КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи

Київського національного університету

імені Тараса Шевченка

_______________**Ганна ТОЛСТАНОВА**

« 15 **»** 02 _______________ **2022 р.**

ПРОГРАМА ВСТУПНОГО ВИПРОБУВАННЯ ДО АСПІРАНТУРИ ЗІ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 111 МАТЕМАТИКА

на здобуття ступеня доктора філософії

(третій (освітньо-науковий) рівень вищої освіти)

ГАЛУЗЬ ЗНАНЬ 11 МАТЕМАТИКА ТА СТАТИСТИКА

ОСВІТНЬО-НАУКОВА ПРОГРАМА «МАТЕМАТИКА»

КИЇВ – 2022

Розробники програми:

1. Перестюк М.О., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри
2. Парасюк І.О., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри
3. Мішура Ю.С., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри
4. Станжицький О.М., д.ф.-м.н., проф., заідувач кафедри
5. Самойленко В.Г., д.ф.-м.н., проф, завідувач кафедри
6. Петравчук А.П., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри
7. Шевчук І.О., д.ф.-м.н., проф. завідувач кафедри

УХВАЛЕНО

Вченою радою механіко-математичного факультету

«06» лютого 2022 р., протокол № 9

Голова вченої ради механіко-математичного факультету

__________________Оксана БЕЗУЩАК

А. Вступник має володіти такими поняттями:

1. Математичний аналіз
1. Поняття границі послідовності, границі функції в точці.
2. Неперервні та рівномірно неперервні функції. Типи розривів. Неперервність елементарних функцій.
3. Похідна та диференціал функцій однієї та кількох змінних.
4. Формула Тейлора з різними формами залишкових членів. Основні розклади.
5. Інтеграл Рімана, умови його існування.
6. Числові та функціональні ряди. Сума ряду, ознаки збіжності. Абсолютна збіжність. Рівномірна збіжність.
7. Ряд Тейлора. Основні розклади.
8. Кратні інтеграли. Формула заміни змінних у кратному інтегралі.
9. Інтеграли на многовидах. Формули Гріна, Гаусса-Остроградського, Стокса.
10. Метричні простори. Збіжність у метричних просторах.

2. Теорія міри та інтеграла
1. Конструкція міри Лебега.
2. Конструкція інтеграла Лебега.
3. Теореми про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.

3. Функціональний аналіз
1. Гільбертів простір. Ортонормовані базиси.
2. Лінійні, неперервні, обмежені оператори. Норма оператора.
3. Теорема Гана-Банаха.
4. Теорема Банаха про обернений оператор.
5. Принцип рівномірної обмеженості.
6. Компактні оператори та теореми Фредгольма.

4. Лінійна алгебра
1. Матриці та дії над ними. Обернена матриця.
2. Лінійні перетворення. Ранг і дефект лінійного перетворення.
3. Визначники, їх властивості та застосування.
4. Власні числа і власні вектори лінійного оператора.
5. Жорданова нормальна форма матриці.
6. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

5. Алгебра та теорія чисел
1. Поняття групи. Циклічні групи, їх властивості
2. Кільця головних ідеалів, евклідові кільця.

6. Аналітична геометрія
1. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів, вираз через координати векторів-співмножників.
2. Взаємне розташування кривої другого порядку та прямої.
3. Головні напрями поверхні другого порядку. Характеристичне рівняння.
4. Взаємне розміщення двох прямих у просторі (умова мимобіжності, перетину, паралельності, збігу).
5. Діаметри кривої другого порядку.

7. Диференціальна геометрія та топологія
1. Тригранник Френе.
2. Аксіоми відокремлюваності. Регулярні та нормальні простори.

3. Зв’язні простори та множини. Лінійна зв’язність.
4. Внутрішня геометрія поверхні.
5. Внутрішність і замикання множини топологічного простору. Внутрішні, граничні, ізольовані точки, точки дотику.

8.Диференціальні рівняння

1. Рівняння з відокремлюваними змінними, рівняння в повних диференціалах та їх інтегрування.
2. Задача Коші для диференціального рівняння довільного порядку та для нормальної системи диференціальних рівнянь. Теорема Пеано. Теорема Пікара.
3. Фундаментальна система розв’язків (ФСР) лінійного однорідного диференціального рівняння довільного порядку (ЛОР). Вронскіан. Фундаментальна матриця ЛОС.
4. Побудова фундаментальної системи розв’язків ЛОР зі сталими коефіцієнтами та ЛОС зі сталою матрицею.
5. Метод варіації довільних сталих розв’язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь довільного порядку та систем диференціальних рівнянь.
6. Стійкість та асимптотична стійкість розв’язків за Ляпуновим.
7. Критерії стійкості та асимптотичної стійкості ЛОС зі сталими коефіцієнтами.

9.Варіаційне числення

1. Постановка задачі опуклого програмування і теорема Куна-Такера.
2. Похідні в нормованих просторах, теореми про суперпозицію і про середнє.
3. Необхідні умови екстремуму в гладких задачах з обмеженнями.
4. Постановка основних задач варіаційного числення, необхідні умови слабкого локального екстремуму.
5. Постановка задач оптимального керування Больца та оптимальної швидкодії.

10. Комплексний аналіз

1. Поняття похідної комплекснозначної функції комплексної змінної, геометричний зміст модуля і аргументу похідної.
2. Основні властивості елементарних аналітичних функцій (дробово-лінійної, степеневої, показникової, логарифмічної, функції Жуковського).
3. Інтеграл від функції комплексної змінної вздовж шляху та його основні властивості.
4. Особливі точки функції комплексної змінної, поняття лишку, формули для обчислення лишків, основна теорема про лишки.

11. Рівняння математичної фізики

1. Формулювання задачі Коші для хвильового рівняння і рівняння теплопровідності та їх фізичний зміст.
2. Формулювання першої мішаної крайової задачі для хвильового рівняння та її фізичний зміст.
3. Формулювання другої мішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності та її фізичний зміст.
4. Формулювання третьої зовнішньої крайової задачі для рівняння Пуассона та її фізичний зміст.
5. Поняття коректності (за Адамаром) постановки задачі математичної фізики.

12. Теорія ймовірностей

1. Означення випадкової величини та вектора.
2. Функція розподілу та її властивості.
3. Математичного сподівання (дискретний та неперервний випадки).
4. Математичне сподівання добутку та дисперсія суми незалежних величин.
5. Граничні теореми Пуассона, Муавра-Лапласа.
6. Посилений закон великих чисел Колмогорова.

7. Класична центральна гранична теорема.

13. Дослідження операцій

1. Загальна задача лінійного програмування та двоїста до неї задача. Основна теорема двоїстості та теорема рівноваги.
2. Необхідні та достатні умови екстремуму для гладкого нелінійного програмування.
3. Субдиференціали опуклих функцій та їх властивості.
4. Задачі негладкого опуклого програмування без обмежень і з обмеженнями-рівностями.
5. Матричні ігри та їх розв'язність у чистих та мішаних стратегіях.

Б. Вступник має вміти розв'язувати задачі таких типів:

1. Математичний аналіз

1. Знаходити границі послідовностей та функцій.
2. Досліджувати функції за допомогою похідної та будувати їх графіки.
3. Обчислювати площу, довжину дуги, роботу, потік, використовуючи інтеграл Рімана та інтеграли по многовидах.
4. Розкладати функції в ряди Тейлора та Фур'є.

2. Теорія міри

1. Обчислювати інтеграл Лебега, використовуючи його зв'язок з інтегралом Рімана.
2. Виконувати граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, застосовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність.

3. Функціональний аналіз

1. Визначати лінійні неперервні функціонали в класичних лінійних нормованих просторах. Обчислювати норми лінійних неперервних функціоналів.
2. Визначати лінійні неперервні оператори. Обчислювати норми. Досліджувати збіжність операторів.
3. Знаходити спектр лінійного неперервного оператора. Спектр компактного оператора.
4. Розв'язувати інтегральні рівняння, застосовувати теореми Фредгольма.

4. Лінійна алгебра

1. Знаходити найбільший спільний дільник двох многочленів.
2. Знаходити обернену матрицю.
3. Знаходити базу суми і перетину лінійних підпросторів
4. Зводити квадратичну форму до канонічного вигляду.
5. Знаходити ортонормовану базу в евклідовому просторі.
6. Знаходити власні числа і власні вектори лінійного оператора.

5. Алгебра та теорія чисел

1. Знаходити кількість абелевих груп заданого порядку.
2. Знаходити розклад підстановки в добуток незалежних циклів, знаходити порядок підстановки.

6. Аналітична геометрія.

1. Обчислювати скалярний, векторний та мішаний добутки векторів. Застосовувати їх для обчислення кутів, площ та об'ємів.
2. Зводити рівняння кривої другого порядку до найпростішого вигляду.

7. Комплексний аналіз

1. Знаходити конформні відображення областей.
2. Знаходити розвинення функцій у ряди Тейлора та Лорана. Знаходити особливі точки.
3. Обчислювати інтеграли за допомогою теорії лишків.

8. Рівняння математичної фізики

1. Зводити до канонічного вигляду диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку з n і двома незалежними змінними.
2. Розв’язувати задачі Коші для рівняння коливань струни (метод характеристик).
3. Знати метод відокремлення змінних розв’язання крайових задач для рівнянь з двома незалежними змінними.

9. Теорія ймовірностей

1. Використовувати класичне означення ймовірності.
2. Використовувати геометричне означення ймовірності.
3. Використовувати умовну ймовірність. Використовувати незалежність випадкових подій.
4. Використовувати формулу повної ймовірності та формулу Байеса.
5. Знаходити розподіл функції від випадкової величини або випадкового вектора.
6. Знаходити числові характеристики випадкових величин і випадкових векторів.

10. Диференціальні рівняння

1. Знаходити розв'язок задачі Коші інтегровного рівняння першого порядку.
2. Знаходити ФСР ЛОР зі сталими коефіцієнтами.
3. Розв'язувати лінійні неоднорідні рівняння методом варіації довільних сталих.
4. Знаходити частинний розв'язок лінійних неоднорідних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів.
5. Розв'язувати ЛОС зі сталими коефіцієнтами.
6. Визначати тип фазового портрета автономної 2-вимірної ЛОС та схематично зображати його.
7. Досліджувати на стійкість за першим наближенням положення рівноваги автономної системи.

11. Варіаційне числення

1. Знаходити екстремуми в задачі Лагранжа класичного варіаційного числення
2. Знаходити екстремуми в задачі Больца класичного варіаційного числення