Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету

В.Б. Брайман

Чергове математичне змагання студентів Київського національного університету імені Тараса Шевченка було проведено онлайн 20 лютого 2023 року. Роботи із розв'язаннями задач надішли від студентів механіко-математичного факультету і факультету комп'ютерних наук та кібернетики КНУ імені Тараса Шевченка, НТУУ "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Українського Католицького Університету, Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка, Ягеллонського університету (Польща) та університету імені Бар-Ілана (Ізраїль).

Нижче ми наводимо прізвища переможців, умови та розв'язання задач.

Переможці олімпіади серед студентів 1–2 курсів

I місце

Любімов Олександр Мирославович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)

II місце

Колодач Яна Григорівна (ф-т кібернетики КНУ, 2 курс)
Логвін Максим Вікторович (ф-т математики і інформатики ХНУ, 2 курс)
Сусол Кароліна Андріївна (ф-т кібернетики КНУ, 2 курс)

III місце

Андрієць Семен Олександрович (Ягеллонський університет, 1 курс)
Кацав Ідо (університет імені Бар-Ілана, 2 курс)
Слісарчук Микита Миколайович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)
Чуйко Віктор Олексійович (мех-мат ф-т КНУ, 2 курс)

Переможці олімпіади серед студентів 3–4 курсів

I місце

Романус Ярослав Ігорович (ф-т прикладних наук УКУ, 3 курс)

II місце

Коваль Вадим Олегович (Ягеллонський університет, 3 курс)
Яалом Вайс Йоад (університет імені Бар-Ілана, 3 курс)

III місце

Левін Ілан (університет імені Бар-Ілана, 3 курс)

Завдання для 1–2 курсів

1. Нехай $f, g : (0,1] \to (0,+\infty)$ — рівномірно неперервні функції. Чи обов'язково функція f^g є рівномірно неперервною на $(0,1]$? (*О.Н. Нестеренко*)

2. Про матриці $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ відомо, що $A(x \times y) = Bx \times By$ для довільних векторів $x, y \in \mathbb{R}^3$ ($\times$ позначає векторний добуток). Знайти всі можливі значення добутку $A^T B$.

(*О.Б. Толесніков*)

3. Нехай a, b, c, d, e — невід'ємні дійсні числа. Довести, що рівняння

$$x^3 - (a + b + c + d + e)x^2 + (ab + bc + ac + ae + cd + de)x - abc = 0$$

має дійсний корінь, не менший за $\max(a, b, c)$. (*В.Б. Брайман*)

4. У гострокутному трикутнику ABC висота AH_1 та бісектриса BL_2 перетинаються у точці D, а висота BH_2 та бісектриса AL_1 — у точці E. Знайти кути $\angle A$ та $\angle B$, якщо $\angle C = 72^\circ$ та пряма DE проходить через вершину C. (*В.Б. Брайман*)

5. Нехай $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, — деяка перестановка. При $1 \leq i, j \leq n$ позначимо a_{ij} кількість чисел $1 \leq k \leq \min(i, j)$, для яких $\sigma(k) \geq \max(\sigma(i), \sigma(j))$. Знайти визначник матриці $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. (*В.Б. Брайман*)

6. Знайти найбільше $c > 0$ таке, що для всіх $n \geq 1$ та $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(x_i^3 - x_{i-1}^3) \geq \frac{c}{n}.$$

(*В.Б. Брайман*)

Завдання для 3–4 курсів

1. Нехай $\mathbb{R}[x]$ — кільце многочленів з дійсними коефіцієнтами, $\|\cdot\|$ — норма на $\mathbb{R}[x]$ така, що $\|P'\| \leq \|P\|$ при всіх $P \in \mathbb{R}[x]$. Довести, що $\|x(x+2023)^{2022}\| \geq \|(x+2023)^{2022}\|$.
(*В.Б. Брайман*)

2. Чи існують такі дійсні числа $a_{i,j,k}$, $i, j, k \in \mathbb{N}$, що

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j,k} = 1,\ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j,k} = 0,\ \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j,k} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j,k} = 0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j,k} = 0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j,k} = 0?$$

(*О.Б. Толесніков*)

3. Нехай f — борелева функція на $\mathbb{R}$, $g(x) = x - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, та (ξ, η) — випадковий вектор такий, що вектори (ξ, η) та $\big(f(\zeta), g(\zeta)\big)$, де $\zeta = \xi + \eta$, рівні за розподілом. Довести, що $(\xi, \eta) = \big(f(\zeta), g(\zeta)\big)$ майже напевно. (*О.Г. Кукуш*)

4. Нехай $k \geq 1$, $E \in M_{2k+1}(\mathbb{R})$ — одинична матриця та $\mathcal{C} = \{cE,\ c \in \mathbb{R}\}$. Про матриці $A, B \in M_{2k+1}(\mathbb{R})$ відомо, що $\{A^T A, B^T B, (A + B)^T (A + B)\} \subset \mathcal{C}$. Довести, що існують дійсні числа a, b такі, що $a^2 + b^2 \neq 0$ та $aA = bB$. (*О.В. Руденко*)

5. Див. задачу **5** для 1–2 курсів.

6. Див. задачу **6** для 1–2 курсів.

Розв'язання задач

Завдання для 1–2 курсів

1. Нехай $g(x) = x$, $x \in (0,1]$, а f є лінійною на відрізках вигляду $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $n \geq 1$, причому $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2^n}$, якщо n парне, та $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{3^n}$, якщо n непарне. Оскільки $f(\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, то $f(x) < x$ при $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $n \geq 1$. Отже, $0 < f(x) < x$ при всіх $x \in (0,1]$, звідки $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$. Покладемо $f(0) = 0$. Тоді $f \in C([0,1])$, а отже за теоремою Кантора f рівномірно неперервна на $[0,1]$. Покажемо, що функція $h = f^g$ не є рівномірно неперервною на $(0,1]$. Справді, $h(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$, якщо n парне, та $h(\frac{1}{n}) = \frac{1}{3}$, якщо n непарне. Отже, для $\varepsilon = \frac{1}{7}$ і довільного $\delta > 0$ існує таке $n \geq 1$, що $|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}| < \delta$ та $|h(\frac{1}{n}) - h(\frac{1}{n+1})| = \frac{1}{6} > \varepsilon$.

Відповідь: не обов'язково.

2. Нехай e_1, e_2, e_3 — стандартний базис в $\mathbb{R}^3$, $b_1 = Be_1$, $b_2 = Be_2$ та $b_3 = Be_3$. Тоді $Ae_1 = A(e_2 \times e_3) = b_2 \times b_3$, аналогічно $Ae_2 = b_3 \times b_1$ та $Ae_3 = b_1 \times b_2$. Отже, стовпчики матриці B це b_1, b_2 та b_3, а стовпчики матриці A це $b_2 \times b_3$, $b_3 \times b_1$ та $b_1 \times b_2$. Елементами матриці $A^T B$ є скалярні добутки стовпчиків матриць A та B, тому матриця $A^T B$ діагональна і кожен з елементів на її діагоналі дорівнює мішаному добутку (b_1, b_2, b_3). Отже, $A^T B = cE$, де E — одинична матриця та $c = \det B \in \mathbb{R}$. Залишається зауважити, що при кожному $c \in \mathbb{R}$ матриці $A = \sqrt[3]{c^2}E$ та $B = \sqrt[3]{c}E$ очевидно задовольняють умову і для них $A^T B = cE$.

Відповідь: cE, $c \in \mathbb{R}$.

3. Покладемо

$$\begin{aligned} P(x) =& x^3 - (a+b+c+d+e)x^2 + (ab+bc+ac+ae+cd+de)x - abc = \\ =& x(x-a-d)(x-c-e) - b(x-a)(x-c). \end{aligned}$$

При $m = \max(a+d, c+e)$ маємо $(m-a)(m-c) \geq 0$, тому $P(m) \leq 0$ та рівняння $P(x) = 0$ має дійсний корінь, не менший за m. Якщо $m \geq \max(a,b,c)$, це доводить твердження задачі. Нехай тепер $m = \max(a+d, c+e) < \max(a,b,c)$. Це означає, що $\max(a,b,c) = b$, причому $b > a+d$ та $b > c+e$. Тому $b - a \geq b - a - d > 0$, $b - c \geq b - c - e > 0$ та $P(b) = b(b-a-d)(b-c-e) - b(b-a)(b-c) \leq 0$. Отже, рівняння $P(x) = 0$ має дійсний корінь, не менший за b.

4. Нехай $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ та пряма DE перетинає сторону AB у точці K (рис. 1). За теоремою Чеви $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL_1}{L_1C} \cdot \frac{CH_2}{H_2A} = \frac{AK}{KB} \cdot \frac{BH_1}{H_1C} \cdot \frac{CL_2}{L_2A} = 1$. Оскільки $\frac{BL_1}{L_1C} = \frac{c}{b}$, $\frac{CH_2}{H_2A} = \frac{a\cos C}{c\cos A}$, $\frac{BH_1}{H_1C} = \frac{c\cos B}{b\cos C}$ та $\frac{CL_2}{L_2A} = \frac{a}{c}$, то $\frac{\cos C}{\cos A} = \frac{\cos B}{\cos C}$, або $\cos A \cdot \cos B = \cos^2 C$. Отже, $\cos(A-B) + \cos(A+B) = 1 + \cos 2C$. Оскільки $C = \frac{2\pi}{5}$ та $A + B = \frac{3\pi}{5}$, то

$$\begin{aligned} \cos(A-B) =& 1 + \cos\tfrac{4\pi}{5} - \cos\tfrac{3\pi}{5} = 1 + \cos\tfrac{4\pi}{5} + \cos\tfrac{2\pi}{5} = \\ =& \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(e^{4\pi i/5} + e^{2\pi i/5} + 1 + e^{-2\pi i/5} + e^{-4\pi i/5}) = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким чином, $|A-B| = \frac{\pi}{3}$ та $A + B = \frac{3\pi}{5}$, звідки $A = \frac{7\pi}{15}$, $B = \frac{2\pi}{15}$ або навпаки.

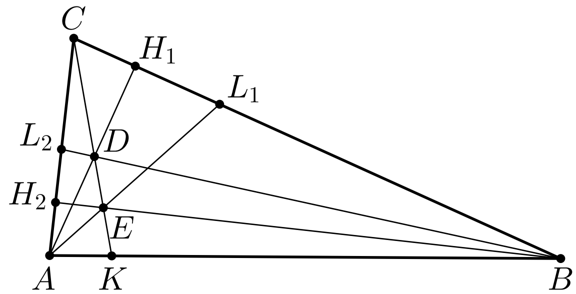

Рис. 1.

Відповідь: $\angle A = 84^\circ$, $\angle B = 24^\circ$ або $\angle A = 24^\circ$, $\angle B = 84^\circ$.

5. Розглянемо матрицю $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, де

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & i \le j \text{ та } \sigma(i) \ge \sigma(j), \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases}$$

При всіх $1 \le i, j \le n$ маємо $a_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ki} b_{kj}$, отже $A = B^T B$ та $\det A = (\det B)^2$. Оскільки B — верхньотрикутна матриця, то $\det B = \prod\limits_{i=1}^{n} b_{ii} = 1$, а тому і $\det A = 1$.

Відповідь: $\det A = 1$.

6. Враховуючи, що $a^2 + ab + b^2 \ge \frac{3}{4}(a+b)^2$ при всіх $a, b \ge 0$, а також нерівність між середнім квадратичним та середнім арифметичним, дістаємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(x_i^3 - x_{i-1}^3) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 (x_i^2 + x_i x_{i-1} + x_{i-1}^2) \ge \\ &\ge \frac{3}{4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 (x_i + x_{i-1})^2 = \frac{3}{4} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_{i-1}^2)^2 \ge \\ &\ge \frac{3}{4n} \Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_{i-1}^2) \Big)^2 = \frac{3}{4n} (x_n^2 - x_0^2)^2 = \frac{3}{4n}. \end{aligned}$$

З іншого боку, при $x_i = \sqrt{\frac{i}{n}}$, $0 \le i \le n$, за теоремою Штольца маємо

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(x_i^3 - x_{i-1}^3) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \big(i^{1/2} - (i-1)^{1/2}\big)\big(i^{3/2} - (i-1)^{3/2}\big) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \big(n^{1/2} - (n-1)^{1/2}\big)\big(n^{3/2} - (n-1)^{3/2}\big) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\big(n - (n-1)\big)\big(n^3 - (n-1)^3\big)}{\big(n^{1/2} + (n-1)^{1/2}\big)\big(n^{3/2} + (n-1)^{3/2}\big)} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Отже, нерівність з умови задачі завжди правильна при $c = \frac{3}{4}$, а при $c > \frac{3}{4}$ для достатньо великих n та чисел $x_i = \sqrt{\frac{i}{n}}$, $0 \le i \le n$, виконується протилежна нерівність.

Відповідь: $c = \frac{3}{4}$.

Завдання для 3–4 курсів

1. Покладемо $P(x) = (x+2023)^{2023}$. Тоді

$$x(x+2023)^{2022} = P(x) - P'(x) \text{ та } (x+2023)^{2022} = \tfrac{1}{2023}P'(x).$$

Оскільки $\|P - P'\| \ge \|P' - P''\| \ge \ldots \ge \|P^{(2023)}\|$, то

$$\|P - P'\| \ge \tfrac{1}{2023}\sum_{k=1}^{2023}\|P^{(k)} - P^{(k+1)}\| \ge \tfrac{1}{2023}\Big\|\sum_{k=1}^{2023}(P^{(k)} - P^{(k+1)})\Big\| = \|\tfrac{1}{2023}P'\|.$$

Зауваження. Перейдемо до нової змінної $t = x + 2023$ і використаємо розклад многочленів за базисом $1, t-1, \frac{t^2}{2!} - t, \frac{t^3}{3!} - \frac{t^2}{2!}, \ldots$ Неважко перевірити, що рівність

$$\Big\|a_0 + a_1\big(t-1\big) + a_2\big(\tfrac{t^2}{2!} - t\big) + \ldots + a_n\big(\tfrac{t^n}{n!} - \tfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\big)\Big\| = \sum_{k=0}^{n}|a_k|$$

визначає норму на $\mathbb{R}[x]$, для якої $\|P'\| \le \|P\|$ при всіх $P \in \mathbb{R}[x]$, а також норми обох многочленів $x(x+2023)^{2022} = t^{2023} - 2023t^{2022}$ та $(x+2023)^{2022} = t^{2022}$ дорівнюють 2023!

2. Назвемо променями підмножини $\mathbb{N}^3$ вигляду $\mathbb{N} \times \{j\} \times \{k\}$, $\{i\} \times \mathbb{N} \times \{k\}$ та $\{i\} \times \{j\} \times \mathbb{N}$, $i, j, k \in \mathbb{N}$. Покажемо, що можна обрати $a_{i,j,k}$, $i, j, k \in \mathbb{N}$, так, аби суми чисел на всіх променях містили скінченну кількість ненульових доданків та набували будь-які наперед задані значення. Для цього занумеруємо всі промені і будемо визначати $a_{i,j,k}$ для трійок (i, j, k) у порядку зростання номерів променів, яким вони належать. Зауважимо, що кожен промінь містить щонайбільше скінченну кількість трійок, які належать променям з меншими номерами. Отже, можна визначити значення $a_{i,j,k}$ для всіх трійок (i, j, k) чергового променя, які не належать попереднім променям, так, аби серед них було не більше одного ненульового та сума чисел на промені була шуканою.

Оберемо $a_{i,j,k}$, $i, j, k \in \mathbb{N}$, так, що $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i,j,k} = 0$ при всіх $j, k \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{i,j,k} = 0$ при всіх $i, k \in \mathbb{N}$ та $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i,j,k} = b_{i,j}$ при всіх $i, j \in \mathbb{N}$, де $b_{i,j} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ -1, & j = i+1, \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases}$ Тоді всі потрійні суми, у яких сумування спочатку відбувається за змінною i або j, дорівнюють нулю, і неважко перевірити, що

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j,k} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j} = 1 \quad \text{та} \quad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j,k} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} b_{i,j} = 0.$$

3. Вектори $(\xi+\eta, \xi-\eta)$ та $\big(f(\zeta)+g(\zeta), f(\zeta)-g(\zeta)\big) = \big(\zeta, f(\zeta)-g(\zeta)\big)$ рівні за розподілом, тобто вектори $(\zeta, \xi - \eta)$ та $\big(\zeta, f(\zeta) - g(\zeta)\big)$ рівні за розподілом. Розглянемо борелеву множину $\Gamma = \big\{(x, y) \,|\, x \in \mathbb{R}, y = f(x) - g(x)\big\}$. Для неї

$$\mathsf{P}\big((\zeta, \xi - \eta) \in \Gamma\big) = \mathsf{P}\big((\zeta, f(\zeta) - g(\zeta)) \in \Gamma\big) = 1.$$

Отже, $(\zeta, \xi - \eta) \in \Gamma$ майже напевно, тобто $\xi - \eta = f(\zeta) - g(\zeta)$ майже напевно. Звідси

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{(\xi+\eta)+(\xi-\eta)}{2} = \frac{\zeta + f(\zeta) - g(\zeta)}{2} = f(\zeta) \text{ майже напевно,}\\ \eta &= \frac{(\xi+\eta)-(\xi-\eta)}{2} = \frac{\zeta - f(\zeta) + g(\zeta)}{2} = g(\zeta) \text{ майже напевно.}\end{aligned}$$

4. Зауважимо, що $(A+B)^T(A+B) - A^TA - B^TB = A^TB + B^TA \in \mathcal{C}$, а тому при довільних $a, b \in \mathbb{R}$ маємо $(aA-bB)^T(aA-bB) = a^2A^TA + b^2B^TB - ab(A^TB + B^TA) \in \mathcal{C}$.

Покажемо, що матриця $aA - bB$ є виродженою при деяких $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Якщо $\det A = 0$, то можна взяти $a = 1, b = 0$. Нехай $\det A \neq 0$. Розглянемо неперервну функцію $f(t) = \det(\cos t \cdot A - \sin t \cdot B)$, $t \in [0, \pi]$. Оскільки

$$f(\pi) = \det(-A) = (-1)^{2k+1} \det A = -\det A = -f(0),$$

то $f(0) \cdot f(\pi) < 0$. За теоремою про проміжне значення існує $0 < t_0 < \pi$, при якому $f(t_0) = 0$, та можна покласти $a = \cos t_0$, $b = \sin t_0$.

Нехай матриця $M = aA - bB$ вироджена. Покажемо, що $M = 0$. Справді, оскільки матриця $M^TM = cE$ вироджена, то $c = 0$, тобто $M^TM = 0$. Тому при всіх $x \in \mathbb{R}^{2k+1}$ маємо $(M^TMx, x) = (Mx, Mx) = 0$, звідки $M = 0$.