Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Математика у закладах загальної середньої освіти та методика її викладання»

Вибрані розділи теорії ймовірностей на уроках математики у профільних класах

для студентів спеціальності 014.04
Середня освіта (Математика)
механіко-математичного факультету

Станжицький О.М., Собчук В.В.,
Кушніренко С.В., Вишенська І.Я.

Київ – 2021

Рецензенти:
Мішура Ю.С., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету.
Зубарук О.В., кандидат фізико-математичних наук, вчитель вищої категорії, голова циклової комісії вчителів математики УФМЛ КНУ.

Рекомендовано до друку Вченою радою
механіко-математичного факультету,
протокол № 4 від 21 жовтня 2021 р.

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Математика у закладах загальної середньої освіти та методика її викладання» Вибрані розділи теорії ймовірностей на уроках математики у профільних класах для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету

Наведено короткі відомості про теоретичний матеріал з деяких розділів теорії ймовірностей, що вивчаються на уроках математики у профільних класах. Методичні вказівки містять приклади розв'язання ймовірнісних задач засобами шкільної математики. Запропоновано низку завдань для самостійного розв'язування.

Зміст

Розділ 1

Стохастичний експеримент. Класичне означення ймовірності

Теоретичні відомості

У теорії ймовірностей розглядаються експерименти, які можна повторити при незмінних умовах будь-яку кількість разів, але результат яких не можна напевне передбачити. Такі експерименти називаються ***стохастичними***.

З кожним стохастичним експериментом пов'язана непорожня множина $\Omega = \{\omega\}$ – ***простір елементарних подій***, елементи ω якого є наслідками експерименту. ***Випадковими*** подіями називаються підмножини цього простору.

Для події $A \subset \mathcal{F}$ визначимо ймовірність $P(A)$ як функцію, що задовольняє умовам:

- $P(A) \geq 0$;
- $P(\Omega) = 1$, тут Ω – достовірна подія;
- $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ для будь яких A_i, $\quad i = 1, 2, \ldots,$

таких, що $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Тут $\emptyset$ – це порожня множина або неможлива подія.

Простір елементарних подій Ω називається ***дискретним***, якщо множина Ω скінченна або злічення.

Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ – дискретна множина і підмножина $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots\}$. Нехай кожній елементарній події ω_n поставлено у відповідність число $p_k \geq 0$, де ω_k це ймовірність, і $\sum\limits_k p_k = 1$.

Тоді ймовірністю $P(A)$ події A будемо називати число $P(A) = \sum\limits_{\{k:\omega_k \subset A\}} p_k$.

Якщо множина Ω скінченна і всі елементарні події рівноможливі, то покладемо $p_k = \frac{1}{n}$, де n – число елементарних подій в Ω.

Нехай $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_m}\}$, тоді $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$. Таким чином, за класичним означенням ймовірності, ймовірність події A дорівнює відношеню числа елементарних подій, що містяться в A, до загального числа всіх елементарних подій в Ω.

При обчисленні ймовірності часто бувають корисними різні комбінаторні формули.

Нехай задано множину $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Підмножини множини A називаються ***сполуками*** або ***комбінаціями***. Число підмножин множини A, що містять k елементів, дорівнює:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Упорядковані k-елементні підмножини множини, що містить n елементів, називаються ***розміщеннями*** з n по k. Число розміщень з n по k дорівнює:

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Частинний випадок розміщень при $n = k$ називається ***перестановками*** даної множини.

Число перестановок множини з n елементів дорівнює

$$P_n = n!.$$

Наведемо деякі формули, які часто використовуються при розв'язуванні задач.

Для довільних випадкових подій $A_1, A_2, \ldots$

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n, \quad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n.$$

Для довільних випадкових подій A, B, A_i, $i = \overline{1,n}$ маємо:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A),$$

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P(A_{i_1} \bigcap A_{i_2}) +$$

$$+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} P(A_{i_1} \bigcap A_{i_2} \bigcap A_{i_3}) - \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Приклади і задачі

1. Монету підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Описати події:

   ✓ A – хоча б один раз з'явився герб,

   ✓ B – при другому підкиданні з'явився герб,

   ✓ $A \cap B$, $A \cup \bar{B}$, $\bar{A}$.

   Вважаючи всі елементарні події рівноможливими, обчислити ймовірності всіх указаних подій.

Розв'язання:

Якщо монета впала гербом, то цю подію позначимо через Г, якщо решкою – Р. Тоді при двох підкиданнях монети можливі такі наслідки $\Omega = \{$ГГ, ГР, РГ, РР$\}$.

Далі $A = \{$ГГ, ГР, РГ$\}$, $B = \{$ГГ, РГ$\}$, $A \bigcap B = \{$ГГ, РГ$\} = B$, $A \cup \bar{B} = \Omega$, $\bar{A} = \Omega \setminus A = \{$РР$\}$. Так як елементарні події рівноможливі і Ω – скінченна множина, то відповідно класичному означенню ймовірності маємо:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cup \bar{B}) = 1, \quad P(\bar{A}) = \frac{1}{4}.$$

Аналогічно розв'язуються задачі 2 – 4.

2. Гральний кубик підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Описати події:

   ✓ A – на першому кубику випало парне число очок,

   ✓ B – сума очок на кубиках непарна,

   ✓ $A \cap B, A \cup \bar{B}, A \setminus B$.

   Вважаючи всі елементарні події рівноможливими, обчислити ймовірності всіх указаних подій.

<u>Відповідь:</u> $P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4},$
$P(A \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}, \quad P(A \setminus B) = \frac{1}{4}.$

3. З ящика, що містить три картки з номерами 1,2,3 виймають по одній всі картки. Описати простір елементарних подій. Описати події:

   ✓ A – принаймі у однієї картки порядковий номер співпадає з власним,

   ✓ B – картка з номером 3 з'явилась першою,

   ✓ $A \cap B, \bar{A} \cup \bar{B}, A \triangle B$.

Тут $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – симетрична різниця множин A і B. Вважаючи всі ці елементарні події рівноможливими, обчислити ймовірності всіх указаних подій.

<u>Відповідь:</u> $P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6},$
$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{5}{6}, \quad P(A \triangle B) = \frac{2}{3}.$

4. Підкидають три монети. Описати простір елементарних подій. Описати події:

   ✓ A – на першій монеті випав герб,

   ✓ B – випало рівно два герба,

   ✓ C – випало не більше двох гербів,

   ✓ $C \setminus (A \cap B)$.

   Вважаючи всі елементарні події рівноможливими, обчислити ймовірності всіх указаних подій.

<u>Відповідь:</u> $P(A) = \frac{1}{2}, \;\; P(B) = \frac{3}{8}, \;\; P(C) = \frac{7}{8},$
$P(C \setminus (A \cap B)) = \frac{5}{8}.$

5. Вказати події, протилежні таким подіям:

   ✓ A – з'явився герб при двох підкиданнях монет,

   ✓ B – три влучення при трьох пострілах,

   ✓ C – принаймні одне влучення при трьох пострілах.

<u>Розв'язання:</u>

✓ $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}, \bar{A} = \{РР\}.$

- ✓ $\Omega = \{(i_1, i_2, i_3)$, де i_j приймає значення B_u, якщо було влучення,H – якщо влучення не було$\}$: $B = \{B_u, B_u, B_u\}$. $\bar{B} = \Omega \setminus B$ – відбулось не більше двох влучень при трьох пострілах.
- ✓ $\bar{C} = \{(\text{Н,Н,Н})\}$ – влучень не було при трьох останніх пострілах.

Аналогічно розв'язуються задачі 6 і 7.

6. Події: A – принаймні один з трьох перевірених приладів бракований, B – усі прилади доброякісні. Що означають події $A \cup B$, $A \cap B$?

<u>Відповідь:</u> $A \cup B = \Omega, \quad A \cap B = \emptyset.$

7. З таблиці випадкових чисел навмання вибрано одне число. Подія A – вибране число ділиться на 5, подія B – дане число закінчується нулем. Що означають події $A \setminus B$, $A \cap \bar{B}$?

<u>Відповідь:</u> $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ – вибране число закінчується цифрою 5.

8. З 28 костей доміно навмання вибирають дві. Знайти ймовірність того, що з них можна утворити «ланцюжок» згідно правил гри?

<u>Розв'язання:</u>

Серед 28 кісточок доміно є сім дублів, тобто костей вигляду (i, i), $i = \overline{0, 6}$ і 21 кость вигляду (i, j), де $i \neq j$. Всього з 28 кісточок ми можемо вибрати C_{28}^2 пар. Отже, $|\Omega| = C_{28}^2 = 378$.

Якщо перша кісточка є дубль, то для її вибору маємо сім способів. При цьому другу кісточку можна вибрати шістьма способами, щоб їх можна було співставити. Таким чином, ми маємо $7 \times 6 = 42$ пари, де перша кісточка є дубль.

Якщо ж перша кісточка містить різні числа, то її можна вибрати 21 способом. При цьому другу кісточку можна вибрати 12 способами. Отже, маємо $21 \times 12 = 252$ пари, де перша кісточка не дубль.

Отже, маємо $42 + 252 = 294$ пари, що задовольняють умову задачі. Але при підрахунку пар ми враховували порядок вибору кістчок, а за умовою задачі пари не розрізняються по порядку. Отже, є 147 елементарних подій, що сприяють потрібній нам події A.

За класичним означенням ймовірності маємо:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{147}{378} = \frac{7}{18}.$$

9. Навмання вибрана кісточка доміно виявилась не дублем. Знайти ймовірність того, що другу кісточку, взяту навмання, можна приставити до першої.

Відповідь: $P = \frac{4}{9}$.

10. В колоді 36 карт чотирьох мастей. Після того, як вийняли, а потім повернули одну карту, колоду перемішали і знову вийняли одну карту. Знайти ймовірність того, що обидві карти, які виймались, мають однакову масть.

Розв'язання:

Оскільки в колоді однакова кількість карт кожної масті, то наслідки експерименту ми будемо розрізняти тільки по масті карт.

Таким чином, всього маємо елементарних подій $|\Omega| = 4 \times 4 = 16$.

З них чотири елементарні події сприяють події A – обидві карти однієї масті.

Отже, $P(A) = \frac{1}{4}$.

11. З множини всіх послідовностей довжиною n, що складають набір з цифр 0,1,2 навмання обирають одну. Знайти ймовірність подій:

   ✓ A – послідовність починається з 0,

   ✓ B – послідовність містить рівно $m + 2$ нулі, причому два з них знаходяться на кінцях послідовності,

   ✓ C – послідовність містить рівно m одиниць,

   ✓ D – в послідовності рівно m_0 нулів, m_1 одиниць, m_2 двійок, де $m_0 + m_1 + m_2 = n$.

Відповідь: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = C_{n-2}^m \frac{2^{n-m-2}}{3^n}$, $P(C) = C_n^m \frac{2^{n-m}}{3^n}$, $P(D) = \frac{n!}{m_0!m_1!m_2!} \times \frac{1}{3^n}$.

12. Із сукупності всіх підмножин множини $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ навмання була обирана спочатку множина A_1, яка потім повертається до сукупності, а далі обирається теж навмання множина A_2. Знайти ймовірність того, що $A_1 \bigcap A_2 = \emptyset$.

Розв'язання:

Кількість різних підмножин множини S дорівнює 2^N. Оскільки множини обираються двічі з поверненням до сукупності, то:

$$|\Omega| = 2^N \times 2^N = 4^N.$$

Нехай множина A_1 має вигляд: $A_1 = \{i_1, \dots i_k\}$. Таких множин ми можемо утворити C_N^k. Для того, щоб $A_1 \bigcap A_2 = \emptyset$ потрібно утворити множину A_2 з елементів множини $S \backslash A_1$.

Оскільки $|S \backslash A_1| = N - k$, то підмножину A_2 можна вибрати 2^{N-k} способами. Таким чином, число елементарних подій, що сприяють події $A_1 \bigcap A_2 = \emptyset$, дорівнює:

$$\sum_{k=0}^{N} C_N^k 2^N - k = (1+2)^N = 3^N.$$

Отже, $P\{A_1 \bigcap A_2 = \emptyset\} = (\frac{3}{4})^N$.

13. Десять книжок на одній полиці розставлені навмання. Знайти ймовірність того, що при цьому три визначені книги виявляться поставленими поруч.

Розв'язання:

Елементарні події у нашому експерименті – це різні перестановки із 10 книжок. Отже, $|\Omega| = 10!$. Позначимо три визначені книги A, B і C. Нехай K – подія, ймовірність якої ми шукаємо.

Книжки A, B і C, що стоять поруч, можна переставляти 3! способами. Сім книжок, що залишились, ми можемо переставити 7! способами. В перестановці із 10 книжок трійка A, B і C може займати $10 - 3 + 1 = 8$ місць. Отже, $|K| = 3! \times 7! \times 8$. Тому:

$$P(K) = \frac{3! \times 8!}{10!} = \frac{1}{15}.$$

Аналогічно розв'язуються задачі 14 – 16.

14. Є n осіб, серед яких є A і B, шикуються в ряд у довільному порядку. Яка ймовірність того, що між A і B буде знаходитись рівно r осіб?

Відповідь: $P = \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$.

15. Яка ймовірність того, що при випадковому упорядкуванні такої множини як $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ кожне парне число буде мати парний номер?

Відповідь: $P = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

16. Яка ймовірність одержати перестановку з n елементів, у якій вказані 2 елементи не стоять поруч?

Відповідь: $P = \frac{(n-2)}{n}$.

17. На 8 однакових картках написані числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Навмання вибирають дві картки. Визначити ймовірність того, що утворений з двох вибраних чисел дріб можна скоротити.

Розв'язання:

Всього різних пар чисел можна вибрати $|\Omega| = C_8^2 = 28$. Дріб можна буде скоротити, якщо пара чисел вибрана з множини $\{2, 4, 6, 8, 12\}$. Таких пар буде $C_5^2 = 10$.

Отже, шукана ймовірність дорівнює $P = \frac{5}{14}$.

Аналогічно розв'язується задача 18.

18. Дано п'ять відрізків, довжиною відповідно $1, 3, 5, 7$ і 9. Визначити таку ймовірність, що з трьох навмання взятих таких відрізків можна утворити трикутник.

Відповідь: $P = \frac{3}{10}$.

Розділ 2

Геометричні ймовірності

Теоретичні відомості

Згадаємо класичну схему знаходження ймовірностей подій. Здійснюючи деякий експеримент, фіксуємо повну множину його елементарних наслідків, що є рівноможливими і несумісними. Така множина називається *простором елементарних подій* Ω даного експерименту. Тоді будь-яка підмножина A простору $\Omega (A \subset \Omega)$ є *випадковою подією*. Ймовірністю випадкової події A є відношення числа елементарних наслідків, що сприяють настанню даної події, до числа всіх елементарних наслідків, тобто

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Однак таке означення ймовірності придатне лише для експериментів з скінченним числом рівноможливих елементарних подій. У випадку, коли елементарних наслідків нескінченно багато, формула втрачає зміст. Проте іноді вдається всій сукупності нескінченних рівномірних наслідків дати деяку кількісну характеристику $m(\Omega)$ в мірах довжини, площі, об'єму, часу тощо, а підмножині цієї сукупності, що сприяє настанню події A – характеристику $m(A)$ в тих же мірах. Тоді ймовірність події A визначається співвідношенням: $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$. Означення ймовірності для такого виду експериментів називають *геометричною ймовірністю*.

При обчисленні ймовірностей складних подій, що є сумою чи добутком інших, їх геометричне зображення часто допомагає зрозуміти логіку дій чи операцій над подіями.

Сума подій $A + B$ є об'єднанням відповідних геометричних множин з простору $\Omega (A \cup B)$.

Добуток подій $A \cdot B$ відповідно полягає в одночасному здійсненні подій, тобто в перетині відповідних множин $(A \cap B)$. Якщо події не перетинаються, то вони одночасно не відбуваються, а перетином множин є порожня множина. Такі події називаються *несумісними*.

Різниця подій $A \setminus B$ – це подія, яка полягає в тому, що відбувається A і не відбувається B.

Кожній події A можна поставити у відповідність *протилежну подію* $\bar{A}$ (доповнення множини A), яка відбувається тоді, коли A не відбувається. При цьому $A + \bar{A} = \Omega$, $A \cdot \bar{A} = \emptyset$.

Для обчислення ймовірностей користуємося відомими формулами для довільних подій A і B $(A, B \subset \Omega)$:

1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$;

3) $\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_l \le n} P(\Pi_{k=1}^{l} A_{ik})$.

Подивимося, як обчислюються геометричні ймовірності на практиці.

Приклади і задачі

1. Абонент чекає телефонного виклику з 14.00 до 15.00. Яка ймовірність того, що дзвінок пролунає з 14.30 до 14.40?

Розв'язання:

Простором елементарних подій тут є проміжок часу з 14.00 до 15.00, а випадкова подія A – проміжок часу з 14.30 до 14.40. Мірою є час у хвилинах, отже

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}.$$

2. На відрізку довжиною 5 см вибирається довільним чином точка. Яка ймовірність того, що відстань від вибраної точки до одного з кінців відрізка не більше 1см?

Розв'язання:

Розглянемо відрізок AB, на якому вибирається довільна точка X.

Для того, щоб виконувалась умова задачі, точка X має опинитися на відрізку AM або NB. Нехай маємо події X_1 – попадання точки на відрізок AM, X_2 – попадання точки на відрізок NB. Оскільки події X_1 і X_2 несумісні, то $P(X_1+X_2) = P(X_1)+P(X_2) = \frac{AM}{AB} + \frac{NB}{AB} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$. Звернімо увагу, що в якості міри використано довжини відрізків. Цей приклад можна розв'язати і через протилежну подію $\overline{X_1 + X_2}$, що полягає в попаданні точки на відрізок MN. Тоді $P(X_1+X_2) = 1 - P(\overline{X_1 + X_2}) = 1 - \frac{MN}{AB} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

3. На відрізку довжиною ℓ навмання вибрано дві точки. Яка ймовірність того, що віддаль між ними менша $k\ell$, де $0 < k < 1$?

<u>Розв'язання:</u>

Нехай відрізок розміщено на координатній осі так, що один його кінець знаходиться в початку координат. Тоді другий кінець відрізка має координату ℓ. Нехай x і y - координати відповідно першої і другої точки. Тоді $\Omega = \{(x,y)|0 \leq x \leq \ell, 0 \leq y \leq \ell\}$.

Віддаль між точками дорівнює $|x-y|$, і буде меншою $k\ell$, якщо точка (x,y) потрапить в область $A = \{(x,y)||x-y| < k\ell, (x,y) \in \Omega\}$. Маємо $m(\Omega) = \ell^2, m(A) = k\ell^2(2-k)$, де $m(A)$ - площа області А. З геометричного означення ймовірності одержимо:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = k(2-k).$$

Аналогічно розв'язуються задачі 4 і 5.

4. Стержень довжиною ℓ розламали в навмання вибраній точці на дві частини. Яка ймовірність того, що довжина меншої частини не перевищує $\frac{\ell}{3}$?

   Відповідь: $P = \frac{2}{3}$.

5. На відрізку AB довжиною ℓ навмання поставлено дві точки L і M. Знайти ймовірність того, що точка L буде ближче до точки M, ніж до точки A.

   Відповідь: $P = \frac{3}{4}$.

6. На відрізку довжиною ℓ навмання поставлено дві точки. Визначити ймовірність того, що з трьох утворених частин відрізка можна побудувати трикутник.

Розв'язання:

Позначивши x і y довжини відповідно двох утворених відрізків, одержимо $\Omega = \{(x, y)|0 \leq x + y \leq \ell, x \geq 0, y \geq 0\}$.

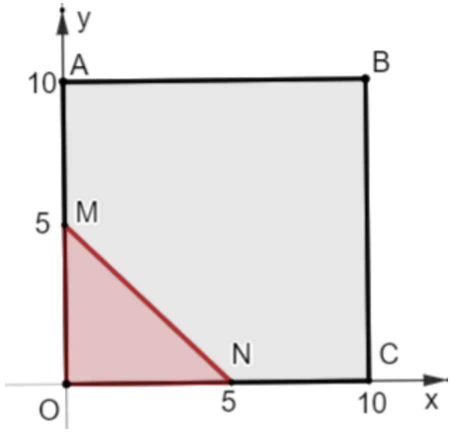
Довжина третього відрізка дорівнює $\ell - x - y$. Щоб з трьох відрізків довжиною x, y, $\ell - x - y$ можна було побудувати трикутник, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови: $x + y > \ell - x - y, x + (\ell - x - y) > y, y + (\ell - x - y) > x$.

Позначимо $A = \{(x, y)|x + y > \frac{\ell}{2}, x < \frac{\ell}{2}, y < \frac{\ell}{2}\}$. Маємо $m(\Omega) = \frac{\ell^2}{2}, m(A) = \frac{\ell^2}{8}$. Отже, $P(A) = \frac{1}{4}$.

7. Довільно вибирається два дійсних невід'ємних числа, кожне з яких не перевищує 10. Яка ймовірність того, що сума цих чисел не більша 5?

Розв'язання:

За умовою є два числа $x \in [0; 10]$, $y \in [0; 10]$ і подія A, при якій $x + y \leq 5$.



На декартовій площині в якості простору елементарних подій розглянемо множину $\Omega = \{(x;y)|x, y \in [0;10]\}$, тобто кожній парі чисел x і y відповідає точка $(x;y)$ всередині квадрата Ω.

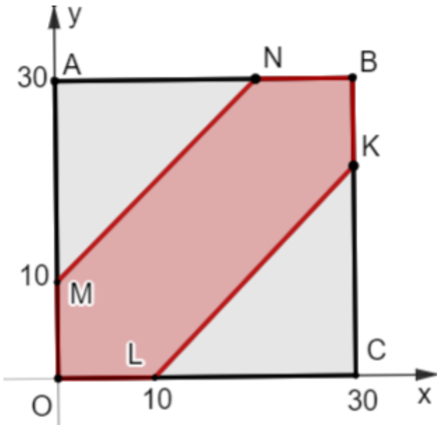
Тоді маємо, що подія, що задовольняє нашій умові, це множина $A = \{(x;y)|x + y \le 5, x, y \in [0;10]\}$. Побудуємо на декартовій площині множини Ω і A та легко зможемо обчислити шукану ймовірність події A:

$$P(A) = \frac{S_{OMN}}{S_{OABC}} = \frac{25}{100} = \frac{1}{8}.$$

8. Павло попросив Петра під час великої перерви (30 хв) принести йому зошит з хімії. Кожен з учнів приходить в будь-який час перерви і чекає 10 хв або до кінця перерви. Яка ймовірність того, що Павло отримає зошит?

<u>Розв’язання:</u>

Позначимо час приходу Петра через x, а Павла – через y.



Візьмемо за простір елементарних подій множину $S = \{(x;y)|x,y \in [0;30]\}$, а множиною, що відповідає за зустріч учнів, її підмножину $Z = \{(x;y)||x-y| \le 10, x,y \in [0;30]\}$. Побудуємо графічний образ цих множин. Ймовірність легко знаходимо через площі: $P(Z) = \dfrac{S_{OMNKL}}{S_{OABC}} = \dfrac{S_{OABC} - (S_{AMN} + S_{CLK})}{S_{OABC}} = \dfrac{30 \cdot 30 - 20 \cdot 20}{30 \cdot 30} = \dfrac{500}{900} = \dfrac{5}{9}$. Розглянемо цей розв'язок з точки зору операцій над подіями. Ми обчислили ймовірність події Z, використовуючи протилежну подію $\bar{Z}$. $P(Z) = 1 - P(\bar{Z}) = 1 - \dfrac{S_{AMN} + S_{CLK}}{S_{OABC}} = 1 - \dfrac{20 \cdot 20}{30 \cdot 30} = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$.

9. Дві особи мають однакову ймовірність прийти на вказане місце в довільний момент проміжку часу T. Визначити ймовірність того, що час чекання однієї особи іншої буде не більшим t.

<u>***Розв'язання:***</u>

Нехай t_1 і t_2 – моменти часу, коли на місце зустрічі прийшла відповідно перша і друга особи. Тоді простір елементарних подій має вигляд $\Omega = \{(t_1, t_2)|0 \le t_i \le T, i = 1, 2\}$.

Час чекання дорівнює $|t_2 - t_1|$, і цей час є не більшим за t, якщо точка (t_1, t_2) належить області $A = \{(t_1, t_2)||t_2 - t_1| \leq t, (t_1, t_2) \in \Omega\}$. Маємо $m(\Omega) = T^2$, $m(A) = T^2 - (T - t)^2$, $P(A) = 1 - (1 - \frac{t}{T})^2$.

Аналогічно розв'язуються задачі 10 і 11.

10. Два судна повинні підійти до одного причалу. Появи суден - незалежні випадкові величини, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна - 1 год, а другого - 2 год.

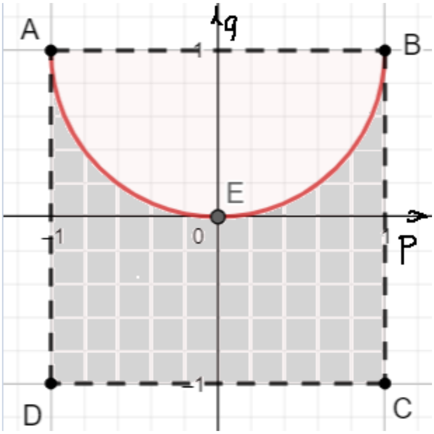
    Відповідь: $P = 1 - \frac{22^2+23^2}{2*24^2} \approx 0,121$.

11. В довільний момент проміжка часу T рівноможливе надходження до приймача двох сигналів. Приймач не буде працювати, якщо різниця між моментами надходження сигналів буде менше τ. Визначити ймовірність того, що приймач буде працювати.

    Відповідь: $P = (1 - \frac{\tau}{T})^2$.

12. На відрізку $[-1; 1]$ координатної прямої навмання обирають дві точки. Нехай p і q – координати цих точок. Знайдіть ймовірність того, що рівняння $t^2 + 2pt + q = 0$ має корені.

Розв'язання:



Оскільки точки обираються незалежно одна від одної, то розглянемо в якості простору елементарних подій множину $\Omega = \{(p;q)|p,q \in [-1;1]\}$ у декартовій системі координат pOq. Квадратне рівняння з умови має корені, коли його дискримінант невід'ємний: $D = p^2 - q \geq 0, q \leq p^2$. Тобто подія, при якій рівняння має корені, це множина $B = \{(p;q)|q \leq p^2;\ p,q \in [-1;1]\}$. Побудувавши множину B, шукатимемо ймовірність події B, як відношення площі криволінійної трапеції під параболою, до площі квадрата. Застосуємо до знаходження площі криволінійної трапеції визначений інтеграл: $S(B) = \int_{(-1)}^{1} p^2\,dp + 2 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} + 2 = \frac{8}{3}$.
$P(B) = \frac{S(B)}{S(U)} = \frac{8/3}{4} = \frac{2}{3}$.

13. У квадрат з вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ навмання кинуто точку. Нехай (ξ, η) – її координати. Знайти ймовірність того, що корені рівняння $x^2 + \xi x + \eta = 0$ будуть дійсними.

<u>Розв'язання:</u>

З умови маємо $\Omega = \{(u,v)|0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$. Корені даного квадратного рівняння будуть дійсними тоді і тільки тоді, коли дискримінант рівняння буде невід'ємним, тобто точка (ξ, η) повинна потрапити в область $A = \{(u, v) | u^2 - 4V \geq 0\}$.

Маємо $m(\Omega) = 1, m(A) = \int\limits_0^1 \frac{u^2}{4} du = \frac{1}{12}$. Отже,

$$P(A) = P\{\xi^2 - 4\eta \geq 0\} = \frac{1}{12}.$$

Аналогічно розв'язуються задачі 14–16.

14. Визначити ймовірність того, що корені рівняння $x^2 + 2ax + b = 0$ додатні, якщо рівноможливі значення коефіцієнтів a і b у квадраті $|a| \leq 1, |b| \leq 1$

    Відповідь: $P = \frac{1}{12}$.

15. Яка ймовірність того, що сума двох навмання взятих додатніх чисел, кожне з яких не більше одиниці, не буде більшою 1, а їх добуток не буде більшим за $\frac{2}{9}$?

    Відповідь: $P = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \ln 2$.

16. Навмання вибрано два додатніх числа x та y, кожне з яких не більше 2. Знайти ймовірність того, що $xy \leq 1, \frac{y}{x} \leq 4$.

    Відповідь: $P = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \ln 4$.

17. В колі з радіусом R навмання проводиться хорда. Позначимо її довжину через ξ. Знайти ймовірність $Q_x = P\{\xi > x\}$, якщо середина хорди рівномірно розподілена в колі.

Розв'язання:

Нехай (u, v) – це координати середини хорди, центр круга знаходиться в початку координат. Тоді $\Omega = \{(u, v) | u^2 + v^2 \leq R^2\}$. Для того, щоб довжина хорди ξ була більше x, необхідно і достатньо, щоб середина хорди потрапила в круг з центром в початку координат з радіусом $r = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$, де $0 < x < 2R$, тобто середина хорди повинна належати множині $A = \{(u, v) | u^2 + v^2 < r^2\}$, $m(\Omega) = \pi R^2$, $m(A) = \pi r^2$.

Отже, $Q_x = P\{\xi > x\} = P(A) = 1 - \frac{x^2}{4R^2}$, $0 < x < 2R$. Зрозуміло, що $Q_x = 0$, якщо $x \geq 2R$, $Q_x = 1, x \leq 0$.

18. Розв'язати задачу 17, якщо напрямок хорди фіксований, а її середина рівномірно розподілена в діаметрі, що перпендикулярний її напрямку.

Розв'язання:

Зрозуміло, що розташування хорди однозначно визначається розташуванням її середини на діаметрі, що перпендикулярний її напрямку.

Нехай цей діаметр лежить на координатній осі, а його кінці мають координати 0 і $2R$. Нехай u – координата середини хорди. Тоді $\Omega = \{u | 0 \leq u \leq 2R\}$.

Для виконання співвідношення $\xi > x$ необхідно і достатньо, щоб середина хорди потрапила в область $A = \{u | |u - R| < \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}\}$, $0 < x < 2R$. Отже, $Q_x = P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4R^2}}$, $0 < x < 2R$.

19. Розв'язати задачу 17, якщо один кінець хорди зафіксований, а другий рівномірно розподілений на колі.

Розв'язання:

Нехай φ – центральний кут, що відповідає нашій хорді. Оскільки один кінець хорди обирається довільно на колі, то $\Omega = \{\varphi | 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.

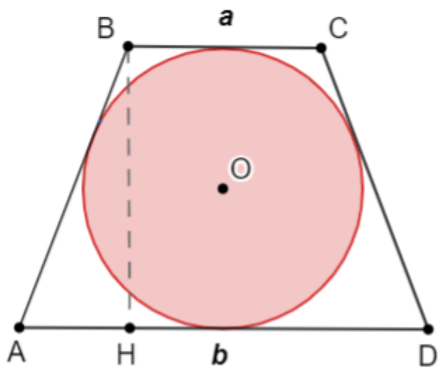
З геометричних міркувань випливає, що при $\xi \leq x$ кут φ повинен належати області $A = \{|\varphi| \leq 2 \arcsin \frac{x}{2R}\}$. Тому:

$Q_x = P\{\xi > x\} = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{x}{2R}$, $0 < x < 2R$.

20. У рівнобічну трапецію з основами a і b, вписане коло. В трапецію навмання кидається точка. Яка ймовірність того, що точка потрапить у вписане коло?

<u>Розв'язання:</u>

Простором елементарних подій Ω тут є множина всіх точок трапеції, а випадкова подія A – множина точок, що знаходяться у вписаному в трапецію колі. Оскільки точка попадає в обмежену фігуру на площині, природньо в якості міри скористатися площею. Позначимо радіус вписаного в дану трапецію кола через R.



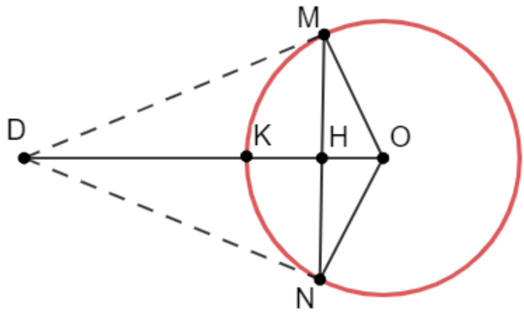
За властивістю описаних чотирикутників $AB + CD = a + b$. Опустимо висоту BH в трикутнику ABH. Маємо: $AB = \frac{a+b}{2}$, $BH = 2R$, $AH = \frac{b-a}{2}$. За теоремою Піфагора для трикутника ABH: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + (2R)^2$, $ab = 4R^2$, $2R = \sqrt{ab}$, $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot 2R = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}$. Отже ймовірність того, що точка потрапить у вписане коло:

$$P = \frac{S}{S_{ABCD}} = \frac{\pi\sqrt{ab}}{2(a+b)}.$$

21. В 25 см від центра кулі, радіусом 15 см знаходиться точкове джерело світла. Яка ймовірність того, що довільна точка на поверхні сфери буде освітленою?

Розв'язання:

Точкове джерело світла освітлює кульовий (сферичний) сегмент, розмір якого визначається дотичними, що проведені з точки джерела до сфери.



Тут простором елементарних подій Ω є точки поверхні сфери, а освітлені точки сегмента – підмножиною простору, назвемо їх подією A. Очевидно, у якості міри множин беремо площі бічних поверхонь сфери та сегмента. Площа поверхні кульового сегмента $S_{\text{кул.сегм}} = 2\pi Rh$, де R – радіус сфери, h – висота сегмента. За умовою $R = 15$ см, а для знаходження висоти побудуємо переріз через центр сфери O і точку джерела світла D. Оскільки DM – дотична, то трикутник DMO – прямокутний. Тому $MO^2 = OH \cdot OD$, $15^2 = OH \cdot 25$, $OH = 9$, $NH = h = R - OH = 15 - 9 = 6$. Тобто $S_{\text{кул.сегм}} = 2\pi Rh = 180\pi$, $S_{\text{пов.сфери}} = 4\pi R^2 = 900\pi$. Знаходимо шукану ймовірність

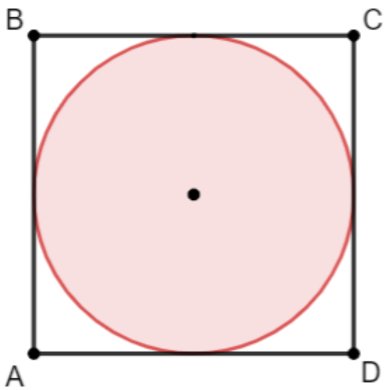
$$P(A) = \frac{S_{\text{кул.сегм}}}{S_{\text{пов.сфери}}} = \frac{180\pi}{900\pi} = 0,2.$$

22. Скільки точок незалежно потрібно кинути в квадрат, щоб з ймовірністю принаймні 99,999% хоча б одна з них потрапила у вписаний круг.

<u>***Розв'язання:***</u>

Позначимо радіус вписаного у квадрат кола за R, тоді ймовірність попадання будь-якої (i-тої) точки в круг дорівнює відношенню площ круга і квадрата:

$$P(A_i) = \frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{квадрата}}} = \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4}.$$



Нехай для досягнення потрібної ймовірності $P = 0,99999$ потрібно кинути n точок так, щоб хоча б одна з цих n точок попала в круг. Ця подія є сумою n незалежних подій A_i, тобто $P = P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = 0,99999$. Оскільки загальна формула ймовірності суми n незалежних подій достатньо громіздка, то обчислити цю ймовірність можна з допомогою протилежної події $\overline{A_1 + A_2 + \ \ldots \ + A_n}$:

$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = 1-P(\overline{A_1 + A_2 + \ \ldots \ + A_n}) = 1-P(\overline{A_1}\cdot \overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}) = 1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\ldots\cdot P(\overline{A_n}) = 1-(1-P(A_1))\cdot(1-P(A_2))\cdot\ldots\cdot(1-P(A_n)) = 1-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^n = 0,99999$. Отримуємо

$$\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^n = 0,00001 = 10^{-5},\ n = -\frac{5}{\lg(1-\frac{\pi}{4})} \approx 7,48092.$$

Враховуючи, що n число натуральне робимо висновок, що потрібно кинути принаймні вісім точок, щоб з вказаною ймовірністю попасти у вписаний в квадрат круг.

Задачі для самостійного розв'язування

23. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ, AC = \sqrt{3}, BC = 8$) навмання вибирають точку O. Яка ймовірність того, що кут OAC не перевищує 60°?

    Відповідь: $P = 0,375$.

24. Стрижень довжини 3 м зламали у певній точці. Яка ймовірність того, що довжина коротшої частини менша за 1 м?

    Відповідь: $P = \frac{2}{3}$.

25. В кулю вписаний куб. Точка навмання кидається в кулю. Яка ймовірність того, що точка попаде в куб?

    Відповідь: $P = \frac{2}{\sqrt{3}\pi}$.

26. Довільно вибирається 2 дійсних невід'ємних числа, кожне з яких не перевищує 10. Яка ймовірність того, що сума цих чисел належить проміжку $[2, 7]$?

    Відповідь: $P = 0,225$.

27. Юнак і дівчина домовилися зустрітися. Відомо, що кожен з них приходить у будь-який час з 15^{00} до 16^{00} незалежно від іншого. Якщо юнак прийде і не зустріне дівчину, то він буде чекати її ще 20 хв. Дівчина в аналогічній ситуації буде

чекати юнака протягом 10 хв. Яка ймовірність того, що зустріч відбудеться?

Відповідь: $P = \dfrac{31}{72}$.

28. У квадраті з вершинами в точках $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$ навмання обирають точку $Q(x;y)$. Знайдіть ймовірність випадкової події: $\{(x;y)|y \leq 8x^3\}$.

    Відповідь: $P = \dfrac{5}{8}$.

29. На відрізку $[0,10]$ випадковим і незалежним чином кинуті 2 точки. Знайти ймовірність того, що відстань якоїсь із них до початку координат не більша 3.

    Відповідь: $P = 0,09$.

30. Число a береться навмання з відрізка $[0;2]$, а число b – з відрізка $[-1;1]$. Яка ймовірність того, що рівняння $x^2 + ax + b = 0$ має дійсні корені?

    Відповідь: $P = \dfrac{2}{3}$.

31. На одиничному колі вибирають точку. Знайти ймовірність того, що її абсциса по модулю не перевищує 0.5.

    Відповідь: $P = \dfrac{1}{3}$.

Розділ 3

Умовна ймовірність. Незалежні випадкові події

Теоретичні відомості

Умовна ймовірність $P(A/B)$ події A при умові, що відбулась подія B, визначається співвідношенням:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Цю рівність можна записати у вигляді «теореми множення»:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A).$$

Випадкові події A і B називаються ***незалежними***, якщо:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A).$$

Випадкові події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються ***незалежними в сукупності***, якщо для всіх комбінацій індексів $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, \quad k = \overline{2, n}$ маємо:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$

Приклади і задачі

1. З множини чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ послідовно без повернення вибирають три числа. Знайти умовну ймовірність того, що третє число попаде в проміжок, утворений першими двома, якщо відомо, що перше число менше другого.

<u>Розв'язання:</u>

Елементарною подією у даному експерименті буде впорядкований набір різних трьох чисел. Всього елементарних подій:

$$|\Omega| = N(N-1)(N-2).$$

Нехай подія B полягає в тому, що перше число менше другого; подія A – третє число попаде в проміжок, утворений двома першими числами.

Тоді подія $A \cap B$ полягає в тому, що перше число менше від другого, а третє попадає в проміжок між ними.

Маємо:

$$|B| = C_N^2(N-2) = \frac{1}{2}N(N-1)(N-2),$$

$$|A \cap B| = C_N^3 = \frac{1}{6}N(N-1)(N-2).$$

Отже,

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}.$$

2. Кидають три гральних кубики. Яка ймовірність того, що принаймні один раз випаде 6 очок, якщо відомо, що на всіх трьох кубиках випали різні грані?

<u>Розв'язання:</u>

Зрозуміло, що:

$$\Omega = \{(i,j,k)| \quad i,j,k = \overline{1,6}\}, \quad |\Omega| = 6^3.$$

Нехай подія A полягає в тому, що принаймні один раз випало 6 очок, а подія B – на всіх трьох кубиках випали різні грані.

Подія $\bar{A}$ полягає в тому, що жодного разу не випало 6 очок. Скористаємось співвідношенням:

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B).$$

Маємо: $P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$. Зауважимо, що:

$$B = \{(i, j, k)| \quad i \neq j \neq k; \quad i, j, k = \overline{1, 6}\},$$

$$\bar{A} \cap B = \{(i, j, k)| \quad i \neq j \neq k, \quad i, j, k = \overline{1, 5}\}.$$

Отже, $|B| = 6 \times 5 \times 4 = 120, \quad |\bar{A} \cap B| = 5 \times 4 \times 3 = 60,$

$$P(A/B) = 1 - \frac{|\bar{A} \cap B|}{|B|} = \frac{1}{2}.$$

Аналогічно розв'язуються задачі 3 і 4.

3. Відомо, що при підкиданні 10 гральних кубиків випала принаймні одна одиниця. Яка ймовірність того, що випало не менше двох одиниць?

Відповідь: $P(A/B) = 1 - \frac{10 \times 5^9}{6^{10} - 5^{10}}$.

4. Підкидають 2 гральних кубики. Яка ймовірність того, що випаде принаймні одна шістка, якщо відомо, що сума очок дорівнює 8?

Відповідь: $P(A/B) = \frac{2}{5}$.

5. Гральний кубик підкидають доти, поки не випаде 6 очок. Знайти ймовірність того, що потрібно провести не менше трьох підкидань, якщо при першому підкиданні шість очок не випало.

<u>Розв'язання:</u>

Нехай подія A полягає в тому, що потрібно не менше трьох підкидань, а подія B – при першому підкиданні шість очок не випало.

При одному підкиданні ймовірність того, що випаде 6 очок, дорівнює $\frac{1}{6}$, а ймовірність того, що не випаде 6 очок дорівнює $\frac{5}{6}$.

Отже, $P(B) = \frac{5}{6}$.

Скористаємось співвідношенням:

$$P(A/B) = 1 - P(\bar{A}/B).$$

За означенням: $P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$. Подія $\bar{A} \cap B$ полягає в тому, що при першому підкиданні шість очок не випало, а при другому підкиданні з'явилась шістка.

Оскільки наслідки підкидань незалежні, то $P(\bar{A} \bigcap B) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$. Тому $P(A/B) = 1 - P(\bar{A}/B) = \frac{5}{6}$.

Аналогічно розв'язується задачі 6 – 8.

6. Гральний кубик підкидають доти, поки не випаде 6 очок. Знайти ймовірність того, що 6 очок випаде при другому підкиданні, коли відомо, що було проведено парне число підкидань.

<u>Відповідь:</u> $P(A/B) = \frac{11}{36}$.

7. Монета підкидається доти, поки не випаде двічі підряд однією і тією ж стороною. Знайти ймовірність того, що потрібно провести не менше 10 випробувань, якщо відомо, що перший раз випав герб.

Відповідь: $P(A/B) = \frac{1}{256}$.

8. Монету підкидають доти, поки вона не випаде двічі однією і тією ж стороною підряд. Знайти ймовірність того, що експеримент закінчився до шостого випробування, якщо відомо, що експеримент закінчився на парному кроці.

Відповідь: $P(A/B) = \frac{15}{16}$.

9. Два гравця A і B по черзі стріляють в ціль. Виграє той, хто влучить перший. Ймовірність влучення в ціль для A і B дорівнюють відповідно p_1 і p_2. Перший стріляє A. Обчислити ймовірність виграшу для кожного гравця.

Розв'язання:

Нехай A – це подія, яка полягає в тому, що виграв гравець A, а B – це подія, що виграв гравець B.

Тоді ймовірність того, що виграє A дорівнює:

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^k p_1 = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}.$$

Ймовірність того, що виграє B дорівнює:

$$P(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^k (1-p_1)p_2 = \frac{(1-p_1)p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)}.$$

Аналогічно розв'язуються задачі 10 і 11.

10. Два гравці A та B по черзі підкидають монету. Починає A. Виграє той, у кого першого випаде герб. Знайти ймовірність виграшу для кожного з гравців.

Відповідь: $P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{3}$.

11. В урні n білих та m чорних куль. Два гравці A та B по черзі дістають кулі з урни, повертаючи кожен раз взяту кулю в урну. Починає A. Виграє той, хто першим дістане білу кулю. Знайти ймовірність виграшу для кожного гравця.

Відповідь: $P(A) = \frac{n+m}{n+2m}, \quad P(B) = \frac{m}{n+2m}$.

12. Ймовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань подія A відбудеться хоча б один раз, дорівнює $\frac{15}{16}$. Визначити ймовірність появи події A при одному випробуванні, якщо ця ймовірність у всіх випробуваннях стала.

Розв'язання:

Ймовірність того, що у чотирьох випробуваннях подія A не з'явиться ні разу, дорівнює $1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$.

Нехай шукана ймовірність дорівнює p. Тоді з незалежності випробувань маємо співвідношення: $(1-p)^4 = \frac{1}{16}$. Звідси: $p = \frac{1}{2}$.

Аналогічно розв'язуються задачі 13 і 14.

13. Ймовірність влучити в десятку при одному пострілі дорівнює $0,2$. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб влучити в десятку хоча б один раз з імовірністю не меншою $0,9$?

Відповідь: $n = 11$.

14. З урни що містить 18 білих і 2 чорних кулі n разів виймають кулю з поверненням. Визначити найменше число випробувань, при якому ймовірність вийняти хоча б один раз чорну кулю буде більше $0,5$.

Відповідь: $n = 7$.

15. Зроблено три постріли в одну і ту ж мішень. Ймовірність влучення при першому, другому і третьому пострілі дорівнює відповідно $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,5$, $p_3 = 0,7$. Відомо, що є два вилучення. Яка ймовірність, що при другому пострілі було влучення?

Розв'язання:

Нехай A_i – це події, які полягають в тому, що при i-ому пострілі було влучення, $i = \overline{1,3}$. Тоді подію B, де було два влучення, можна представити у вигляді:

$$B = (A_1 \cap A_2 \cap \bar{A_3}) \cup (A_1 \cap A_3 \cap \bar{A_2}) \cup (A_2 \cap A_3 \cap \bar{A_1}).$$

За означенням умовної ймовірності маємо:

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{p_1p_2(1-p_3) + p_2p_3(1-p_1)}{p_1p_2(1-p_3) + p_1p_3(1-p_2) + p_2p_3(1-p_1)} = \frac{27}{41}.$$

Аналогічно розв'язуючи задачі 16 і 17.

16. Три мисливці одночасно зробили по одному пострілу у ведмедя. Ведмедя вбито однією кулею. Яка ймовірність того, що ведмедя вбито першим, другим або третім мисливцем, якщо ймовірність влучення для них відповідно дорівнює $p_1 = 0,2, p_2 = 0,4, p_3 = 0,6$.

    <u>Відповідь:</u> $P(A_1/B) = \frac{3}{29}, \quad P(A_2/B) = \frac{8}{29}, \quad P(A_3/B) = \frac{18}{29}$,

    де $A_i, \quad i = \overline{1,3}$ – подія, яка полягає в тому, що влучив i-й мисливець; B – подія, яка полягає в тому, що ведмедя вбито однією кулею.

17. Стрілець A влучає в мішень з ймовірністю $p_1 = 0,6$. Стрілець B – з ймовірністю $p_2 = 0,5$, а стрілець C – з ймовірністю $p_3 = 0,4$. Стрільці зробили залп по мішені. Відомо, що є два влучення. Що більш ймовірно: попав C в мішень чи ні?

    <u>Відповідь:</u> $P(C/D) = \frac{10}{19} > \frac{1}{2}, \quad D$ – було два влучення.

Розділ 4

Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Теоретичні відомості

Випадкові події $H_1, \dots, H_n$ утворюють повну групу подій, якщо:

- $H_i \bigcap H_j = \emptyset, \quad i \neq j,$
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega.$

Якщо $H_1, \dots, H_n$ – повна група подій і $P(H_i) > 0, \quad i = \overline{1, n},$ то для будь якої події A має місце формула повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i).$$

Якщо $H_1, \dots, H_n$ – повна група подій, $P(H_i) > 0, \quad i = \overline{1, n},$ а B – випадкова подія і $P(B) > 0$, то має місце формула Байєса:

$$P(H_i/B) = \frac{P(H_i) P(B/H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k) P(B/H_k)}.$$

Приклади і задачі

1. Є три однакових на вигляд урни. Перша урна містить дві білі та одну чорну, друга - три білі та одну чорну, третя - дві білі та дві чорні кулі. З обраної навмання урни виймається куля. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

Розв'язання:

Нехай H_i – подія, яка полягає в тому, що вибрано i-ту урну. Тоді $\{H_i, \quad i = \overline{1,3}\}$ – це повна група подій.

Якщо A – це подія, яка полягає в тому, що вийнята куля біла, то за формулою повної ймовірності маємо:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A/H_i) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{23}{36},$$

$$P(H_i) = \frac{1}{3}, \quad i = \overline{1,3};$$

$$P(A/H_1) = \frac{2}{3}; \quad P(A/H_2) = \frac{3}{4}; \quad P(A/H_3) = \frac{1}{2}.$$

Аналогічно розв'язуються задачі 2 і 3.

2. З урни, яка містить три білих та дві чорних кулі, перекладено дві кулі до урни, яка містить чотири білих та чотири чорних кулі. Яка ймовірність взяти білу кулю з другої урни після такого перекладання?

Відповідь: $P(A) = \frac{13}{25}$.

3. У двох урнах міститься відповідно m_1 і m_2 білих та n_1 і n_2 чорних куль. З кожної урни навмання виймається одна куля. а потім з цих двох куль навмання береться одна. Яка ймовірність, що куля біла?

Відповідь: $P(A) = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{n_1+m_1} + \frac{m_2}{n_2+m_2}\right)$.

4. Перша урна містить одну білу і 9 чорних куль, а друга – одну чорну і 5 білих куль. З кожної урни вийняли по одній кулі, а кулі, що залишились, висипали у третю урну. Знайти ймовірність того, що куля, яка вийнята з третьої урни, буде білою.

Розв'язання:

Розглянемо гіпотези:

- H_1 – з першої урни вийнято білу, а з другої – чорну кулю,
- H_2 – з першої урни вийнято чорну, а з другої – білу кулю,
- H_3 – з першої та другої урни видалили по білій кулі,
- H_4 – з першої та другої урни видалили по чорній кулі.

Тоді $\{H_i, \quad i = \overline{1,4}\}$ – повна група подій. Із незалежності подій, пов'язаних з першою і другою урнами, одержимо:

$$P(H_1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{60}, \quad P(H_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{4},$$

$$P(H_3) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{12}, \quad P(H_4) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{20}.$$

Якщо A – це подія, яка полягає в тому, що з третьої урни вийняли білу кулю, то:

$$P(A/H_1) = \frac{5}{14}, \quad P(A/H_2) = \frac{5}{14},$$

$$P(A/H_3) = \frac{2}{7}, \quad P(A/H_4) = \frac{3}{7}.$$

Отже,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i)P(A/H_i) = \frac{38}{105}.$$

5. В урні n куль. Усі можливі припущення про число білих куль в урні рівноможливі. Навмання з урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля виявиться білою?

Розв'язання:

Розглянемо гіпотези:

H_i – в урні міститься i білих куль, $i = \overline{0, n}$.

$\{H_i, \quad i = \overline{0, n}\}$ – повна група подій.

Оскільки всі події H_i рівноможливі, то

$$P(H_i) = \frac{1}{n+1}, \quad i = \overline{0, n}.$$

Якщо A – це подія, яка полягає в тому, що вийнята куля біла, то:

$$P(A/H_i) = \frac{i}{n}, \quad i = \overline{0, n}.$$

За формулою повної ймовірності маємо:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} P(H_i)P(A/H_i) = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}.$$

Аналогічно розв'язується задача 6.

6. В урну, яка містить n куль, поклали білу кулю. Яка ймовірність того, що взята з урни куля буде біла, якщо всі припущення про початковий склад урни рівноможливі?

<u>Відповідь:</u> $p = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

7. Нехай ймовірність p_n того, що в сім'ї n дітей, дорівнює $\alpha \cdot p^n$, $n \geq 1$, $\quad p_0 = 1 - \frac{\alpha p}{1-p}$. Припустимо, що народження хлопчика і дівчинки мають однакову ймовірність. Знайти ймовірність того, що в сім'ї k хлопчиків, $k \geq 1$.

<u>Розв'язання:</u>

Розглянемо гіпотези:

H_n – в сім'ї n дітей, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Тоді $\{H_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\}$ – повна група подій і за умовою $P(H_n) = \alpha \cdot p^n, \quad n \geq 1$. Ймовірність народження хлопчика і дівчинки однакова і дорівнює $\frac{1}{2}$.

Отже, якщо A_k – це подія, яка полягає в тому, що в сім'ї k хлопчиків, то:

$$P(A_k/H_n) = C_n^k \frac{1}{2^n}, \quad k \leq n.$$

За формулою повної ймовірності маємо:

$$P(A_n) = \sum_{n=k}^{\infty} P(H_n)P(A_n/H_n) = \sum_{n=k}^{\infty} \alpha \cdot p^n \cdot C_n^k \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{2\alpha \cdot p^k}{(2-p)^{k+1}}.$$

Тут ми використали співвідношення:

$$\sum_{n=k}^{\infty} s^n \cdot C_n^k = \frac{s^k}{(1-s)^{k+1}}, \quad 0 < s < 1.$$

Аналогічно розв'язується задача 8.

8. Деяка комаха з ймовірністю $\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ відкидає k яєць, а ймовірність розвитку комахи з яйця дорівнює p. Припускаючи взаємно незалежність розвитку яєць, знайти ймовірність того, що комахи буде рівно l нащадків.

Відповідь: $p = \frac{1}{l!} \cdot (p \cdot \lambda)^l \cdot e^{-pl}$.

9. Маємо 5 урн. В першій, другий і третій урнах міститься по дві білих та три чорних кулі; в 4-й та 5-й урнах – по одній білій та одній чорні кулі. Навмання обирається урна і з неї береться куля. Яка умовна ймовірність того, що обрано четверту або п'яту урну, якщо вийнята куля виявилась білою?

Відповідь: $P(H_2/B) = \frac{5}{11}$.

Аналогічно розв'язуються задачі 10 – 13.

10. Маємо 10 однакових урн. В 9 з них містяться по дві білих і дві чорних кулі, а в одній – 5 білих і одна чорна куля. З урни, обраної навмання, беруть кулю, яка виявилась білою. Яка ймовірність того, що взяли кулю з урни, яка містить 5 білих куль?

Відповідь: $p = \frac{5}{32}$.

11. Маємо k_1 урн, кожна з яких містить m_1 білих і n_1 чорних куль, k_2 урн, які містять m_2 білих і n_2 чорних куль. Вийнята з навмання обраної урни куля виявилась білою. Яка ймовірність того, що кулю взяли з першої групи урн?

Відповідь: $p = \frac{k_1 m_1(m_2+n_2)}{k_1 m_1(m_2+n_2)+k_2 m_2(m_1+n_1)}$.

12. З 18 стрільців 5 можуть влучити у мішень з ймовірністю $0,8$, 7 - з імовірністю $0,7$, 4 - з імовірністю $0,6$, 2 - з ймовірністю $0,5$. Навмання обраних стрілець зробив постріл, але в мішень не влучив. До якої групи належить цей стрілець?

Відповідь: До другої групи.

13. Третя частина однієї з трьох партій виробів є другосортною, всі інші вироби у всіх партіях першосортні. Виріб, з однієї партії, виявився першосортним. Яка ймовірність того, що виріб взято з партії, яка має другосортні вироби?

Відповідь: $p = \frac{1}{4}$.

14. Урна містить n куль. Усі припущення про число білих куль в урні однаково ймовірні. Навмання вийнята з урни куля виявилась білою. Імовірності всіх припущень про склад куль в урні. Яке припущення найбільш імовірне?

Розв'язання:

Розглянемо гіпотези:

H_i – в урні є i білих куль. Тоді $\{H_i, \quad i=\overline{0,n}\}$ утворюють повну групу подій. Так як усі рівноможливі, то $P(H_i) = \frac{1}{n+1}, \quad i=\overline{0,n}$. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що вийнята куля виявилось білою. Тоді $P(A/H_i) = \frac{i}{n}, \quad i=\overline{0,n}$.

За формулою Байеса маємо:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{k=0}^{n} P(H_k)P(A/H_k)} = \frac{2i}{n(n+1)}, \quad i = \overline{0,n}.$$

Найбільш ймовірною є гіпотеза H_n, оскільки

$$P(H_n/A) = \frac{2}{n+1}.$$

Аналогічно розв'язується задача 15.

15. З партії, що складається з п'яти виробів, навмання взяли один виріб, який виявився бракований. Кількість бракованих виробів однаково ймовірна, довільна. Яке припущення про кількість бракованих виробів найбільш імовірне?

Відповідь: Найбільш ймовірно, що всі п'ять виробів браковані.

16. Маємо партію з 8 виробів одного зразку. За даними перевірки половини партії, три вироби виявилися доброякісними, а 1 – бракований. Яка ймовірність, що при перевірці трьох наступних виробів один з них буде доброякісними, а 2 – бракованими, якщо довільна кількість бракованих виробів у цій партії рівноможлива?

Розв'язання:

Маємо гіпотези:

H_i – у партії i бракованих виробів. Тоді $\{H_i, \quad i = \overline{0,8}\}$ – повна група подій. Нехай B – подія, яка полягає в тому, що з чотирьох обраних виробів 3 доброякісні. Маємо:

$$P(B/H_i) = \frac{C_i^2 C_{8-i}^3}{C_8^4}, \quad i = \overline{1,5}, \quad P(B/H_j) = 0, \quad j = 0, 6, 7, 8.$$

Нехай A – це подія, яка полягає в тому, що при перевірці трьох наступних виробів, один буде доброякісним. Тоді:

$$P(A/H_3) = \frac{C_2^2 C_2^1}{C_4^3} = \frac{1}{2}, \quad P(A/H_4) = \frac{C_3^2 C_1^1}{C_4^3} = \frac{3}{4},$$
$$P(A/H_k) = 0, \quad k \neq 3, 4.$$

Отже, тепер треба обчислити за формулою Байеса:

$$P(H_3/B) = \frac{5}{21}, \quad P(H_4/B) = \frac{8}{63}.$$

Остаточно маємо:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{21} + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{63} = \frac{3}{14}.$$

17. З урни, яка містить $m (m > 3)$ білих і n чорних куль, загублено одну кулю. Для того, щоб визначити склад куль в урні, з урни взяли дві кулі, які виявились білими. Обчислити ймовірність того, що загублена куля – біла.

<u>Розв'язання:</u>

Розглянемо події:

H_1 – загублено білу кулю, H_2 – загублено чорну кулю. $\{H_1, H_2\}$ – повна група подій. $P(H_1) = \frac{m}{m+n}, \quad P(H_2) = \frac{n}{m+n}$.

Нехай A – це подія, яка полягає в тому, що вийняті були дві білі кулі. Тоді:

$$P(A/H_1) = \frac{(m-1)(m-2)}{(m+n-1)(m+n-2)},$$

$$P(A/H_2) = \frac{(m-1)m}{(m+n-1)(m+n-2)}.$$

За формулою Байєса маємо:

$$P(H_1/A) = \frac{m-2}{m+n-2}.$$

Аналогічно розв'язується задача 18 .

18. В урні знаходиться одна куля, про яку відомо, що вона або біла, або чорна. В урну поклали білу кулю, а потім після ретельного перемішування взяли навмання одну кулю, яка виявилась білою. Яка ймовірність того, що після цього візьмуть з урни білу кулю?

<u>Відповідь:</u> $p = \frac{2}{3}$.

Список літератури

[1] *Борисенко О.Д.* Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Теорія імовірностей" для студентів механіко-математичного факультету. — К. : ВПЦ "Київський університет", 1992.

[2] *Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Номирський Д.А., Якір М.С.* Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу: профільний рівень: підручник для 11 класів закладів загальної середньої освіти. — Х. : Гімназія, 2019.

[3] *Турчин В.М.* Теорія ймовірностей, основні поняття, приклади, задачі. — Київ, А.С.К., 2004.

[4] *Ядренко М.Й.* Дискретна математика. — К: ТВіМС, 2004.