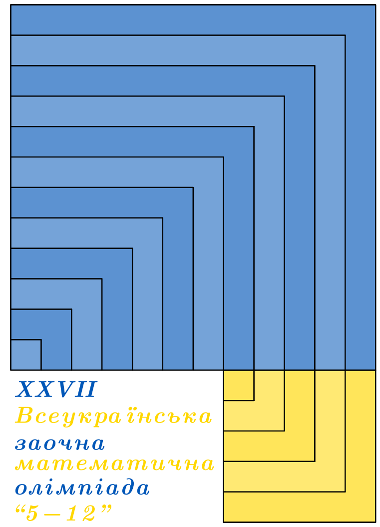
XXVII Всеукраїнська заочна математична олімпіада “5–12”



В олімпіаді може взяти участь кожен учень 5 – 12 класів. Наполегливо радимо потренуватися та випробувати свої здібності всім претендентам на участь в обласних та Всеукраїнській олімпіадах, а також відбіркових змаганнях на Міжнародну математичну олімпіаду.

Розв’язання задач слід надсилати до 25 лютого 2023 року (за поштовим штемпелем) на адресу

`01601 МСП, Київ,`
`Київський національний університет`
`імені Тараса Шевченка,`
`механіко-математичний факультет,`
`кафедра математичного аналізу,`
`‘‘Олімпіада 5-12’’`

або у відсканованому вигляді на електронну адресу `olymp5-12@ukr.net`.

Підсумки олімпіади буде підведено наприкінці березня на сайті

`http://www.mechmat.univ.kiev.ua` .

Умови задач

1. На емблемі олімпіади зображено квадрати розміру 5×5 та 12×12, розрізані на куточки (одиничні квадратики теж вважаються куточками). Чи можна з усіх утворених куточків скласти один квадрат?

2. Назвемо натуральне число три-віальним, якщо різниця деяких двох його дільників дорівнює 3. Чи правда, що серед чисел від 1 до 2023 більше половини три-віальних?

3. Декілька дівчат збирали у лісі чорницю та брусницю. Кожна дівчина зібрала 4 кг ягід. Марічка зібрала $1/6$ усієї чорниці та $1/8$ усієї брусниці. Скільки чорниці та скільки брусниці зібрали всі дівчата разом?

4. На озері 99 островів. На кожен острів прилетіли дві чаплі, а потім щодня з деякого острова, на якому найбільша парна кількість чапель, половина чапель перелітала на інший острів. Яка найбільша кількість чапель могла одночасно опинитися на одному острові?

5. Чи можна розташувати натуральні числа від 1 до 49 так, аби добуток кожних двох сусідніх чисел був на 1 менше за квадрат деякого натурального числа?

6. Основи висот трикутника ABC є вершинами рівнобедреного трикутника. Чи обов’язково трикутник ABC рівнобедрений?

7. Петрик та Дмитрик по черзі називають натуральні числа так, що кожне наступне число менше за попереднє. Перше число називає Петрик. Гра закінчується, коли хтось назве число 1. Після цього якщо сума всіх названих під час гри чисел є повним квадратом, то виграє той, хто назвав 1, а інакше виграє його суперник. Які числа може назвати Петрик своїм першим ходом, аби після цього мати виграшну стратегію?
8. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC відмітили точку D, а всередині трикутника точку E так, що $AE = BE = BC = CD$. Довести, що $\angle BED = 90°$.
9. Про додатні числа a, b, c, d, e відомо, що $b + c + d + e = 15a$. Довести, що

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a+b} + \frac{d}{a+b+c} + \frac{e}{a+b+c+d} \geq 4.$$

10. Кожен з квадратних многочленів P, Q та R має старший коефіцієнт 1. Знайти ці многочлени, якщо

$$P(Q(x)) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7) \text{ та } Q(R(x)) = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)$$

при всіх дійсних значеннях x.
11. Нехай M та N — середини сторін AD та BC чотирикутника $ABCD$, в якому $AD \nparallel BC$. Пряма MN перетинає діагоналі AC та BD у точках K та L відповідно. Довести, що описані кола трикутників AKM та BNL мають спільну точку, яка належить прямій AB.
12. Знайти всі натуральні числа N з такою властивістю: для будь-яких натуральних дільників a та b числа N якщо НСД$(a, b) = 1$, то $a + b - 1$ теж є дільником N.