

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Механіко-математичний факультет
кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики



«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник декана/директора
з навчальної роботи

Харитонов О.М.

» серпень 2022 року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ¹

Стохастичний аналіз для студентів

галузь знань	11 математика та статистика
спеціальність	112 статистика
освітній рівень	другий (магістр)
освітня програма	Прикладна та теоретична статистика
вид дисципліни	обов'язкова

Форма навчання	денна
Навчальний рік	2022/2023
Семестр	1 магістратури
Кількість кредитів ECTS	3
Мова викладання, навчання та оцінювання	українська
Форма заключного контролю	іспит

Викладачі: Мішура Юлія Степанівна, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Борисенко О.Д., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики.

Пролоновано: на 20__/20__ н.р. _____ (_____) «__» _____ 20__ р.
на 20__/20__ н.р. _____ (_____) «__» _____ 20__ р.

КИЇВ - 2022

¹ Робоча програма навчальної дисципліни є нормативним документом вищого навчального закладу і містить виклад конкретного змісту навчальної дисципліни, послідовність, організаційні форми її вивчення та їх обсяг, визначає форми та засоби поточного і підсумкового контролю.

Розробники²: Мішура Юлія Степанівна, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Борисенко Олександр Данилович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики.

З А Т В Е Р Д Ж Е Н О

Зав. кафедри *теор. ймовірн.*
статистики та актуар. математики
Мішура (Мішура Ю.С.)

Протокол № 1 від «30» 08 2022 року

Схвалено науково - методичною комісією механіко-математичного факультету

Протокол від «31» 08 2022 року № 1

Голова науково-методичної комісії *Олійник* (проф. Олійник А.С.)

«31» 08 2022 року

² Розробляється лектором. Робоча програма навчальної дисципліни розглядається на засіданні кафедри (циклової комісії – для коледжів), науково-методичної комісії факультету/інституту (раді навчального закладу - коледжу), підписується завідувачем кафедри (головою циклової комісії), головою науково-методичної комісії факультету/інституту (головою ради) і затверджується заступником декана/директора інституту з навчальної роботи (заступником директора коледжу).

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Стохастичний аналіз» є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем «магістр» у галузі знань 11 «Математика та статистика» зі спеціальності 112 «Статистика» освітньої програми «Прикладна та теоретична статистика».

Дана освітня компонента є обов'язковою.

Викладається у 1 семестрі магістратури в обсязі 90 год. (3 кредити ECTS³), в тому числі 20 годин лекцій, 8 годин практичних занять, 2 години консультацій та 60 години самостійної роботи. У курсі передбачено 2 змістових модуля та 2 модульні контрольні роботи. Завершується дисципліна – іспитом.

1. Мета дисципліни - вивчення студентами теорії стохастичних інтегралів та теорії стохастичних диференціальних рівнянь.

2. Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни: базові поняття з теорії міри, теорії ймовірностей, теорії диференціальних рівнянь.

3. Анотація навчальної дисципліни:

«Стохастичний аналіз» включає в себе такі поняття.

Означення та основні властивості вінерівського процесу, квадратично інтегрованого мартингалу з неперервним часом та квадратичної характеристики. Основні максимальні нерівності для квадратично інтегрованих мартингалів. Нерівності Буркхолдера-Девіса-Ганді. Простори квадратично інтегрованих мартингалів як гільбертові. Збіжність в цих просторах. Розклад Куніта квадратично інтегрованих мартингалів на ортогональні компоненти. Побудова стохастичного інтегралу від простої функції за вінерівським процесом. Основні властивості побудованого інтеграла. Розповсюдження поняття стохастичного інтеграла на передбачувані квадратично інтегровані функції. Основні властивості побудованих інтегралів. Побудова стохастичного інтегралу від простої функції за квадратично інтегрованим мартингалом. Основні властивості побудованого інтеграла. Порівняння стохастичного інтеграла Іто та інтеграла Стратоновича. Формула Іто в одновимірному випадку. Формула Іто в багатовимірному випадку. Поняття стохастичного диференціального рівняння. Існування та єдність розв'язку за умови ліпшицевості коефіцієнтів. Слабкі та сильні розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь. Визначення дифузії Іто. Марківська та строго марківська властивість. Генератор дифузії. Формула Динкіна. Теорема Леві для вінерівського процесу та квадратично інтегрованого мартингалу. Формула Фейнмана – Каца та її застосування. Рекурентні та транзієнтні дифузійні процеси. Локальний час. Параметр експоненційного розподілу локального часу. Диференційованість розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь за початковими даними. Граничні задачі для

³ кредитів ECTS – кредит кратний 30 годинам.

дифузійних процесів. Абсолютна неперервність мір, що відповідають дифузійним процесам. Прямі та обернені рівняння Колмогорова для перехідних ймовірностей дифузійних процесів. Однорідні дифузійні процеси. Властивості траєкторій. Стохастичні диференціальні рівняння з локально ліпшицевими коефіцієнтами. Сингулярні стохастичні диференціальні рівняння. Теорема Гірсанова для вінерівського процесу. Умова Новікова.

4. Завдання (навчальні цілі): формування здатності розв'язувати складні спеціалізовані математичні та статистичні задачі, що характеризується комплексністю і невизначеністю умов і передбачає застосування теоретико-ймовірнісних і статистичних методів; набуття знань, умінь та навичок (компетентностей) на рівні новітніх досягнень у математиці та статистиці, відповідно до освітнього рівня «Магістр». Зокрема, професійне оволодіння компетентностями:

- 1) здатність учитися, здобувати нові знання, уміння, у тому числі в галузях, відмінних від статистики (ЗК-1);
- 2) здатність використовувати у професійній діяльності знання з галузей математичних, природничих, соціально-гуманітарних та економічних наук (ЗК-2);
- 3) здатність вирішувати проблеми у професійній діяльності на основі абстрактного мислення, аналізу, синтезу та прогнозу (ЗК-3);
- 4) здатність до пошуку, оброблення й аналізу інформації з різних джерел, необхідної для розв'язування наукових і професійних завдань (ЗК-4);
- 5) здатність генерувати нові ідеї (ЗК-5);
- 6) спілкуватися державною мовою і усно, і письмово (ЗК-8);
- 7) грамотно будувати комунікацію, виходячи з мети і ситуації спілкування (ЗК-10);
- 8) критично оцінювати та переосмислювати власний і чужий досвід, аналізувати свою професійну й соціальну діяльність (ЗК-11).
- 9) Знання на рівні новітніх досягнень, необхідні для дослідницької та інноваційної діяльності у сфері статистики та її практичних застосувань (ФК-1);
- 10) спроможність розуміти проблеми та виділяти їхні суттєві риси (ФК-4).
- 11) спроможність розробляти математичну модель ситуації з реального світу та переносити математичні знання у нематематичні контексти (ФК-5);
- 12) здатність доводити знання та власні висновки до фахівців та нефахівців (ФК-6);
- 13) здатність до розвитку нових та удосконалення існуючих статистичних методів аналізу, моделювання, прогнозування, розв'язування нових проблем у нових галузях знань. (ФК-8);
- 14) Здатність до самоосвіти та підвищення кваліфікації на основі інноваційних підходів у сфері статистики (ФК-10).

5. Результати навчання за дисципліною:

Результат навчання (1, знати; 2, вміти; 3, комунікація; 4, автономність та відповідальність)		Форми (та/або методи і технології) викладання і навчання	Методи оцінювання та пороговий критерій оцінювання (за необхідності)	Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни
Код	Результат навчання			
PH 1.1	Знати означення та основні властивості вінерівського процесу, квадратично інтегрованого мартингалу з неперервним часом та квадратичної характеристики. Основні максимальні нерівності для квадратично інтегрованих мартингалів. Нерівності Буркхолдера-Девіса-Ганді. Простори квадратично інтегрованих мартингалів як гільбертові. Збіжність в цих просторах. Розклад Куніта квадратично інтегрованих мартингалів на ортогональні компоненти.	<i>Лекція, практичне заняття</i>	<i>Іспит, письмові модульні контрольні роботи, оцінювання роботи на практичних заняттях, оцінювання виконання завдань для самостійної роботи</i>	5%
PH 1.2	Знати побудову стохастичного інтегралу від простої функції за вінерівським процесом. Основні властивості побудованого інтеграла. Розповсюдження поняття стохастичного інтеграла на передбачувані квадратично інтегровані функції. Основні властивості побудованих інтегралів. Побудова стохастичного інтегралу від простої функції за квадратично інтегрованим мартингалом. Основні властивості побудованого інтеграла.			5%
PH 1.3	Знати порівняння стохастичного інтеграла Іто та інтеграла Стратоновича. Формула Іто в одновимірному випадку. Формула Іто в багатовимірному випадку.			10%

PH 1.4	Знати поняття стохастичного диференціального рівняння. Існування та єдиність розв'язку за умови ліпшицевості коефіцієнтів. Слабкі та сильні розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь. Визначення дифузії Іто.			10%
PH 1.5	Знати: марківська та строго марківська властивість. Генератор дифузії. Формула Динкіна. Теорема Леві для вінерівського процесу та квадратично інтегрованого мартингалу. Формула Фейнмана – Каца та її застосування. Рекурентні та транзйентні дифузійні процеси. Локальний час. Параметр експоненційного розподілу локального часу. Диференційованість розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь за початковими даними.			10%
PH 2.1	Вміти застосовувати формулу Іто.	<i>Практичне заняття, самостійна робота</i>	<i>Контрольна робота 1 (60% правильних відповідей), розв'язання задач на практичних заняттях іспит, виконання завдань, винесених на самостійну роботу</i>	20%
PH 2.2	Вміти визначати чи є даний процес розв'язком даного стохастичного диференціального рівняння.			25%
PH 2.3	Вміти застосовувати властивості стохастичних інтегралів	<i>Практичне заняття, самостійна робота</i>	<i>Контрольна робота 2 (60% правильних відповідей), розв'язання задач на практичних заняттях іспит, виконання завдань, винесених на самостійну роботу</i>	5%
PH 3.1	Здатність грамотно будувати комунікацію, виходячи з мети і ситуації спілкування	<i>Практичне заняття</i>	<i>активна робота практичних заняттях, усні відповіді</i>	2.5%
PH 3.2	Вироблення навиків командної роботи	<i>Практичне заняття</i>	<i>активна робота практичних заняттях, усні відповіді</i>	2.5%

РН 4.1	Демонстрація авторитетності, інноваційність, високий ступінь самостійності, академічна та професійна добросесність, послідовна відданість розвитку нових ідей або процесів у передових контекстах професійної та наукової діяльності.	<i>Практичне заняття, самостійна робота</i>	<i>Іспит, письмові модульні контрольні роботи, оцінювання роботи на практичних заняттях, оцінювання виконання завдань для самостійної роботи</i>	2.5%
РН 4.2	Відповідально ставитися до виконуваних робіт, нести відповідальність за їх якість			2.5%

6. Співвідношення результатів навчання дисципліни із програмними результатами навчання

Результати навчання дисципліни	Р Н 1 · 1	Р Н 1 · 2	Р Н 1 · 3	Р Н 1 · 4	Р Н 1 · 5	Р Н 2 · 1	Р Н 2 · 2	Р Н 2 · 3	Р Н 3 · 1	Р Н 3 · 2	Р Н 4 · 1	Р Н 4 · 2
Програмні результати навчання												
ПРН-1 - Знати та розуміти фундаментальні і прикладні аспекти наук у сфері статистики	+	+	+	+	+							
ПРН-2 - Відтворювати знання фундаментальних розділів статистики в обсязі, необхідному для володіння математичним та економічним апаратами відповідної галузі знань і використання статистичних методів у обраній професії	+	+	+	+	+	+	+	+			+	
ПРН-3 - Володіти основами математичних дисциплін і економічних теорій, зокрема які вивчають моделі природничих і соціальних процесів	+	+	+	+	+	+	+	+				
ПРН-5 - Уміти використовувати фундаментальні закономірності статистики у професійній діяльності						+	+	+	+	+	+	+
ПРН-6 - Читати і розуміти фундаментальні розділи математичної та економічної літератури та демонструвати майстерність їх відтворення в аргументованій усній та/або письмовій доповіді	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	
ПРН-7 - Доносити професійні знання, власні обґрунтування і висновки до фахівців і широкого загалу	+	+	+	+	+				+	+	+	+
ПРН-12 - Бути наполегливим у досягненні мети під час вирішення математичної проблеми	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	
ПРН-14 - Усно й письмово спілкуватися рідною та англійською мовами в науковій, виробничій та соціально-суспільній сферах діяльності із професійних питань; читати спеціальну	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

літературу; знаходити, аналізувати та використовувати інформацію з різних довідкових джерел																				
ПРН-15 - Використовувати раціональні способи пошуку та використання науково-технічної інформації в галузі статистики, включаючи засоби електронних інформаційних мереж; застосовувати інформаційні ресурси, у тому числі електронні, для пошуку відповідних математичних моделей	+	+	+	+	+	+	+	+											+	+

7. Схема формування оцінки

7.1. Форми оцінювання студентів:

- оцінювання впродовж навчального періоду:

1. *Активна робота на лекції, усні відповіді:* РН1.1,РН1.2,РН1.3, РН1.4, РН1.5, РН2.1, РН2.2, РН2.3, РН3.1, РН3.2, РН4.1, РН4.2 – 18 балів/11 балів;
 2. *Виконання завдань, винесених на самостійну роботу:* РН2.1, РН2.2, РН2.3, РН4.1, РН4.2 – 6 балів/3 балів;
 3. *Контрольна робота 1:* РН1.1, РН1.2, РН2.1 – 12 балів/7 балів;
 4. *Контрольна робота 2:* РН1.3, РН1.4, РН1.5, РН2.2 – 9 балів/5 балів;
 6. *Розв'язання задач на практичних заняттях:* РН2.1, РН2.2, РН3.1, РН3.2, РН4.1, РН4.2 – 15 балів/9 балів;
- Разом: 60/35*

підсумкове оцінювання (у формі іспиту/заліку): форма іспиту – письмово-усна.

Екзаменаційний білет іспиту містить 3 теоретичні питання - 0-5 балів за кожне, 2 задачі –0-10 балів за кожну. Усна відповідь – 0-5 балів

Всього – максимум 40 балів

- *результати навчання, які будуть оцінюватись:* РН1.1, РН1.2, РН1.3, РН1.4, РН1.5, РН2.1, РН2.2, РН2.3.

- **умови допуску до підсумкового іспиту:** умовою допуску до іспиту є отримання студентом сумарно не менше, аніж *критично-розрахунковий мінімум 35 балів* за семестр. Студенти, які протягом семестру набрали сумарно меншу кількість балів, ніж критично-розрахунковий мінімум 35 балів, для одержання допуску до іспиту обов'язково повинні написати на необхідну порогову кількість балів додаткову контрольну роботу за матеріалом відповідного семестру та доскладають домашні завдання для підвищення балів за виконання самостійної роботи.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі форм контролю здійснюються у відповідності до „Положення про організацію освітнього процесу в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка” (2022),

https://www.knu.ua/pdfs/official/Polozhennia-pro-organizatsiyu-osvitniogo-procesu-1_04_2022.pdf

Організація оцінювання (обов'язково зазначається порядок організації передбачених робочою навчальною програмою форм оцінювання із зазначенням орієнтованого графіку оцінювання):

Оцінювання за формами контролю:

	ЗМ1		ЗМ2	
	<i>Min. – балів</i>	<i>Max. – балів</i>	<i>Min. – балів</i>	<i>Max. – балів</i>
Активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи	11	19	12	20
Модульна контрольна робота 1	7	12		
Модульна контрольна робота 2			5	9

Орієнтований графік оцінювання:

	<i>Орієнтовний період для здійснення відповідної форма оцінювання</i>
Модульна контрольна робота 1	жовтень
Модульна контрольна робота 2	кінець листопада-початок грудня
Активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи	середина грудня
Добір балів/додаткова контрольна робота/доскладання домашніх завдань	грудень
Іспит	друга половина грудня

Розрахунок балів, які студент отримує при успішній здачі іспиту:

	Змістовий модуль 1	Змістовий модуль 2	іспит / залік	Підсумкова оцінка
<i>Мінімум</i>	18	17	25	60
Максимум	31	29	40	100

7.3. Шкала відповідності оцінок

Оцінка (за національною шкалою) / National grade	Рівень досягнень, % / Marks, %
Відмінно / Excellent	90-100%
Добре / Good	75-89%
Задовільно / Satisfactory	60-74%
Незадовільно / Fail	0-59%

8. Структура навчальної дисципліни. Тематичний план лекційних занять

№ п/п	Назва теми	Кількість годин		
		лекції	практичні	С/Р
Змістовий модуль 1. Теорія стохастичних інтегралів				
1	Означення та основні властивості вінерівського процесу, квадратично інтегрованого мартингалу з неперервним часом та квадратичної характеристики	2		5
2	Основні максимальні нерівності для квадратично інтегрованих мартингалів. Нерівності Буркхолдера-Девіса-Ганді. Простори квадратично інтегрованих мартингалів як гільбертові. Збіжність в цих просторах.	2	2	10
3	Розклад Куніта квадратично інтегрованих мартингалів на ортогональні компоненти. Побудова стохастичного інтегралу від простої функції за вінерівським процесом. Основні властивості побудованого інтеграла. Розповсюдження поняття стохастичного інтеграла на передбачувані квадратично інтегровані функції. Основні властивості побудованих інтегралів.	4	2	10
4	Побудова стохастичного інтегралу від простої функції за квадратично інтегрованим мартингалом. Основні властивості побудованого інтеграла. Порівняння стохастичного інтеграла Іто та інтеграла Стратоновича. Формула Іто в одновимірному випадку. Формула Іто в багатовимірному випадку.	2		5
	<i>Модульна контрольна робота 1</i>	2		
Змістовий модуль 2. Теорія стохастичних диференціальних рівнянь				
5	Поняття стохастичного диференціального рівняння. Існування та єдність розв'язку за умови ліпшицевості коефіцієнтів. Слабкі та сильні розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь. Визначення дифузії Іто. Марківська та строго марківська властивість.	2	1	5
6	Генератор дифузії. Формула Динкіна. Теорема Леві для вінерівського процесу та квадратично інтегрованого мартингалу. Формула Фейнмана – Каца та її застосування.	2	1	8
7	Рекурентні та транзйентні дифузійні процеси. Локальний час. Параметр експоненційного розподілу локального часу. Диференційованість розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь за початковими даними. Граничні задачі для дифузійних процесів.	2	1	7
8	Абсолютна неперервність мір, що відповідають дифузійним процесам. Прямі та обернені рівняння Колмогорова для перехідних ймовірностей дифузійних процесів. Однорідні дифузійні процеси. Властивості траєкторій.	2	1	5
9	Стохастичні диференціальні рівняння з локально ліпшицевими коефіцієнтами. Сингулярні стохастичні	2		5

	диференціальні рівняння. Теорема Гірсанова для вінерівського процесу. Умова Новікова.			
	Модульна контрольна робота 2	2		
	ВСЬОГО	20	8	60

Загальний обсяг **90 год**, в тому числі:

Лекцій – **20 год**.

Практичні – **8 год**.

Самостійна робота – **60 год**.

Консультації – **2 год**.

9. Рекомендовані джерела:

Основні: (Базові)

1. Ю.С. Мішура, К.В. Ральченко, Л. М. Сахно, Г.М. Шевченко "Випадкові процеси. Теорія. Статистика. Застосування". Видавничо-редакційний центр Київського національного університету імені Тараса Шевченка, - 2019
2. Alexander A. Gushchin. Stochastic Calculus for Quantitative Finance, Elsevier. 2015
3. Giuseppe Da Prato. Introduction to Stochastic Analysis and Malliavin Calculus, Edizioni della Normale. 2014
4. Hiroyuki Matsumoto, Taniguchi Setsuo. Stochastic Analysis, Cambridge University Press. 2016.

Додаткові:

1. R. Schilling, L. Partzsch, B. Böttcher Brownian Motion: An Introduction to Stochastic Processes (De Gruyter Textbook). 2012.
2. Ph. Protter. Stochastic Integration and Differential Equations. Springer, 2008.
3. Yu. Mishura, M. Zili "Stochastic Analysis of Mixed Fractional Gaussian Processes". ISTE Press - Elsevier, 210 p. - 2018
4. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика. К. : ВПЦ «Київський університет», 2007.