XXVI Всеукраїнська заочна математична олімпіада “5–12”

Цього року було проведено двадцять шосту Всеукраїнську заочну математичну олімпіаду “5–12”. В ній міг взяти участь кожен учень 5–12 класів. Переможцями та призерами олімпіади стали:

I місце

Липницький Владислав (м. Київ, 7 клас)

II місце

Кравчук Антон (м. Київ, 8 клас)
Красільщик Денис (м. Запоріжжя, 7 клас)
Попльонкін Давид (м. Запоріжжя, 9 клас)
Гусинін Владислав (м. Київ, 8 клас)

III місце

Москалець Анастасія (м. Ромни, Сумська обл., 11 клас)
Вереітінова Дар’я (м. Київ, 9 клас)
Хрущова Лілія (м. Харків, 6 клас)
Макаров Володимир (м. Запоріжжя, 9 клас)

Вітаємо всіх переможців та призерів олімпіади з їх досягненнями, які для когось були першими, і, сподіваємось, не останніми!

Тепер нагадаємо умови та наведемо розв’язки задач олімпіади.

1. Чи існує таке натуральне число $n > 2022$, що кожне з чисел $n-1$, n та $n+1$ ділиться на свою суму цифр?

Розв’язання. I спосіб. Наприклад, шуканим є число $n = 10011$, оскільки числа 10010, 10011 та 10012 мають суми цифр 2, 3 та 4 і діляться на 2, 3 та 4 відповідно.

II спосіб. Обидва числа 2023 та 2024 задовольняють умову, бо числа 2022, 2023, 2024 та 2025 мають суми цифр 6, 7, 8 та 9 і діляться на 6, 7, 8 та 9 відповідно.

Відповідь: так, існує.

2. У Малюка і Карлсона була однакова кількість булочок. Карлсон з’їв у чотири рази більше булочок, ніж Малюк, і у них разом залишилося 8 булочок. Скільки булочок було у Карлсона спочатку?

Розв’язання. Якщо Малюк з’їв a булочок, то Карлсон з’їв $4a$ булочок і у Малюка залишилося на $3a$ булочок більше. Звідси випливає, що у Малюка залишилося 7 булочок, а у Карлсона — 1 булочка, бо при будь-якому іншому поділі числа 8 на два різних цілих невід’ємних доданка їхня різниця не ділиться на 3. Тоді $a = 2$, а отже спочатку у Малюка і Карлсона було по $7 + 2 = 1 + 8 = 9$ булочок.

Відповідь: 9 булочок.

3. На дошці 9×9 пофарбували декілька клітинок так, що у кожному рядку та у кожному стовпчику пофарбовані рівно дві клітинки. Чи обов’язково на дошці знайдеться квадрат 2×2 без пофарбованих клітинок?

Розв'язання. Розглянемо будь-які два сусідні рядки. Вони утворюють прямокутник 9×2, який містить чотири пофарбовані клітинки. Якщо ці клітинки не знаходяться по одній у другому, четвертому, шостому та восьмому стовпчиках, то у цьому прямокутнику 9×2 знайдуться сусідні стовпчики без пофарбованих клітинок, які утворюють шуканий квадрат 2×2. Отже, якщо на дошці 9×9 такого квадрата немає, то у будь-яких двох сусідніх рядках усі пофарбовані клітинки знаходяться у стовпчиках з парними номерами. Але тоді усі пофарбовані клітинки на дошці знаходяться у стовпчиках з парними номерами, що суперечить умові.

Відповідь: так, обов'язково.

4. Вздовж доріжки ростуть 80 квіток. Серед будь-яких чотирьох послідовних квіток принаймні одна червона, а серед будь-яких п'яти послідовних квіток не більше однієї лілії. Довести, що принаймні 10 червоних квіток не є ліліями.

Розв'язання. Оскільки всі квітки можна розбити на 20 груп по чотири послідовні квітки, то є принаймні 20 червоних квіток. Розіб'ємо перші 20 червоних квіток на доріжці на 10 пар. У кожній парі між червоними квітками щонайбільше три квітки інших кольорів, бо інакше знайшлися би чотири послідовні квітки, серед яких немає червоних. Тому червоні квітки з однієї пари входять у п'ятірку послідовних квіток, а отже у кожній парі хоча б одна з червоних квіток — не лілія.

5. Впишіть у кружечки на емблемі олімпіади (рис. 1) числа 1, 3, 4, 5, 7, 8 і 9 так, аби утворилася найбільша можлива кількість рядів по три числа з однаковою сумою.

Розв'язання. На рис. 2 показано приклад заповнення кружечків, при якому утворюється 7 рядів із сумою 16 та 2 ряди з іншими сумами. Покажемо, що 8 або 9 однакових сум утворитися не може. Справді, розглянемо суми чисел на зелених і синіх прямих на рис. 3. Оскільки кожен кружечок належить рівно одній зеленій і рівно двом синім прямим, то сума трьох "зелених" сум дорівнює $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$, а шести "синіх" сум — $2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 90$. Припустимо, що при деякому розташуванні чисел утворилося не менше 8 однакових сум. Тоді всі "зелені" або всі "сині" суми є однаковими, в обох випадках кожна з однакових сум дорівнює 15. Але кожен кружечок належить трьом прямим, а з числами 1 та 9 можна утворити лише по дві суми, рівні 15: $1 + 5 + 9 = 1 + 6 + 8 = 2 + 4 + 9$. Тому кружечки з числами 1 та 9 мають належати одному ряду з сумою 15, і кожен з них належить хоча б одному ряду з іншою сумою. Отже, рядів з сумою 15 не більше семи, суперечність.

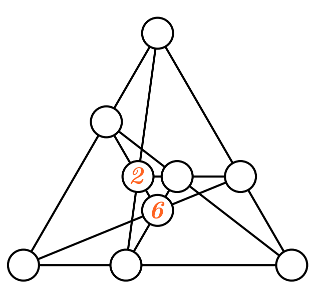

Рис. 1.

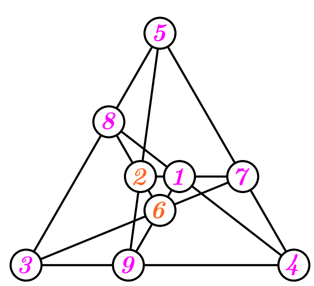

Рис. 2.

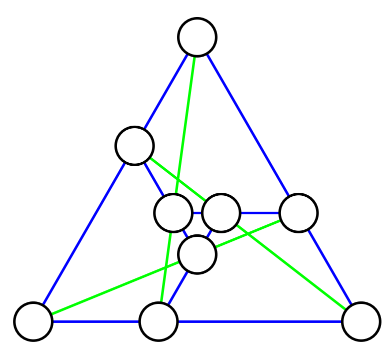
Рис. 3.

6. Про ціле число n відомо, що $7n+1$ — квадрат цілого числа. Довести, що $n+1$ є сумою 7 квадратів цілих чисел.

Розв'язання. Якщо $7n+1=a^2$, то a^2-1 ділиться на 7, тобто $a-1$ або $a+1$ ділиться на 7. Отже, $a=7k\pm 1$ при деякому цілому k. Тоді $7n+1=a^2=49k^2\pm 14k+1$, звідки $n=7k^2\pm 2k$ та $n+1=6\cdot k^2+(k\pm 1)^2$.

7. Нехай I — центр кола, вписаного у трикутник ABC, в якому $\angle BAC=60^\circ$ та $AB\neq AC$. На променях BA та CA відмітили точки D та E так, що $BD=CE=BC$. Довести, що пряма DE проходить через точку I.

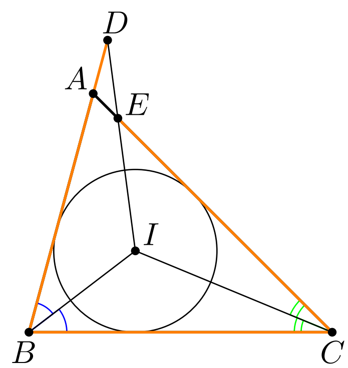

Рис. 4.

Розв'язання. Трикутники BIC та BID рівні за двома сторонами та кутом між ними, тому $\angle BID=\angle BIC$. Аналогічно рівними є трикутники BIC та EIC, тому $\angle EIC=\angle BIC$. А оскільки $\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC=120^\circ$, то $\angle DIB+\angle BIC+\angle CIE=3\cdot 120^\circ=360^\circ$. Це означає, що промені ID та IE збігаються.

8. Кожен учень школи відвідав за рік не менше п'яти онлайн-екскурсій. Для будь-яких двох екскурсій існує не більше одного учня, який був на обох цих екскурсіях. Довести, що знайдуться п'ять екскурсій, на яких побувала однакова кількість учнів.

Розв'язання. Нехай на деякій екскурсії було N учнів, а на всіх інших — не більше за N. Кожен з учасників цієї екскурсії відвідав ще принаймні чотири екскурсії, причому для різних учасників ці екскурсії різні. Отже, було не менше $4N+1$ екскурсій, кожну з яких відвідали від 1 до N учнів. Тому існують хоча б п'ять екскурсій, для яких кількість учасників є однаковою.

9. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1{,}2,\\ \{x\}+y+[z]=3{,}4,\\ [x]+\{y\}+z=5{,}6, \end{cases}$$

де $[t]$ та $\{t\}$ — ціла та дробова частини числа t.

Розв'язання. Додамо всі рівняння системи і дістанемо $2(x+y+z)=10{,}2$, тобто $x+y+z=5{,}1$. Віднімемо від цієї рівності кожне з рівнянь системи. Дістанемо

$$\{y\}+[z]=3{,}9,\ \text{звідки}\ [z]=3\ \text{та}\ \{y\}=0{,}9;$$
$$[x]+\{z\}=1{,}7,\ \text{звідки}\ [x]=1\ \text{та}\ \{z\}=0{,}7;$$
$$\{x\}+[y]=-0{,}5,\ \text{звідки}\ [y]=-1\ \text{та}\ \{x\}=0{,}5.$$

Таким чином, $x=1{,}5$, $y=-0{,}1$ та $z=3{,}7$. Залишається зробити перевірку.

Відповідь: $x=1{,}5$, $y=-0{,}1$, $z=3{,}7$.

10. Знайти всі прості числа $p\geq 3$ з такою властивістю: для кожного простого числа $q<p$ остача від ділення p на q не ділиться ні на 4, ні на 6.

Розв'язання. Неважко перевірити, що числа 3, 5 та 7 задовольняють умову. Надалі нехай $p\geq 11$. Якщо у числа $p-4$ є простий дільник $q>4$, то остача від ділення p

на q дорівнює 4. Отже, якщо число $p \geq 11$ задовольняє умову, то непарне число $p-4$ може мати лише простий дільник 3, тобто $p-4=3^k$ при деякому $k \geq 1$. Аналогічно число $p-6=3^k-2$ не може мати простих дільників, більших за 6, а оскільки воно не ділиться на 2 та 3, то $p-6=5^m$. Нарешті, число $p-8=3^k-4=5^m-2$ не може мати простих дільників, більших за 8, а оскільки воно не ділиться на 2, 3 та 5, то $p-8=3^k-4=7^\ell$. Остання рівність неможлива, бо $7^\ell+4$ завжди дає остачу 2 при діленні на 3. Таким чином, жодне просте число $p \geq 11$ не задовольняє умову.

Відповідь: 3, 5, 7.

11. Нехай D — точка на стороні AB трикутника ABC така, що $BD = CD$, а точки E на стороні BC та F на продовженні AC за точку C є такими, що $EF \parallel CD$. Прямі AE та CD перетинаються в точці G. Довести, що BC — бісектриса кута FBG.

Розв'язання. Нехай пряма EF перетинає AB в точці K (рис. 5). Тоді $BK = KE$ та $KE/KF = DG/DC$. Звідси $DG/DB = DG/DC = KE/KF = KB/KF$. Оскільки також $\angle BDG = \angle FKB$, то трикутники BDG та FKB подібні за двома сторонами та кутом між ними. Отже, $\angle DBG = \angle KFB$. Звідси

$$\angle GBC = \angle ABC - \angle DBG = \angle BEK - \angle KFB = \angle CBF.$$

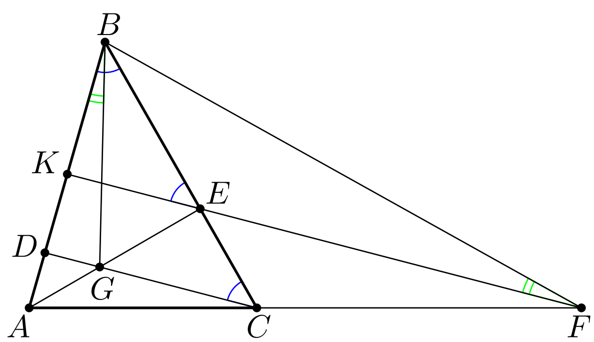

Рис. 5.

12. Нехай $a, b, c \geq 0$. Довести, що

$$\frac{1+a^2b}{1+c^2b} + \frac{1+b^2c}{1+a^2c} + \frac{1+c^2a}{1+b^2a} > 2.$$

Розв'язання. Оскільки нерівність не змінюється при циклічничній перестановці змінних, то можна вважати, що $a = \max\{a, b, c\}$. Тоді $a^2b \geq b^2a$ та $c^2a \geq c^2b$, а отже за нерівністю між середніми

$$\frac{1+a^2b}{1+c^2b} + \frac{1+b^2c}{1+a^2c} + \frac{1+c^2a}{1+b^2a} > \frac{1+b^2a}{1+c^2b} + 0 + \frac{1+c^2b}{1+b^2a} \geq 2.$$

Зауваження. При $a = n$, $b = 0$ та $c = \frac{1}{n}$ ліва частина нерівності дорівнює $1 + \frac{1}{1+n} + 1 + \frac{1}{n}$. При достатньо великих n цей вираз набуває значення, як завгодно близькі до 2. Тому число 2 у правій частині нерівності не можна замінити більшим числом.