КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ЗБІРНИК ТИПОВИХ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ: ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ЧАСТИНА 3

2023

Збірник типових задач з математичного аналізу: функції однієї змінної. Частина 3. / Упорядн. М. О. Назаренко, О. Н. Нестеренко, Т. О. Петрова, А. В. Чайковський. – Електронне видання. – 2023. – 56 с..

Укладачі: Назаренко М.О., кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Нестеренко О.Н., кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Петрова Т.О., кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Чайковський А.В. доктор фіз.-мат. наук, доцент

Рецензенти: В.М. Бойко, провідний науковий співробітник відділу математичної фізики Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук,

О.В. Карупу, доцент кафедри прикладної математики Національного авіаційного університету, кандидат фізико-математичних наук.

Затверджено Вченою Радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 11 від 20 квітня 2023 року)

Рекомендовано для студентів першого курсу спеціальності ”математика”, ”статистика”, ”комп’ютерна математика”, ”комп’ютерна механіка”, ”середня освіта”.

Зміст

Розділ 1

Невласні інтеграли

1.1 Визначення інтегралів за необмеженими інтервалами.

Нехай функція $f[a, +\infty) \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ така, що $\forall A \geq a: \ f \in \mathbb{R}([a, A])$. Далі ця умова вважається виконаною і більше не наводиться.

Нехай

$$\varphi(A) := \int\limits_a^A f(x)dx, \ A \geq a$$

Означення. Невласним інтегралом

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \tag{1.1.1}$$

від функції f по множині $[a, +\infty)$ називається скінченна границя

$$\lim_{A \to +\infty} \varphi(A) = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^A f(x)dx \tag{1.1.2}$$

якщо ця границя існує. У цьому випадку невласний інтеграл (1.1.1) називається **збіжним**. Якщо границя (1.1.2) не існує, або нескінченна, то невласний інтеграл (1.1.1) називається **розбіжним**.

Зауваження. Якщо інтеграл (1.1.1) збігається, то для будь-якого $b > a$ збігається невласний інтеграл

$$\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx, \tag{1.1.3}$$

і

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx. \tag{1.1.4}$$

Якщо для деякого $b > a$ збігається інтеграл (1.1.3), то збігається інтеграл (1.1.1) і має місце рівність (1.1.4). Обидва твердження випливають з рівності

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^A f(x)dx,\ a \le b \le A,$$

і визначення невласного інтеграла.

Приклад 1.1.1. *1) Інтеграл* $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx$ *збігається і має значення 1, оскільки* $\lim\limits_{A\to+\infty} \varphi(A) = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A e^{-x}dx = \lim\limits_{A\to+\infty} (1 - e^{-A}) = 1.$

2) Має місце рівність $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, *оскільки* $\lim\limits_{A\to+\infty} \varphi(A) = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A \frac{dx}{1+x^2} =$ $= \lim\limits_{A\to+\infty} (\operatorname{arctg} A - 0) = \frac{\pi}{2}.$

3) Нехай $a > 0$. *Невласний інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ *збігається і має значення* $\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$, *коли* $\alpha > 1$, *і розбігається коли* $\alpha \le 1$, *оскільки функція від* A

$$\varphi(A) = \int_a^A \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln A - \ln a, & \alpha = 1 \\ \frac{A^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \alpha \ne 1 \end{cases}$$

така, що при $A \to +\infty$ $\varphi(A) \to \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, \alpha > 1; \varphi(A) \to +\infty, \alpha \le 1.$

4) Інтеграл $\int\limits_0^\infty \sin x dx$ *розбігається, оскільки функція* $\varphi(A) = \int\limits_0^A \sin x dx =$ $= 1 - \cos A, A > 0$ *не має границі при* $A \to +\infty$.

1.2 Елементарні властивості.

Наведені далі властивості випливають із властивостей інтеграла Рімана і визначення невласного інтеграла.

1. Припустимо, що невласні інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f_i(x)dx, i = 1, 2$ збігаються. Тоді

$$\forall c \in \mathbb{R}: \int\limits_a^{+\infty} (cf_1(x))dx = c \int\limits_a^{+\infty} f_1(x)dx;$$

$$\int\limits_a^{+\infty} (f_1(x) + f_2(x))dx = \int\limits_a^{+\infty} f_1(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} f_2(x)dx,$$

тобто збігаються невласні інтеграли у лівих частинах рівностей і мають місце рівності.

2. Припустимо, що функція f має первісну F на $[a, +\infty)$. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) =: F(+\infty), \tag{1.2.5}$$

то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a).$$

Якщо границя (1.2.5) не існує, або нескінченна, то невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

3. Нехай $\{f, g\} \subset C^{(1)}([a, +\infty))$. Якщо один із невласний інтегралів

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx, \quad \int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx \tag{1.2.6}$$

збігається і існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)g(x))$, то збігається другий з інтегралів (1.2.6) і має місце рівність

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = \lim_{x\to+\infty}(f(x)g(x)) - f(a)g(a) - \int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx.$$

Приклад 1.2.1. *Для* $a = 0, f(x) = x, g'(x) = e^{-x}, x \geq 0$ *маємо*

$$\int\limits_a^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x}) - 0 + \int\limits_a^{+\infty} e^{-x}dx = 1$$

1.3 Інтеграли від невід'ємних функцій.

Будемо розглядати

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \tag{1.3.7}$$

де $f(x) \geq 0, \forall x \geq a$.
Розглянемо ознаки збіжності для інтегралів (1.3.7) при $f(x) \geq 0$.
Перша ознака порівняння. Нехай

$$\int_a^{+\infty} f_1(x)dx \tag{1.3.8}$$

і

$$\int_a^{+\infty} f_2(x)dx \tag{1.3.9}$$

і виконується умова: $\forall x \geq a: \ 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$. Тоді, якщо (1.3.9) збігається, то (1.3.8) також збігається. Якщо (1.3.8) розбігається, то (1.3.9) також розбігається.

Друга ознака порівняння. Нехай $f_1 \sim f_2, x \to +\infty$ (тобто $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0, c \in \mathbb{R}$). Тоді інтеграли (1.3.8) та (1.3.9) збігаються, або розбігаються одночасно.

Зауваження. Як було доведено раніше, $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, a > 0$ збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \leq 1$.

Приклад 1.3.1. *Дослідити на збіжність* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2x+1}{x^3+7x+13}dx$.

Розв'язок: $f_1(x) = \frac{2x+1}{x^3+7x+13}, \ f_2(x) = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}, \ f_1 \sim f_2, x \to +\infty$. *Інтеграл* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ *– збігається* ($p = 2 > 1$), *тому* $\int\limits_1^{+\infty} f_1(x)dx$ *збігається.*

Зауваження. $\operatorname{arctg} x \sim \frac{\pi}{2}, x \to +\infty$

Приклад 1.3.2. *Дослідити на збіжність* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{3x^5+x+2} \operatorname{arctg} x dx$.

Розв'язок: $f_1(x) = \frac{x^2+1}{3x^5+x+2} \operatorname{arctg} x \sim \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\pi}{2} \sim \frac{1}{x^3}, x \to +\infty, \ \frac{1}{x^3} := f_2(x)$

тому, що за означенням $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)\operatorname{arctg} x\cdot x^3}{(3x^5+x+2)\cdot 1} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\pi}{6} \neq 0.$
Інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ *– збігається* $(p = 3 > 1)$*, тому* $\int\limits_1^{+\infty} f_1(x)dx$ *збігається.*

Зауваження. В прикладі (1.3.2) $p = 3$ ми отримали наступним чином $p = 5-2 = 3$ (від старшого степеня знаменника віднімаємо старший степінь чисельника).

Приклад 1.3.3. *Дослідити на збіжність* $\int\limits_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^7}dx.$

Розв'язок: *За першою ознакою порівняння:* $f_1(x) = \frac{\sin^2 x}{x^7} \leq \frac{1}{x^7} = f_2(x).$
Інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^7}$ *– збігається* $(p = 7 > 1)$*, тому* $\int\limits_1^{+\infty} f_1(x)dx$ *збігається.*

1.4 Абсолютна та умовна збіжність невласних інтегралів.

Нехай

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \tag{1.4.10}$$

і **не** виконується умова $f(x) \geq 0, \forall x \geq a.$
Означення.

1) Інтеграл (1.4.10) **збігається абсолютно**, якщо $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається.

2) Якщо $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається, а $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то кажуть, що інтеграл **збігається умовно**.

Теорема. Якщо $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx \;\Rightarrow\; \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

Схема дослідження:

1) Досліджуємо на абсолютну збіжність. Якщо інтеграл збігається абсолютно, то за попередньою теоремою $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ також збігається. Тому, на умовну збіжність досліджувати не треба.

Так як $|f(x)| \geq 0$, то для дослідження абсолютної збіжності можна використовувати ознаки порівняння.

2) Якщо інтеграл розбігається абсолютно, то досліджуємо на умовну збіжність. Для дослідження на умовну збіжність **не можна** використовувати ознаки порівняння, так як умова $f(x) \geq 0, \forall x \geq a$ не виконується. Тому для дослідження на умовну збіжність використовують ознаки Діріхле або Абеля.

Ознака Діріхле. Нехай $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ і виконуються умови:

1) $\exists c > 0 : \forall A \geq a \ \left|\int\limits_a^A f(x)dx\right| \leq c$;

2) $g(x)$ монотонна на $[a, +\infty)$;

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Тоді $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ – збігається.

Ознака Абеля. Нехай $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ і виконуються умови:

1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ – збігається;

2) $g(x)$ монотонна на $[a, +\infty)$;

3) $\exists c > 0 : \forall x \geq a \ |g(x)| \leq c$;

Тоді $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ – збігається.

Зауваження. Будемо використовувати без доведення, що $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ і $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ бігаються абсолютно при $\alpha > 1$.

Приклад 1.4.1. *Дослідити на абсолютну та умовну збіжність:*

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+1000}dx$

Розв'язок: Абсолютно: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}|\cos x|}{x+1000}dx$

$f_1(x) = \frac{\sqrt{x}|\cos x|}{x+1000} \sim \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ – *розбіжний* $(\alpha < 1) \Rightarrow$ *інтеграл розбігається абсолютно.*

Умовно. *За ознакою Діріхле* $f(x) = \cos x,\ g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1000}$.

1) $\left|\int\limits_1^A \cos x dx\right| = |\sin A - \sin 1| \leq 2;$

2) $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1000}$ – *монотонно спадає;*

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1000} = 0.$

Отже інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+1000}dx$ *збігається умовно.*

2) $\int\limits_1^{+\infty} \sin(x^3)dx.$

Розв'язок: $\int\limits_1^{+\infty} \sin(x^3)dx = \left|\begin{matrix} x^3 = t \\ x = t^{\frac{1}{3}} \\ dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}dt} \end{matrix}\right| = \frac{1}{3}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{2}{3}}}dt.$

Абсолютно: *розбіжний* $(\alpha = \frac{2}{3} < 1)$.

Умовно: *За ознакою Діріхле* $f(t) = \sin t,\ g(t) = \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}$.

1) $\left|\int\limits_1^A \sin t dt\right| = |-\cos A + \cos 1| \leq 2;$

2) $g(t) = \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}$ – *монотонно спадає;*

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} = 0.$

Отже інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \sin(x^3)dx$ *збігається умовно.*

3) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx.$

Розв'язок: Абсолютно: $\int\limits_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x\sqrt{x}}dx$

$f_1(x) = \frac{|\sin x|}{x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ – *збігається* $\Rightarrow$ *збігається абсолютно.*

1.5 Невласні інтеграли II роду.

Нехай $f \in (a, b] \to \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0: \ f \in R([\varepsilon, b])$.

Означення. Точку a будемо називати **особливою**, якщо функція f необмежена в околі точки a.

Приклад 1.5.1. $\int\limits_{\underline{0}}^{1} \frac{1}{x} dx$ *– не є інтегралом Рімана.*
$x = 0$ *– особлива точка, так як* $\frac{1}{x}$ *не обмежена в околі точки* $x = 0$.

Зауваження. Якщо розглядати $\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x} dx$, то особливих точок немає (це інтеграл Рімана).

Нехай a – особлива точка. Далі, для зручності, особливу точку будемо підкреслювати $\underline{a}$.

Означення. 1) $\int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)dx := \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = I(1)$ (1)

Якщо (1) скінченний, тобто $I \in \mathbb{R}$, то $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = I$ – невласний інтеграл другого роду.

2) Якщо $I = \pm\infty$ або (1) не існує, будемо говорити, що інтеграл II роду розбіжний.

Приклад 1.5.2. *Обчислити наступні інтеграли:*

1) $\int\limits_{\underline{0}}^{1} \frac{1}{x^2}$

Розв'язок: $x = 0$ *– особлива точка*
$\int\limits_{\underline{0}}^{1} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \left(-\frac{1}{x}\Big|_{\varepsilon}^{1} \right) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = +\infty \Rightarrow$ *інтеграл II роду розбіжний.*

2) $\int\limits_{\underline{0}}^{a} \frac{dx}{x^p}$ *(*) (a > 0)*

Розв'язок: $x = 0$ *– особлива точка*
a) $p \neq 1 \quad \int\limits_{\underline{0}}^{a} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\varepsilon}^{a} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_{\varepsilon}^{a} \right) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \left(\frac{1}{(1-p)a^{p-1}} - \frac{1}{(1-p)\varepsilon^{p-1}} \right) =$

$$= \left[\begin{array}{l} +\infty, \ p > 1 \\ \dfrac{1}{(1-p)a^{p-1}}, \ p < 1 \end{array} \right.$$

Тобто (*) збігається при $p < 1$ і розбігається при $p > 1$.

б) $p = 1 \quad \int\limits_{\underline{0}}^{a} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\varepsilon}^{a} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} (\ln|x||_{\varepsilon}^{a}) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} (\ln a - \ln \varepsilon) = +\infty \Rightarrow$ *розбіжний.*

Таким чином:

$$\int\limits_{0}^{a} \frac{1}{x^p}, \text{ при } p < 1 \text{ – збігається, при } p \geq 1 \text{ – розбігається.}$$

Зауваження. 1) Аналогічно можна визначити інтеграл II роду, якщо $x = b$ – особлива точка: $\int\limits_{a}^{\underline{b}} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0-} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx = I$. Якщо $I \in \mathbb{R}$ інтеграл II роду є збіжним.

2) Для обчислення невласного інтегралу II роду можна використовувати всі методи інтегрування, що і для інтеграла Рімана, так як, під знаком границі стоїть інтеграл Рімана.

1.6 Інтеграли II роду від невід'ємних функцій.

Нехай $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ і $f(x) \geq 0, \forall x \in (a, b]$.

Перша ознака порівняння. Нехай

$$\int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \qquad (1.6.11)$$

$$\int\limits_{\underline{a}}^{b} g(x)dx \qquad (1.6.12)$$

і виконується нерівність $0 \leq f(x) \leq g(x), \ x \in (a, b]$.

Тоді, якщо (1.6.12) збігається, то (1.6.11) збігається. Якщо (1.6.11) розбігається, то (1.6.12) розбігається.

Означення. $f \sim g, x \to a+ \ \Leftrightarrow \ \lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$.

Друга ознака порівняння. Нехай $f(x) \sim g(x), x \to a+$. Тоді інтеграли (1.6.11) і (1.6.12) збігаються або розбігаються одночасно.

Таблиця еквівалентності:

1) $\sin x \sim x$	5) $e^x - 1 \sim x$
2) $\operatorname{tg} x \sim x$	6) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
3) $\operatorname{arctg} x \sim x$	7) $\arcsin x \sim x$
4) $\ln(1+x) \sim x$	8) $(1+x)^\alpha - 1 \sim x$

при $x \to 0$

Приклад 1.6.1. *Дослідити на збіжність:*

1) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}} dx$

Розв'язок: $x = 0$ – *особлива точка*

$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}} \sim \frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = g(x), x \to 0.$ $\int\limits_0^1 g(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ – *збігається, так як* $p = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx$ – *збігається.*

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$

Розв'язок: $x = \frac{\pi}{2}$ – *особлива точка*

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}} = \begin{vmatrix} \frac{\pi}{2} - x = t \\ x = \frac{\pi}{2} - t \\ dx = -dt \end{vmatrix} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-dt}{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\sin t}}.$$

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\sin t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}} = g(t),\ t \to 0.$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}$ – *збігається* $\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$ – *збігається.*

Розділ 2

Числові ряди

2.1 Елементарні властивості збіжних рядів

Нехай $\{a_n : n \geq 1\}$ – послідовність дійсних чисел. **Рядом** називається вираз

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{2.1.1}$$

Цей вираз поки що точного сенсу не має, оскільки нескінченне число додавань здійснити не можна.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$s_n := a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Число a_n називається **n-м членом**, а число s_n – n-ю **частковою сумою ряду** (2.1.1). Зауважимо, що

$$s_{n+1} = s - n + a_{n+1}, \geq 1.$$

Означення. Дві послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$ і $\{s_n : n \geq 1\}$ називаються **числовим рядом** і позначаються символом (2.1.1). Якщо послідовність часткових сум $\{s_n : n \geq 1\}$ збігається до дійсного числа s, то ряд (2.1.1) називається **збіжним**, а число s – **сумою ряду** (2.1.1) і позначається символом

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Якщо послідовність $\{s_n : n \geq 1\}$ скінченної границі немає, то ряд (2.1.1) називається **розбіжним**.

Необхідна умова збіжності ряду. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то $a_n \to 0, n \to \infty$.

Приклад 2.1.1. *Геометричний ряд. Так називається для* $x \in \mathbb{R}$ *ряд*

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ..., \tag{2.1.2}$$

часткова сума якого

$$s_n = \begin{cases} n, & x = 1; \\ \frac{1-x^n}{1-x}, & x \neq 1, \end{cases}$$

Для $n \geq 1$.

$\triangleright$ *Якщо* $|x| < 1$, *то* $x^n \to 0, n \to \infty$. *Отже, при* $|x| < 1$ *ряд (2.1.2) збігається до суми* $\frac{1}{1-x}$:

$$1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x}; \quad |x| < 1.$$

При $|x| \geq 1$ *послідовність* $\{s_n : n \geq 1\}$ *скінченної границі немає, отже при* $|x| \geq 1$ *ряд (2.1.2) розбігається.* $\triangleleft$

Приклад 2.1.2. *Доведемо, що*

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + ... = 1.$$

$\triangleright$ *Дійсно, для* $n \geq 1$

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \quad \triangleleft$$

2.2 Властивості збіжних рядів

1. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається і має суму s. Тоді для будь-якого $c \in \mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)$ також збігається і має суму cs, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. Нехай ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} a''_n$$

збігаються до сум s' і s'' відповідно. Тоді ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a'_n + a''_n)$$

збігається до суми $s' + s''$, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a'_n + a''_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n + \sum_{n=1}^{\infty} a''_n.$$

2.3 Ряди з невід'ємними членами

Розглядаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0, \forall n \geq 1 \tag{2.3.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n \geq 0, \forall n \geq 1 \tag{2.3.4}$$

Перша ознака порівняння. Нехай $0 \leq a_n \leq b_n, \ \forall n \geq 1$.
Тоді, якщо (2.3.4) збігається, то (2.3.3) збігається. Якщо (2.3.3) розбігається, то (2.3.4) розбігається.

Друга ознака порівняння. Нехай $a_n \sim b_n, n \to \infty \ \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0\right)$.
Тоді ряди (2.3.3) і (2.3.4) збігаються або розбігаються одночасно.

Зауваження. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ збігається при $p > 1$.

Приклад 2.3.1. *Дослідити на збіжність:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{5n^5-2n+1}$

Розв'язок: $a_n = \frac{2n^2+3n}{5n^5-2n+1} \sim \frac{1}{n^4} = b_n$.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ – *збігається* $(p = 4 > 1) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{5n^5-2n+1}$ *збігається.*

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$

Розв'язок: $a_n = \operatorname{tg} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} = b_n \ \left(x = \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – *розбіжний* $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ – *розбіжний.*

Ознака Д'Аламбера. Нехай $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$. Якщо
$r < 1 \Rightarrow$ (2.3.3) збігається
$r > 1 \Rightarrow$ (2.3.3) розбігається
$r = 1 \Rightarrow$ (2.3.3) ознака відповіді не дає.

Приклад 2.3.2. *Дослідити на збіжність:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$

Розв'язок: $a_n = \frac{n!}{5^n},\ a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$.
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{5} = \infty = r > 1 \Rightarrow$ *ряд розбігається.*

Зауваження. Ознаку Д'Аламбера зручно використовувати, якщо в a_n є факторіал.
Ознака Коші. Нехай $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$. Якщо
$r < 1 \Rightarrow$ (2.3.3) збігається
$r > 1 \Rightarrow$ (2.3.3) розбігається
$r = 1 \Rightarrow$ (2.3.3) ознака відповіді не дає.

Приклад 2.3.3. *Дослідити на збіжність:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$

Розв'язок: $a_n = \frac{3^n}{n^n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0 = r < 1 \Rightarrow$ *ряд збігається.*

Зауваження. Ознаку Коші зручно використовувати, якщо в a_n має вигляд показникової функції.
Ознака Раабе. Нехай $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$. Якщо
$r > 1 \Rightarrow$ (2.3.3) збігається
$r < 1 \Rightarrow$ (2.3.3) розбігається
$r = 1 \Rightarrow$ (2.3.3) ознака відповіді не дає.
Зауваження. Ознаку Раабе має сенс використовувати використовувати, якщо ознаки Коші та Д'Аламбера дали $r = 1$.

Приклад 2.3.4. *Дослідити на збіжність:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n}$

Розв'язок: *Спочатку застосуємо ознаку Коші:*
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{\sqrt{n}}}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt[n]{n}} = 1 = r.$
$r = 1$ *–?*
Застосуємо ознаку Раабе:
$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{2^{\sqrt{n}}}{n} \cdot \frac{n+1}{2^{\sqrt{n+1}}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{n} 2^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{n} 2^{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} - 1\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln 2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)\ln 2}{n(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}+\frac{n+1}{n}-1\right) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)\ln 2}{n(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}+\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)\ln 2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}+1\right) = +\infty > 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n}$ – *збігаєтьса.*

Інтегральна ознака Маклорена-Коші. Нехай $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ і задовольняє умови:
1) $\forall x \geq 1\ :\ f(x) \geq 0$;
2) f монотонно зростає на $[1, +\infty)$.

Якщо $a_n = f(n), n \geq 1$, то ряд (2.3.3) збігається $\Leftrightarrow$ збігається $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад 2.3.5. *Дослідити на збіжність:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

Розв'язок: *Розглянемо* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx = \begin{vmatrix} \ln x = u & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^{+\infty} +$
$+ \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\right) + \frac{1}{1}\ln 1 + \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$. – *збігаєтьса* $(p = 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ –*збігаєтьса.*

2.4 Ряди з членами довільного знаку

Ряд

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (2.4.5)$$

називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд

$$|a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \qquad (2.4.6)$$

Абсолютно збіжний ряд збігається. Збіжний ряд (2.4.5) називається **умовно збіжним**, якщо ряд (2.4.6) розбігається.

Ознака Лейбніца. Нехай послідовність $\{a_n\ :\ n \geq 1\}$ задовольняє умови:

1) $\forall n \geq 1\ :\ a_n \geq a_{n+1} \geq 0$;
2) $a_n \to 0, n \to \infty$.

Тоді ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

збігається і для його суми s має місце нерівність $0 \le s \le a_1$.

Ознака Діріхле. Нехай послідовності чисел $\{a_n : n \ge 1\}, \{b_n : n \ge 1\}$ задовольняє умови:

1) послідовність $\{a_n : n \ge 1\}$ монотонна;
2) $a_n \to 0, n \to \infty$;
3) $\exists C > 0 \forall n \ge 1 : \left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right| \le C$.

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збігається.

Ознака Абеля. Нехай послідовності чисел $\{a_n : n \ge 1\}, \{b_n : n \ge 1\}$ задовольняє умови:

1) послідовність $\{a_n : n \ge 1\}$ монотонна та обмежена;
2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збігається.

Приклад 2.4.1. ***(Ряд Лейбніца)*** *Так називається ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}. \tag{2.4.7}$$

Для часткових сум s_n ряду (2.4.7) з рівностей

$$s_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - ... - \left(\frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2n},\ n \ge 1,$$

випливає, що для всіх $n \ge 1$

$$s_{2n} \le s_{2(n+1)} \le 1.$$

Тому існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s \in \mathbb{R}$. Для обчислення цієї границі, можна скористатися тим, що для часткових сум гармонічного ряду $\widetilde{s}_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ послідовність $\gamma_n = \widetilde{s}_n - \ln n, n \ge 1$, збігається до сталої Ойлера

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n = \gamma,\ \ \text{де } \gamma = 0,577...$$

Оскільки

$$s_{2n} = \widetilde{s}_{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}\right) = \widetilde{s}_{2n} - \widetilde{s}_n =$$

$$= \ln(2n) + \gamma_{2n} - \ln n - \gamma_n = \ln 2 - \gamma_{2n} - \gamma_n,\ n \geq 1,$$

то $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = \ln 2$. *Крім того,* $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to \ln 2, n \to \infty$. *Тому* $s_n \to \ln 2, n \to \infty$. *Оскільки гармонічний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *розбігається, то ряд Лейбніца (2.4.7) збігається умовно.*

Схема дослідження:

1) Досліджуємо на абсолютну збіжність. Якщо ряд збігається абсолютно, то за попередньою теоремою $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ також збігається. Тому, на умовну збіжність досліджувати не треба.

Так як $|a_n| \geq 0, \forall n \geq 1$ то для дослідження абсолютної збіжності можна використовувати ознаки для рядів з невід'ємними членами.

2) Якщо ряд розбігається абсолютно, то досліджуємо на умовну збіжність. Для дослідження на умовну збіжність **не можна** використовувати ознаки для рядів з невід'ємними членами, так як умова $a_n \geq 0, \forall n \geq 1$ не виконується. Тому для дослідження на умовну збіжність використовують ознаки Діріхле, Абеля, Лейбніца.

Приклад 2.4.2. ***(Ряд Діріхле)*** *Так називається ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}. \tag{2.4.8}$$

Збіжність цього ряду випливає з ознаки Діріхле. Нехай $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin n, n \geq 1$. *Послідовність* $\{a_n : n \geq 1\}$ *задовольняє умови 1),2) ознаки Діріхле. Для послідовності* $\{b_n : n \geq 1\}$ *виконання умови 3) випливає з оцінки*

$$\forall n \geq 1: \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\right| = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left|\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{1}{2}\sin k\right| =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k-1}{2} - \cos\frac{2k+1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left|\cos\frac{1}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{1}{2}} =: C.$$

Ряд (2.4.8) не збігається абсолютно. Дійсно

$$\forall n \geq 1: \; |\sin n| \geq \sin^2 n = \frac{1 - \cos 2n}{2}.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *розбігається, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$ *збігається за ознакою Діріхле, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n}$ *розбігається за першою ознакою порівняння. Таким чином, ряд (2.4.8) збігається умовно.*

Приклад 2.4.3. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{arctg} n$ *збігається за ознакою Абеля. Дійсно, послідовність* $a_n = \operatorname{arctg} n, n \geq 1$, *монотонно зростає і обмежена, ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *збігається (ряд Лейбніца). Цей ряд збігається умовно, оскільки* $\frac{\operatorname{arctg} n}{n} \sim \frac{\pi}{2n}, n \to \infty$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$ *розбігається за другою ознакою порівняння.*

Розділ 3

Функціональні ряди.

3.1 Поточкова та рівномірна збіжність функціональних рядів

Нехай $A \subset \mathbb{R}$. Послідовність функцій $f_n : A \to \mathbb{R}, n \geq 1$, називається **збіжною поточково** до функції $f : A \to \mathbb{R}$, якщо

$$\forall x \in A : f_n(x) \to f(x), n \to \infty.$$

Послідовність функцій $f_n : A \to \mathbb{R}, n \geq 1$, називається **рівномірно збіжною** до функції $f : A \to \mathbb{R}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in A : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Позначається рівномірна збіжність символом $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f, n \to \infty$. На практиці наявність рівномірної збіжності зручно перевіряти, використовуючи еквівалентне означення

$$f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f, n \to \infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} d_n := \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0, n \to \infty.$$

Очевидно, з рівномірної збіжності функціональної послідовності на множині A випливає її поточкова збіжність.

Критерій Коші.

$$f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f, n \to \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall m \geq N \ \forall x \in A : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Для послідовності функцій $a_n : A \to \mathbb{R}, n \geq 1$, множиною збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \tag{3.1.1}$$

називається множина

$$B := \left\{ x \in A| \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ збігається} \right\}.$$

Функціональний ряд (3.1.1) називається **рівномірно збіжним** на множині $C \subset B$, якщо послідовність його часткових сум збігається рівномірно на цій множині, тобто

$$\sup_{x \in C} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \right| = \sup_{x \in C} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| \to 0, n \to \infty.$$

Ознака Вейєрштрасса. Нехай для послідовності функцій $a_n : A \to \mathbb{R}, n \geq 1$, існує така числова послідовність $\{c_n : n \geq 1,\}$ що

1) $\forall n \geq 1\ \forall x \in A: \ |a_n(x)| \leq c_n$;
2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається.

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ збігається рівномірно (і абсолютно) на множині A.

Ознака Діріхле. Нехай для послідовностей функцій $a_n : A \to \mathbb{R}$, $b_n : A \to \mathbb{R}, n \geq 1$, задовольняють умови:

1) $\forall x \in A : \{a_n(x) : n \geq 1\}$ – монотонна числова послідовність;
2) $\sup\limits_{x \in A} |a_n(x)| \to 0, n \to \infty$;
3) $\exists C\ \forall n \geq 1\ \forall x \in A : \left| \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x) \right| \leq C$.

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ збігається рівномірно на множині A.

Ознака Абеля. Нехай для послідовностей функцій $a_n : A \to \mathbb{R}$, $b_n : A \to \mathbb{R}, n \geq 1$, задовольняють умови:

1) $\forall x \in A : \{a_n(x) : n \geq 1\}$ – монотонна числова послідовність;
2) $\exists C\ \forall n \geq 1\ \forall x \in A : |a_n(x)| \leq C$;
3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ збігається рівномірно на множині A.

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ збігається рівномірно на множині A.

Приклад 3.1.1. *Визначити множини: $A \subset \mathbb{R}$ – збіжності та $B \subset \mathbb{R}$ – абсолютної збіжності наступних функціональних рядів:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$; *2)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$; *3)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-x^2)x^n$; *5)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nxe^{-nx}$; *6)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

Розв'язок:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ *– це геометричний ряд; відомо, що він збігається* $\Leftrightarrow$ $x \in (-1,1)$, *тому* $A = (-1,1)$;
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^n$ *– це також геометричний ряд; він збігається* $\Leftrightarrow$ $|x| \in (-1,1) \Leftrightarrow$ $x \in (-1,1)$, *тому* $B = (-1,1) = A$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ *– це узагальнений гармонічний ряд; відомо, що він збігається* $\Leftrightarrow$ $x > 1$, *тому* $A = (1,+\infty)$; *оскільки це ряд з невід'ємними членами, то* $B = A = (1;+\infty)$.

3) *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n}{n^x}| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ *збігається* $\Leftrightarrow$ $x > 1$, *тому* $B = (1,+\infty)$; *якщо* $x \le 0$, *то* $n^x \le 1, n \ge 1, \Rightarrow \frac{(-1)^n}{n^x} \nrightarrow 0, n \to \infty, \Rightarrow$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ *розбігається; якщо* $x > 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$; *збігається за ознакою Лейбніца* $\Big($*тут* $a_n := \frac{1}{n^x}, n \ge 1, a_n = \frac{1}{n^x} \ge \frac{1}{(n+1)^x} = a_{n+1} \ge 0, n \ge 1,$ *і* $a_n = \frac{1}{n^x} \to 0, n \to \infty$ $)$; *тому* $A = (0,+\infty)$.

4) *Якщо* $1 - x^2 \ne 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-x^2)x^n$ *збігається (абсолютно)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ *збігається (абсолютно)* $\Leftrightarrow$ $x \in (-1,1)$; *якщо* $1 - x^2 = 0$, *тобто* $x = \pm 1$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-x^2)x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0$ *– цей ряд збігається абсолютно. Отже* $A = B[-1,1]$.

5) *Дослідимо абсолютну збіжність ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nxe^{-nx}$ *(1), тобто дослідимо збіжність ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |nxe^{-nx}| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n|x|e^{-nx}$ *(2),* *за ознакою Коші:* $\sqrt[n]{n|x|e^{-nx}} = \sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{|x|}\cdot e^{-x} \underset{n\to\infty}{\to} r(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x = 0; \\ e^{-x} & \text{якщо } x \neq 0. \end{cases}$

Якщо $x = 0$, *то* $r(0) = 0 < 1$, *тому за ознакою Коші ряд (2) збігається* $\Rightarrow$ *ряд (1) збігається абсолютно.*

Якщо $e^{-x} < 1$, *тобто* $-x < 0 \Leftrightarrow x > 0$, *то за ознакою Коші ряд (2) збігається* $\Rightarrow$ *ряд (1) збігається абсолютно.*

Якщо $e^{-x} > 1$, *тобто* $-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$, *то за ознакою Коші ряд (2) розбігається, причому його загальний член* $\nrightarrow 0, n \to \infty, \Rightarrow$ *загальний член ряду (1) не прямує до нуля* $, n \to \infty, \Rightarrow$ *ряд (1) розбігається.*

Отже, $A = B = [0, +\infty)$

б) *Покладемо* $a_n := \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}, x \in \mathbb{R}, n \geq 1$. *Оскільки* $a_n(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}, n \geq 1$, *то* $A = B$. *Маємо, що* $a_n(x) = \frac{(n+x)^n}{n^n} \cdot \frac{1}{n^x} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \frac{1}{n^x} \sim \frac{e^x}{n^x}, n \to \infty$; *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ *збігається* $\Leftrightarrow x > 1$, *стала* $e^x > 0$ *для* $\forall x \in \mathbb{R}$, *тому за 2-гою ознакою порівняння вихідний ряд збігається* $\Leftrightarrow x > 1$. *Отже,* $A = B = (1, +\infty)$.

Приклад 3.1.2. *Визначити множину:* $A \subset \mathbb{R}$ *– збіжності та множину* $B \subset \mathbb{R}$ *– абсолютної збіжності функціонального ряду*
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ *(3).*

Розв'язок: *Покладемо* $y := \frac{x}{2x+1}$; *тоді ряд (3) – це ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} y^n$ *(4).*

Дослідимо збіжність ряду. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{n}{n+1} y^n|$ *(5).*

I спосіб. *Аналізуємо поведінку загального члена ряду (5) в залежності від того, до чого прямує* $|y|^n$ *при* $n \to \infty$.

Оскільки $|y|^n \underset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0, & |y| < 1, \\ 1, & |y| = 1, \\ +\infty, & |y| > 1, \end{cases}$ *то слід розглянути 3 випадки:* $|y| < 1, |y| = 1$ *і* $|y| > 1$.

Якщо $|y| < 1$, *то* $\frac{n}{n+1}|y|^n \sim |y|^n, n \to \infty$, *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y|^n$ *збігається, як геометричний* $\underset{\text{порівняння}}{\overset{\text{2-га ознака}}{\Longrightarrow}}$ *ряд (5) збігається* $\Rightarrow$ *ряд (4) збігається абсолютно.*

Якщо $|y| = 1$, *то* $\frac{n}{n+1}|y|^n = \frac{n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 1 \neq 0$, *тобто загальний член ряду*

(5), а отже, й ряду (4) не прямує до $0, n \to \infty, \Rightarrow$ *ряд (4) розбігається.*

Якщо $|y| > 1$, *то* $\frac{n}{n+1}|y|^n \underset{n\to\infty}{\to} \infty \neq 0$, *загальний член ряду (5), а отже, й ряду (4) не прямує до* $0, n \to \infty, \Rightarrow$ *ряд (4) розбігається.*

II спосіб. *Застосуємо до ряду (5) ознаку Коші.*

Маємо, що $\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}|y|^n} = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}|y| \to |y|, n \to \infty.$

За ознакою Коші якщо $|y| < 1$, *то ряд (5) розбігається, причому його загальрний член* $\nrightarrow 0, n \to \infty, \Rightarrow$ *(4) розбігається. Якщо* $|y| = 1$, *то* $\frac{n}{n+1}|y|^n = \frac{n}{n+1} \to 1, n \to \infty$ *тобто загальний член ряду (5)* $\nrightarrow 0$, $n \to \infty, \Rightarrow$ *загальний член ряду (4)* $\nrightarrow 0, n \to \infty, \Rightarrow$ *ряд (4) розбігається.*

Отже, ряд (4) збігається $\Leftrightarrow$ *він збігається абсолютно* $\Leftrightarrow |y| < 1$. *Тому ряд (3) збігається* $\Leftrightarrow$ *він збігається абсолютно* $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\frac{x}{2x+1}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 \overset{(*)}{<} \frac{x}{2x+1} \overset{(**)}{<} 1.$

Маємо, що (*) $\Leftrightarrow -1 < \frac{x}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{x}{2x+1} + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x+2x+1}{2x+1} > 0 \Leftrightarrow (3x+1)(2x+1) > 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty,);$

(**) $\Leftrightarrow \frac{x}{2x+1} - 1 = \frac{-x-1}{2x+1} < 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x+1) > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty,).$

Отже, нерівності (*) і (**) виконуються одночасно $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty) \\ x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty).$$

Отже $A = B = (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$.

Приклад 3.1.3. *Визначити множину:* $A \subset \mathbb{R}$ *– збіжності та множину* $B \subset \mathbb{R}$ *– абсолютної збіжності функціонального ряду*

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ *(6).*

Розв'язок: *Аналізуємо поведінку загального члена* $a_n(x) := \frac{x^n}{1-x^n}$ *чи його модуля в залежності від того, до чого прямує* x^n *при* $n \to \infty$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} \infty, & |x| > 1, \\ 0, & |x| < 1, \\ 1, & x = 1, \\ \nexists, & x = -1, \end{cases}$ *то маємо розглянути 4 випадки:* $x = -1, x = 1, |x| < 1, |x| > 1.$

Якщо $x = -1$ *то* $1 - x^n = 0$ *при парних* n, *тобто не всі члени ря-*

ду (6) коректно визначені $\Rightarrow -1 \notin A$ *і* $-1 \notin B$. *Аналогічно* $1 \notin A$ *і* $1 \notin B$ *(бо, при* $x = 1$ *маємо, що* $1 - x^n = 0$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$*).*

Якщо $|x| < 1$*, то* $|a_n(x)| = \frac{|x^n|}{|1-x^n|} \sim |x|^n, n \to \infty$*, і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^n$ *збігається, як геометричний (бо* $|x| < 1$*), тому за 2-гою ознакою порівняня ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ *збігається* $\Rightarrow$ *ряд (6) збігається абсолютно.*

Якщо $|x| > 1$*, то* $a_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{1}{\frac{1}{x^n}-1} \underset{n\to\infty}{\to} -1 \neq 0 \Rightarrow$ *ряд (6) розбігається.*

Отже $A = B = (-1, 1)$.

Приклад 3.1.4. *Визначити множину:* $A \subset \mathbb{R}$ *– збіжності та множину* $B \subset \mathbb{R}$ *– абсолютної збіжності функціонального ряду*

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ *(7).*

Розв'язок: *Позначимо* $a_n(x) := \frac{x^n}{1+x^{2n}}, x \in \mathbb{R}, n \geq 1$.

I спосіб. *Якщо* $|x| < 1$*, то* $|a_n(x)| = \frac{|x|^n}{1+x^{2n}} \sim |x|^n, n \to \infty$*, ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^n$ *збігається, як геометричний* $\underset{\text{порівняння}}{\overset{\text{2-га ознака}}{\Longrightarrow}}$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ *(8) збігається* $\Rightarrow$ *ряд (7) збігається абсолютно.*

Якщо $|x| = 1$*, то* $|a_n(x)| = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \nrightarrow 0, n \to \infty, \Rightarrow$ *ряд (7) розбігається.*

Якщо $|x| > 1$*, то* $0 < \frac{1}{|x|} < 1$*, тоді* $|a_n(x)| = \frac{\frac{|x|^n}{x^{2n}}}{\frac{1}{x^{2n}}+1} \sim \left(\frac{1}{|x|}\right)^n$*, і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|x|}\right)^n$ *збігається, як геометричний* $\underset{\text{порівняння}}{\overset{\text{2-га ознака}}{\Longrightarrow}}$ *ряд (8) збігається* $\Rightarrow$ *ряд (7) збігається абсолютно.*

II спосіб. *Застосуємо ознаку Коші.*

Маємо, що $\sqrt[n]{1+x^{2n}} \to \max\{1, x^2\}, n \to \infty$*, за теоремою про три послідовності, бо якщо* $x^2 \leq 1$*, то*

$1 \leq \sqrt[n]{1+x^{2n}} \leq \sqrt[n]{1+1^n} = \sqrt[n]{2} \to 1, n \to \infty, \Rightarrow \sqrt[n]{1+x^{2n}} \underset{n\to\infty}{\to} 1$*, а якщо* $x^2 > 1$*, то*

$x^2\sqrt[n]{x^{2n}} < \sqrt[n]{1+x^{2n}} < \sqrt[n]{x^{2n}+x^{2n}} = \sqrt[n]{2x^{2n}} = x^2\sqrt[n]{2} \to x^2, n \to \infty$*, тобто* $\sqrt[n]{1+x^{2n}} \to x^2, n \to \infty$.

Маємо, що $\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{1+x^{2n}}} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{1+x^{2n}}} \to \frac{|x|}{\max\{1,x^2\}} < 1$ *при* $|x| < 1$ *і при* $|x| > 1$*, тому за ознакою Коші ряд (7) збігається абсолютно при*

$|x| \neq 1$. *Якщо* $|x| = 1$, *то* $|a_n(x)| = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n(x) \nrightarrow 0, n \to \infty \Rightarrow$ *ряд (7) розбігається.*

Отже $A = B = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$.

Приклад 3.1.5. *Визначити множину:* $A \subset \mathbb{R}$ *– збіжності та множину* $B \subset \mathbb{R}$ *– абсолютної збіжності функціонального ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}$ *(7), де* $y \geq 0$ *– стала.*

Розв'язок: *Позначимо* $a_n(x) := \frac{x^n}{n+y^n}, x \in \mathbb{R}, n \geq 1$.

Дослідимо збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ *(10) за ознакою Коші*

Доведемо, що $\sqrt[n]{n+y^n} \underset{n\to\infty}{\to} \max\{1, y\} = \begin{cases} 1, & y \leq 1 \\ y, & y > 1. \end{cases}$

Справді, якщо $y \leq 1$, *то* $1 \leq \sqrt[n]{n+y^n} \leq \sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{n+n} = \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1, n \to \infty$, *тому за теоремою про три послідовності* $\sqrt[n]{n+y^n} \to 1, n \to \infty$, *а якщо* $y > 1$, *то* $y = \sqrt[n]{y} \leq \sqrt[n]{n+y^n} \leq \sqrt[n]{n \cdot y^n + ny^n} \sqrt[n]{2ny^n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot y \to y, n \to \infty \underset{\text{послідовності}}{\overset{\text{за Т. про 3}}{\Longrightarrow}} \sqrt[n]{n+y^n} \to y, n \to \infty$.

Нехай $0 \leq y \leq 1$. *Тоді* $\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \frac{x^n}{n+y^n} \to |x|, n \to \infty$. *Тому за ознакою Коші, якщо* $|x| < 1$, *то ряд (10) збігається, а отже, ряд (9) збігається абсолютно, а якщо* $|x| > 1$, *то ряд (10) розбігається, причому* $|a_n(x)| \nrightarrow 0, n \to \infty \Rightarrow a_n(x) \nrightarrow 0, n \to \infty \Rightarrow$ *ряд (9) розбігається. Якщо* $x = 1$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+y^n}$ *– цей ряд розбігається за першою ознакою порівняння, бо* $\frac{1}{n+y^n} \geq \frac{1}{n+1}, n \geq 1$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots$ *розбігається, як залишок гармонічного ряду, який розбігається. Якщо* $x = -1$, *то маємо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+y^n}$ *(11), цей ряд не збігається абсолютно, бо* $|a_n(-1)| = a_n(1)$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(1)$ *розбігається. Доведемо, що ряд (11) збігається.*

I спосіб. *Застосуємо ознаку Лейбніца. Нехай* $\widetilde{a}_n := \frac{1^n}{n+y^n}, n \geq 1$. *Тоді:*
1) $\widetilde{a}_n \geq 0$;
2) $\widetilde{a}_n = \frac{1}{n+y^n} \to 0, n \to \infty$;
3) $\forall n \geq 1: \quad \widetilde{a}_n - \widetilde{a}_{n+1} = \frac{1}{n+y^n} - \frac{1}{n+1+y^{n+1}} = \frac{1+y^n(y-1)}{(n+y^n)(n+1+y^{n+1})} \geq 0$,
бо тут знаменник ≥ 0 *і* $1 + y^n(y-1) \geq 0$, *оскільки за умовою* $0 \leq y \leq 1 \Rightarrow y - 1 \geq -1 \overset{y^n \geq 0}{\Longrightarrow} \underline{y^n(y-1) \geq -y^n \geq -1}$ *і з підкресленого*

$\Rightarrow 1 + y^n(y-1) \geq 0.$

З умов 1)-3) за ознакою Лейбніца $\Rightarrow$ *ряд (11) збігається.*

II спосіб.

$a_n(-1) = (-1)^n \frac{1}{n+y^n} = (-1)^n \left(\frac{1}{n+y^n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = (-1)^n \left(\frac{-y^n}{n(n+y^n)} + \frac{1}{n}\right) =$
$= \frac{(-1)^{n+1}y^n}{n(n+y^n)} + \frac{(-1)^n}{n}, n \geq 1.$

Для зручності позначимо: $b_n := \frac{(-1)^{n+1}y^n}{n(n+y^n)}, \quad c_n := \frac{(-1)^n}{n}.$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *бо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ *збігається за 1-ою ознакою порівняння, оскільки* $|b_n| \leq \frac{1}{n^2}, n \geq 1$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *збігається; ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *збігається, як ряд Лейбніца; тому ряд (11) збігається, як сума збіжних рядів.*

Нехай $y > 1$. *Тоді* $\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n+y^n}} \to \frac{|x|}{y}, n \to \infty$. *Тому за ознакою Коші, якщо* $\frac{|x|}{y} < 1$, *тобто* $|x| < y$, *то ряд (10) збігається, отже ряд (9) збігається абсолютно, а якщо* $\frac{|x|}{y} > 1$, *тобто* $|x| > y$, *то ряд (10) розбігається і його загальний член* $\nrightarrow 0, n \to \infty \Rightarrow$ *ряд (9) розбігається. Якщо* $x = \pm y$, *то* $|a_n(x)| = \frac{y^n}{n+y^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0 \Rightarrow$ *ряд (9) розбігається.*

Таким чином, якщо $0 \leq y \leq 1$, *то* $A = [-1, 1), B = (-1, 1)$, *а якщо* $y > 1$, *то* $A = B = (-y, y)$.

Приклад 3.1.6. *Дослідити рівномірну збіжність наступних функціональних рядів на заданих множинах:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n, \quad A = [0, 1].$

Розв'язок: $s_n(x) = \sum\limits_{k=1} n(1-x)x^k = \sum\limits_{k=1} n(x^k - x^{k+1}) = x - x^2 + x^2 -$
$- x^3 + x^3 - ... + x^n - x^{n+1} = x - x^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases} =: a(x).$

Оскільки $\forall n \geq 1 : s_n \in C[0,1], a \notin C[0,1]$, *то за теоремою про неперервність рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій маємо, що* $s_n \not\rightrightarrows a, n \to \infty$ *на* $[0, 1] \overset{\text{а-поточ.}}{\underset{\text{границя}}{\Longrightarrow}}$ *послідовність* $\{s_n : n \geq 1\}$ *не збігається рівномірно на* $[0, 1] \Rightarrow$ *вихідний функціональний ряд не збігається рівномірно на* $A = [0, 1]$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}, \quad A = (0, +\infty).$

Розв'язок: $a_n(x) := \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)} = \frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1}$ *(це розклад на елементарні дроби для дробу* $a_n(x)$*, в якому ми вважаємо, що* n *– це змінна, а* x *– це стала), тому* $s_n := a_1(x) + a_2(x) + ... + a_n(x) =$
$= 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3x+1} + ... + \frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1} =$
$= 1 - \frac{1}{nx+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 := a(x), x > 0.$ *Маємо, що*
$\sup\limits_{x\in A}|s_n(x) - a(x)| = \sup\limits_{x>0}|1 - \frac{1}{nx+1} - 1| = \sup\limits_{x>0}\frac{1}{nx+1}1 \nrightarrow 0, n \to \infty, \Rightarrow$
$\Rightarrow s_n \not\rightrightarrows a, n \to \infty$ *на* $A \Rightarrow$ *вихідний функціональний ряд не збігається рівномірно на* A.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdot\ldots\cdot(1+nx)}, \quad A_1 = [0, \xi], A_2 = [\xi, +\infty), \xi > 0.$

Розв'язок: $a_n(x) := \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdot\ldots\cdot(1+nx)} = \frac{nx+1-1}{(1+x)(1+2x)\cdot\ldots\cdot(1+nx)} =$
$= \frac{1+nx}{(1+x)(1+2x)\cdot\ldots\cdot(1+(n-1)x)(1+nx)} - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdot\ldots\cdot(1+nx)} = \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdot\ldots\cdot(1+(n-1)x)} -$
$- \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdot\ldots\cdot(1+(n-1)x)(1+nx)} = b_{n-1}(x) - b_n(x), x \geq 0, n \geq 1,$ *тому* $s_n := a_1(x) + a_2(x) + ... + a_n(x) = 1 - b_1(x) + b_1(x) - b_2(x) + ... + b_{n-1}(x) -$
$- b_n(x) = 1 - b_n(x), x \geq 0, n \geq 1.$ *Оскільки,* $b_n(0) = 1, n \geq 1,$ *а якщо* $x > 0$, *то* $0 < b_n(x) = \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdot\ldots\cdot(1+nx)} < \frac{1}{(1+x)^n} \to 0, n \to \infty.$

Отже, $a(x) := \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

Оскільки, $s_n \in C[0, \xi], a \notin C[0, \xi]$, *то за теоремою про неперервність рівномірної границі послідовності неперервних функцій маємо, що* $s_n \not\rightrightarrows a, n \to \infty$ *на* $A_1 = [0, \xi] \Rightarrow$ *вихідний функціональний ряд не збігається рівномірно на* A_1.

Маємо, що $\sup\limits_{x\in A_2}|s_n(x) - a(x)| = \sup\limits_{x\geq\xi}|1 - b_n(x) - 1| = \sup\limits_{x\geq\xi}\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdot\ldots\cdot(1+nx)} =$

$= \frac{1}{(1+\xi)(1+2\xi)\cdot\ldots\cdot(1+n\xi)} \leq \frac{1}{1+n\xi} \to 0, n \to \infty \Rightarrow s_n \rightrightarrows a, n \to \infty$ *на* $A_2 = [\xi, \infty) \Rightarrow$ *вихідний функціональний ряд збігається рівномірно на* $A_2 = [\xi, \infty)$.

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \cos x}, \quad A = \mathbb{R}.$

Розв'язок: $\forall x \in \mathbb{R}$ *це ряд типу Лейбніца (бо якщо покласти* $a_n(x) := \frac{1}{\sqrt{n}+\cos x}, x \in \mathbb{R}, n \geq 2,$ *то* $a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}+\cos x} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}+\cos x} =$
$= a_{n+1}(x) \geq 0, n \geq 1,$ *і* $a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}+\cos x} \to 0, n \to \infty$*), тому* $\forall x \in \mathbb{R}:$
$|r_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}+\cos x} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} \Rightarrow \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|r_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} \to 0, n \to \infty$
$\Rightarrow s_n \rightrightarrows a, n \to \infty$ *на* $\mathbb{R} \Rightarrow$ *вихідний ряд збігається рівномірно на* $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.7. *Дослідити функціональний ряд на рівномірну збіжність на множині A, якщо:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+x^2}, \quad A = \mathbb{R}.$

Розв'язок: $a_n(x) := \frac{\sin nx}{n^2+x^2}, x \in A, n \geq 1.$

Маємо, що $|a_n(x)| = \frac{|\sin nx|}{n^2+x^2}| \leq \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2} =: c_n, x \in \mathbb{R}, n \geq 1$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *збігається, як узагальнений гармонічний ряд (при* $\alpha = 2 > 1$*). Тому за ознакою Вейєрштрасса функціональний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+x^2}$ *збігається рівномірно на* A*.*

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+x^2}{n^2}, \quad A_1 = [-c, c],$ *де* $c > 0$ *– стала,* $A_2 = \mathbb{R}.$

Розв'язок: $a_n(x) := \ln \frac{n^2+x^2}{n^2} = \ln \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right), x \in \mathbb{R}, n \geq 1.$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+x^2}{n^2}$ *збігається рівномірно на* A_1 *за ознакою Вейєрштрасса.*

I спосіб. *Враховуючи, що* $\ln(1+t) \leq t,\ t \geq 0,$ *маємо, що* $|a_n(x)| = \ln \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right) \leq \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{c^2}{n^2} := c_n,\ \ x \in A_1 = [-c, c], n \geq 1$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *збігається, оскільки ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *збігається, як узагальнений гармонічний ряд (при* $\alpha = 2 > 1$*).*

II спосіб. $|a_n(x)| = \ln \frac{n^2+x^2}{n^2} \leq |\ln x \uparrow$ *на* $(0, \infty)| \leq \ln \left(1 + \frac{c^2}{n^2}\right) =: c_n,\ \ x \in A_1 = [-c, c], n \geq 1$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *збігається за 2-гою ознакою порівняння, оскільки* $c_n \sim \frac{c^2}{n^2}, n \to \infty$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *збігається.*

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+x^2}{n^2}$ *не збігається рівномірно на* $A_2 = \mathbb{R}$*, бо* $a_n \not\rightrightarrows 0,$ $n \to \infty$ *на* A_2*, оскільки* $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |a_n(x)| \geq \lim\limits_{x \to +\infty} |a_n(x)| = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right) = +\infty, n \geq 1.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}, \quad A_1 = [0, c],$ *де* $c > 0$ *– стала,* $A_2 = [0, +\infty).$

Розв'язок: $a_n(x) := \frac{nx^2}{n^3+x^3}, x \geq 0, n \geq 1.$ *Маємо, що:*

а) $\forall x \in A_1 = [0, c]:\ |a_n(x)| = a_n(x) = \frac{nx^2}{n^3+x^3} \leq \frac{nc^2}{n^3+0^3} = \frac{c^2}{n^2} := c_n, n \geq 1$

і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *збігається, оскільки ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *збігається, як узагальнений гармонічний ряд, тому за ознакою Вейєрштрасса ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}$ *збігається рівномірно на* A_1.

б) $\sup\limits_{x\in A_2}|a_n(x)| = \sup\limits_{x\geq 0}\frac{nx^2}{n^3+x^3} \geq |x := n| \geq \frac{n\cdot n^2}{n^3+n^3} = \frac{1}{2}, n \geq 1$, *тому* $\sup\limits_{x\in A_2}|a_n(x)| \nrightarrow 0, n\to\infty \;\Rightarrow a_n \not\rightrightarrows 0, n\to\infty$ *на* A_2 $\Rightarrow$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}$ *збігається рівномірно на* A_2.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}, \quad A = \mathbb{R}.$

Розв'язок: *Скористаємось нерівністю* $\operatorname{arctg} t \leq t,\ t\geq 0$.
Маємо $\forall n\geq 1\ \forall x\in\mathbb{R} : \left|\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3}\right| \leq \frac{2|x|}{x^2+n^3} := \varphi_n(x)$.
Дослідимо функцію $\varphi_n(x)$ *на екстремум на* $[0,+\infty)$.
Маємо, що $\varphi_n(x)\geq 0, x\geq 0,\ \varphi_n(0)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{n^3}{x^2}} = 0,$

$$\varphi_n'(x) = \frac{2(x^2+n^3)-2x\cdot 2x}{(x^2+n^3)^2} = \frac{2n^3-2x^2}{(x^2+n^3)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = n^3 \overset{x\geq 0}{\Longleftrightarrow} x = \sqrt{n^3} = n^{\frac{3}{2}},$$

тому

$$\max_{x\geq 0}\varphi_n(x) = \varphi_n(n^{\frac{3}{2}}) = \frac{2n^{\frac{3}{2}}}{\left(n^{\frac{3}{2}}\right)^2 + n^3} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \overset{\varphi_n\text{-парна}}{\Rightarrow} \forall x\in\mathbb{R}:\ \varphi_n(x)\leq\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ *збігається, як узагальнений гармонічний ряд (тут* $\alpha = \frac{3}{2} > 1$*), тому за ознакою Вейєрштрасса ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3}$ *збігається рівномірно на* $\mathbb{R}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{\frac{x}{n}} \ln(1+u^2)du, \quad A = [0,3].$

Розв'язок: $a_n(x) := \int\limits_0^{\frac{x}{n}} \ln(1+u^2)du,\ x\in A = [0,3], n\geq 1.$
Маємо $\forall n\geq 1\ \forall x\in A = [0,3]:$

$$|a_n(x)| = \int\limits_0^{\frac{x}{n}} \ln(1+u^2)du \leq \int\limits_0^{\frac{x}{n}} u^2du \leq \int\limits_0^{\frac{x}{n}} \left(\frac{x}{n}\right)^2 du = \left(\frac{x}{n}\right)^3 \leq \left(\frac{3}{n}\right)^3 = \frac{27}{n^3} =: c_n$$

і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *збігається, оскільки ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *збігається, як узагальнений гармонічний ряд (тут* $\alpha = 3 > 1$*). Тому за ознакою Вейєрштрасса ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{\frac{x}{n}} \ln(1+u^2)du$ *збігається рівномірно на* A*.*

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}, \quad A = (0, +\infty).$

Розв'язок:

I спосіб. $\forall x \in A$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ *– це ряд типу Лейбніца, бо якщо покласти* $a_n(x) := \frac{1}{x+n}, n \geq 1,$ *то*
1) $\forall n \geq 1,\ a_n(x) = \frac{1}{x+n} \geq \frac{1}{x+n+1} = a_{n+1}(x) \geq 0;$
2) $a_n(x) = \frac{1}{x+n} \to 0, n \to \infty.$
Для ряду типу Лейбніца $\forall x \in A$ *має місце така оцінка залишку:* $|r_n(x)| \leq a_{n+1}(x) = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow r_n \rightrightarrows 0, n \to \infty$ *на* $A \Rightarrow$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ *рівномірно збігається на* A*.*

II спосіб. *Скористаємось ознакою Діріхле. Покладемо* $a_n(x) = \frac{1}{x+n},\ b_n(x) = (-1)^n,\ x \in A, n \geq 1.$ *Тоді:*
1) $\forall x \in A,\ a_n(x) = \frac{1}{x+n} \geq \frac{1}{x+n+1} = a_{n+1}(x) \Rightarrow \{a_n(x) : n \geq 1\} \downarrow \Rightarrow \{a_n(x), n \geq 1\}$ *монотонна;*
2) $\sup\limits_{x\in A}|a_n(x)| = \sup\limits_{x>0}\frac{1}{x+n} = \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty;$
3) $\forall x \in A,\ \forall n \geq 1\ :\ |\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)| = |\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k| = |-1+1-1+1-...+$
$+(-1)^n| \leq 1 =: c.$
З умов 1)-3) за ознакою Діріхле маємо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ *рівномірно збігається на* $A = (0, +\infty)$*.*

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{x+n}}, \quad A = [0, +\infty).$

Розв'язок: *Скористаємось ознакою Діріхле.*
Покладемо $a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+n}},\ b_n(x) = \sin x \sin nx,\ x \geq 0, n \geq 1.$ *Тоді:*
1) $\forall x \geq 0,\ a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+n}} \geq \frac{1}{\sqrt{x+n+1}} = a_{n+1}(x) \Rightarrow \{a_n(x) : n \geq 1\} \downarrow \Rightarrow \{a_n(x), n \geq 1\}$ *монотонна;*
2) $\sup\limits_{x\in A}|a_n(x)| = \sup\limits_{x\geq 0}\frac{1}{\sqrt{x+n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, n \to \infty;$

3) $\forall n \geq 1\ \forall x \geq 0,\ :\ |\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)| = |\sum\limits_{k=1}^{n} \sin x \sin kx| =$
$= |\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))| = |\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(\cos(k-1)x-\cos(k+$
$+1)x| = \frac{1}{2}|\cos 0-\cos 2x-\cos 3x+\cos 2x-\cos 4x+\cos 3x-\cos 5x+...+$
$+\cos(n-2)x-\cos nx+\cos(n-1)x-\cos(n+1)x| = \frac{1}{2}|1+\cos x-$
$-\cos nx-\cos(n+1)x| \leq 2 =: c.$
З умов 1)-3) за ознакою Діріхле маємо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{x+n}}$ *рівномірно збігається на* $A = [0, +\infty)$.

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}, \quad A = [0, \pi].$

Розв'язок: *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ *не збігається рівномірно на* A, *бо він не збігається поточково на* A, *при* $x = 0$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ *– це ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, *який розбігається, як гармонічний.*

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{arctg} nx}{n+x^2}, \quad A = \mathbb{R}.$

Розв'язок: *Скористаємось ознакою Абеля, поклавши:*
$a_n(x) := \operatorname{arctg} nx,\ b_n(x) := \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}, x \in \mathbb{R}, n \geq 1.$ *Тоді:*
1) $\forall x \geq 0:\ (n+1)x \geq nx \overset{\operatorname{arctg} x\upuparrows}{\underset{\text{на } \mathbb{R}}{\Longrightarrow}} a_{n+1}(x) = \operatorname{arctg}(n+1)x \geq \operatorname{arctg} nx =$
$= a_n(x) \Rightarrow \{a_n(x) : n \geq 1\} \uparrow$ *і* $\forall x < 0 : (n+1)x < nx \overset{\operatorname{arctg} x\upuparrows}{\underset{\text{на } \mathbb{R}}{\Longrightarrow}} a_{n+1}(x) =$
$= \operatorname{arctg}(n+1)x < \operatorname{arctg} nx = a_n(x) \Rightarrow \{a_n(x) : n \geq 1\} \downdownarrows$, *тому* $\forall x \in \mathbb{R}$ *послідовність* $\{a_n(x) : n \geq 1\}$ *монотонна;*
2) $\forall n \geq 1\ \forall x \in \mathbb{R}:\ |a_n(x)| = |\operatorname{arctg} nx| \leq \frac{\pi}{2} =: c;$
3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ *збігається рівномірно на* $\mathbb{R}$ *за означенням, бо це ряд типу Лейбніца, тому для його залишку має місце оцінка:*
$|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1}, x \in \mathbb{R}, n \geq 1 \Rightarrow \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|r_n(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty \Rightarrow$
$r_n \rightrightarrows 0, n \to \infty$ *на* $\mathbb{R}$.
З умов 1)-3) за ознакою Абеля маємо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{arctg} nx}{n+x^2}$ *рівномірно збігається на* $\mathbb{R}$.

Зауваження 3.1.1. *Чи можна довести рівномірну збіжність на* $\mathbb{R}$

ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{arctg} nx}{n+x^2}$ *за ознакою Вейєрштрасса?*

Ні, бо якщо виконуються умови ознаки Вейєрштрасса на множині A, *то відповідний ряд збігається абсолютно для* $\forall x \in A$, *а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{arctg} nx}{n+x^2}$ *при* $x \neq 0$ *не збігається абсолютно, бо* $\left|(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{arctg} nx}{n+x^2}\right| =$
$= \frac{|\operatorname{arctg} nx|}{n+x^2} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{n}, n \to \infty$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *розбігається* $\underset{\text{порівняння}}{\overset{\text{2-га озн.}}{\Longrightarrow}}$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{arctg} nx}{n+x^2}\right|$ *розбігається.*

3.2 Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів

Теорема (про неперервність суми функціонального ряду). Нехай $A \subset \mathbb{R}, a_n : A \to \mathbb{R}, n \geq 1$, і виконуються умови:
1) $\forall n \geq 1 : a_n \in C(A)$;
2) функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) =: a(x)$ рівномірно збігається на A.
Тоді $a \in C(A)$.

Приклад 3.2.1. *Довести, що* $f \in C(A)$, *якщо*

1) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} nx}{n^2+x^2},\ x \in A = \mathbb{R}$;

Розв'язок: *Покладемо* $a_n(x) := \frac{\operatorname{arctg} nx}{n^2+x^2}, x \in A, n \geq 1$. *Тоді:*
1) $\forall n \geq 1 : a_n \in C(A)$ *за неперервністю* $\operatorname{arctg} x$, *многочлена, теоремою про неперервність складної функції та теоремою про арифметичні дії над неперервними функціями;*
2) функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} nx}{n^2+x^2}$ *збігається рівномірно на множині* $A = \mathbb{R}$ *за ознакою Вейєрштрасса, бо* $\forall n \geq 1\ \forall x \in \mathbb{R} : |a_n(x)| =$
$= \frac{|\operatorname{arctg} nx|}{n^2+x^2} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2+x^2} \leq \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^2} =: c_n$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *збігається, оскільки ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *збігається, як узагальнений гармонічний (тут* $\alpha = 2 > 1$*).*
З пунктів 1) і 2) за теоремою про неперервність суми функціонального ряду маємо, що $f \in C(A)$.

2) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^x}{n^5+|x|},\ x \in A = (-\infty, 2]$;

Розв'язок: *Покладемо* $a_n(x) := \frac{n^x}{n^5+|x|}, x \in A, n \geq 1$. *Тоді:*
1) $\forall n \geq 1 : a_n \in C(A)$ *за неперервністю показникової функції, сталої функції та функції* $y = |x|, x \in \mathbb{R}$, *а також за теоремою про арифметичні дії над неперервними функціями;*
2) функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{n^5+|x|}$ *збігається рівномірно за ознакою Вейєрштрасса, бо* $\forall n \geq 1\ \forall x \in A : |a_n(x)| = \frac{n^x}{n^5+|x|} \leq \frac{n^2}{n^5+|x|} \leq \frac{n^2}{n^5} = \frac{1}{n^3} =: c_n$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *збігається, як узагальнений гармонічний (тут* $\alpha = 3 > 1$*).*
З пунктів 1) і 2) за теоремою про неперервність суми функціонального ряду маємо, що $f \in C(A)$.

3) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n}+x^2}$, $x \in A = \mathbb{R}$; *чи можна довести рівномірну збіжність на* A *за ознакою Вейєрштрасса?*

Розв'язок: *Рівномірну збіжність ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n}+x^2}$ *на* A *за ознакою Вейєрштрасса довести не можна, бо якщо виконуються умови ознаки Вейєрштрасса, то відповідний функціональний ряд збігається абсолютно, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n}+x^2}$ *при* $x \neq 0$ *абсолютно не збігається, оскільки* $\left|(-1)^n \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n}+x^2}\right| = \frac{|\operatorname{arctg} nx|}{\sqrt{n}+x^2} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}, n \to \infty$, *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *розбігається, як узагальнений гармонічний (тут* $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$*).*

Покладемо $a_n(x) := (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n}+x^2}, x \in A, n \geq 1$. *Тоді:*
1) $\forall n \geq 1 : a_n \in C(A)$ *за неперервністю многочлена,* $\operatorname{arctg} x$, *теоремою про неперервність складної функції та теоремою про арифметичні дії над неперервними функціями;*
2) функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n}+x^2}$ *збігається рівномірно на* A *за ознакою Абеля, бо якщо покласти* $\widetilde{a}_n(x) := \operatorname{arctg} nx$, $\widetilde{b}_n(x) := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+x^2}$, $x \in \mathbb{R}, n \geq 1$, *то:*

а) $\forall x \in \mathbb{R}$ *послідовність* $\{\widetilde{a}_n(x) : n \geq 1\}$ *монотонна, оскільки* $\forall x \geq 0 : \{\widetilde{a}_n(x) : n \geq 1\} \uparrow$ *і* $\forall x < 0 : \{\widetilde{a}_n(x) : n \geq 1\} \downdownarrows$;

б) $\forall n \geq 1 \forall x \in \mathbb{R} : |\widetilde{a}_n(x)| = |\operatorname{arctg} nx| \leq \frac{\pi}{2} =: c$;

в) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{b}_n(x)$ *збігається рівномірно на* $\mathbb{R}$, *бо* $\forall x \in \mathbb{R}$ *це ряд типу Лейбніца, отже для його залишку маємо, що* $\forall n \geq 1 \forall x \in \mathbb{R}$:

$|r_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{n+1+x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}} \;\Rightarrow\; \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|r_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0, n \to \infty$, *тобто* $r_n \rightrightarrows 0, n \to \infty$ *на* $\mathbb{R}$.
З пунктів 1) і 2) за теоремою про неперервність суми функціонального ряду маємо, що $f \in C(\mathbb{R})$.

.

Теорема (про інтегрування функціонального ряду). Нехай $a_n : [\alpha, \beta] \to R, n \ge 1$ і виконуються умови:
1) $\forall n \ge 1 : a_n \in R[\alpha, \beta]$;
2) функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) =: a(x)$ збігається рівномірно на $[\alpha, \beta]$.
Тоді $a \in R[\alpha, \beta]$ і $\int\limits_{\alpha}^{\beta} a(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} a_n(x)dx$.

Приклад 3.2.2. *Зобразити у вигляді ряду інтеграл* $\int\limits_0^1 f(x)dx$, *якщо* $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2},\ x \in [0, 1]$.

Розв'язок: *Покладемо* $a_n(x) := \frac{1}{n^2+x^2},\ x \in [0, 1],\ n \ge 1$. *Тоді:*
1) $\forall n \ge 1 : a_n \in R[0, 1]$, *бо* $a_n \in C[0, 1]$, *як раціональна функція зі знаменником, що не дорівнює нулю;*
2) функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ *збігається рівномірно на* $[0, 1]$ *за ознакою Вейєрштрасса, бо* $\forall n \ge 1 \forall x \in [0, 1] : \left|\frac{1}{n^2+x^2}\right| = \frac{1}{n^2+x^2} \le \frac{1}{n^2} =: c_n$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *збігається, як узагальнений гармонічний* $(\alpha = 2)$.
З пунктів 1) і 2) за теоремою про інтегрування функціонального ряду $f \in R[0, 1]$ *і* $\int\limits_0^1 f(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^1 \frac{1}{n^2+x^2}dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}\Big|_0^1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$.

.

Теорема (про диференціювання функціонального ряду). Нехай $a_n : [\alpha, \beta] \to R, n \ge 1$ і виконуються умови:
1) $\exists x_0 \in [\alpha, \beta]$ таке, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ збігається;
2) $\forall n \ge 1 : a_n \in C[\alpha, \beta]$;
3) функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ збігається рівномірно на $[\alpha, \beta]$.
Тоді $\forall x \in [\alpha, \beta]$: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ збігається, його сума $a \in C^1[\alpha, \beta]$ і

$a'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x),\ x \in [\alpha, \beta].$

Зауваження. Тут відрізок можна замінити на будь-який проміжок числової прямої.

Приклад 3.2.3. *Довести, що $f \in C^1(\mathbb{R})$, якщо:*

а) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+\sin x},\ x \in \mathbb{R};$

б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2},\ x \in \mathbb{R}.$

Розв'язок:

а) *Нехай* $a_n(x) := \frac{1}{2n^2+\sin x},\ x \in \mathbb{R},\ n \geq 1.$ *Тоді:*

1) $\exists x_0 = 0 \in \mathbb{R}$: *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ *збігається бо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *збігається, як узагальнений гармонічний* ($\alpha = 2$)*;*

2) $\forall n \geq 1 \forall x \in \mathbb{R} : \exists a_n'(x) = -\frac{\cos x}{(2n^2+\sin x)^2}$ *і* $a_n \in C^1(\mathbb{R})$*;*

3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ *збігається рівномірно на* $\mathbb{R}$ *за ознакою Вейєрштрасса, бо* $\forall n \geq 1 \forall x \in \mathbb{R} |a_n'(x)| \leq \frac{|\cos x|}{(2n^2+\sin x)^2} \leq \frac{1}{(2n^2-1)^2} = c_n$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *збігається за другою ознакою порівняння, оскільки* $c_n \sim \frac{1}{4n^4}, n \to \infty$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ *збігається.*

З пунктів 1) - 3) за теоремою про диференціювання функціонального ряду $\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R})$.

б) *Покладемо* $a_n(x) := \frac{1}{n^2+x^2},\ x \in \mathbb{R},\ n \geq 1.$ *Застосуємо теорему про диференціювання функціонального ряду на відрізку* $[-c, c]$, *де* $c > 0$ *– довільне фіксоване число. Маємо, що:*

1) $\exists x_0 := 0$: *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *збігається;*

2) $\forall n \geq 1 \forall x \in \mathbb{R} : \exists a_n'(x) = -\frac{2x}{(n^2+x^2)^2}$ *– це неперервна функція на* $\mathbb{R}$ *як раціональна функція зі знаменником, що не дорівнює нулю, тому* $a_n \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow a_n \in C^1[-c, c], n \geq 1;$

3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ *збігається рівномірно на* $[-c, c]$ *за ознакою Вейєрштрасса, бо* $\forall n \geq 1 \forall x \in [-c, c] : |a_n'(x)| = \frac{|2x|}{(n^2+x^2)^2} \leq \frac{2c}{n^4} =: c_n$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *збігається, оскільки ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ *збігається, як узагальнений гар-*

монічний ($\alpha = 4$).
За теоремою про диференціювання функціонального ряду $f \in C^1[-c, c]$, де $c > 0$ – довільне число, $\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R})$.

3.3 Степеневі ряди

Теорема (Коші-Адамара). Нехай $\{a_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R},\ \rho := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$,

$$r := \begin{cases} 0, & \text{якщо } \rho = +\infty, \\ \frac{1}{\rho}, & \text{якщо } 0 < \rho < +\infty, \text{ Тоді:} \\ +\infty, & \text{якщо } \rho = 0. \end{cases}$$

1) якщо $r = 0$, то степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (1) розбігається $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
2) якщо $0 < r < +\infty$, то степеневий ряд (1) збігається абсолютно при $|x| < r$ і розбігається при $|x| > r$;
3) якщо $r = +\infty$, то степеневий ряд (1) збігається абсолютно $\forall x \in \mathbb{R}$.

Означення Величина r, $0 \leq r \leq +\infty$, з висновку теореми Коші-Адамара називається **радіусом збіжності** степеневого ряду (1).

Теорема (друга формула для радіуса збіжності степеневого ряду). Нехай $\{a_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ і r – це радіус збіжності степеневогог ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Тоді $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Зауваження Множина збіжності степеневого ряду – це одна з множин виду: $\{0\}, \mathbb{R}, [-r, r], (-r, r), (-r, r]$ або $[-r, r)$, де r –радіус збіжності цього степеневого ряду.

Приклад 3.3.1. *Знайти множину збіжності A та множину абсолютної збіжності B степеневих рядів:*
1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$, *де $p \in \mathbb{R}$ – стала.*

Розв'язок: *Тут $a_n = \frac{1}{n^p},\ n \geq 1,\ \rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^p}\right|} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p} = 1$ (бо $\sqrt[n]{n} \to 1, n \to \infty$, як одна з основних границь послідовностей), тому $r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$. Отже, за теоремою Коші-Адамара ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ збігається абсолютно при $x \in (-1, 1)$ і розбігається при $|x| > 1$.*

Нехай $x = 1$. *Тоді ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ – *це ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$; *він збігається* $\Leftrightarrow$ *він збігається абсолютно* $\Leftrightarrow\ p > 1$.

Нехай $x = -1$. *Тоді ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ – *це ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ *(2). Якщо* $p \le 0$, *то* $n^p \nrightarrow \infty, n \to \infty \Rightarrow \frac{(-1)^n}{n^p} \nrightarrow 0, n \to \infty \Rightarrow$ *ряд (2) розбігається. Якщо* $p > 0$, *то ряд (2) збігається за ознакою Лейбніца (тут* $\widetilde{a_n} := \frac{1}{n^p}, n \ge 1$ *і умови ознаки Лейбніца виконуються: 1)* $\widetilde{a_n} = \frac{1}{n^p} \ge \frac{1}{(n+1)^p} = \widetilde{a_{n+1}} \ge 0, n \ge 1$; *2)*$\widetilde{a_n} = \frac{1}{n^p} \to 0 n \to \infty$*). Ряд (2) збігається абсолютно* $\Leftrightarrow$ *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *збігається* $\Leftrightarrow\ p > 1$.

Відповідь: *якщо* $p \le 0$, *то* $A = B = (-1, 1)$; *якщо* $0 < p \le 1$, *то* $A = [-1, 1),\ B = (-1, 1)$; *якщо* $p > 1$, *то* $A = B = [-1, 1]$.

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{n^3} x^n$;

Розв'язок: *Тут* $a_n = 3^{n^3},\ \rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{3^{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{n^3}{n}} = $ $= \lim\limits_{n\to\infty} 3^{n^2} = +\infty \Rightarrow\ r = 0$, *тому за теоремою Коші-Адамара маємо, що* $A = \{0\} = B$.

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n^3}}$;

Розв'язок: *Тут* $a_n = \frac{1}{3^{n^3}}, n \ge 1$; $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n^2}} = 0 \Rightarrow$ $r = +\infty$, *тому за теоремою Коші-Адамара маємо, що* $A = B = \mathbb{R}$.

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;

Розв'язок: *Тут* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}, n \ge 1$; $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$

$= e \Rightarrow\ r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{e}$, *тому за теоремою Коші-Адамара ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ *збігається абсолютно при* $x \in (-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ *і розбігається при* $|x| > \frac{1}{e}$.

Якщо $x = -\frac{1}{e}$, *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ – *це ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$; *цей ряд розбігається, бо* $(-1)^n b_n \nrightarrow 0, n \to \infty$, *оскільки вище доведено, що* $b_n \nrightarrow 0, n \to \infty$.

Відповідь: $A = B = \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{3^n}$;

Розв'язок: *Ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{3^n}$ *– це ряд* $\frac{x}{3}+\frac{x^8}{3^2}+\frac{x^{27}}{3^3}+\ldots = 0+\frac{1}{3}\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3+$ $+0\cdot x^4+0\cdot x^5+0\cdot x^6+0\cdot x^7+\frac{1}{3^2}\cdot x^8+0\cdot x^9+\ldots+0\cdot x^{26}+\frac{1}{3^3}\cdot x^{27}+0\cdot x^{28}+\ldots$, *тому тут* $a_n = \begin{cases} \frac{1}{3^k}, & n=k^3 \text{ при деякому } k\in\mathbb{N}, \\ 0, & n\neq k^3 \text{ ні при якому } k\in\mathbb{N}, \end{cases}$ *а тому* $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} =$ $= \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k^3]{\frac{1}{3^k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{3^{\frac{1}{k^2}}} = \frac{1}{3^0} = 1 \Rightarrow\ r=1$, *тому за теоремою Коші-Адамара ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{3^n}$ *збігається абсолютно при* $x\in(-1,1)$ *і розбігається при* $|x|>1$.

Якщо $x=1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{3^n}$ *– це ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ *і цей ряд збігається абсолютно, як геометричний ряд.*

Якщо $x=-1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{3^n}$ *– це ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n^3}}{3^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ *і цей ряд збігається абсолютно, бо ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{3^n}\right| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ *збігається, як геометричний ряд.*

Відповідь: $A=B=[-1,1]$.

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2+(-1)^n)^n \frac{x^n}{n^2}$;

Розв'язок: *Тут* $a_n = \frac{(2+(-1)^n)^n}{n^2},\ n\geq 1,\ \rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n^2} =$ $= \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2+(-1)^{2k}}{(\sqrt[2k]{2k})^2} = 3 \Rightarrow r = \frac{1}{3}$. *Отже, за теоремою Коші-Адамара ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2+(-1)^n)^n \frac{x^n}{n^2}$ *збігається абсолютно при* $x\in(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ *і розбігається при* $|x|>\frac{1}{3}$.

Якщо $x=\frac{1}{3}$. *Тоді ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2+(-1)^n)^n \frac{x^n}{n^2}$ *– це ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{3^n\cdot n^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *цей ряд збігається абсолютно, бо* $b_n\geq 0, n\geq 1$, *і цей ряд збігається за першою ознакою порівняння, оскільки* $0\leq b_n = \frac{(2+(-1)^n)^n}{3}\cdot\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ *(оскільки* $2+(-1)^n = \begin{cases} 3, & n- \text{парне}, \\ 1, & n- \text{непарне} \end{cases}$, *отже* $\frac{2+(-1)^n}{3} \leq \frac{3}{3} = 1$*),* $n\geq 1$ *і ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *збігається.*

Нехай $x = -\frac{1}{3}$. *Тоді ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2+(-1)^n)^n\frac{x^n}{n^2}$ – *це ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2+(-1)^n)^n}{3^n\cdot n^2} =$ $= \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ *і цей ряд збігається абсолютно, бо вище доведено, що ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *збігається і* $b_n \geq 0, n \geq 1$.

Відповідь: $A = B = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{\sqrt{n}}(x-3)^n$;

Розв'язок: *Зробимо заміну* $t := x - 3$ *і розглянемо* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{\sqrt{n}}t^n$ *(3). Маємо, що* $a_n = \frac{2^n+(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$, $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2^n+(-1)^n}}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} = 2$ *(бо* $\sqrt[n]{n} \to 1, n \to \infty$ *і* $\sqrt[n]{2^n + (-1)^n} \to 2, n \to \infty$ *за теоремою про три послідовності)* $\Rightarrow r = \frac{1}{2}$. *Отже, за теоремою Коші-Адамара ряд (3) збігається абсолютно при* $|t| < \frac{1}{2}$ *і розбігається при* $|t| > \frac{1}{2}$.

Якщо $t = \frac{1}{2}$. *Тоді ряд (3) – це ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{2^n\cdot\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}\right) =$ $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *(4) і цей ряд розбігається за другою ознакою порівняння, бо* $0 < b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{2^n\cdot\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, n \to \infty$ *і ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ *розбігається.*

Нехай $x = -\frac{1}{2}$, *тоді ряд (3) – це ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n+(-1)^n}{2^n\cdot\sqrt{n}} =$ $= \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n\cdot\sqrt{n}}\right)$ *(5).*

Ряд (5) збігається, як сума двох збіжних рядів. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *збігається за ознакою Лейбніца, а ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot\sqrt{n}}$ *збігається за першою ознакою порівняння, оскільки* $0 \leq \frac{1}{2^n\cdot\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2^n}, n \geq 1$ *і ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ *збігається, як геометричний.*

Ряд (5) не збігається абсолютно, бо ряд з модулів його членів – це ряд (4), який, як доведено вище, розбіжний.

Отже, ряд (3) збігається $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{2} \leq t = x-3 < \frac{1}{2}$ *і ряд (3) збігається абсолютно* $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{2} < t = x - 3 < \frac{1}{2}$. *Розв'язуючи ці нерівності відносно* x, *маємо, що ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{\sqrt{n}}(x-3)^n$ *збігається* $\Leftrightarrow$ $2,5x \leq x < 3,5$ *і* *збігається абсолютно* $\Leftrightarrow\ 2,5x < x < 3,5.$

Відповідь: $A = [2,5; 3,5),\ B = (2,5; 3,5).$

8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 2^n \sin^n x;$

Розв'язок: *Зробимо заміну* $t := 2\sin x$ *і розглянемо* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} t^n$ *(6).* *Тут* $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!},\ n \geq 1$, *і для знаходження радіуса збіжності доцільно застосувати другу формулу для радіуса збіжності степеневого ряду:*

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2(2(n+1))!}{(2n)!((n+1)!)^2} = \left|\begin{array}{c}(n+1)! = n!(n+1);\\ (2(n+1))! = (2n+2)! = \\ = (2n)!(2n+1)(2n+2)\end{array}\right| =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} = 4.$ *Тому, за теоремою Коші-Адамара ряд (6) збігається абсолютно при* $t \in (-4,4)$ *і розбігається при* $|t| > 4$.

Якщо $t = 4$, *то ряд (6) – це ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *(7).*

Маємо, що $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{4^{n+1}((n+1!))^2(2n)!}{(2n+2)!4^n(n!)^2} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2} \geq 1, n \geq 1,$ *тому за ознакою Д'Аламбера в неграничній формі ряд (7) розбігається, причому* $b_n \nrightarrow 0, n \to \infty$.

Якщо $t = -4$, *то ряд (6) – це ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$. *Цей ряд розбігається, бо* $(-1)^n b_n \nrightarrow 0, n \to \infty$, *оскільки вище доведено, що* $b_n \nrightarrow 0, n \to \infty$.

Отже, ряд (6) збігається $\Leftrightarrow$ *він збігається абсолютно* $\Leftrightarrow t \in (-4,4)$. *Оскільки* $t = 2\sin x$, *то* $\forall x \in \mathbb{R} : 2\sin x \in (-4,4)$, *тому ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}2^n \sin^n x$ *збігається абсолютно* $\forall x \in \mathbb{R}$

Відповідь: $A = B = \mathbb{R}$.

Зауваження *Оскільки* $\forall x \in \mathbb{R} : 2\sin x \in (-4,4)$, *то збіжність ряду (6) при* $t = \pm 4$ *можна було і не досліджувати.*

9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx};$

Розв'язок: *Зробимо заміну* $t := e^{-x}$, *тоді ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$ *– це ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} t^n$ *(8). Тут* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2},\ n \geq 1, \rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} \Rightarrow r = e\ \Rightarrow$ *за теоремою Коші-*

Адамара ряд (8) збігається абсолютно при $t \in (-e, e)$ *і розбігається при* $|t| > e$.

Оскільки $t = e^{-x}$, *то залишається розглянути випадок* $t = e$; *у цьому випадку ряд (8) – це ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *(9). Так, як* $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^n = \left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^n > 1$ *(бо* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ *за теоремою про число e),* $n \geq 1$, *то* $b_n \nrightarrow 0, n \to \infty, \Rightarrow$ *ряд (9) розбігається.*

Отже, якщо $t > 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$ *збігається* $\Leftrightarrow$ *він збігається абсолютно* $\Leftrightarrow t \in (0, e)$. *Оскільки* $t = e^{-x} \in (0, e) \Leftrightarrow -x < 1 \Leftrightarrow x > -1$, *то маємо:*

Відповідь: $A = B = (-1, +\infty)$.

10) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{\sqrt{n}} x^n$;

Розв'язок: *Тут* $a_n = \frac{(3+(-1)^n)^n}{\sqrt{n}},\ n \geq 1, \rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{3+(-1)^n}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{3+(-1)^{2k}}{\sqrt{\sqrt[2k]{2k}}} = 4 \ \Rightarrow r = \frac{1}{4}$, *за теоремою Коші-Адамара ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{\sqrt{n}} x^n$ *збігається абсолютно при* $x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ *і розбігається при* $|x| > \frac{1}{4}$.

Якщо $x = \frac{1}{4}$, *тоді* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{\sqrt{n}} x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{4^n\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} = = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *(10). Маємо, що* $b_{2n} = \left(\frac{3+1}{4}\right)^{2n} \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \Rightarrow b_{2n-1} + b_{2n} \geq \geq \frac{1}{\sqrt{2n}}, n \geq 1$; *оскільки ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *розбігається, як узагальнений гармонічний (при* $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$*), то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}}$ *розбігається, тому за ознакою порівняння ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (b_{2n-1} + b_{2n})$ *розбігається, і тому за теоремою про групування членів ряду, ряд (10) розбігається.*

Якщо $x = -\frac{1}{4}$, *тоді* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{\sqrt{n}} x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3+(-1)^n)^n}{4^n\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$. *Оскільки* $b_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n}},\ \ b_{2n-1} = (\frac{1}{2})^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \leq \frac{2}{2^{2n}} = 2 \cdot \frac{1}{4^n}, n \geq 1$ *і ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ *збігається, як геометричний, то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{2n}$ *розбігається, а ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{2n-1}$ *збігається, тому ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-b_{2n-1} + b_{2n})$ *розбігається, як сума розбіжного та збіжного рядів, отже, за теоремою про групування* *членів ряду маємо, що ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ *розбігається.*

`Відповідь:` $A = B = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Приклад 3.3.2. *Чи збігається ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *(11) рівномірно на* $C_1 = [0, \frac{1}{2}]?; C_2 = [-1, 0]?; C_3 = [0, 1]?; C_4 = [0, 1)?; C_5 = (-1, 0]?$ *Чому?*

Зауваження. *Тут слід скористатись теоремою про рівномірну збіжність степеневого ряду, яка каже, що степеневий ряд збігається рівномірно на кожному відрізку, який цілком лежить у множині збіжності цього степеневого ряду.*

Розв'язок: *Для ряду (11) його радіус збіжності* $r = 1$, *а множина збіжності* $A = [-1, 1)$.

Оскільки $C_1 = [0, \frac{1}{2}] \subset A = [-1, 1)$ *і* C_1 *– відрізок, то степеневий ряд (11) збігається рівномірно на множині* C_1 *за теоремою про рівномірну збіжність степеневого ряду.*

Оскільки $C_2 = [-1, 0] \subset A$ *і* C_2 *– відрізок, то степеневий ряд (11) збігається рівномірно на множині* C_2 *за теоремою про рівномірну збіжність степеневого ряду.*

Ряд (11) не збігається рівномірно на $C_3 = [0, 1]$, *бо цей ряд не збігається при* $x = 1$, *оскільки* $1 \notin A$.

Ряд (11) не збігається рівномірно на $C_4 = [0, 1)$. *Доведемо це. Припустимо, що це не так, тобто ряд (11) збігається рівномірно на* C_4. *Тоді за критерієм Коші рівномірної збіжності функціонального ряду* $\forall \varepsilon\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall p \geq 1\ \forall x \in C_4 = [0, 1) : \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k} \right| < \varepsilon$; *спрямуємо у цій нерівності* $x \to 1-$; *за теоремою про граничний перехід в нерівностях отримаємо, що* $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \right| \leq \varepsilon$; *з останньої нерівності за критерієм Коші збіжності числового ряду* $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *збігається; однак цей ряд розбігається, як гармонічний ряд. Суперечність. Отже, ряд (11) не збігається рівномірно на* C_4.

Ряд (11) збігається рівномірно на $C_5 = (-1, 0]$, *бо* $C_5 \subset [-1, 0] = C_2$, *а на множині* C_2 *ряд (11) збігається рівномірно за доведеним вище.*

3.4 Ряд Тейлора

Означення Нехай $0 < r \le +\infty$, $f \in C^{\infty}((-r, r))$. Ряд **Маклорена** функції f – це ряд:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Основні розклади:

$$1. \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R};$$

$$2. \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R};$$

$$3. \quad \sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R};$$

$$4. \quad \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},\ x \in (-1, 1];$$

$$5. \quad (1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\alpha}^{n} x^n,\ x \in (-1, 1),$$

де $C_{\alpha}^{0} := 1,\ C_{\alpha}^{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot...\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$;
зокрема, $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + ..., x \in (-1, 1)$

Приклад 3.4.1. *Розкласти в ряд Маклорена наступні функції і визначити множини, на яких ці розклади справедливі:*

1) $f(x) = \sin x^3$

Розв'язок: *У розкладі* $\sin t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, t \in \mathbb{R}$ *підставимо* $t := x^3$, *отримаємо:* $f(x) = \sin x^3 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^3)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+3}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$ – *це ряд Маклорена функції* f, *бо степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми, а сума цього ряду рівна* f.

2) $f(x) = \sin^3 x$

Розв'язок: $f(x) = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$. *У розкладі* $\sin t = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, t \in \mathbb{R}$ *спочатку підставимо* $t := x$, *а потім* $t := 3x$ *і отримаємо:*
$\frac{3}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3-3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}, x \in \mathbb{R},$ – *це ряд Маклорена, бо степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми.*

3) $f(x) = \operatorname{ch} x$

Розв'язок: $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$. *У розкладі* $e^t = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$, $t \in \mathbb{R}$ *спочатку підставимо* $t := x$, *а потім* $t := -x$; *підставивши* $t := -x$ *отримаємо, що* $e^{-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$, *тому*
$\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n!}x^n;$
оскільки $1 + (-1)^n = \begin{cases} 0, & n - - \textit{ непарне}, \\ 2, & n - - \textit{ парне}, \end{cases}$ *і* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – *парне* $\Leftrightarrow$ $n = 2k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *маємо* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}$ – *це ряд Маклорена, бо степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми.*

Зауваження. *Розклади з п.п. 1)-3) підтверджують той факт, що ряд Маклорена парної (непарної) функції містить змінну лише в парних (відповідно непарних) степенях.*

4) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Розв'язок: $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$. *У розкладі* $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}...,\ t \in (-1, 1]$ *спочатку підставимо* $t := x$, *отримаємо:* $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}...,\ x \in (-1, 1]$ *(1), а потім візьмемо* $t := -x$, *отримаємо:* $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}...,\ x \in [-1, 1)$ *(2). Віднявши від рівності (1) рівність (2), отримаємо:* $\frac{1}{2}(2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5}) = = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ *(3). Оскільки розклади (1) та (2) виконуються одночасно тоді і лише тоді, коли* $x \in (-1, 1)$, *то рівність (3) виконується при* $x \in (-1, 1)$. *(3) – це ряд Маклорена, бо степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми.*

5) $f(x) = 3^{x^2}$

Розв'язок: $f(x) = 3^{x^2} = e^{x^2 \ln 3}$. *У розкладі* $e^t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!},\ t \in \mathbb{R}$ *підставляємо* $t := x^2 \ln 3$, *отримаємо,* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} \ln^n 3}{n!}, x \in \mathbb{R}$ – *це ряд Маклорена, бо степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми.*

6) $f(x) = \frac{x}{x^2-5x+6}$

Розв'язок: *Розкладемо цей (правильний дріб) в суму елементарних дробів.*
Маємо, що $\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow x = A(x-2)+B(x-3)$.
Взявши тут
$x = 2$, *маємо:* $2 = B(2-3) = -B \Rightarrow B = -2$;
$x = 3$, *маємо:* $3 = A(3-2) + B \cdot 0 = A \Rightarrow A = 3$;
Отже, $f(x) = \frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2} = \frac{-1}{1-\frac{x}{3}} + \frac{1}{1-\frac{x}{2}}$.
Тепер у формулу для суми геометричної прогресії $\frac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n, |t| < 1$ *підставимо* $t := \frac{x}{3}$ *та* $t := \frac{x}{2}$, *отримаємо*

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) x^n,\ x \in (-2,2),$$

бо $\begin{cases} \frac{|x|}{3} < 1 \\ \frac{|x|}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3,3) \\ x \in (-2,2) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2,2)$.

Розклад $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) x^n,\ x \in (-2,2)$ – *це ряд Маклорена, бо степеневий ряд є рядом Маклорена своєї суми.*

7) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

Розв'язок: *Скористаємось біноміальним рядом* $(1+t)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n t^n, t \in (-1,1)$, *де* $C_\alpha^n := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}, n \geq 1$, *при* $\alpha = -2$ *і* $t = -x$. *Маємо:*

$$C_{-2}^n := \frac{-2(-2-1)\cdot\ldots\cdot(-2-n+1)}{n!} = \left| \begin{array}{c} \text{в чисельнику міститься } n \text{ множників} \\ \text{з кожного з них виносимо за дужки } -1 \end{array} \right| =$$

$= \frac{(-1)^n 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)}{n!} = (-1)^n (n+1)$, *тому* $f(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_{-2}^n (-x)^n =$
$= 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)(-1)^n x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n$ *(*). Відомо, що радіус збі-*

жності біноміального ряду рівний 1, отже, $\forall t \in (-1,1)$ біноміальний ряд збігається. Оскільки $t = -x \in (-1,1) \Leftrightarrow x \in (-1,1)$, то рівність (*) справедлива при $x \in (-1,1)$, причому радіус збіжності степеневого ряду в правій частині формули (*) рівний 1, тому рівність (*) не може бути справедливою при $|x| > 1$ і залишається перевірити її правильність при $x = \pm 1$. Але при $x = \pm 1$ ряд, що стоїть справа в (*) розбігається, бо його загальний член ряду не прямує до нуля. Тому розклад (*) справедливий, тоді і лише тоді, коли $x \in (-1,1)$. Це ряд Маклорена функції f, бо степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми.

8) $f(x) = arcsinx$

Розв'язок: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1$. *Скористаємось біномільним рядом* $(1+t)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n t^n, t \in (-1,1)$, *при* $\alpha = -\frac{1}{2}$ *і* $t = -x^2$. *Маємо:* $C^n_{-\frac{1}{2}} := \frac{1}{n!}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\right) = |$*в дужці стоїть n множників*$| = \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}, n \geq 1$, *тому* $f'(x) = 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}(-x^2)^n =$

$= 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n}$ *(*)*,$x \in (-1,1)$.

Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$f(x) = f(0)+\int\limits_0^x f'(u)du = \int\limits_0^x \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}u^{2n}\right) = \left|\begin{matrix}\text{степеневий ряд}\\ \text{можна інтегрувати}\\ \text{на множині збіжності}\end{matrix}\right| =$$

$= x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}$ *(**)*,$x \in (-1,1)$. *Це ряд Маклорена, бо степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми.*

З'ясуємо, де справедливий розклад (**). Поки що він доведений для $x \in (-1,1)$. Оскільки радіус збіжності біноміального ряду, а отже, й ряду (*) рівний 1, а також при інтегруванні степеневого ряду його радіус збіжності не змінюється, то ряд, що стоїть справа у рівності (**), розбігається при $|x| > 1$, а отже розклад (**) не має місця при $|x| > 1$. Дослідимо, чи справедливий розклад (**) при $x = \pm 1$.

Нехай $x = 1$, тоді ряд, що стоїть справа в рівності (**) – це ряд $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

$\forall n \geq 2:\ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{(2n-1)!!2^{n+1}(n+1)!(2n+3)}{2^n n!(2n+1)(2n+1)!!} - 1\right) =$

$= \begin{vmatrix} (2n+1)!! = (2n-1)!!(2n+1) \\ (n+1)! = n!(n+1) \end{vmatrix} = n\left(\frac{2(n+1)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1\right) =$

$= n\frac{4n^2+10n+6-4n^2-4n-1}{(2n+1)^2} = \frac{6n^2+5n}{(2n+1)^2} \to \frac{3}{2} > 1$, *тому за ознакою Раабе ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається, тому множина збіжності* A *степеневого ряду, що стоїть справа у рівності (**), містить відрізок* $[0,1]$. *Нехай* $s(x)$ *– сума цього ряду в точці* $x \in A$. *З (**) виплаває* $f(x) = s(x)$ *(***),* $x \in [0,1)$. *Оскільки функція* f *неперервна зліва в точці* $x = 1$ *і за теоремою про неперервність суми степеневого ряду* $s \in C(A)$, *отже,* s *неперервна зліва в точці* $x = 1$, *то перейшовши до границі у рівності (***), отримаємо, що* $f(1) = s(1)$.

Оскільки при $x = -1$ *ряд, що стоїть справа у рівності (**) – це ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-a_n)$, *то аналогічно до випадку* $x = 1$ *отримуємо, що* $f(-1) = s(-1)$. *Таким чином, розклад (**) справедливий, тоді і лише тоді, коли* $x \in [-1,1]$.

Зауваження. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x \in [-1,1]$.

9) $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} u}{u}du$; *обчислити* $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} u}{u}du$ *з точністю* $\varepsilon = 0,001$.

Розв'язок: *З попередеього зауваження випливає, що* $\forall u \in [-1,1] \setminus \{0\}: \ g(u\frac{\operatorname{arctg} u}{u} = \frac{1}{u}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{2n+1}$ *(*); права частина рівності (*) визначена при* $u = 0$ *і рівна 1, тому покладемо* $g(0) := 1$. *Тоді* $\forall x \in [-1,1] : f(x) = \int\limits_0^x g(u)du = \int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{2n+1}du =$

$= \begin{vmatrix} \text{степеневий ряд} \\ \text{можна почленно інтегрувати} \\ \text{на множині збіжності} \end{vmatrix} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ *(**).*

Це ряд Маклорена, бо степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми.

Оскільки радіус збіжності ряду, що стоїть справа у рівності (*) рівний 1 і при почленному інтегруванні степеневого ряду його радіус збіжності не змінюється, то радіус збіжності ряду, що стоїть справа в рівності (**) теж рівний 1, тому при $|x| > 1$ *рівність (**) хибна. Отже, розклад (**) має місце , тоді і лише тоді, коли* $x \in [-1,1]$.

Обчислимо $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} u}{u}du = f(\frac{1}{2})$ *з точністю* $\varepsilon = 0,001$.

З (**) $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2 2^3} + \frac{1}{5^2 2^5} + ... + \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+1)^2} + ... = \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2 2^3} + \frac{1}{5^2 2^5} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)^2} + r_n$ *(***). Оскільки маємо ряд типу Лейбніца, то його залишок* r_n *допускає оцінку:* $|r_n| < \frac{1}{(2n+1)^2 2^{2n+1}} =: \beta_n, n \geq 0$. *Треба підібрати число* $n \in \mathbb{N}$ *так, щоб* $|r_n| < 0,001$. *Оскільки* $\beta_0 = \frac{1}{2}, \beta_1 = \frac{1}{3^2 2^3} = = \frac{1}{72}, \beta_2 = \frac{1}{5^2 2^5} = \frac{1}{800} > 0,001, \beta_3 = \frac{1}{7^2 2^7} = \frac{1}{49 \cdot 128} < 0,001$, *то у формулі (***) досить взяти* $n = 3$; *тоді з цієї формули* $f(\frac{1}{2}) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2 2^3} + \frac{1}{5^2 2^5} = = 0,5 - 0,0139 + 0,00125 \approx 0,5 - 0,013 = 0,487$.

10) $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$

Розв'язок: $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2);\ f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} - - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ *(*),* $x \in [-1,1] \Rightarrow f(x) = f(0) + + \int\limits_0^x f'(u)du = \int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1}du = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\int\limits_0^x u^{2n+1}du = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$ *(**),* $x \in [-1,1]$ *– це ряд Маклорена, бо степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми. Розклад (**) справедливий , тоді і лише тоді, коли* $x \in [-1,1]$, *бо якщо* $x \in [-1,1]$, *то рівність (**) нами доведена, а оскільки радіус збіжності ряду, що стоїть справа в розкладі (*) рівний 1 і при інтегруванні степеневого ряду його радіус збіжності не змінюється, то радіус збіжності ряду, що стоїть справа в розкладі (**) теж рівний 1, тому при* $|x| > 1$ *цей ряд розбігається і розклад (**) не справедливий.*

11) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$

Розв'язок: $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \cdot \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)$. *Ці ряди збігаються абсолютно при* $|x| < 1$, *тому за теоремою Коші про добуток рядів* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, *де* $\forall n \geq 0:\ c_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}(-1)^{n-k}x^{n-k} =$

$= \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^n x^{n+1}\frac{1}{k+1} = (-1)^n x^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n+1}\right) = (-1)^n H_{n+1}x^{n+1}$,

тому $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = (-1)^n H_{n+1}x^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}H_n x^n$ *(*) – це ряд Маклорена функції* f, *бо степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми. Розклад (*) має місце, тоді і лише тоді, коли* $x \in (-1,1)$, *бо:*

а) якщо $x \in (-1,1)$, *то він доведений за теоремою Коші про добуток рядів;*

б) якщо $x = \pm 1$, то ряд , що стоїть справа в рівності (*) розбігаеться, бо його загальний член непрямує до 0. Звідси випливає, що ряд, який стоїть справа в рівності (*) розбігається при всіх $|x| \geq 1$, а отже при цих x розклад (*) не справедливий.

Приклад 3.4.2. *Функцію $f(x) = \ln x$ розкласти в ряд:*
а) Тейлора в околах точок $x_0 = 1$ та $x_0 = 3$;
б)за натуральними степенями дробу $\frac{x-1}{x+1}$.

Розв'язок:
а) Скористаємось розкладом $\ln(1+t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}$, *(*)* $t \in (-1, 1]$.

Нехай $x_0 = 1$. Зробимо заміну $t := x-1; x = 1+t,\ f(x) = \ln(1+t) = = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ (**) – це розклад в ряд Тейлора, бо степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми. Розклад (**) має місце, тоді і лише тоді, коли $t = x - 1 \in [-1, 1] \Leftrightarrow x \in (0, 2]$.

Нехай $x_0 = 3$. Зробимо заміну $t := x-3; x = 3+t,\ f(x) = \ln(3+t) = = \ln 3(1 + \frac{t}{3}) = \ln 3 + \ln(1 + \frac{t}{3}) = \ln 3 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{t}{3}\right)^n = \ln 3 + + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}(x-3)^n$ (***) – це розклад в ряд Тейлора, бо степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми. Розклад (**) має місце, тоді і лише тоді, коли $\frac{t}{3} = \frac{x-3}{3} \in (-1, 1] \Leftrightarrow x - 3 \in (-3, 3] \Leftrightarrow x \in (0, 6]$.

б) Покладемо $t := \frac{x-1}{x+1},\ x = \frac{1+t}{1-t},\ f(x) = \ln x = \ln\frac{1+t}{1-t} = \ln(1+t) - = \ln(1-t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - ... - \left(-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} - ...\right) = = 2\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + ...\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}t^{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$ цей розклад має місце, тоді і лише тоді, коли

$$\begin{cases} -1 < t \leq 1 \\ -1 < -t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow\ -1 < t = \frac{x-1}{x+1} < 1\ \Leftrightarrow\ x > 0.$$

Приклад 3.4.3. *Диференціюванням чи інтегруванням знайти суму ряду.*

1) $s(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

Розв'язок: *Радіус збіжності цього ряду $r = 1$. Теорема про диференціювання степеневого ряду каже, що на інтервалі збіжності сте-*

пеневий ряд можна почленно диференціювати, тому: $\forall x \in (-1,1)$: $s'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = |\text{сума геометричного ряду}| = \frac{1}{1-x} \Rightarrow$
$s(x) = s(0) + \int\limits_0^x s'(u)du = \int\limits_0^x \frac{du}{1-u} = -\ln|1-u|\Big|_0^x = -\ln|1-x| =$
$= -\ln(1-x)$ $(x \in (-1,1) \Rightarrow 1-x > 0)$, *причому ця рівність справедлива і при* $x = -1$, *отже,* $s(x) = -\ln(1-x), x \in [-1,1)$.

2) $s(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Розв'язок: $s(x) = x\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n)' \overset{(*)}{=} x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\right)' =$
$= x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = x(-1)\frac{1}{(1-x^2)}(-1) = \frac{x}{(1-x)^2}, x \in (-1,1)$. *В (*) ми скористались теоремою про диференціювання степеневого ряду, врахувавши, що радіус збіжності степеневого ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ *рівний 1.*

3) $s(x) := x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ...$

Розв'язок: $s'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$
$s(x) = s(0) + \int\limits_0^x s'(u)du = \int\limits_0^x \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} x, x \in (-1,1)$, *причому користуючись неперервністю* $\operatorname{arctg} x$ *та суми степеневого ряду на множині його збіжності, маємо, що отримана рівність справедлива тоді і лише тоді, коли* $x \in [-1,1]$.