

Завдання дистанційного туру олімпіади з математики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка

(для вступників 2023 року)

1. Чи буде число $2^{2023} + 3^{2023}$ ділитися на 5 націло? Відповідь обґрунтувати.

2. Обчислити площу фігури, заданої на координатній площині системою нерівностей

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 + 4y \leq -6, \\ x \leq 2 \end{cases}.$$

3. Розв'язати рівняння $2 - 3\sin 2x = 2\cos^2 x$.

4. Розв'язати рівняння в цілих числах $\sqrt{9 - |x|} = \log_2(|x| - 1)$.

5. Розв'язати нерівність $\log_2(x^2 - x) - 1 > 0$.

6. У рівнобічну трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписане коло. Задано відношення дожин сторін $BC : AD = 1 : 3$. Площа трапеції дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$. Знайти довжину сторони AB .

7. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 3^{-x} - 5 \cdot 3^{-y} = -2, \\ 3^{x+y} = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

8. У якому відношенні ділить об'єм куба площина, що проходить через центри трьох граней, які мають спільну вершину.

9. З'ясувати, скільки розв'язків має система рівнянь
$$\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$
 залежно від значень параметра a .