

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

**Проректор з наукової роботи**

**Київського національного університету**

**імені Тараса Шевченка**

**Ганна ТОЛСТАНОВА**

**2022 р.**



**ПРОГРАМА  
ВСТУПНОГО ВИПРОБУВАННЯ  
ДО АСПІРАНТУРИ  
ЗІ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 113 ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**  
на здобуття ступеня доктора філософії  
(третій (освітньо-науковий) рівень вищої освіти)

**ГАЛУЗЬ ЗНАНЬ 11 МАТЕМАТИКА ТА СТАТИСТИКА**

**ОСВІТНЬО-НАУКОВА ПРОГРАМА «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»**

**КИЇВ – 2022**

**Розробники програми:**

1. Жук Я.О., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри
2. Лимарченко О.С., д.тех.н., проф., завідувач кафедри
3. Маципура В.Т., д.ф.-м.н., проф.
4. Харитонов О.М., к.ф.-м.н., доц.

**УХВАЛЕНО**

Вченою радою механіко-математичного  
факультету

«06» лютого 2022 р., протокол № 9

Голова вченої ради механіко-математичного  
факультету

  
Оксана БЕЗУЦАК

## **А. Вступник повинен формулювати та активно володіти поняттями**

### **МЕХАНІКА**

#### **1. Теоретична механіка**

1. Предмет теоретичної механіки. Матеріальна точка, системи матеріальних точок, абсолютно тверде тіло.
2. Простір і час у класичній механіці. Поняття системи відліку.
3. Основні закони та аксіоми механіки. Перший закон Ньютона, механічні сили та їх властивості. Система сил. Рівнодійна система сил. Многокутник сил.
4. Аксіома про абсолютно тверде тіло.
5. Маса і кількість руху матеріальної точки. Другий закон Ньютона.
6. Аксіома про паралелограм сил.

#### **2. Статика**

1. Закон незалежності дії сил. Третій закон Ньютона.
2. Поняття про механічні в'язі та їх реакції. Класифікація сил, прикладених до точок матеріальної системи.
3. Сили тертя, ковзання та їх основні властивості, кут тертя, конус тертя і кут природного укосу.
4. Збіжна система сил. Умови рівноваги збіжної системи сил.
5. Головний вектор і головний момент системи сил. Інваріанти системи сил.
6. Умови рівноваги плоскої системи сил. Поняття про статично визначені ферми.
7. Метод вирізування вузлів.
8. Метод Ріттера.
9. Центр системи паралельних сил. Центр ваги.

#### **3. Кінематика**

1. Кінематика точки. Три способи визначення руху точки в просторі. Векторний та координатний способи визначення прискорення.
2. Поступальний рух твердого тіла. Рівняння руху.
3. Кутова швидкість. Кутове прискорення.
4. Кінематика складного руху точки.
5. Рух тіла навколо нерухомої точки. Кути Єйлера.
6. Кінематика плоско-паралельного руху твердого тіла.

#### **4. Динаміка матеріальної точки та матеріальної системи.**

1. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки. Дві основні задачі динаміки.
2. Вільні, згасаючі та вимушені коливання матеріальної точки, період, декремент та логарифмічний декремент.
3. Рух точки по поверхні. Натуральні диференціальні рівняння руху точки по поверхні.
4. Центр мас і центр ваги.
5. Дослідження руху математичного маятника.
6. Кінетична енергія точки та системи точок.

#### **5. Аналітична механіка**

1. Аналітичні в'язі та їх класифікація.
2. Узагальнені координати, швидкості та сили. Функція Лагранжа.
3. Варіаційні принципи механіки.
4. Поняття рівноваги матеріальної системи. Означення положення стійкої рівноваги.
5. Дисипативна функція Релея. Головна функція Гамільтона. Характеристична функція Якобі.

#### **6. Динаміка твердого тіла.**

1. Динаміка тіла з нерухомою віссю. Вільна вісь обертання.
2. Загальна постановка задачі про рух важкого тіла з нерухомою точкою.

3. Динаміка плоско-паралельного руху твердого тіла.
4. Перші інтеграли. Множник Якобі. Випадки Ейлера, Лагранжа, Ковальської.
5. Співудар матеріальної точки і нерухомої поверхні.

## 7. Механіка деформівного твердого тіла

1. Тензори деформації Гріна і Альмансі, тензори напруження Ейлера, Піоли і справжніх напружень.
2. Потенціальна енергія деформації.
3. Закон Гука для ізотропного та анізотропного тіла.
4. Рівняння Бельтрамі-Мітчела.
5. Постановка основних задач теорії пружності.
6. Варіаційні принципи теорії пружності. Принцип Лагранжа. Загальний варіаційний принцип. Варіаційні методи розв'язання задач теорії пружності.
7. Плоска деформація і плоский напружений стан. Методи розв'язання плоских задач.
8. Просторові та осесиметричні задачі. Розв'язок Кельвіна. Тензор Гріна.
9. Представлення Гальоркіна і Папковича-Нейбера.
10. Перша і друга крайові задачі для півплощини. Задача Герца. Задачі Буссінеска.
11. Температурні задачі теорії пружності. Закони термодинаміки. Закон збереження енергії деформівного тіла, баланс ентропії.
12. Рівняння теплопровідності. Постановка та класифікація крайових задач термопружності.
13. Припущення класичної теорії тонких пружних оболонок. Деформація серединної поверхні. Внутрішні зусилля і моменти. Співвідношення пружності.

## 8. Механіка рідини, газу та плазми

1. Предмет механіки суцільних середовищ. Модель суцільного середовища. Методи Лагранжа та Ейлера. Класифікація сил, що діють в рідинах та газах.
2. Тензор напружень. Рівняння динаміки в напруженнях. Симетричність тензора напружень.
3. Гідростатика. Гідромеханіка ідеальної рідини. Рівняння Ейлера. Інтеграл Бернуллі. Безвихрові рухи. Теорія профілю крила. Теорія тонких профілів. Схема Кірхгофа.
4. Просторові рухи ідеальної рідини. Парадокс Даламбера-Ейлера.
5. Механіка в'язкої рідини. Найпростіші рухи в'язкої нестисливої рідини. Наближення Стокса та Озерна. Основи теорії примежового шару. Схема Прандтля. Інтегральне співвідношення Кармана. Метод Кармана-Польгаузена.
6. Механізм переходу ламінарної течії в турбулентну. Гідродинамічна теорія стійкості. Схема Тейлора.
7. Рівняння Рейнольдса. Напівемпірична теорія Прандтля.
8. Основи газової динаміки. Реологічні рівняння. Основні термодинамічні параметри. Ідеальний досконалий газ. Поширення малих збурень в стисливому середовищі.
9. Характеристики рівнянь газової динаміки. Загальні властивості характеристик. Характеристики в площині графіка швидкості.

## МАТЕМАТИКА

### 1. Диференціальні рівняння

1. Основні інтегровні типи диференціальних рівнянь першого порядку (рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні, квазіоднорідні, лінійні, рівняння в повних диференціалах).
2. Задача Коші для диференціального рівняння довільного порядку та для нормальної системи диференціальних рівнянь. Теорема Пеано. Теорема Пікара.
3. Типи фазових портретів двовимірних лінійних однорідних систем (ЛЮС) зі сталими коефіцієнтами.

4. Фундаментальна система розв'язків (ФСР) лінійного однорідного диференціального рівняння довільного порядку (ЛОР) та фундаментальна матриця лінійної однорідної системи (ЛОС).
5. Стійкість та асимптотична стійкість розв'язків за Ляпуновим.

## **2. Варіаційне числення та методи оптимізації**

1. Постановка основних задач варіаційного числення.
2. Необхідні умови слабкого локального екстремуму.
3. Постановка задач оптимального керування Больца та оптимальної швидкодії.
4. Принцип оптимальності Р.Беллмана.
5. Принцип максимуму для задачі про оптимальну швидкодію.

## **3. Теорія ймовірностей**

1. Основні поняття та аксіоми теорії ймовірностей.
2. Умовні ймовірності, формули повної ймовірності та Байеса, незалежність випадкових подій і величин.
3. Випадкові величини, математичне сподівання та дисперсія, їхні властивості.
4. Функція розподілу та щільність випадкової величини, сумісний розподіл. Стандартні ймовірнісні розподіли. .
5. Умовне математичне сподівання.

## **4. Математична статистика**

1. Статистики, оцінки та їх властивості. Емпірична функція розподілу. Варіаційний ряд, розподіл порядкових та рангових статистик.
2. Оцінки методу моментів, оцінки максимальної вірогідності.
3. Інтервальні оцінки, побудова довірчих інтервалів.
4. Перевірка статистичних гіпотез.

## **5. Лінійна алгебра та теорія чисел**

1. Матриці та дії над ними. Обернена матриця.
2. Лінійні перетворення. Ранг і дефект лінійного перетворення.
3. Визначники, їх властивості та застосування.
4. Власні числа і власні вектори лінійного оператора.
5. Поняття групи. Циклічні групи, їх властивості.
6. Кільця головних ідеалів, евклідові кільця.

## **6. Аналітична геометрія. Диференціальна геометрія та топологія.**

1. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів, вираз через координати векторів співмножників.
2. Головні напрями поверхні другого порядку. Характеристичне рівняння.
3. Взаємне розміщення двох прямих у просторі (умова мимобіжності, перетину, паралельності, збігу).
4. Тригранник Френе.
5. Внутрішня геометрія поверхні.

## **6. Математичний аналіз**

1. Поняття границі послідовності, границі функції в точці.
2. Неперервні та рівномірно неперервні функції. Типи розривів. Неперервність елементарних функцій.
3. Похідна та диференціал функцій однієї та кількох змінних.
4. Формула Тейлора з різними формами залишкових членів. Основні розклади.
5. Інтеграл Рімана, умови його існування.
6. Числові та функціональні ряди. Сума ряду, ознаки збіжності. Абсолютна збіжність. Рівномірна збіжність.
7. Ряд Тейлора. Основні розклади.
8. Кратні інтеграли. Формула заміни змінних у кратному інтегралі.

## **Б. Вступник має вміти доводити такі теореми і розв'язувати гоступні задачі:**

### **МЕХАНІКА**

#### **1. Статика**

1. Теорема про силу як ковзний вектор.
2. Теорема про додавання збіжних сил.
3. Теорема про рівновагу трьох сил.
4. Властивості пари сил.
5. Теорема про зведення довільної системи сил (ковзних векторів) до найпростішої форми.
6. Теорема Варіньона про момент рівнодійної.
7. Умови рівноваги довільної системи сил, прикладених до вільного твердого тіла.

#### **2. Кінематика**

1. Визначення прискорення руху точки натуральним способом.
2. Теореми про розподіл швидкостей та прискорень при поступальному русі.
3. Теорема про вектор кутової швидкості.
4. Теореми про розподіл лінійних швидкостей і лінійних прискорень в тілі з нерухомою віссю.
5. Теорема Коріоліса.
6. Теорема Ейлера.
7. Теорема Ейлера-Даламбера.
8. Теорема про розподіл лінійних швидкостей у тілі з нерухомою точкою.
9. Кінематичні формули Ейлера.
10. Теореми Пуансо.

#### **3. Динаміка матеріальної точки та матеріальної системи.**

1. Принцип Даламбера.
2. Теорема про рух центра мас матеріальної системи.
3. Теорема про зміну кількості руху у відносному русі.
4. Теорема Штейнера.
5. Основні теореми про моменти інерції.
6. Диференціальне рівняння руху точки зі змінною масою.
7. Теорема Кеніга.

#### **4. Аналітична механіка.**

1. Принцип можливих переміщень.
2. Принцип Даламбера -Лагранжа.
3. Рівняння Феррерса, рівняння Лагранжа першого і другого роду.
4. Узагальнений інтеграл енергії. Диференціальні рівняння руху в канонічних змінних.
5. Принцип найменшого примушення Гаусса.
6. Принцип Гамільтона-Остроградського.
7. Принцип Ейлера-Лагранжа.
8. Теорема Лагранжа-Діріхле.
9. Теорема Остроградського-Гамільтона-Якобі.
10. Дужки Пуассона.

#### **5. Динаміка твердого тіла**

1. Визначення динамічних реакцій, прикладених до осей обертання.
2. Динамічні рівняння Ейлера.
3. Випадок руху твердого тіла з нерухомою точкою, розглянутий Ейлером.
4. Випадок руху тіла, розглянутий Лагранжем.
5. Інтеграл Ковалевської.
6. Теорема Резаля.

# **МАТЕМАТИКА**

## **1. Диференціальні рівняння**

1. Теорема про існування фундаментальної системи розв'язків ЛОР.
2. Теорема про загальний розв'язок ЛОС.
3. Критерії стійкості та асимптотичної стійкості ЛОС зі змінною матрицею.
4. Теорема Ляпунова про стійкість положення рівноваги автономної системи.

## **2. Варіаційне числення та методи оптимізації**

1. Необхідні умови слабкого локального екстремуму в задачі Лагранжа.
2. Необхідні умови слабкого локального екстремуму в задачі Больца.
3. Необхідні умови слабкого локального екстремуму в ізопериметричній задачі.

## **3. Теорія ймовірностей та математична статистика**

1. Закон великих чисел. Центральна гранична теорема. Лема Бореля-Кантеллі.

## **4. Лінійна алгебра та теорія чисел**

1. Знаходити найбільший спільний дільник двох многочленів.
2. Знаходити обернену матрицю.
3. Знаходити базу суми і перетину лінійних підпросторів
4. Зводити квадратичну форму до канонічного вигляду.
5. Знаходити ортонормовану базу в евклідовому просторі.
6. Знаходити власні числа і власні вектори лінійного оператора.
7. Знаходити кількість абелевих груп заданого порядку.
8. Знаходити розклад підстановки в добуток незалежних циклів, знаходити порядок підстановки.

## **5. Аналітична геометрія.**

1. Обчислювати скалярний, векторний та мішаний добутки векторів. Застосовувати їх для обчислення кутів, площ та об'ємів.
2. Зводити рівняння кривої другого порядку до найпростішого вигляду.

## **6. Математичний аналіз**

1. Знаходити границі послідовностей та функцій.
2. Досліджувати функції за допомогою похідної та будувати їх графіки.
3. Обчислювати площу, довжину дуги, роботу, потік, використовуючи інтеграл Рімана та інтеграли по многовидах.
4. Розкладати функції в ряди Тейлора та Фур'є.