XXVII Всеукраїнська заочна математична олімпіада “5–12”

Цього року було проведено двадцять сьому Всеукраїнську заочну математичну олімпіаду “5–12”. В ній міг взяти участь кожен учень 5–12 класів. Переможцями та призерами олімпіади стали:

I місце

Липницький Владислав (м. Київ, 8 клас)

II місце

Педченко Дарина (м. Миронівка, Київська обл., 11 клас)
Дугіна Юстина (м. Львів, 8 клас)

III місце

Сауров Максим (м. Ромни, Сумська обл., 9 клас)
Сезько Максим (м. Дніпро, 1 курс коледжу)
Уварова Аліса (м. Київ, 9 клас)
Забігайло Володимир (м. Київ, 9 клас)

Вітаємо всіх переможців та призерів олімпіади з їх досягненнями, які для когось були першими, і, сподіваємося, не останніми!

Тепер нагадаємо умови та наведемо розв’язки задач олімпіади.

1. На емблемі олімпіади (рис. 1) зображено квадрати розміру 5×5 та 12×12, розрізані на куточки (одиничні квадратики теж вважаються куточками). Чи можна з усіх утворених куточків скласти один квадрат?

Розв’язання. Один з можливих способів показано на рис. 2.

Відповідь: так.

Рис. 1.

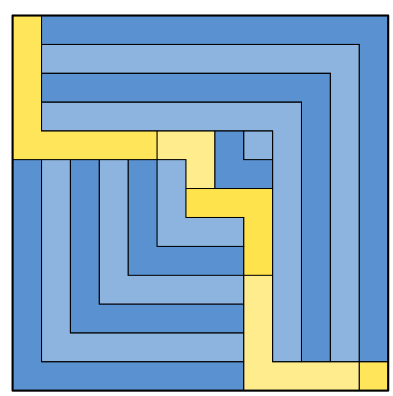

Рис. 2.

2. Назвемо натуральне число три-віальним, якщо різниця деяких двох його дільників дорівнює 3. Чи правда, що серед чисел від 1 до 2023 більше половини три-віальних?

Розв’язання. У кожного три-віального числа є парний та непарний дільники. Тому всі ці числа парні та серед чисел від 1 до 2023 їх менше половини.

Відповідь: ні.

3. Декілька дівчат збирали у лісі чорницю та брусницю. Кожна дівчина зібрала 4 кг ягід. Марічка зібрала 1/6 усієї чорниці та 1/8 усієї брусниці. Скільки чорниці та скільки брусниці зібрали всі дівчата разом?

Розв'язання. Марічка зібрала більше, ніж 1/8, але менше, ніж 1/6 від усіх ягід. Оскільки всі дівчата зібрали ягід порівну, це означає, що вона зібрала 1/7 від усіх ягід. Отже, дівчат було сім та разом вони зібрали 28 кг ягід. Нехай Марічка зібрала x кг чорниці та $4-x$ кг брусниці. Тоді дівчата зібрали $6x$ кг чорниці та $8(4-x)$ кг брусниці. Таким чином, $6x+8(4-x)=28$, звідки $x=2$, $6x=12$ та $8(4-x)=16$.

Відповідь: 12 кг чорниці та 16 кг брусниці.

4. На озері 99 островів. На кожен острів прилетіли дві чаплі, а потім щодня з деякого острова, на якому найбільша парна кількість чапель, половина чапель перелітала на інший острів. Яка найбільша кількість чапель могла одночасно опинитися на одному острові?

Розв'язання. На кожному острові завжди залишається хоча б одна чапля, тому більше 100 чапель зібратися разом не можуть. Після першого дня на деякому острові A три чаплі, на одному острові одна чапля та на 97 островах по дві чаплі. Покажемо, що кількість чапель на острові A можна збільшувати, поки островів із двома чаплями принаймні три. Нехай на острові A непарна кількість чапель, на островах B, C, D по дві чаплі, а на решті островів одна або дві чаплі. Якщо одна чапля перелетить з B на D, потім одна чапля з C на D, а потім дві чаплі з D на A, то на острові A стане на дві чаплі більше, тобто їхня кількість залишиться непарною, а на решті островів залишиться по одній або по дві чаплі, проте островів із двома чаплями стане на два менше. Так може тривати, поки на острові A не опиниться 99 чапель, на одному острові дві чаплі та на 97 островах по одній чаплі. Після цього ще одна чапля перелетить на острів A і там стане 100 чапель.

Відповідь: 100 чапель.

5. Чи можна розташувати натуральні числа від 1 до 49 так, аби добуток кожних двох сусідніх чисел був на 1 менше за квадрат деякого натурального числа?

Розв'язання. Достатньо розташувати числа таким чином: $2, 4, 6, \ldots, 46, 48, 1, 3, 5, \ldots, 47, 49$.

Відповідь: так.

6. Основи висот трикутника ABC є вершинами рівнобедреного трикутника. Чи обов'язково трикутник ABC рівнобедрений?

Розв'язання. Нехай HBC — гострокутний трикутник, в якому $HB=BC\neq HC$, та A — точка перетину його висот HD, BE і CF (рис. 3). Тоді трикутник ABC не є рівнобедреним, а основи його висот AD, BF та CE є вершинами рівнобедреного трикутника.

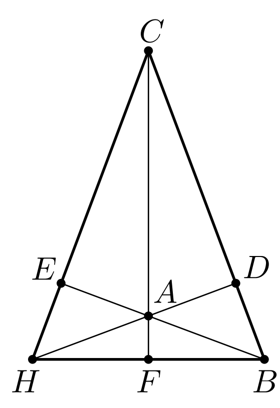

Рис. 3.

Відповідь: не обов'язково.

7. Петрик та Дмитрик по черзі називають натуральні числа так, що кожне наступне число менше за попереднє. Перше число називає Петрик. Гра закінчується, коли хтось назве число 1. Після цього якщо сума всіх названих під час гри чисел є повним квадратом, то виграє той, хто назвав 1, а інакше виграє його суперник. Які числа може назвати Петрик своїм першим ходом, аби після цього мати виграшну стратегію?

Розв'язання. Якщо Петрик першим ходом називає 1 або 2, то він очевидно виграє. Якщо Петрик першим ходом називає число $n > 2$, яке не є меншим на 3 за повний квадрат, то Дмитрик може назвати 2, далі Петрик назве 1 та програє. Нехай Петрик першим ходом назвав число $k^2 - 3$, де $k \geq 3$. Якщо $k \geq 4$, то $2k + 1 < k^2 - 3$. Дмитрик може назвати число $2k + 1$ і сума названих чисел стане рівною $(k+1)^2 - 3$. Тепер якщо Петрик назве число 1 або 2, то він одразу програє. При будь-якому іншому його ході сума названих чисел стає більшою за $(k+1)^2 - 3$ та меншою за $(k+2)^2 - 3$. Далі Дмитрик назве 2, Петрик назве 1 та програє. Залишилося окремо розглянути випадок, коли Петрик першим ходом називає число 6. Якщо Дмитрик називає 1 або 2, Петрик одразу виграє. Якщо Дмитрик називає число від 3 до 5, то утворюється сума від 9 до 11. Далі Петрик називає 2 та виграє.

Відповідь: 1, 2 або 6.

8. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC відмітили точку D, а всередині трикутника точку E так, що $AE = BE = BC = CD$. Довести, що $\angle BED = 90°$.

Розв'язання. Нехай K — середина BD (рис. 4). Тоді CK — медіана рівнобедреного трикутника BCD, отже $CK \perp AB$. Оскільки CK — висота прямокутного трикутника ABC, то $BK \cdot BA = BC^2 = BE^2$. Отже, $BA/BE = BE/BK$ та трикутники ABE і EBK подібні за двома сторонами та кутом між ними. Звідси $EK = KB$, тобто точка E лежить на колі з діаметром BD та $\angle BED = 90°$.

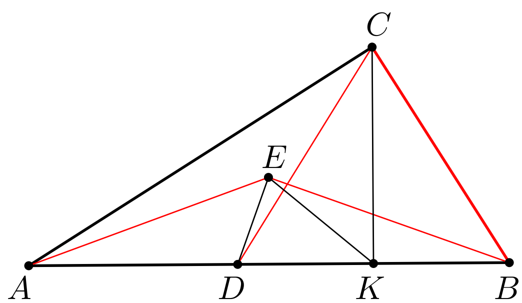

Рис. 4.

9. Про додатні числа a, b, c, d, e відомо, що $b + c + d + e = 15a$. Довести, що

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a+b} + \frac{d}{a+b+c} + \frac{e}{a+b+c+d} \geq 4.$$

Розв'язання. За нерівністю Коші

$$\frac{b}{a}+1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{d}{a+b+c} + 1 + \frac{e}{a+b+c+d} + 1 =$$
$$= \frac{a+b}{a} + \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c+d}{a+b+c} + \frac{a+b+c+d+e}{a+b+c+d} \geq 4\sqrt[4]{\frac{a+b+c+d+e}{a}} = 8.$$

10. Кожен з квадратних многочленів P, Q та R має старший коефіцієнт 1. Знайти ці многочлени, якщо

$$P(Q(x)) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7) \text{ та } Q(R(x)) = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)$$

при всіх дійсних значеннях x.

Розв'язання. Многочлен Q набуває лише два значення при $x=1$, $x=3$, $x=5$ та $x=7$, тому його графік має вісь симетрії $x=4$. Звідси $Q(x)=(x-4)^2+a$ при деякому a. Многочлен P набуває значення 0 при $x=Q(1)=a+9$ та $x=Q(3)=a+1$, тому $P(x)=(x-a-9)(x-a-1)=(x-a-5)^2-16$. Аналогічно $R(x)=(x+4)^2+b$ при деякому b та $Q(x)=(x-b-1)(x-b-9)=(x-b-5)^2-16$. Звідси $(x-4)^2+a=(x-b-5)^2-16$, а тому $4=b+5$, тобто $b=-1$, та $a=-16$. Остаточно $P(x)=(x+11)^2-16=x^2+22x+105$, $Q(x)=(x-4)^2-16=x^2-8x$ та $R(x)=(x+4)^2-1=x^2+8x+15$.

Відповідь: $P(x)=x^2+22x+105$, $Q(x)=x^2-8x$ та $R(x)=x^2+8x+15$.

11. Нехай M та N — середини сторін AD та BC чотирикутника $ABCD$, в якому $AD \nparallel BC$. Пряма MN перетинає діагоналі AC та BD у точках K та L відповідно. Довести, що описані кола трикутників AKM та BNL мають спільну точку, яка належить прямій AB.

Розв'язання. Нехай P — середина AB та Q — друга точка перетину описаного кола трикутника MNP з прямою AB (якщо коло дотикається до AB, то Q збігається з P). Покажемо, що описані кола трикутників AKM та BNL проходять через точку Q. Нехай для визначеності Q лежить між A та P (рис. 5), інші випадки розглядаються аналогічно. Оскільки $PN \parallel AC$, то $\angle QAK = \angle BPN = 180^\circ - \angle NPQ = \angle QMK$. Аналогічно оскільки $PM \parallel BD$, то $\angle QBL = \angle QPM = \angle QNL$, що завершує доведення.

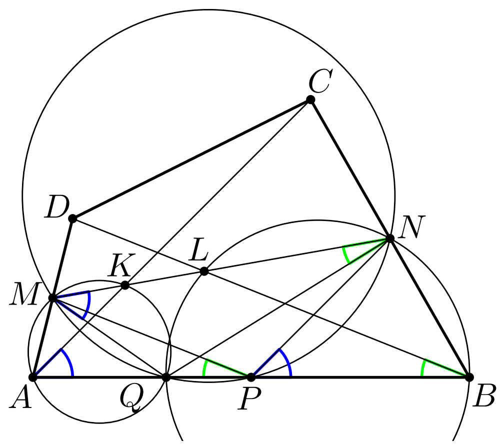

Рис. 5.

12. Знайти всі натуральні числа N з такою властивістю: для будь-яких натуральних дільників a та b числа N якщо НСД$(a,b)=1$, то $a+b-1$ теж є дільником N.

Розв'язання. Зрозуміло, що $N=1$ та $N=p^k$, де p — просте число та $k \geq 1$, задовольняють умову. Надалі будемо вважати, що N має принаймні два прості дільники.

Нехай p — найменший простий дільник числа N та $N=p^kM$, де $k\geq 1$ та $M>1$ не ділиться на p. За умовою $p+M-1$ має бути дільником N, більшим за p. Всі прості дільники числа M більші за p, тому $p+M-1$ не ділиться на жоден з цих дільників. Отже, $p+M-1=p^j$, де $j>1$, а тому N ділиться принаймні на p^2. За умовою p^2+M-1

має бути дільником N, більшим за p^2. Оскільки $p^2 + M - 1 = (p + M - 1) + p^2 - p$ не ділиться на p^2, то $p^2 + M - 1$ має спільний простий дільник з M. Це означає, що $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ має простий дільник, більший за p. Звідси $p+1$ — просте число, тобто $p = 2$ та $p + 1 = 3$. Таким чином, $M + 3$ є дільником $2^k M$ та не ділиться на 4. Тому $M + 3$ є дільником $2M = (2M + 6) - 6$. Звідси $M + 3 = 6$ та $M = 3$. Отже, $N = 2^k \cdot 3$, де $k \geq 2$. Якщо $k \geq 3$, то N має ділитися на $8 + 3 - 1 = 10$, а це не так. При $k = 2$ дістаємо $N = 12$. Залишається перевірити, що це число задовольняє умову, тобто при всіх $a \in \{1, 2, 4\}$ та $b \in \{1, 3\}$ число $a + b - 1$ є дільником 12.

Відповідь: 1, 12 або p^k, де p — просте число та $k \geq 1$.