0.498018 \times 0.501982 \times e^{-\frac{0.05\times 2}{365}} & = & 0.499855, \\ s_3: & 1 \times 0.501982^2 \times e^{-\frac{0.05\times 2}{365}} & = & 0.251917. \end{array}$$

Три можливих ціни акцій в момент часу $t = 2$ у відповідних станах:

$$\begin{array}{lc} s_1: & 104.2763, \\ s_2: & 100.0, \\ s_3: & 95.899. \end{array}$$

Використовуючи загальні формули дефлятора, знаходимо реальні ймовірності для відповідних значень ціни:

s_1: 0.24795 / 0.81977=0.30246,
s_2: 0.499855 / 1.00981=0.495,
s_3: 0.251917 / 1.24390=0.20252.

Використовуючи реальні ймовірності станів, знаходимо сподівання ціни акції:

$$104.2763 \times 0.30246 + 100 \times 0.495 + 95.899 \times 0.20252 = 100.46288.$$

Тому очікуваний дохід дорівнює 0.23% в день.

(ii) Маємо наступну таблицю значень:

(1) Ціна акції	(2) Виплата по опціону	(3) Реальна ймовірність	(4) Дефлятор	(2)×(3)×(4)
104.2763	87.8289	0.30246	0.81977	21.77
100.0	50	0.495	1.00981	24.99
95.899	20.899	0.20252	1.2439	5.26
				Сума: 52.03

Отже, вартість цього спеціального опціону дорівнює 52.03.

(iii) Нехай s_u і s_d є цінами акцій після зростання і спадання ціни акції відповідно, v_u і v_d є значеннями опціону після зростання і спадання ціни відповідно. Будемо позначати через ϕ кількість акцій в портфелі, через ψ – внесок на банківський рахунок.

Для портфеля хеджування мають справджуватися рівності:

$$\phi s_u + \psi e^r = v_u, \quad \phi s_d + \psi e^r = v_d, \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{v_u - v_d}{s_u - s_d}, \quad \psi = e^{-r}(v_u - s_u\phi).$$

В момент часу 1 ми маємо 2 можливі випадки: після зростання ціни та після спадання.

Значення після зростання:

$$\phi = \frac{3 \times (104.2763 - 75) - 2 \times (100 - 75)}{(104.2763 - 100)} = 8.8462,$$
$$\psi = [3 \times (104.2763 - 75) - (104.2763) \times 8.8462]e^{-\frac{0.05}{365}} = -834.51.$$

Загальна вартість портфеля в цьому випадку: $8.8462 \times 102.116 - 834.51 = 68.83$.

Значення після спадання:

$$\phi = \frac{2 \times (100 - 75) - (95.899 - 75)}{(100 - 95.899)} = 7.09607,$$
$$\psi = [2 \times (100 - 75) - 100 \times 7.09607]e^{-\frac{0.05}{365}} = -659.52.$$

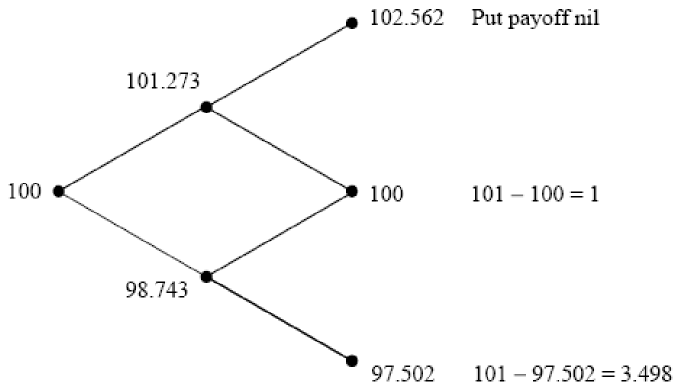
Загальна вартість портфеля в цьому випадку: $7.09607 \times 97.928 - 659.52 = 35.384$.

В момент часу 0:

$$\phi = \frac{68.83 - 35.38}{102.116 - 97.928} = 7.9871,$$
$$\psi = (68.83 - 102.116 \times 7.9871)e^{-\frac{0.05}{365}} = -746.68.$$

Загальна вартість портфеля в момент $t = 0$: $7.9871 \times 100 - 746.68 = 52.03$, що співпадає зі значенням в (ii).

4.9. (i) Біноміальне дерево має вигляд



$u = \exp(\sigma \cdot 250^{-0.5}) = 1.01273,\ d = 1/u = 0.98743$. Нейтральна до ризику ймовірність підвищення дорівнює

$$q = \frac{e^{0.016\%} - 0.98743}{1.01273 - 0.98743} = 0.50316.$$

Таким чином, вартість опціону продажу дорівнює

$$e^{-2\times 0.016\%}(0.50316(1 - 0.50316) \times 2 \times 1 + (1 - 0.50316)^2 \times 3.498) = 1.3635.$$

(ii) Ціна опціону купівлі дорівнює

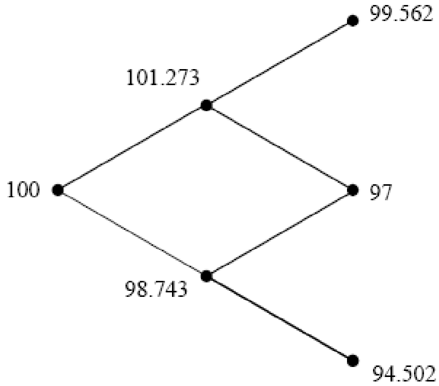
$$e^{-2\times 0.016\%}(0.50316^2 \times 1.562) = 0.3953.$$

(iii) Паритет купівлі-продажу дає вартість опціону купівлі:

$$c_t = 1.3635 + 100 - 101e^{-0.016\%\times 2} = 0.3958.$$

Це трохи відрізняється від значення вище, різниця обумовлена похибкою округлення.

(iv) Враховуючи, що перед днем 2 з ціни акції віднімається вартість дивідендів 3 грн, отримуємо наступний вигляд біноміального дерева:



Опціон купівлі. Немає сенсу його виконувати в день 2, коли вартість акції точно менша за страйкову. Якщо власник опціону виконає його в перший день, коли ціна акції виросла, він отримає додатній прибуток. Таким чином, якщо ціна акцій виросла, буде вигідно діяти раніше.

Опціон продажу. Тут власнику опціону невигідно виконувати опціон рано з наступних міркувань:
Якщо ціна акції дорівнює 101.273, тоді прибуток = 0.
Якщо термін дії опціону закінчується, є додатній прибуток.
Якщо ціна акції дорівнює 98.743, прибуток складає 2.257.
Якщо термін дії закінчується, прибуток має бути не менше 101-97=4.

Б 4.

4.10. Підставляючи дані задачі в паритет продажу та купівлі

$$c_t + Ke^{-r(T-t)} = p_t + S_t,$$

отримуємо:

$$c_t + 95e^{-0.05\times 0.75} = 5 + 100 \qquad \Rightarrow \qquad c_t = 13.5 \text{ грн.}$$

4.11. (i) $0.8 < 1 + r < 1.3$.

(ii) Мартингальна ймовірність зростання $q = \frac{(1+r)-d}{u-d} = \frac{1.08-0.8}{1.3-0.8} = 0.56$, спадання – $p = 0.44$.

(iii) Ціна вища за 210 можлива лише при 2 зростаннях ціни акції, тому

$$c_0 = 1.08^{-2}\big(0.56^2 \times (338 - 210) + 0 + 0\big) = 34.414.$$

(iv) Ціна нижча за 210 можлива при спаданні і зростанні та при 2 спаданнях, тому

$$p_0 = 1.08^{-2}\big(0 + 2 \times 0.44 \times 0.56 \times (210 - 208) + 0.44^2 \times (210 - 128)\big) = 14.455.$$

(v) $c_0 + K(1+i)^{-2} = p_0 + S_0 \quad \Leftrightarrow \quad 34.414 + 210 \times 1.08^{-2} = 14.455 + 200 \quad \Leftrightarrow \quad 214.455 = 214.455.$

4.12. (i) $q = \dfrac{1.05 - 0.8}{1.25 - 0.8} = \dfrac{5}{9}, \quad 1 - q = \dfrac{4}{9}.$

(ii) (a) Ціна опціону дорівнює

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\left[(1+r)^{-2}(S_2 - M_2)\right] = 1.05^{-2}(q^2 \times 562.5 + q(1-q) \times 200) = 202.3 \text{ грн .}$$

(b) Якщо ϕ – це кількість акцій, ψ – вартість готівки у портфелі хеджування в момент часу 1, то нам потрібно розв'язати систему:

$$640\phi + 1.05\psi = 0, \qquad 1000\phi + 1.05\psi = 200.$$

Звідси випливає, що $\phi = 0.5556$ і $\psi = -338.6$ грн.

Заняття 5

А 5.

5.1. (i) $d_1 = \frac{\ln(S_0/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = 0.35$, $\quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0.15$, $\quad \Phi(d_1) = 0.6368$, $\quad \Phi(d_2) = 0.5596$,

$$c_0 = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) = 13.58 \text{ грн.}$$

(ii) $d_1 = 0.81$, $\quad d_2 = 0.67$, $\quad \Phi(-d_1) = 0.209$, $\quad \Phi(-d_2) = 0.2514$,

$$p_0 = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1) = 2.25 \text{ грн.}$$

5.2. (i) Використовуємо лінійну інтерполяцію для наближеного обчислення σ.

Спочатку обчислимо вартість опціону для $\sigma = 0.1$. Тут маємо $d_1 = 1.05$, $d_2 = 0.95$, $\Phi(d_1) = 0.8531$, $\Phi(d_2) = 0.8289$, $c_0 = 10.31$ грн.

Тепер обчислимо вартість опціону для $\sigma = 0.2$. Тут $d_1 = 0.6$, $d_2 = 0.4$, $\Phi(d_1) = 0.7257$, $\Phi(d_2) = 0.6554$, $c_0 = 13.27$ грн.

Вважаючи залежність ціни від σ близькою до лінійної, наближено знаходимо σ, що відповідає ціні 15 грн з рівності

$$\frac{\sigma - 0.1}{15 - 10.31} = \frac{0.2 - 0.1}{13.27 - 10.31} \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0.26.$$

Перевіримо, що $\sigma = 0.26$ дає значення ціни близьке до даного. Тут маємо $d_1 = 0.52$, $d_2 = 0.26$, $\Phi(d_1) = 0.6985$, $\Phi(d_2) = 0.6026$, $c_0 = 15.32$ грн. Отже, маємо відповідь: $\sigma = 0.26$.

(Для повного доведення того, що ми отримали наближення з точністю ± 0.02, ще можна перевірити, що при $\sigma = 0.24$ вартість опціону $c_0 = 14.63$ менша за 15 грн, при $\sigma = 0.28$ буде $c_0 = 16.03$ – більша за 15 грн.)

(ii) Стохастичне рівняння для S_t має розв'язок $S_t = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\}$. Враховучи, що W_1 має стандартний нормальний розподіл і використовуючи таблиці цього розподілу, маємо:

$$\mathsf{P}\{S_1 > 105\} = \mathsf{P}\{100\exp\{(0.2 - 0.26^2/2) \times 1 + 0.26W_1\} > 105\} = \mathsf{P}\{W_1 > -0.45\} = 0.6736.$$

5.3. (i) Вартість вказаної виплати в час $T = 1$ буде дорівнювати $1,000 S_T \mathbf{1}_{S_T \geq K}$, де $K = 1.5$ грн. За мартингальним підходом в оцінюванні цінних паперів, теперішня вартість цієї майбутньої виплати дорівнює $e^{-rT}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(1,000 S_T \mathbf{1}_{S_T \geq K})$, де Q – відповідна мартингальна міра.

Вказана величина розглядається при доведенні формули Блека – Шоулса. При виведенні значення ціни Європейського опціону купівлі зі страйковою ціною K ми отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(S_T - K)\mathbf{1}_{S_T \geq K} = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} S_T \mathbf{1}_{S_T \geq K} - \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} K \mathbf{1}_{S_T \geq K},\\
&e^{-rT}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} S_T \mathbf{1}_{S_T \geq K} = S_0\Phi(d_1),\ e^{-rT}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} K \mathbf{1}_{S_T \geq K} = Ke^{-rT}\Phi(d_2).
\end{aligned}$$

Можна сказати, що вартість опціону купівлі дорівнює оплаті за поставку акції мінус оплата виконання, коли ціна акції перевищує ціну виконання.

Отже, перший компонент формули Блека – Шоулса дає значення $S_0\Phi(d_1)$, де

$$\begin{aligned}
d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} &= \frac{\ln(1/1.5) + 0.04 + 0.3^2/2}{0.3} = -1.07\\
\Rightarrow \quad 1,000 S_0\Phi(d_1) &= 1,000\Phi(-1.07) = 142.70 \text{ грн .}
\end{aligned}$$

(ii) Обмеження прибутку за контрактом може бути представлено портфелем вищевказаної обіцянки за вирахуванням опціону купівлі з ціною виконання $K = 2$ грн. Вартість цього опціону складає:

$$1,000(\Phi(d_1) - 2e^{-0.04}\Phi(d_2)) = 2.15 \text{ грн}, \quad d_1 = -2.027, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = -2.327.$$

Значення вартості переглянутої обіцянки:

$$142.70 \text{ грн } - 2.15 \text{ грн } = 140.55 \text{ грн .}$$

(iii) (a) Співробітник висловив думку про очікуване зростання вартості акцій. В результаті виходить вартість, яка не відповідає ціноутворенню, нейтральному до ризику. Співробітник використовував реальну ймовірність, а в обчисленнях в (i) ми брали сподівання відносно мартингальної міри.

Це значить, що, якщо б для цих контрактах був ринок, ціна, отримана співробітником, не дорівнювала б ціні, яку на нього встановив би ринок.

(b) Якби роботодавець був готовий купити такі обіцянки за їх запропонованою ціною, певний інвестор міг би продати їх за 300 грн і хеджував їх позицію на рівні 142.70 грн. В результаті виходить значний безризиковий прибуток.

5.4. (i) Для спеціального опціону, виплата дорівнює 1 якщо $S_T \in [a,b]$, інакше 0. За мартингальним підходом в оцінюванні цінних паперів, отримуємо:

$$V_0 = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[e^{-rT}\mathbf{1}_{[a,b]}(S_T)] = e^{-rT}\mathsf{Q}(S_T \in [a,b]) = e^{-rT}\mathsf{Q}(S_T \le b) - e^{-rT}\mathsf{Q}(S_T < a).$$

Оскільки $S_T = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)T + \sigma W_T\}$, маємо, як при доведенні формули Блека – Шоулса,

$$\mathsf{Q}(S_T < x) = \Phi(d(x)), \text{ де } d(x) = \frac{\ln(x/S_0) - (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Отже, $V_0 = e^{-rT}[\Phi(d(b)) - \Phi(d(a))]$.

(ii) Значення становить 0.5% від вкладу, тобто $0.005S_0 = 0.5$.

(iii) Виплата дорівнює

$$0.001S_1 + 0.004(S_1 - S_0)^+ + 0.005(S_1 - U)^+ + 0.004S_0\mathbf{1}_{(S_1 > S_0)} + 0.005U\mathbf{1}_{(S_1 > U)}.$$

Перший доданок оцінюємо, використовуючи ціну з форвардного контракту з урахуванням дисконтування – форвардна вартість акції дорівнює $e^r S_0$, на даний момент дорівнює S_0. Позначивши ціни чотирьох опціонів в сумі вище як c_1, c_2, c_3 і c_4, маємо:

$$\begin{aligned}
c_1 = S_0\Phi(d_1) - S_0 e^{-r}\Phi(d_1 - \sigma), \text{ де } d_1 &= \frac{r + \sigma^2/2}{\sigma} = \frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \\
\Rightarrow c_1 = 100\Phi(0.325) - 100e^{-0.05}\Phi(0.075) &= 12.33599, \\
c_2 = S_0\Phi(d_3) - Ue^{-0.05}\Phi(d_3 - \sigma), \quad \text{де} \quad d_3 &= \frac{\ln(S_0/U) + (r + \sigma^2/2)}{\sigma}, \\
c_3 = 100[e^{-0.05}(1 - \Phi(d_4))], \quad \text{де} \quad d_4 &= \frac{-(r - \sigma^2/2)}{\sigma} = \frac{-r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \\
\Rightarrow c_3 = 100 \times 0.5040495 &= 50.40495, \\
c_4 = e^{-0.05}(1 - \Phi(d_5)), \text{ де } d_5 &= \frac{\ln(U/S_0) - (r - \sigma^2/2)}{\sigma} \\
&= \frac{-\ln(S_0/U) - (r - \sigma^2/2)}{\sigma} = -(d_3 - \sigma).
\end{aligned}$$

Сума має дорівнювати 0.5, і ми отримуємо рівність

$$\begin{aligned}
0.1 + 12.33599 \times 0.004 + [100\Phi(d_3) - Ue^{-0.05}\Phi(d_3 - \sigma)] \times 0.005 \\
+50.40495 \times 0.004 + U \times e^{-0.005}(1 - \Phi(-(d_3 - \sigma))) \times 0.005 \\
= 0.1 + 12.33599 \times 0.004 + 50.40495 \times 0.004 + 0.5\Phi(d_3) - Ue^{-0.05}\Phi(d_3 - \sigma) \times 0.005 \\
+Ue^{-0.005} \times 0.005 \times (1 - (1 - \Phi(d_3 - \sigma))) = 0.35096376 + 0.5\Phi(d_3) = 0.5. \\
\Rightarrow d_3 = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.35096376}{0.5}\right) = -0.052995 \\
\Rightarrow \ln\frac{100}{U} = -0.52995 \times 0.25 - 0.05 - \frac{1}{2}0.25^2 \\
\Rightarrow U = 123.83.
\end{aligned}$$

5.5. (i) З даного рівняння випливає, що

$$S_t = S_0 \exp\left[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\right] \qquad \Rightarrow \qquad S_1 = \exp\left[0.08 + 0.2W_1\right].$$

Формули для логнормального розподілу дають нам математичне очікування та дисперсію S_t:

$$\mathsf{E}(S_t) = \exp\left((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma^2 t/2\right) = e^{\mu t}, \quad \mathsf{Var}\,(S_t) = e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1).$$

Потрібно розглянути випадкову величину $X = 9,000 S_1 - 10,000$.

(a) $\mathsf{Var}\,(X) = 9,000^2 \times \mathsf{Var}\,(S_1) = 9,000^2 \times 0.049846 = 1,037,526.$

(b) $\mathsf{P}[X < 0] = \mathsf{P}[S_1 < \frac{10}{9}] = \mathsf{P}[\ln S_1 < \ln\frac{10}{9}] = \mathsf{P}[W_1 < 5\ln\frac{10}{9} - 0.4] = 0.55,$
де для W_1 використали таблиці стандартного нормального розподілу.

(ii) Використовуємо формулу Блека – Шоулса для вартості опціону продажу з параметрами $S_0 = 9,000,\ K = 10,000$, знаходимо $d_1 = -0.1768, d_2 = 0.3768$, отримуємо ціну рівну 1021.42 грн.

5.6. (i) За паритетом купівлі і продажу, ми знаємо, що

$$c_t + Ke^{-r(T-t)} = p_t + S_t \qquad \Rightarrow \qquad p_t = 187.06 + 5,250e^{-0.05\times 0.5} - 5,000 = 307.44 \text{ грн.}$$

(ii) Знаходимо наслідувану волатильність, розглядаючи два можливих значення σ і використовуючи лінійну інтерполяцію:

$$\sigma = 0.15 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d_1 = -0.1713 & \Rightarrow \quad \Phi(d_1) = 0.4320, \\ d_2 = -0.2773 & \Rightarrow \quad \Phi(d_2) = 0.3908 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad c_t = 158.96 \text{ грн;}$$

$$\sigma = 0.18 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d_1 = -0.1233 & \Rightarrow \quad \Phi(d_1) = 0.4509, \\ d_2 = -0.2506 & \Rightarrow \quad \Phi(d_2) = 0.4011 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad c_t = 200.72 \text{ грн.}$$

Лінійна інтерполяція дає, що $\sigma = 0.17019$, звідки $c_t = 187.03$ грн.

Перевіряємо знайдене значення:

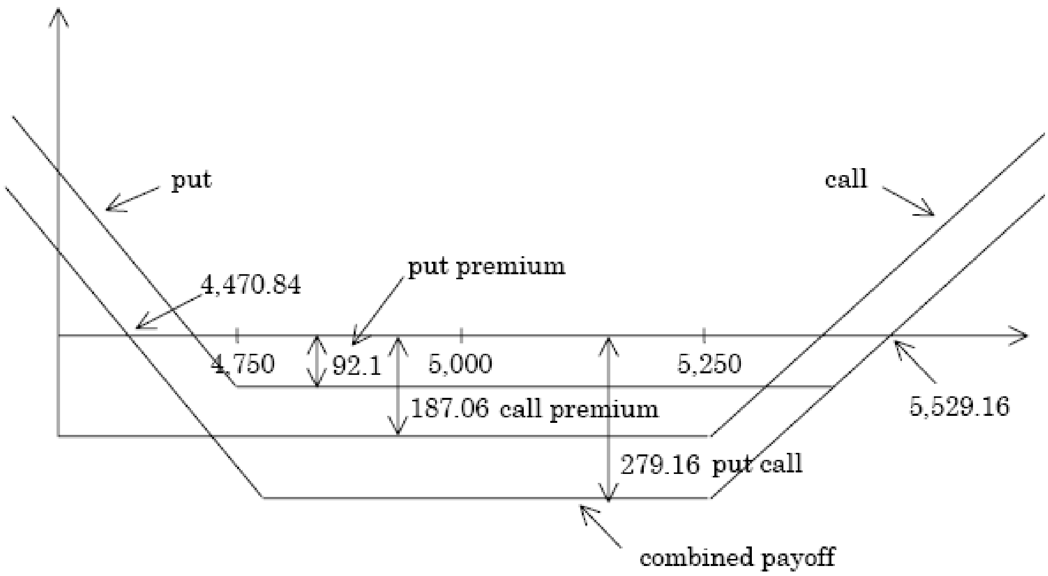
$$\sigma = 0.17 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d_1 = -0.1378 & \Rightarrow \quad \Phi(d_1) = 0.4452, \\ d_2 = -0.2580 & \Rightarrow \quad \Phi(d_2) = 0.3982 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad c_t = 187.06 \text{ грн.}$$

Таким чином, можна знайти ціну опціону купівлі з страйковою ціною $K = 4,750$ і волатильністю $\sigma = 0.17$, використовуючи формулу Блека – Шоулса:

$$\begin{cases} d_1 = 0.6948 & \Rightarrow \quad \Phi(d_1) = 0.7564, \\ d_2 = 0.5746 & \Rightarrow \quad \Phi(d_2) = 0.7172 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad c_t = 459.38 \text{ грн} \quad \Rightarrow \quad p_t = 92.10 \text{ грн.}$$

Для знаходження ціни опціону продажу p_t ми використали паритет купівлі і продажу зі значеннями $K = 4,750$, $S_t = 5,000$, $r = 0.05$, $Ke^{-r(T-t)} = 4632.722$.

Графік доходу інвестора в залежності від S_T має вигляд :



(iii) Основними причинами є можлива зміна волатильності та залежність волатильності від страйкової ціни. Невідповідність припущень моделі Блека – Шоулса та реального ринку також можуть призвести до того, що ринкова ціна буде відрізнятися від теоретичної.

Б 5.

5.7. (i) $d_1 = \frac{\ln(S_0/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = 0.38$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0.08$, $\Phi(-d_1) = 0.352$, $\Phi(-d_2) = 0.4681$,

$$p_0 = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1) = 16.89 \text{ грн.}$$

(ii) $d_1 = 0.79$, $d_2 = 0.37$, $\Phi(d_1) = 0.7852$, $\Phi(d_2) = 0.6443$,

$$c_0 = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) = 56.22 \text{ грн.}$$

5.8. (i) Використовуємо лінійну інтерполяцію для наближеного обчислення σ. Обчислимо вартість опціону для $\sigma = 0.1$. Тут $d_1 = -0.4$, $d_2 = -0.5$, $\Phi(-d_1) = 0.6554$, $\Phi(-d_2) = 0.6915$, $p_0 = 6.82$ грн.

Обчислимо вартість опціону для $\sigma = 0.2$. Тут маємо $d_1 = -0.13$, $d_2 = -0.33$, $\Phi(-d_1) = 0.5517$, $\Phi(-d_2) = 0.6293$, $p_0 = 10.68$ грн.

Вважаючи залежність ціни від σ близькою до лінійної, наближено знаходимо σ, що відповідає ціні 15 грн з рівності

$$\frac{\sigma - 0.1}{10 - 6.82} = \frac{0.2 - 0.1}{10.68 - 6.82} \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0.18.$$

Перевіримо, що $\sigma = 0.18$ дає значення ціни близьке до даного. Тут маємо $d_1 = -0.16$, $d_2 = -0.34$, $\Phi(-d_1) = 0.5636$, $\Phi(-d_2) = 0.6331$, $p_0 = 9.88$ грн. Отже, маємо відповідь: $\sigma = 0.18$.

(Для повного доведення того, що ми отримали наближення з точністю ± 0.02, ще можна перевірити, що при $\sigma = 0.16$ вартість опціону $p_0 = 9.10$ менша за 10 грн. Також з наведених вище обчислень можна зробити висновок, що $0.18 < \sigma < 0.2$, або $\sigma = 0.19 \pm 0.01$.)

(ii) Проведемо обчислення, вважаючи, що $\sigma = 0.18$. Оскільки $S_t = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\}$ і $W_2/\sqrt{2}$ має стандартний нормальний розподіл, маємо:

$$\mathsf{P}\{S_2 < 120\} = \mathsf{P}\{100\exp\{(0.1 - 0.18^2/2) \times 2 + 0.18W_2\} < 120\} = \mathsf{P}\{(W_2/\sqrt{2}) < 0.11\} = 0.5438.$$

Заняття 6

А 6.

6.1. (i) Нехтуючи доданками більш високого порядку, маємо:

$$\begin{aligned}
\Delta V_t &\approx \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\Delta S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}(\Delta S_t)^2 + \frac{\partial V_t}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial V_t}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V_t}{\partial t}\Delta t \\
&= \Delta \cdot \Delta S_t + \frac{1}{2}\Gamma \cdot (\Delta S_t)^2 + \mathcal{V} \cdot \Delta\sigma + \rho \cdot \Delta r + \Theta \cdot \Delta t \\
&= 0.556 \cdot 2\,\text{грн} + \frac{1}{2} \cdot 0.049\,\text{грн}^{-1} \cdot 4\,\text{грн}^2 + 0.16\,\text{грн}/\% \cdot 2\% \\
&+ 0.086\,\text{грн}/\% \cdot (-1)\% - 0.034\,\text{грн/день} \cdot 1\text{ день} = 1.41\,\text{грн} \\
&\Rightarrow \qquad V_t \approx 3.65 + 1.41 = 5.06\,\text{грн.}
\end{aligned}$$

(ii) Доданки з мішаними похідними та похідними вищих порядків ігноруються.

6.2. (i) Оскільки банк дотримується дельта-хеджування, кількість утримуваних акцій на один опціон дорівнює $\Delta = \Phi(d_1)$, тому $N\Phi(d_1) = 250{,}000$ – це перше рівняння.

Вартість банківського портфеля дорівнює

$$1.8N\Phi(d_1) - 2e^{-0.015}N\Phi(d_2) = 1.8 \times 250{,}000 - 413{,}057 = 36{,}943.$$

Друге рівняння має вигляд:

$$2e^{-0.015}N\Phi(d_2) = 413{,}057 \qquad \Leftrightarrow \qquad N\Phi(d_2) = 209{,}650.$$

(ii) З (i) маємо, що $\dfrac{\Phi(d_2)}{\Phi(d_1)} = \dfrac{209,650}{250,000} = 0.8386.$

Нехай $\sigma = 10\%$. Тоді

$$d_1 = -1.2425,\ d_2 = -1.3132,\ \Phi(d_1) = 0.1070,\ \Phi(d_2) = 0.0946 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Phi(d_2)}{\Phi(d_1)} = 0.8841.$$

Якщо $\sigma = 30\%$, то

$$d_1 = -0.3199,\ d_2 = -0.5320,\ \Phi(d_1) = 0.3745,\ \Phi(d_2) = 0.2974 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Phi(d_2)}{\Phi(d_1)} = 0.7941.$$

Лінійна інтерполяція дає наступну оцінку для волатильності:

$$\sigma = 10 + 20 \times \frac{0.8841 - 0.8386}{0.8841 - 0.7941} = 20.1\%.$$

(iii) Використовуючи значення $\sigma = 20.1\%$, знаходимо: $N = 250,000/\Phi(d_1) = 874,126$ опціонів.

6.3. В момент часу $2\Delta t$ три можливих вартості акції дорівнюють 1.00137, 1 і 0.99863, а деривативу – 1.53613, 1.529831 та 1.523557 відповідно.

Оцінимо Δ як

$$\frac{1.53613 - 1.529831}{1.00137 - 1} = 4.59579, \qquad \frac{1.52983 - 1.523557}{1 - 0.99863} = 4.58321.$$

Звідси, оцінка Γ становить

$$\frac{4.59579 - 4.58321}{1 - 0.99863} = 9.1853$$

або

$$\frac{4.59579 - 4.58321}{1.00137 - 1} = 9.1727.$$

Теоретичне значення (отримане як друга похідна за S) дорівнює $6S\exp\left(2rt + 3\sigma^2 t\right) = 9.2005$.

Отримані значення досить близькі, різниця, звичайно, викликана наближенням.

6.4. (i) Розглянемо два опціона з виплатами:

$$g(S_T) = \begin{cases} 0, & S_T < 100, \\ S_T - 100, & S_T \geq 100, \end{cases} \qquad f(S_T) = \begin{cases} 0, & S_T < 200, \\ S_T - 200, & S_T \geq 200. \end{cases}$$

Тоді функція виплат для спеціального опціону купівлі дорівнює:

$$g(S_T) + \frac{1}{2} f(S_T) = \begin{cases} 0, & S_T \leq 100, \\ S_T - 100, & 100 < S_T < 200, \\ 1.5 S_T - 200, & 200 \leq S_T \geq 200. \end{cases}$$

Отже, спеціальний опціон купівлі еквівалентний триманню портфеля опціону купівлі з ціною виконання 100 і половиною опціону купівлі з ціною виконання 200.

(ii) З (i) випливає, що значення спеціального опціону купівлі дорівнює сумі значень двох опціонів купівлі з функціями виплат g та $\frac{1}{2}f$.

Значення опціону купівлі з ціною виконання 100 дорівнює

$$\begin{aligned} v_1 &= 120\,\Phi\Big(\frac{\ln(120/100) + \frac{1}{2}(5\% + \frac{1}{2}0.25)}{\sqrt{0.25 \times \frac{1}{2}}}\Big) - 100\,\Phi\Big(\frac{\ln(120/100) + \frac{1}{2}(5\% - \frac{1}{2}0.25)}{\sqrt{0.25 \times \frac{1}{2}}}\Big) e^{-0.05/2} \\ &= 120\,\Phi(0.76317) - 100\,\Phi(0.40962) \times 0.97531 = 120 \times 0.77732 - 100 \times 0.65896 \times 0.97531 = 29.01. \end{aligned}$$

Значення опціону купівлі з ціною виконання 200 дорівнює:

$$\begin{aligned} v_2 &= 120\,\Phi\Big(\frac{\ln(120/200) + \frac{1}{2}(5\% + \frac{1}{2}0.25)}{\sqrt{0.25 \times \frac{1}{2}}}\Big) - 200\,\Phi\Big(\frac{\ln(120/200) + \frac{1}{2}(5\% - \frac{1}{2}0.25)}{\sqrt{0.25 \times \frac{1}{2}}}\Big) e^{-0.05} \\ &= 120\,\Phi(-1.19735) - 200\,\Phi(-1.55100) \times 0.97531 \\ &= 120\,(1 - \Phi(1.19735)) - 200\,(1 - \Phi(-1.55100)) \times 0.97531 \\ &= 120\,(1 - 0.88441)) - 200\,(1 - 0.93957) \times 0.97531 = 2.08. \end{aligned}$$

Отже, вартість спеціального опціону купівлі дорівнює $29.01 + \frac{1}{2}2.08 = 30.05$.

(iii) Дельта Європейського опціону купівлі дорівнює $\frac{\partial v_1}{\partial s} = \Phi(d_1)$.

Дельта спеціального опціону – це зважена сума дельт двох опціонів купівлі:

$$S_0 = 150: \qquad \Phi\Big(\frac{\ln(150/100) + \frac{1}{2}(5\% + \frac{1}{2}0.25)}{\sqrt{0.25 \times \frac{1}{2}}}\Big) + \frac{1}{2}\Phi\Big(\frac{\ln(150/200) + \frac{1}{2}(5\% + \frac{1}{2}0.25)}{\sqrt{0.25 \times \frac{1}{2}}}\Big)$$

$$= \Phi(1.39431) + \frac{1}{2}\Phi(-0.56620) = 0.918389 + \frac{1}{2}0.28563 = 1.0612.$$

$$S_0 = 250: \qquad \Phi\Big(\frac{\ln(250/100) + \frac{1}{2}(5\% + \frac{1}{2}0.25)}{\sqrt{0.25 \times \frac{1}{2}}}\Big) + \frac{1}{2}\Phi\Big(\frac{\ln(250/200) + \frac{1}{2}(5\% + \frac{1}{2}0.25)}{\sqrt{0.25 \times \frac{1}{2}}}\Big)$$

$$= \Phi(2.83915) + \frac{1}{2}\Phi(0.87863) = 0.99774 + \frac{1}{2}0.81020 = 1.4028.$$

(iv) Розглянемо збільшення дельти від $S_0 = 150$ до $S_0 = 250$ і відповідну гамму:

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial s} \approx \frac{1.4028 - 1.0612}{250 - 150} = 0.003416.$$

Порівняємо це з Європейським опціоном купівлі з ціною виконання 100 (див. отримані вище значення $\Phi(2.83915)$ і $\Phi(1.39431)$):

$$\Gamma \approx \frac{0.99774 - 0.91839}{250 - 150} = 0.0007935.$$

Гамма для спеціального опціону купівлі вище, чим для Європейського опціону купівлі. Отже, портфель хеджування для спеціального опціону купівлі, ймовірно, потребує більш активного збалансування при зміні ціни базової акції, ніж портфель хеджування простого опціону купівлі з ціною виконання 100.

6.5. (i) Для зручності записів вважаємо, що позначення $S^{(1)}$ та $S^{(2)}$ відносяться як до акцій, так і до цін акцій в момент часу 0.

Розглянемо акцію $S^{(1)}$, оцінену в одиницях $S^{(2)}$. Нехай $S' = S^{(1)}/S^{(2)}$, ця величина має логнормальний розподіл з волатильністю, визначеною наступним чином

$$v^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2.$$

Адже $\ln S' = \ln S^{(1)} - \ln S^{(2)}$ має таку дисперсію в час $t = 1$,

$$\ln S^{(i)}(t) = \ln S^{(i)}(0) + (r - \sigma_i^2/2)t + \sigma_i W_t^{(i)} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{Var}\,[S_i(t)] = \sigma_i^2 t.$$

Вартість опціону купівлі на акцію S', за формулою Блека – Шоулса з ціною виконання 1, дорівнює

$$S'\Phi(d_1) - 1 \times e^{-rT}\Phi(d_2), \quad \text{де} \quad d_1 = \frac{\ln(S') + (r + v^2/2)T}{v\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - v\sqrt{T}.$$

Ми також відмітимо, що $r = 0$. Щоб побачити це, розглянемо форвардний контракт на 1 рік (виражений в одиницях $S^{(2)}$), який забезпечує доставку однієї одиниці $S^{(2)}$ протягом року. Зараз це значення $S^{(2)}$, тобто ціна однієї одиниці $S^{(2)}$. Звідси, ми маємо рівняння для значення

$$1 = e^{-rT} \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad r = 0.$$

Оскільки функція виплат для опціону купівлі дорівнює $\max(S' - 1, 0)$ і наведена вище формула дає значення в одиницях $S^{(2)}$, ми вимагаємо, щоб це значення було в $S^{(2)}$ рази більше, щоб отримати вартість нашого опціону обміну:

$$S^{(2)} \times S'\Phi(d_1) - S^{(2)} \times \Phi(d_2), \quad \text{де} \quad d_1 = \frac{\ln S' + v^2T/2}{v\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - v\sqrt{T}.$$

Вартість опціону обміну в час 0 дорівнює

$$V_0 = S^{(1)}\Phi\Big(\frac{\ln(S^{(1)}/S^{(2)}) + v^2T/2}{v\sqrt{T}}\Big) - S^{(2)}\Phi\Big(\frac{\ln(S^{(1)}/S^{(2)}) - v^2T/2}{v\sqrt{T}}\Big).$$

(ii) Дельта V_0 відносно $S^{(1)}$ дорівнює

$$\frac{\partial V_0}{\partial S^{(1)}} = \Phi(d_1) + S^{(1)}\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S^{(1)}} - S^{(2)}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S^{(1)}}.$$

Відмітимо, що $\frac{\partial d_1}{\partial S^{(1)}} = \frac{\partial d_2}{\partial S^{(1)}}$ і $\Phi'(d_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_i^2/2}$.

Маємо, що

$$\frac{S^{(1)}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(S^{(1)}/S^{(2)})+v^2T/2}{v\sqrt{T}}\right)^2} = \frac{S^{(2)}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(S^{(1)}/S^{(2)})-v^2T/2}{v\sqrt{T}}\right)^2}$$

тому що

$$\ln(S^{(1)}/S^{(2)}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(S^{(1)}/S^{(2)}) - v^2T/2}{v\sqrt{T}}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(S^{(1)}/S^{(2)}) - v^2T/2}{v\sqrt{T}}\right)^2.$$

Отже,

$$\frac{\partial V_0}{\partial S^{(1)}} = \Phi\Big(\frac{\ln(S^{(1)}/S^{(2)}) + v^2T/2}{v\sqrt{T}}\Big),$$
$$\frac{\partial V_0}{\partial S^{(2)}} = S^{(1)}\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S^{(2)}} - S^{(2)}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S^{(2)}} - \Phi(d_2).$$

Тому використовуючи результати, використані при виведенні $\dfrac{\partial V_0}{\partial S^{(1)}}$, отримуємо, що

$$\frac{\partial V_0}{\partial S^{(2)}} = -\Phi\left(\frac{\ln(S^{(1)}/S^{(2)}) - v^2T/2}{v\sqrt{T}}\right).$$

(iii) Реплікаційний портфель складається з

$$\Phi\left(\frac{\ln(S^{(1)}/S^{(2)}) + v^2T/2}{v\sqrt{T}}\right) \text{ акцій } S^{(1)} \qquad \text{і} \qquad -\Phi\left(\frac{\ln(S^{(1)}/S^{(2)}) - v^2T/2}{v\sqrt{T}}\right) \text{ акцій } S^{(2)}.$$

(iv) Використовуючи інтерполяцію, отримуємо волатильність для $S^{(1)}$ рівною 15% річних. Тоді маємо:

$$v^2 = 0.15^2 + 0.45^2 - 2\times\frac{1}{2}\times 0.15\times 0.45 = 0.1575,$$
$$\frac{\ln(S^{(1)}/S^{(2)}) + v^2T/2}{v\sqrt{T}} = \frac{\ln(200/175) + (1/2)\times 0.1575\times(1/2)}{\sqrt{0.1575\times(1/2)}} = 0.61615.$$

Аналогічно $\dfrac{\ln(S^{(1)}/S^{(2)}) - v^2T/2}{v\sqrt{T}} = 0.3355$. Тоді вартість дорівнює

$$200\,\Phi(0.61615) - 175\,\Phi(0.3355) = 200\times 0.7311 - 175\times 0.63137 = 35.7.$$

Б 6.

6.6. Використовуючи формулу Тейлора, маємо:

$$\begin{aligned}
\Delta V_t &\approx \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\Delta S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}(\Delta S_t)^2 + \frac{\partial V_t}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial V_t}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V_t}{\partial t}\cdot\Delta t + \frac{\partial V_t}{\partial q}\Delta q \\
&= \Delta\cdot\Delta S_t + \frac{1}{2}\Gamma\cdot(\Delta S_t)^2 + \mathcal{V}\cdot\Delta\sigma + \rho\cdot\Delta r + \Theta\cdot\Delta t + \lambda\cdot\Delta q \\
&= -0.883\cdot 5\,\text{грн} + \frac{1}{2}\cdot 0.0011\,\text{грн}^{-1}\cdot 25\,\text{грн}^2 + 0.1642\,\text{грн}/\%\cdot 5\% \\
&- 0.4846\,\text{грн}/\%\cdot 2\% - 0.019\,\text{грн/день}\cdot 5\text{ днів} + 0.44\,\text{грн}/\%\cdot(-3)\% = -5.96\,\text{грн} \\
&\Rightarrow \quad V_t \approx 21.20 - 5.96 = 15.24\,\text{грн}.
\end{aligned}$$

(Відмітимо, що точно пораховане значення вартості цього опціону дорівнює 16.32 грн.)

6.6. Можна виписати чотири нерівності для цін:

1. A $>$ B, оскільки в A більший час до виконання, більшими є можливості використати цей Американський опціон;
2. A $>$ C, адже в A менша страйкова ціна;
3. A $>$ D, оскільки Американський опціон дорожчий за Європейський (при рівних параметрах опціонів);
4. B $>$ E, оскільки Американський опціон дорожчий за Європейський (і, як наслідок, A $>$ E).

6.8. (i) Використовуємо лінійну інтерполяцію.

При $r = 10\%$ вартість опціону складає 4.72 грн.

При $r = 20\%$ вартість опціону складає 7.73 грн.

Для ціни 6 грн отримуємо оцінку

$$r \approx 10 + 10 \cdot \frac{6 - 4.72}{7.73 - 4.72} = 14\%.$$

Щоб перевірити отримане значення, знаходимо вартість опціону при $r = 14\%$, вона становить 5.84 грн. Знайшовши також вартість при $r = 15\%$ – це 6.13 грн, можемо зробити висновок, що $r = 14.5\%$ з точністю $\pm 0.5\%$.

(ii) Застосовуючи формулу з мартингального підходу, маємо, що відповідна вартість дорівнює

$$V_0 = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big[e^{-r}\frac{S_1^2}{100}\Big],$$

де Q – відповідна еквівалентна мартингальна міра.

Відносно Q, дисконтована ціна акції є мартингалом, тому маємо рівність

$$e^{-rt}S_t = S_0 \exp\{\sigma W_t - \sigma^2 t/2\}.$$

Використовуючи формулу сподівання для логнормального розподілу і значення $r = 14.5\%$, знаходимо:

$$V_0 = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[e^{-r}S_0^2 \exp\{2\sigma W_1 + 2r - \sigma^2\}]/100 = S_0^2 \exp\{r + \sigma^2\}/100 = 55^2 \exp\{0.185\}/100 = 36.4 \text{ грн.}$$

(iii) Кількість акцій в хеджуючому портфелі відповідає значенню дельти, а саме

$$\Delta = \frac{\partial V_t}{\partial S_t}.$$

Врахувавши, що

$$S_t = S_0 \exp\{\sigma W_t + rt - \sigma^2 t/2\} \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_t \exp\{\sigma(W_1 - W_t) + r(1-t) - \sigma^2(1-t)/2\}$$

маємо для портфеля в час $t = 0$

$$\begin{aligned}\Delta = \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial S_t}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[e^{-r(1-t)}S_t^2 \exp\{2\sigma(W_1 - W_t) + (2r - \sigma^2)(1-t)\}]/100\Big|_{t=0} \\ &= 2S_t\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[e^{-r(1-t)} \exp\{2\sigma(W_1 - W_t) + (2r - \sigma^2)(1-t)\}]/100\Big|_{t=0} \\ &= 2S_0e^{-r}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[\exp\{2\sigma W_1 + 2r - \sigma^2\}]/100 = 2S_0 \exp\{r + \sigma^2\}/100 \\ &= 2 \cdot 55 \exp\{0.185\}/100 = 1.3235 \text{ акцій.}\end{aligned}$$

Грошовий борг в портфелі складає

$$\Delta \cdot S_0 - V_0 = 1.3235 \cdot 55 - 36.4 = 36.4 \text{ грн.}$$

Заняття 7

А 7.

7.1. (i)
- Зручна для математичних обчислень, r_t має логнормальний розподіл.
- Ставка не може приймати від'ємні значення.

- Немає властивості повернення до середнього. Є тренд на постійне зростання r_t.

(ii)
- Ставка може приймати від'ємні значення.
- Немає властивості повернення до середнього.
- Зручна для математичних обчислень.

(iii)
- Ставка не може приймати від'ємні значення.
- Немає властивості повернення до середнього.
- Зручна для математичних обчислень.

(iv)
- Ставка не може приймати від'ємні значення.
- Є властивість повернення до середнього.
- Зручна для математичних обчислень.

7.2. (i) $B(t,T) = f(r_t, t)$, де $f(x,t) = \exp\{-(T-t)x + \sigma^2(T-t)^3/6)\}$.

Отже, за формулою Іто,

$$\begin{aligned} dB(t,T) &= \frac{\partial f(r_t,t)}{\partial x}\,dr_t + \frac{\partial f(r_t,t)}{\partial t}\,dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(r_t,t)}{\partial x^2}\,\sigma^2\,dt \\ &= B(t,T)(-(T-t)\mu r_t\,dt - \sigma(T-t)dW_t + (r_t - \sigma^2(T-t)^2/2)dt + (\sigma^2(T-t)^2/2)\,dt) \\ &= B(t,T)((r_t - (T-t)\mu r_t)\,dt - \sigma(T-t)dW_t). \end{aligned}$$

(ii) Ринкова ціна ризику дорівнює

$$\gamma(t,T) = \frac{m(t,T) - r_t}{S(t,T)}, \quad \text{де} \quad dB(t,T) = B(t,T)(m(t,T)dt + S(t,T)d\tilde{W}_t), \quad \text{звідки} \quad \gamma(t,T) = \frac{\mu r_t}{\sigma}.$$

7.3. (i)
- Моделі Васічека і CIR описують поведінку ставки з поверненням до середнього значення.
- Обидві генерують криві доходу без арбітражу.
- В обох моделях параметри не залежать від часу.
- Модель Васічека більш зручна для математичних обчислень.
- Модель CIR забезпечує невід'ємні значення відсотка.

(ii) (a) Спотова ставка:

$$-\frac{\ln P}{t} = \frac{1}{t}\Big[\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}R + \frac{\alpha t - 1 + e^{-\alpha t}}{\alpha}L + \frac{B}{2}\Big(\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\Big)^2\Big].$$

(b) Форвардна ставка:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\ln P(t) = e^{-\alpha t}R + \Big(L + \frac{\beta}{\alpha}e^{-\alpha t}\Big)(1 - e^{-\alpha t}).$$

(c) Коли $t \to 0$, спотова та форвардна ставки прямують до R.

7.4. (i) За формулою Іто,

$$\begin{aligned} df(t,r_t) &= \frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f}{\partial r}\,dr_t + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial f}{\partial r^2}\,dt \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f}{\partial r}\,(\mu(r_t,t)\,dt + \sigma(r_t,t)\,dW_t) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial f}{\partial r^2}\,dt. \end{aligned}$$

Сума доданків з dt має дорівнювати $r_t f(t,r_t)\,dt$ (миттєвому прибутку від даної вартості за безризиковим відсотком). Прирівнявши вказані вирази, отримуємо потрібну рівність.

(ii) (a) Оскільки $r_t = \text{const}$, можемо вважати, що $B(t,T)$ не залежить від r_t. Рівняння з (i) для $f = B$ приймає вигляд:

$$\frac{\partial B}{\partial t} - rB = 0 \quad \Rightarrow \quad B(t,T) = Ce^{rt},\ B(T,T) = 1 \quad \Rightarrow \quad B(t,T) = e^{-r(T-t)}.$$

(b) Будемо шукати невідому функцію у вигляді

$$B(t,T) = A(t,T)e^{-r(T-t)}, \quad B(T,T) = 1.$$

Маємо в рівнянні з (i):

$$\begin{aligned} A'e^{-r(T-t)} \quad &+ \quad rAe^{-r(T-t)} - \mu(T-t)Ae^{-r(T-t)} \\ &+ \quad \frac{\sigma^2}{2}(T-t)^2Ae^{-r(T-t)} - rAe^{-r(T-t)} = 0 \\ &\Rightarrow \qquad (\ln A)' = \mu(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)^2 \\ &\Rightarrow \qquad B(t,T) = \exp\Big\{-\frac{1}{2}\mu(T-t)^2 + \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3\Big\}. \end{aligned}$$

(iii) Покажемо, що для

$$f(t,r) = \exp\Big\{-(T-t)r - \frac{(T-t)^2}{2}tc^2\Big\}$$

справджується рівняння з (i) (виконання кінцевої умови $f(T,r)=1$ очевидне). Маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f\cdot\Big(r + (T-t)tc^2 - \frac{(T-t)^2}{2}c^2\Big), \quad \frac{\partial f}{\partial r} = -f\cdot(T-t), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = f\cdot(T-t)^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + tc^2\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{c^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - rf = f\cdot\Big(r + (T-t)tc^2 - \frac{(T-t)^2}{2}c^2 - tc^2(T-t) + \frac{c^2}{2}(T-t)^2 - r\Big) = 0.$$

Б 7.

7.5. (i) Переваги:

- Розв'язок рівняння $r(t)$ можна записати в явному вигляді.
- Модель зручна для обчислень.

Недоліки:

- Відсоткова ставка може бути від'ємною.
- Немає властивості повернення до середнього.
- Не природня поведінка значення ставки – чим більша $r(t)$, тим швидше зростає. Це не відповідає спостереженням на реальному ринку.
- Не дуже гнучка – мала кількість параметрів робить складною калібровку моделі до реальних даних.

(ii) Як для процесу Орнштейна – Уленбека, маємо розв'язок:

$$r(u) = r(t)e^{-\alpha(u-t)} + \mu\big(1 - e^{-\alpha(u-t)}\big) + \sigma e^{-\alpha u}\int_t^u e^{\alpha s}\,dW_s, \quad u \ge t.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \int_t^T r(u)\,du &= r(t)\int_t^T e^{-\alpha(u-t)}\,du + \mu\int_t^T \big(1 - e^{-\alpha(u-t)}\big)\,du + \sigma\int_t^T e^{-\alpha u}\int_t^u e^{\alpha s}\,dW_s\,du \\ &= \mu(T-t) + \big[r(t)-\mu\big]\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} + \sigma\int_t^T \frac{1-e^{-\alpha(T-s)}}{\alpha}\,dW_s. \end{aligned}$$

(iii) З властивостей інтеграла Іто (в даному випадку – від невипадкової функції) випливає, що ми маємо гаусівський розподіл з параметрами

$$\mathsf{E}\int_t^T r(u)\,du = \mu(T-t) + \big[r(t)-\mu\big]\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}, \qquad \mathsf{Var}\int_t^T r(u)\,du = \sigma^2\int_t^T \Big(\frac{1-e^{-\alpha(T-s)}}{\alpha}\Big)^2\,ds.$$

7.6. Використовуючи лемму Іто, отримуємо:

$$dB(t,T) = B(t,T)(-T(T-t)\,dr_t + Tr_t\,dt - 0.5\sigma^2(T-t)^2\,dt + 0.5T^2(T-t)^2\sigma^2\,dt)$$
$$= B(t,T)(((1-\mu(T-t))Tr_t + 0.5(T^2-1)(T-t)^2\sigma^2)\,dt - \sigma(T-t)T\,dW_t).$$

Ринкова ціна ринку дорівнює

$$\gamma(t) = \frac{m(t,T)-r_t}{S(t,T)}, \qquad \text{де} \qquad dB(t,T) = B(t,T)(m(t,T)\,dt + S(t,T)\,dW_t).$$

Маємо, що

$$m(t,T) = Tr_t(1-(T-t)\mu) + 0.5(T-t)^2\sigma^2(T^2-1), \qquad S(t,T) = -\sigma(T-t)T.$$

Тому

$$\gamma(t) = \frac{-Tr_t(1-(T-t)\mu) - 0.5(T-t)^2\sigma^2(T^2-1) + r_t}{\sigma(T-t)T}.$$

Відмітимо, що при $T=1$ наша відповідь узгоджується з відповіддю задачі 7.2.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Матеріали іспитів CT8 Інституту і факультету актуаріїв.
www.actuaries.org.uk/studying/prepare-your-exams/past-exam-papers-and-examiners-reports

2. Formulae and Tables for Examination. – The Faculty of Actuaries and the Institute of Actuaries. IFoA, 2002.

3. *Elton E. J.* Modern portfolio theory and investment analysis / E. J. Elton, M. J. Gruber, S. J. Brown, W. N. Goetzmann. – John Wiley & Sons, 2009.

4. *Luenberger D. G.* Investment science / D. G. Luenberger. – Oxford University Press, 1998.

5. *Chin E.* Problems and solutions in mathematical finance: stochastic calculus / E. Chin, S. Olafsson, D. Nel. -– John Wiley & Sons, 2014.

6. *Chin E.* Problems and Solutions in Mathematical Finance: Equity Derivatives, Vol. 2/ E. Chin, D. Nel, S. Olafsson. – John Wiley & Sons, 2017.

7. *Борисенко О. Д.* Збірник задач з фінансової математики / О. Д. Борисенко, Ю. С. Мішура, В. М. Радченко, Г. М. Шевченко. – К. : Техніка, 2007.

8. *Мішура Ю. С.* Математика фінансів / Ю. С. Мішура, Г. М . Шевченко – К.: ВПЦ "Київський університет", 2009.