

**Чисельні методи в задачах механіки.  
Частина II. Механіка суцільного середовища.  
Розв'язання граничних задач**

**Київ 2020**

**Чисельні методи в задачах механіки. Частина II. Механіка суцільного середовища. Розв'язання граничних задач** Навчально - методичний посібник.

Кафедра теоретичної і прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Укладач: доцент кафедри, к.ф-м н. Зражевський Г.М. Київ 2020. Електронна версія. 56 стор. іл. 21, Бібліогр.: с.55

Згідно з навчальним планом із спеціальності "Прикладна математика", освітньої програми "Комп'ютерна механіка", студенти магістри 1-го року навчання вивчають нормативний курс "Сучасні методи комп'ютерного аналізу граничних задач". Під час проходження цього курсу студенти мають засвоїти сучасні чисельні методи (проекційно-варіаційні, методи скінченних елементів, МСЕ, методи граничних елементів) та набути досвіду в програмній реалізації чисельних схем. Цей курс є продовженням та поглибленням курсу "Чисельні методи в задачах механіки", що викладається під час проходження бакалавріату. Базові знання в частині чисельних методів викладені в посібнику "Чисельні методи в задачах механіки. Частина I" ([http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/03/Zrazhevsky\\_Calculus\\_Final.pdf](http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/03/Zrazhevsky_Calculus_Final.pdf)). Методичний посібник створено на досвіді багаторічного викладання чисельних методів стосовно до задач механіки та науковій роботі в галузі сучасних аналітичних, напівааналітичних та чисельних методів стосовно задач механіки. Посібник окрім коротких теоретичних відомостей містить приклади, що ілюструють тему, яка підлягає розгляду. Приклади містять необхідні дослідження задачі, побудову алгоритму та чисельної схеми розв'язку, чисельну реалізацію та візуалізацію результатів розрахунків. Посібник включає ілюстративні програми, що можуть бути використані при індивідуальному виконанні завдань. Результати розрахунків для простоти сприймання, як правило, приводяться у вигляді малюнків та графіків. Кожна секція має самостійний характер та містить вправи, які повинні виконуватися слухачами

самостійно. Приклади та вправи підібрано таким чином, щоб охопити весь курс.

Посібник затверджено до друку (в вигляді електронної версії) на засіданні Вченої Ради механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Протокол N 11 від 15 квітня 2020 року

# 1 Апроксимація базисними функціями

Нехай область  $\Omega$  має замкнуту границю  $\Gamma$ . Апроксимація  $\varphi$  в  $\Omega \cup \Gamma$  визначається як:

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m, \quad \psi|_{\Gamma} = \varphi|_{\Gamma}, \quad (1.1)$$

де  $\{N_m : N_m|_{\Gamma} = 0; m = 1, 2, 3, \dots\}$  – повна система лінійно-незалежних базисних функцій,  $a_m$  – коефіцієнти апроксимації.

Рівняння зважених нев'язок має вигляд:

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega \equiv \int_{\Omega} W_l (\varphi - \tilde{\varphi}) d\Omega = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad (1.2)$$

де  $R_{\Omega} \equiv \varphi - \tilde{\varphi}$  – нев'язка апроксимації,  $\{W_l; l = 1, 2, 3, \dots\}$  – множина лінійно-незалежних вагових функцій.

Рівняння (1.2) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно невідомих коефіцієнтів апроксимації:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}, \quad (1.3)$$

де

$$\mathbf{a}^T = \{a_l\}_{l=1}^M, \quad \mathbf{K} = \{K_{lm}\}_{l,m=1}^M, \quad \mathbf{f}^T = \{f_m\}_{m=1}^M \quad (1.4)$$

$$K_{lm} = \int_{\Omega} W_l N_m d\Omega, \quad 1 \leq l, m \leq M, \quad (1.5)$$

$$f_l = \int_{\Omega} W_l (\varphi - \psi) d\Omega, \quad 1 \leq l \leq M. \quad (1.6)$$

Методи зважених нев'язок класифікуються в залежності від вибору типу вагових функцій. Приведемо деякі з них.

**Колокація по точкам** (інтерполяція):

$$W_l = \delta(x - x_l), \quad l = 1, 2, \dots, M \quad (1.7)$$

( $\delta(x)$  – дельта-функція Дірака). В цьому випадку з (1.5)–(1.6) маємо:

$$K_{lm} = N_m|_{x=x_l}, \quad f_l = (\varphi - \psi)|_{x=x_l}, \quad 1 \leq l, m \leq M. \quad (1.8)$$

**Колокація по підобластям** (метод скінченних об'ємів):

$$W_l = \chi_l(x), \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad (1.9)$$

$$\chi_l(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \Omega_l, \\ 1 & x \in \Omega_l \end{cases} \quad - \text{функція підобласті } l \text{ та } \bigcup_{l=1}^M \Omega_l = \Omega.$$

$$K_{lm} = \int_{\Omega_l} N_m d\Omega, \quad f_l = \int_{\Omega_l} (\varphi - \psi) d\Omega. \quad (1.10)$$

**Метод моментів:**

$$W_l = x^l, \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad (1.11)$$

$$K_{lm} = \int_{\Omega} x^l N_m d\Omega, \quad f_l = \int_{\Omega} x^l (\varphi - \psi) d\Omega. \quad (1.12)$$

**Метод найменших квадратів:**

$$W_l = \frac{\partial R}{\partial a_l}, \quad l = 1, 2, \dots, M. \quad (1.13)$$

**Методи Гальоркіна:**

$$W_l = N_l, \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad (1.14)$$

$$K_{lm} = \int_{\Omega} N_l N_m d\Omega, \quad f_l = \int_{\Omega} N_l (\varphi - \psi) d\Omega. \quad (1.15)$$

Для частинного випадку методу Гальоркіна одновимірної апроксимації в області  $\Omega : \{x; 0 \leq x \leq L\}$  з базисними (та ваговими) функціями  $N_m = \sin(m\pi x/L)$  отримаємо апроксимацію відрізком ряду Фур'є:

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad x \in [0, L], \quad (1.16)$$

з коефіцієнтами матриці апроксимації

$K_{lm} = L/2 \delta_l^m$  ( $\delta_l^m$  - символ Кронекера), в цьому випадку коефіцієнти апроксимації легко знаходяться та мають вигляд:

$$a_m = \frac{2}{L} f_l = \frac{2}{L} \int_0^L (\varphi - \psi) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (1.17)$$

**Приклад 1.1** Побудувати апроксимацію за допомогою колокації та відрізу ряду Фур'є таблично заданої функції:

$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\varphi(x_i)$	0	-0.1	-0.2	0	0.3	0.35

Зобразити результати розрахунків на графіках та дати аналіз збіжності в залежності від порядку апроксимації.

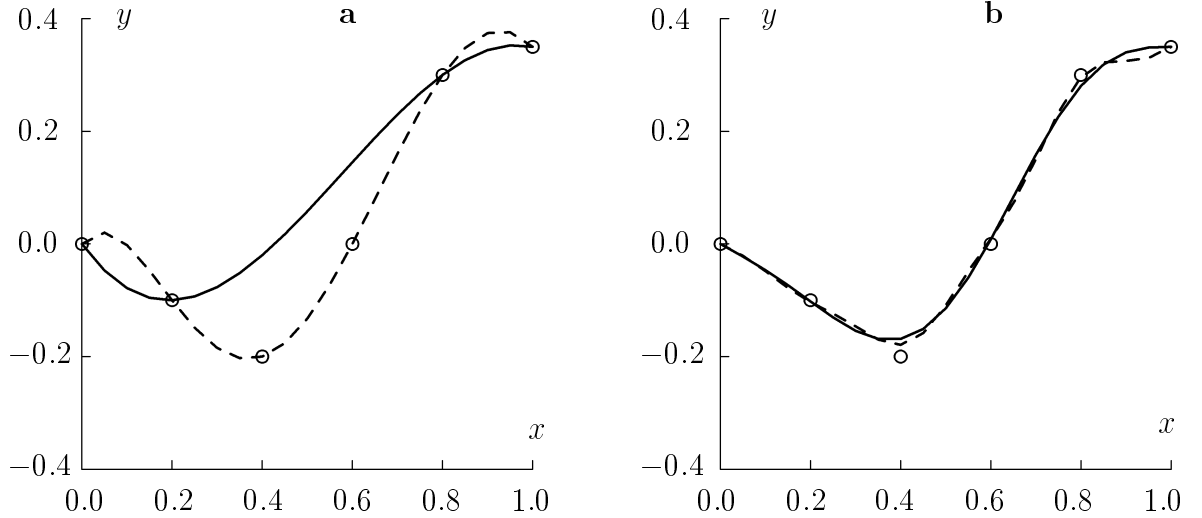


Рис. 1. Апроксимація таблично заданої функції, **(а)** апроксимація по колокаціям,  $\circ$  – таблично задані значення, — – апроксимація 2-го порядку ( $M = 2$ ), - - – апроксимація 4-го порядку ( $M = 4$ ), **(б)** апроксимація відрізком ряду Фур'є,  $\circ$  – таблично задані значення, — – апроксимація 3-го порядку ( $M = 3$ ), - - – апроксимація 6-го порядку ( $M = 6$ ).

**Розв'язок.** Для точного задовільнення граничних умов вибираємо  $\psi = 0.35x$ . Базисні функції поліноміальної апроксимації:  $N_m = x^m(1-x)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  (умову  $N_m|_{0,1} = 0$  – виконано). В цьому випадку, у відповідності з методом колокації, згідно з (1.8)

$$f_l = \varphi(\tilde{x}_l) - 0.35\tilde{x}_l, \quad K_{lm} = \tilde{x}_l^m(1 - \tilde{x}_l). \quad (1.18)$$

Для  $M = 2$  покладемо  $\tilde{x}_1 = x_2$ ,  $\tilde{x}_2 = x_5$ . В цьому випадку  $a_1 = -1.46$ ,  $a_2 = 1.98$ .

Для  $M = 4$  покладемо  $\tilde{x}_l = x_{l+1}$   $l = 1, 2, 3, 4$ . В цьому випадку  $a_1 = 0.625$ ,  $a_2 = -12.5$ ,  $a_3 = 22.1$ ,  $a_4 = -9.11$ .

Апроксимація згідно з (1.1) має вигляд:

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = 0.35x + \sum_{m=1}^M a_m x^m(1-x), \quad M \in \{2, 4\}. \quad (1.19)$$

Результати розрахунків зображено на Рис. 1(а). Для побудови апроксимації відрізком ряду Фур'є прийmemo  $N_m = \sin(m\pi x)$ . В цьому випадку, згідно з (1.17):

$$a_m = 2 \int_0^1 (\varphi - 0.35x) \sin(m\pi x) dx, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (1.20)$$

Скориставшись процедурою чисельного інтегрування за методом трапецій отримаємо:

$$a_1 = -0.235, \quad a_2 = -0.091, \quad a_3 = 0.055, \quad a_4 = 0.001, \quad a_5 = -0.0023, \quad a_6 = 0.00045.$$

Апроксимація має вигляд:

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = 0.35x + \sum_{m=1}^M a_m \sin(m\pi x). \quad (1.21)$$

Графіки, що ілюструють якість апроксимації побудовано на Рис. 1(б).

**Приклад 1.2** Експериментальні значення прогину квадратної пластини наведені в таблиці:

$y \setminus x$	0	0.25	0.5	0.75	1
0	0	0	0	0	0
0.25	0	0.8	1.3	0.3	0
0.5	0	1	1.8	0.5	0
0.75	0	0.5	0.8	0.3	0
1	0	0	0	0	0

Побудувати апроксимацію експериментальних даних за допомогою відрізка ряду Фур'є.

**Розв'язок.** Оскільки граничне значення апроксимованої функції рівне нулеві, покладаємо  $\psi = 0$  та

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = \sum_{l,m=1}^3 b_{lm} \sin(l\pi x) \sin(m\pi x), \quad M = 9. \quad (1.22)$$



Позначивши  $a_1 \equiv b_{11}, a_2 \equiv b_{12}, a_3 \equiv b_{13}, \dots, a_9 \equiv b_{33}$  та використавши метод Гальоркіна з ваговими та базисними функціями:  $W_1 = N_1 = \sin(\pi x) \sin(\pi y), W_2 = N_2 = \sin(\pi x) \sin(2\pi y), W_3 = N_1 = \sin(2\pi x) \sin(\pi y), \dots, W_9 = N_1 = \sin(3\pi x) \sin(3\pi y),$

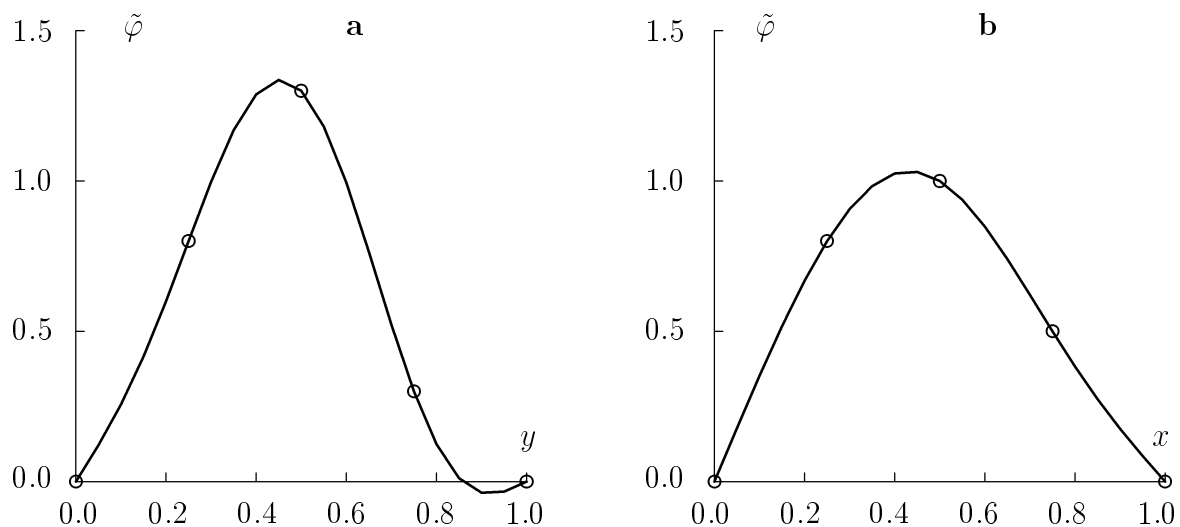


Рис 2. Якість апроксимації експериментального прогину пластини, **(а)** – значення в розрізі  $y = 0.5$ , **(б)** – значення в розрізі  $x = 0.5$ ,  $\circ$  – задані значення. — – апроксимація.

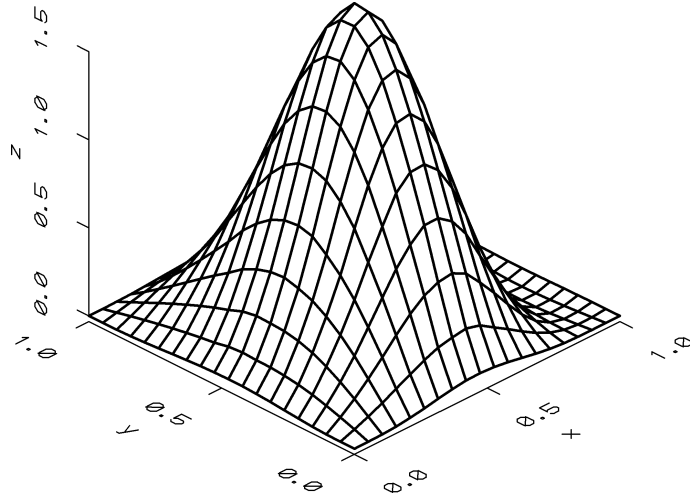


Рис 3. Апроксимація експериментальних даних прогину пластини.

та записавши рівняння зважених нев'язок:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left( \sum_{m=1}^9 b_m N_m - \varphi \right) W_l dx dy = 0, \quad (1.23)$$

отримаємо систему лінійних рівнянь (1.3) з коефіцієнтами:

$$K_{lm} = \int_0^1 \int_0^1 N_m W_l dx dy, \quad f_l = \int_0^1 \int_0^1 \varphi W_l dx dy, \quad 1 \leq l, m \leq 9. \quad (1.24)$$

Базисні (вагові) функції ортогональні та  $K_{lm} = 1/4 \delta_l^m$ . Якість апроксимації проілюстровано на Рис. 2 (а),(b), де зображено значення апроксимації в перерізах  $x = 0.5$  та  $y = 0.5$  та експериментальні вихідні дані. На Рис. 3 зображено повну апроксимацію експериментальних даних прогину пластини.

## Вправи.

1.1 Для прикладу 1.2 побудувати шести елементну поліноміальну апроксимацію, використовуючи колокації по внутрішнім точкам. Побудувати графіки та проаналізувати якість апроксимації.

1.2 Апроксимувати по методу Гальоркіна таблично задану функцію:

$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\varphi(x_i)$	0	-0.1	-0.2	0	0.3	0.35

використавши відповідний набір поліномів. Побудувати графіки та проаналізувати якість апроксимації.

## 2 Апроксимація розв'язків диференціальних рівнянь

Нехай функція  $\varphi$  має задовольняти лінійному диференціальному рівнянню:

$$A(\varphi) \equiv \Lambda\varphi + p = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2.1)$$

та граничним умовам:

$$B(\varphi) \equiv \Upsilon\varphi + r = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (2.2)$$

де  $\Lambda$  та  $\Upsilon$  – лінійні диференціальні оператори.

Поклавши нев'язку рівняння для апроксимації розв'язку  $\tilde{\varphi}$ :

$$R_\Omega \equiv \Lambda\tilde{\varphi} + p \quad \text{в } \Omega, \quad (2.3)$$

запишемо рівняння зважених нев'язок диференціального рівняння:

$$\int_{\Omega} R_\Omega W_l d\Omega, \quad l = 1, \dots, M, \quad (2.4)$$

використавши вагові функції  $W_l$  (див. (1.2)).

Апроксимацію розв'язку згідно з (1.1) шукаємо у вигляді розкладу по базисним функціям  $N_m$ :

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m. \quad (2.5)$$

Якщо покласти:

$$\Upsilon\psi = -r, \quad \Upsilon N_m = 0, \quad m = 1, \dots, M \quad \text{на } \Gamma, \quad (2.6)$$

то коефіцієнти апроксимації задовольнятимуть СЛАР:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad \text{ii} : \quad (2.7)$$

$$K_{lm} = \int_{\Omega} W_l \Lambda N_m d\Omega, \quad f_l = - \int_{\Omega} W_l r d\Omega - \int_{\Omega} W_l \Lambda \psi d\Omega. \quad (2.8)$$

**Приклад 2.1** Побудувати апроксимацію відрізком ряду Фур'є розв'язка граничної задачі:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi|_0 = \varphi|_1 = 0.$$

Скористатись методами колокації та Гальоркіна. Порівняти апроксимацію з точним розв'язком.

**Розв'язок.** Точний розв'язок задачі має вигляд:

$$\varphi = x(x - 1).$$

Оскільки граничні умови однорідні, покладемо  $\psi \equiv 0$  та запишемо згідно з (1.17) апроксимацію у вигляді:

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = \sum_{m=1}^M a_m \sin((2m - 1)\pi x), \quad x \in [0, 1], \quad (2.9)$$

$$(N_m|_{0,1} = 0, \quad N_m(0.5 - x) = N_m(0.5 + x)).$$

Поклавши для одноелементної апроксимації  $\tilde{x}_1 = 0.5$ , згідно з (1.7), (2.7) матимемо:

$$K_{11} = -\pi^2, \quad f_1 = 2, \quad \text{та } \tilde{\varphi} = -(2/\pi^2) \sin(\pi x).$$

Для двохелементної апроксимації покладемо  $\tilde{x}_1 = 0.2$ ,  $\tilde{x}_2 = 0.4$ , оскільки з умови зрозуміло, що розв'язок має бути симетричним відносно  $x = 0.5$ .

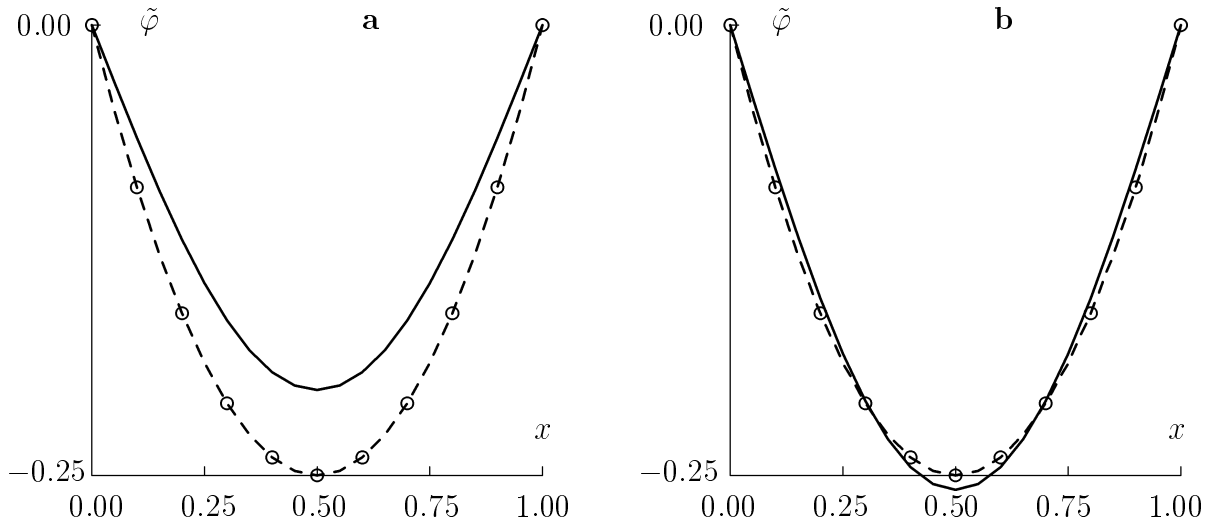


Рис 4. Апроксимація розв'язку граничної задачі з прикладу 2.1 відрізком ряду Фур'є, **(а)** апроксимація по колокаціям, **(б)** апроксимація по Гальоркіну,  $\circ$  – точний розв'язок, — – одноелементна апроксимація, - - - двохелементна апроксимація.

Графіки апроксимацій приведено на Рис. 4(а). Формули для апроксимації по Гальоркіну легко отримати з (1.14), (2.7). Оскільки базисні функції ортогональні, матриця жорсткості є однодіагональною.

Для одноелементної апроксимації:

$$K_{11} = -\pi^2/2, f_1 = 4/\pi, \text{ та } \tilde{\varphi} = -(8/\pi^3) \sin(\pi x).$$

Для двохелементної апроксимації:

$$K_{11} = -\pi^2/2, K_{12} = K_{21}, K_{22} = -9\pi^2/2, f_1 = 4/\pi, f_2 = 4/(3\pi).$$

Наближення апроксимації до точного розв'язку проілюстровано на Рис. 4(б).

**Приклад 2.2** Деяка задача одновимірної стаціонарної теплопровідності з розподіленим джерелом тепла описується рівнянням та граничними умовами:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi + 1 = 0, \quad \varphi|_0 = 0, \quad \left( \frac{d\varphi}{dx} + \varphi \right) \Big|_1 = 0.$$

Знайти наближений розв'язок за допомогою метода Гальоркіна.

**Розв'язок.** Точний розв'язок задачі має вигляд:

$$\varphi = \cos x + \left( \frac{1 + \sin 1 - \cos 1}{1 + \sin 1 + \cos 1} \right) \sin x - 1.$$

Виберемо базисні функції:

$$N_m = x^m \left( x - \left( 1 + \frac{1}{m+1} \right) \right), \quad m = 1, \dots, M, \quad (2.10)$$

так, що  $N_m|_0 = 0$ ,  $\left( \frac{dN_m}{dx} + N_m \right)|_1 = 0$ .

Коефіцієнти апроксимації знаходяться з (2.7), де згідно з (2.8):

$$\begin{aligned} K_{lm} = & \int_0^1 x^l (x - (1 + 1/(1+l))) (x^{m+1} - (1 + 1/(1+m))x^m + \\ & m(m+1)x^{m-1} - m(m-1)(1 + 1/(1+m))x^{m-2}) dx, \\ & 1 \leq l, m \leq M, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$f_l = - \int_0^1 x^l \left( x - \left( 1 + \frac{1}{1+l} \right) \right) dx, \quad 1 \leq l \leq M. \quad (2.12)$$

**Приклад 2.3** В двовимірній стаціонарній задачі теплопровідності на границях квадратної пластини зі стороною 2 задано розподіл температури. На  $x = \pm 1 : 1 - y^2$ , на  $y = \pm 1 : 1 - x^2$ . Використавши метод Гальоркіна, розшукати розподіл температури в пластині.

**Розв'язок.** Розподіл температури в пластині повинен задовольняти граничній задачі:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad -1 \leq x, y \leq 1, \quad (2.13)$$

$$\varphi|_{x=\pm 1} = 1 - y^2, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad \varphi|_{y=\pm 1} = 1 - x^2, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (2.14)$$

Вибір  $\psi = 2 - x^2 - y^2$  дозволить точно задовольнити граничним умовам, якщо  $N_m|_{\Gamma} = 0$ ,  $m = 1, \dots, M$ . Очевидно, що розв'язок задачі (2.13) –

(2.14) має бути парним по  $x$  та  $y$ , тому візьмемо за базисні функції:

$$\begin{aligned} N_1 &= \cos(\pi x/2) \cos(\pi y/2), & N_2 &= \cos(\pi x/2) \cos(3\pi y/2), \\ N_3 &= \cos(3\pi x/2) \cos(\pi y/2), & N_4 &= \cos(3\pi x/2) \cos(3\pi y/2), \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

Згідно з (2.8) використовуючи симетрію  $N_m$  (по методу Гальоркіна,  $W_l = N_l$ ) маємо:

$$K_{lm} = 4 \int_0^1 dx \int_0^1 N_l \left( \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \right) dy, \quad l, m = 1, \dots, M, \quad (2.16)$$

$$f_l = 16 \int_0^1 dx \int_0^1 N_l dy, \quad l = 1, \dots, M. \quad (2.17)$$

Використавши процедури чисельного інтегрування та розв'язавши СЛАР порядку 4 (для  $M = 4$ ) отримаємо коефіцієнти апроксимації.

Розв'язок визначається виразом (2.5). Граничні умови згідно з вибором  $\psi$  та  $N_m$  задовольняються точно, відносна середньо-квадратична похибка не більша за 0.001.

## Вправи.

2.1 Розподіл згинаючого моменту  $M(x)$  в балці, що знаходиться в статичній рівновазі під дією навантаження  $b(x)$ , задовольняє рівнянню:  $\frac{d^2 M}{dx^2} = b$ . Балка одиничної довжини вільно спирається на фундамент та несе навантаження  $b = \sin(\pi x)$ . Обчислити розподіл згинаючого моменту, використавши методи Гальоркіна та колокації. Порівняти апроксимації з точним розв'язком.

2.2 Поперечний прогин  $w$  точок балки на пружній основі (модель Вінклера) описується рівнянням:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = b, \quad (2.18)$$

де  $EI$  – жорсткість балки на згин,  $k$  – коефіцієнт жорсткості основи,  $b$  – навантаження.

Відшукати по методу Гальоркіна апроксимацію прогину для балки одичної довжини з приведеними характеристиками:  $EI = 1$ ,  $k = 1$ ,  $b = const = 1$ . Вважати, що кінцями балка вільно опирається на фундамент.

2.3 Розв'язати задачу прикладу 2.3 за допомогою методу колокації по внутрішнім точкам. Порівняти розв'язки.

### 3 Одночасна апроксимація розв'язків диференціальних рівнянь та граничних умов

Задамо апроксимацію виразом:

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m. \quad (3.1)$$

Розв'язок граничної задачі (2.1) – (2.2) можна відшукати, не накладаючи граничні умови (2.6) на  $N_m$ . Введемо в розгляд нев'язку граничних умов:

$$R_\Gamma \equiv \Upsilon \tilde{\varphi} + r = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (3.2)$$

Рівняння зважених нев'язок матиме вигляд:

$$\int_{\Omega} R_\Omega W_l d\Omega + \alpha \int_{\Gamma} R_\Gamma \bar{W}_l d\Gamma = 0, \quad l = 1, \dots, M, \quad (3.3)$$

де  $\bar{W}_l$  – вагові граничні функції (визначені взагалі кажучи лише на  $\Gamma$ ),  $\alpha$  – коефіцієнт штрафу (визначає співвідношення вагів граничної нев'язки та нев'язки рівняння).

Рівняння (3.3) для лінійних операторів  $\Lambda$  та  $\Upsilon$  приводиться до СЛАР

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (3.4)$$

$$K_{lm} = \int_{\Omega} W_l \Lambda N_m d\Omega + \alpha \int_{\Gamma} \bar{W}_l \Upsilon N_m d\Gamma, \quad (3.5)$$



$$f_l = - \int_{\Omega} W_{lp} d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{W}_l r d\Gamma. \quad (3.6)$$

**Приклад 3.1** Методом зважених нев'язок знайти розподіл згинаючого моменту в задачі з прикладу 2.1, використавши апроксимацію, що автоматично задовольняє граничній умові при  $x = 0$ , але не задовольняє автоматично граничній умові на  $x = 1$ . Розглянути випадки  $\alpha = 0.1, 1, 10, 100$ .

**Розв'язок.** Точний розв'язок граничної задачі

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \sin(\pi x), \quad M|_0 = M|_1 = 0,$$

має вигляд:  $M = -(1/\pi^2) \sin(\pi x)$ .

Скористаємось для апроксимації базисними функціями  $N_m = x^m$  (що забезпечують автоматичне задоволення граничних умов при  $x = 0$ ) та покладемо  $\bar{W}_l \equiv N_l|_{\Gamma}$ . Скориставшись методом Гальоркіна, отримаємо:

$$K_{lm} = \int_0^1 m(m-1)x^{l+m-2} dx + \alpha, \quad f_l = \int_0^1 x^l \sin(\pi x) dx. \quad (3.7)$$

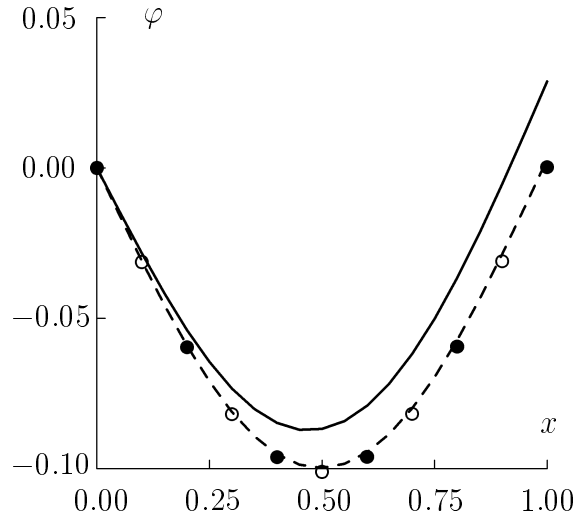


Рис 5. Залежність поліноміальної апроксимації від коефіцієнту штрафу,  $\circ$  – точний розв'язок, апроксимації:  $\bullet$  –  $\alpha = 10$ ,  $--$  –  $\alpha = 1$ ,  $—$  –  $\alpha = 0.1$ .

Апроксимація має вигляд  $\tilde{M} = \sum_{m=1}^5 a_m x^m$ .

Результати обрахунків приведено на Рис. 5.

**Приклад 3.2** Однорідна тонка пружня пластина з жорсткістю на згин  $D$  вільно спирається вздовж сторін  $\Gamma$  та знаходиться під дією розподіленого рівномірного згинаючого навантаження інтенсивності одиниця. Малі прогини точок такої пластини описуються рівнянням:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{1}{D}, \quad -1 \leq x, y \leq 1, \quad (3.8)$$

та граничними умовами:

$$\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (3.9)$$

( $D$  – жорсткість пластини на згин,  $n$  – зовнішня нормаль до  $\Gamma$ ). Знайти поліноміальну апроксимацію прогину квадратної пластини  $|x|, |y| \leq 1$  для  $D = 1$ . Дослідити задовільнення граничних умов при збільшенні порядку апроксимації.

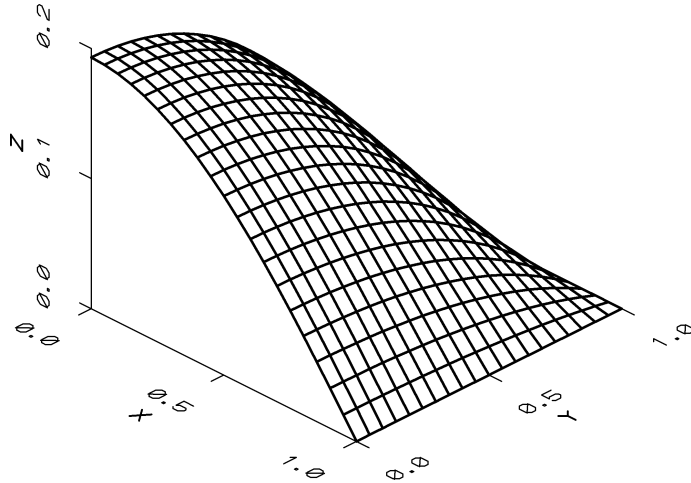


Рис 6. Апроксимація по колокаціям прогину пластини з прикладу 3.2.

**Розв’язок.** Виберемо парну по  $x$  та  $y$  апроксимацію, що автоматично задовольняє суттєвим граничним умовам ( $\varphi|_{\Gamma} = 0$ ):

$$\tilde{\varphi} = (1 - y^2)(1 - x^2)(a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2 + a_4 x^2 y^2 + \dots). \quad (3.10)$$

Оскільки з постановки задачі випливають умови симетрії:

$$\varphi(x, y) = \varphi(-x, y) = \varphi(x, -y) = \varphi(y, x),$$

достатньо розглянути лише 1/8 частину пластини:  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq x$ .

Легко отримати:

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{x=1} = 2a_1(y^2-1) + 10a_2(y^2-1) + 2a_3y^2(y^2-1) + 10a_4y^2(y^2-1) + \dots \quad (3.11)$$

Для запису співвідношення зважених нев'язок скористаємось методом колокацій по точкам  $\{\tilde{x}_l \in \Omega, \bar{x}_s \in \Gamma, l + s = M\}$ . В цьому випадку:

$$K_{lm} = \Delta \Delta N_m|_{\tilde{x}_l}, \quad f_l = 1, \quad K_{sm} = \left. \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \right|_{\bar{x}_s}, \quad f_s = 0, \quad l + s, m \leq M.$$

Результати розрахунків приведені на Рис. 6.

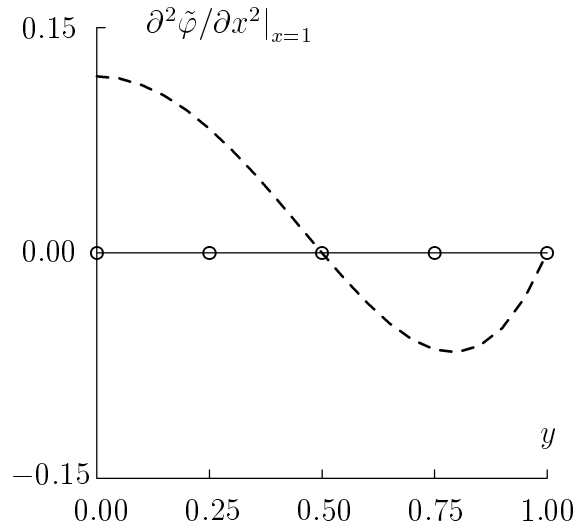


Рис 7. Граничне значення  $\left. \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} \right|_{x=1}$  в задачі про згин пластини з прикладу 3.2. — — точне значення, о — для чотириелементної апроксимації, - - - для триелементної апроксимації.

На Рис. 7 проілюстровано задовільнення натуральних граничних умов

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} \Big|_{\Gamma} = 0$  в залежності від порядку апроксимації. В першому випадку  $M = 4$ , точки колокації в обрано в середині області:  $\tilde{x}_1 = (0.25, 0.25)$ ,  $\tilde{x}_2 = (0.75, 0.25)$  та  $\bar{x}_1 = (1.0, 0.25)$ ,  $\bar{x}_2 = (1.0, 0.75)$  – на границі. В другому випадку  $M = 3$  при тих же точках колокації всередині області взято лише одну точку на границі  $\bar{x}_1 = (1.0, 0.5)$ .

### Вправи.

3.1 Розшукати по методу Гальоркіна чотириелементну поліноміальну апроксимацію розв'язку задачі кручення стрижня з квадратним розрізом, що визначається рівнянням:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 1, \quad -1 \leq x, y \leq 1,$$

та граничними умовами:  $\varphi|_{\Gamma} = 0$ . Використати апроксимацію, що автоматично задовольняє граничним умовам на  $x = \pm 1, |y| \leq 1$ . Перевірити якість виконання граничних умов на решті границі.

3.2 Побудувати апроксимацію розв'язку граничної задачі:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \varphi = x^2, \quad \varphi|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=1} = 1.$$

Скористатись апроксимацією що не задовольняє автоматично граничним умовам.

3.3 Розв'язати задачу з прикладу 3.2, вважаючи, що пластина консольно закріплена по контуру:

$$\varphi|_{\Gamma} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0$$

Густина згинаючої сили задається як  $\sin(\pi x)$ . Тип апроксимації та системи базисних та вагових функцій вибрати на свій розсуд.

## 4 Натуральні граничні умови

**Приклад 4.1** Рівняння, що описує розподіл температури  $T$  у в'язкій рідині, що протікає між двома паралельними пластинами ( $y = 0$  та  $y =$

$2H$ ), має вигляд:

$$\frac{d^2T}{dy^2} = -\frac{4U^2\mu}{H^4k}(H-y)^2,$$

де  $\mu$  – коефіцієнт в'язкості,  $k$  – коефіцієнт теплопровідності рідини,  $U$  – максимальна швидкість в потоці. Нехай  $\mu = 0.1$ ,  $k = 0.08$ ,  $U = 3.0$ . На нижній пластині підтримується постійна температура  $T = 0$ , верхня – термоізолювана. Знайти апроксимацію розв'язку задачі, скориставшись слабким формулюванням.

**Розв'язок.** Перейдемо до формулювання задачі в безрозмірних змінних поклавши:  $\check{y} = \frac{y}{2H}$ ,  $\check{T} = \frac{TH^4k}{64U^2\mu}$ :

$$\frac{d^2\check{T}}{d\check{y}^2} = -(0.5 - \check{y})^2. \quad (4.1)$$

Співвідношення зважених нев'язок має вигляд:

$$\int_0^1 W_l \frac{d^2\check{T}}{d\check{y}^2} d\check{y} + \int_0^1 W_l (0.5 - \check{y})^2 d\check{y} + \bar{W}_l \check{T} \Big|_{\check{y}=0} - \bar{W}_l \frac{d\check{T}}{d\check{y}} \Big|_{\check{y}=1} = 0. \quad (4.2)$$

Проінтегрувавши перший інтеграл частинами

$$\int_0^1 W_l \frac{d^2\check{T}}{d\check{y}^2} d\check{y} = \bar{W}_l \frac{d\check{T}}{d\check{y}} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dW_l}{d\check{y}} \frac{d\check{T}}{d\check{y}} d\check{y}, \quad (4.3)$$

та поклавши:  $N_m|_0 = 0$ ,  $W_l|_0 = 0$ ,  $\bar{W}_l|_1 = W_l|_1$ ,

матимемо

$$\int_0^1 \frac{dW_l}{d\check{y}} \frac{d\check{T}}{d\check{y}} d\check{y} + \int_0^1 W_l (0.5 - \check{y})^2 d\check{y} = 0. \quad (4.4)$$

Використавши апроксимацію (3.1), отримаємо СЛАР (3.4), де

$$K_{lm} = \int_0^1 \frac{dW_l}{d\check{y}} \frac{dN_m}{d\check{y}} d\check{y}, \quad f_l = \int_0^1 W_l (0.5 - \check{y})^2 d\check{y}. \quad (4.5)$$

Побудуємо поліноміальну апроксимацію методом Гальоркіна:

$$N_m = W_m = \bar{W}_m = y^m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Легко отримати:

$$K_{lm} = \frac{lm}{l+m-1}, \quad f_l = \frac{0.25}{l+1} - \frac{1}{l+2} + \frac{1}{l+3}. \quad (4.7)$$

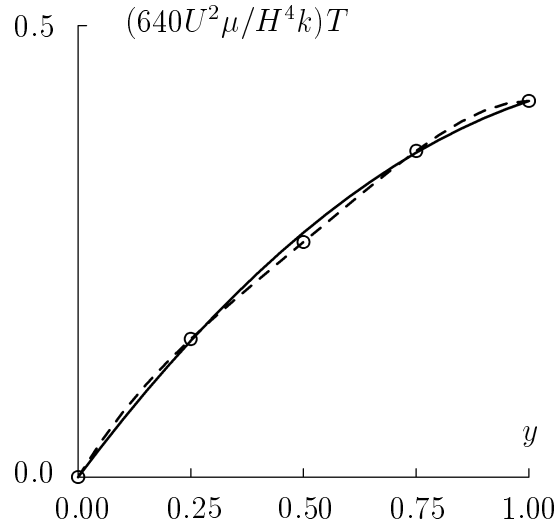


Рис 8. Апроксимація розв'язку задачі в слабкому формулюванні з прикладу 4.1  $\circ$  – точний розв'язок, — – двоелементна апроксимація, - - - чотириелементна апроксимація.

Розв'язок задачі для різних порядків апроксимації представлено на Рис. 8. Зауважимо, що для  $M = 4$ ,  $\left. \frac{dT}{dy} \right|_1 = -2.22 \cdot 10^{-16}$ , тоді як для  $M = 2$ ,  $\left. \frac{dT}{dy} \right|_1 = 1.66 \cdot 10^{-2}$ .

### Вправи.

4.1. Повернутись до розгляду задачі з вправи 2.2. Розшукати натуральні граничні умови цієї задачі. Розв'язати цю задачу в слабкому формулюванні, вважаючи, що кінці балки вільні. Використати апроксимацію, що не задовольняє автоматично натуральним граничним умовам.

4.2. Знайти апроксимацію розв'язку задачі стаціонарної теплопровідності в квадратній пластині без внутрішніх джерел тепловиділення (див. приклад 2.3). На сторонах  $y = \pm 1$  підтримується постійна температура  $100^\circ\text{C}$ , а на сторонах  $x = \pm 1$  задано імпедансну умову  $\partial\varphi/\partial n = 1 - \varphi$ . Використати рівняння зважених нев'язок в слабкому формулюванні.

## 5 Метод граничного розв'язку

Якщо для довільних  $m$   $A(N_m) = 0$ , то рівняння зважених нев'язок має вигляд (3.3):

$$\int_{\Gamma} R_{\Gamma} \bar{W}_l d\Gamma, \quad l = 1, \dots, M. \quad (5.1)$$

**Приклад 5.1** Розв'язати задачу стаціонарної теплопровідності:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad -1 \leq x, y \leq 1,$$

$$\varphi|_{x=\pm 1} = 0, \quad \partial \varphi / \partial n - \varphi|_{y=\pm 1} = 1 - x^2.$$

**Розв'язок.** Скористаємось поліноміальною апроксимацією:

$$\tilde{\varphi} = \sum_m a_m N_m, \quad N_m = \Re(\Im) z^m, \quad z = x + i y.$$

Оскільки  $z^m$  -аналітична функція,  $\Delta \Re z^m = 0$ ,  $\Delta \Im z^m = 0$  для довільного  $m$ . Розв'язок має бути парним по  $x$  та  $y$ , тому візьмемо за базисні функції:

$$N_1 \equiv \Re z^0 = 1,$$

$$N_2 \equiv \Re z^2 = x^2 - y^2,$$

$$N_3 \equiv \Re z^4 = x^4 - 6x^2 y^2 + y^4,$$

$$N_4 \equiv \Re z^4 = x^6 - 15x^2 y^4 + 15x^4 y^6 - y^6.$$

Рівняння зважених нев'язок для цієї задачі з врахуванням симетрії має вигляд:

$$\int_0^1 \bar{W}_l \tilde{\varphi}|_{x=1} dy + \int_0^1 \bar{W}_l \left( \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} - \tilde{\varphi} \right) \Big|_{y=1} dx = \int_0^1 \bar{W}_l|_{y=1} (1 - x^2) dx.$$

Нехай  $\bar{W}_l = N_l|_{\Gamma}$ , тоді:

$$K_{lm} = \int_0^1 N_l N_m|_{x=1} dy + \int_0^1 N_l \left( \frac{\partial N_m}{\partial y} - N_m \right) \Big|_{y=1} dx, \quad l, m = 1, 2, \dots, M,$$

$$\int_0^1 N_l|_{y=1} (1 - x^2) dx, \quad l = 1, 2, \dots, M.$$

На Рис. 9 проілюстровано задовільнення граничних умов в залежності від порядку апроксимації на  $y = 1, 0 \leq x \leq 1$  та  $x = 1, 0 \leq y \leq 1$ .

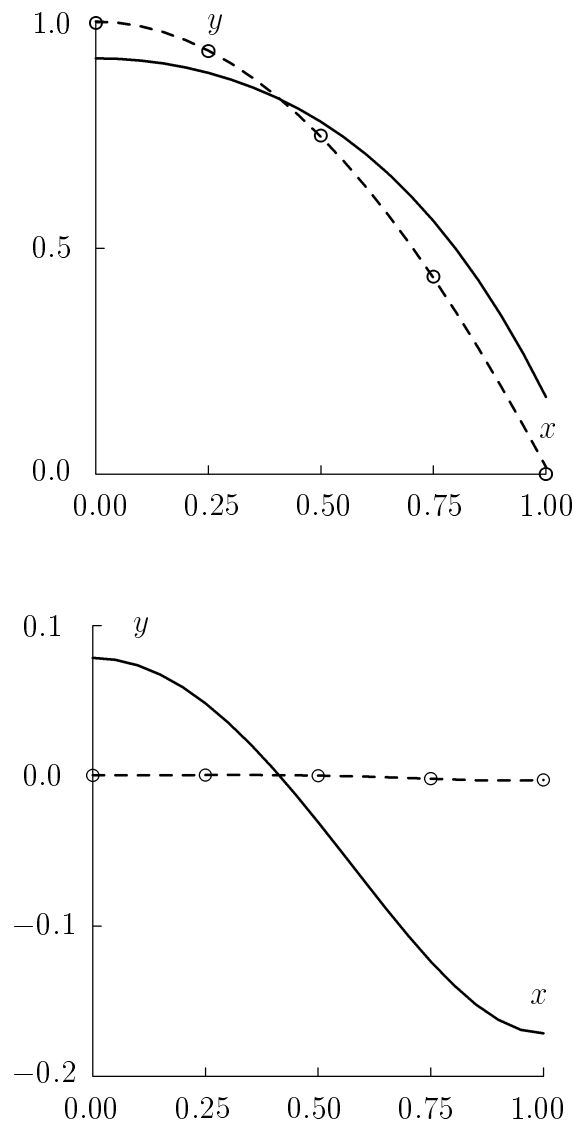


Рис 9. Задовільнення граничних умов в задачі 5.1.  $\circ$  – точний розв’язок, — – двоелементна апроксимація, -- – чотириелементна апроксимація.



### Приклад 5.2

Знайти апроксимацію розв'язку задачі кручення стрижня з еліптичним перерізом:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2, \quad x^2 + (y/2)^2 \leq 1,$$

$$\varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma : x^2 + (y/2)^2 = 1.$$

**Розв'язок.** Перейдемо до задачі з однорідним рівнянням, виділивши частинний розв'язок:  $\varphi = \check{\varphi} - (x^2 + y^2)/2$ :

$$\frac{\partial^2 \check{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \check{\varphi}}{\partial y^2} = 0, \quad x^2 + (y/2)^2 \leq 1,$$

$$\check{\varphi}|_{\Gamma} = (x^2 + y^2)/2.$$

Скористаємось системою базисних функцій (5.2) з прикладу 5.1. Задовольняючи граничні умови згідно з симетрією задачі по методу колокацій по точкам границі:  $\bar{x}_1 = (1.0, 0.0)$ ,  $\bar{x}_2 = (0.5, 1.732)$ ,  $\bar{x}_3 = (0.866, 1.0)$ ,  $\bar{x}_4 = (0.0, 2.0)$ , очевидно,:

$$K_{lm} = N_m|_{\bar{x}_l}, \quad f_l = \left. \frac{x^2 + y^2}{2} \right|_{\bar{x}_l}, \quad l, m = 1, 2, 3, 4.$$

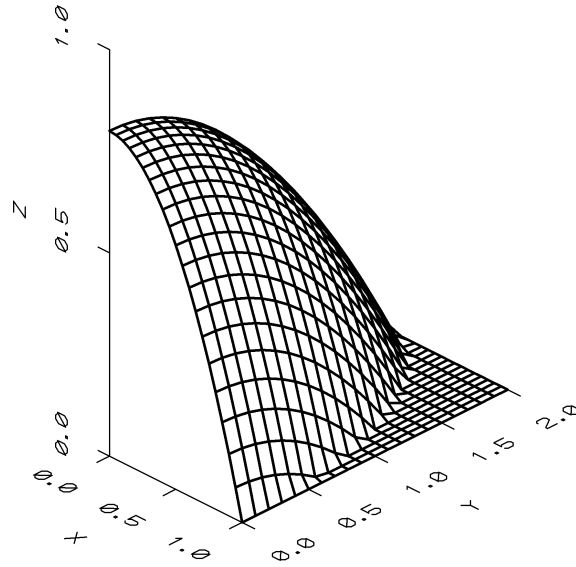


Рис 10. Чотириелементна апроксимація в задачі про кручення з прикладу 5.2

Результати розрахунків приведено на Рис. 10. Граничні умови для чотириелементної апроксимації виконуються з похибкою  $\sim 0.0001$ .

### Вправи.

5.1. Повернутись до розгляду задачі з прикладу 5.2. Вважаючи, що переріз стрижня – рівносторонній трикутник зі стороною 1, знайти апроксимацію розв’язку по методу Гальоркіна та колокацій. Дослідити виконання граничних умов. Порівняти розв’язки.

## 6 Апроксимація розв’язків систем диференціальних рівнянь

Розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\mathbf{A}(\vec{\varphi}) \equiv \mathbf{L}\vec{\varphi} + \vec{p} = \mathbf{0} \quad \text{в } \Omega, \quad (6.1)$$

з граничними умовами:

$$\mathbf{B}(\vec{\varphi}) \equiv \mathbf{Y}\vec{\varphi} + \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \text{на } \Gamma, \quad (6.2)$$

де  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{Y}$  – лінійні диференціальні оператори, та:

$$\mathbf{A}(\vec{\varphi}) = \begin{bmatrix} A_1(\vec{\varphi}) \\ A_2(\vec{\varphi}) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1(\vec{\varphi}) \\ B_2(\vec{\varphi}) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Апроксимація розшукується у вигляді:

$$\vec{\varphi} \approx \tilde{\vec{\varphi}} = \vec{\psi} + \sum_{m=1}^M \mathbf{N}_m \mathbf{a}_m, \quad \vec{\psi}^T = (\psi_1, \psi_1, \dots), \quad \mathbf{a}_m^T = (a_m^1, a_m^2, \dots), \quad (6.4)$$

$$\mathbf{N}_m = \begin{bmatrix} N_{m,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{m,2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \end{bmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

Ввівши системи просторових та граничних вагових матричних функцій:

$$\mathbf{W}_l = \begin{bmatrix} W_{l,1} & 0 & 0 \\ 0 & W_{l,2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{W}}_l = \begin{bmatrix} \bar{W}_{l,1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{W}_{l,2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

запишемо рівняння зважених нев'язок:

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}_l \mathbf{A}(\vec{\varphi}) d\Omega + \alpha \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{W}}_l \mathbf{B}(\vec{\varphi}) d\Gamma = \mathbf{0}, \quad l = 1, \dots, M. \quad (6.7)$$

**Приклад 6.1** Рівняння прогину балки на пружній основі (2.18) може бути записано у вигляді:

$$EI \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -M, \quad \frac{d^2 M}{dx^2} - k\varphi = b. \quad (6.8)$$

Для балки одиничної довжини з приведеними характеристиками:  $EI = 1$ ,  $k = 1$ ,  $b = x(x - 1)$  побудувати апроксимацію розв'язку, якщо обидва кінці балки вільно оперті ( $\varphi|_{x=0,1} = M|_{x=0,1} = 0$ ).

**Розв'язок.** Очевидно:

$$\mathbf{A}(\vec{\varphi}) = \mathbf{\Lambda}\vec{\varphi} + \vec{p} = \begin{bmatrix} 1 & d^2/dx^2 \\ d^2/dx^2 & -1 \end{bmatrix} \vec{\varphi} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (6.9)$$

$$\mathbf{B}(\vec{\varphi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Big|_{x=0,1} \vec{\varphi} = 0, \quad \vec{\varphi} = \begin{bmatrix} M \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Покладемо  $N_m^{M(\varphi)} = W_m^{M(\varphi)} = \sin(m\pi x)$ ,  $\psi^{M(\varphi)} = 0$  (згідно з методом Гальоркіна). Граничні умови виконуються автоматично та рівняння зв'язаних нев'язок (6.7) має вигляд:

$$\int_0^1 \mathbf{N}_l \mathbf{\Lambda} \vec{\varphi} dx + \int_0^1 \mathbf{N}_l \vec{p} dx = \mathbf{0}, \quad (6.11)$$

або

$$\sum_{m=1}^M \left( \int_0^1 \mathbf{N}_l \mathbf{\Lambda} \mathbf{N}_m dx \right) \vec{a}_m + \int_0^1 \mathbf{N}_l \vec{p} dx = \mathbf{0}, \quad (6.12)$$

що зводиться до СЛАР:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}, \quad (6.13)$$

де

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \vec{f}_l = - \int_0^1 \begin{bmatrix} N_l^M & 0 \\ 0 & N_l^\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} dx, \quad (6.14)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \dots & \mathbf{K}_{1M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{M1} & \mathbf{K}_{M2} & \dots & \mathbf{K}_{MM} \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

$$\mathbf{K}_{lm} = \int_0^1 \begin{bmatrix} N_l^M & 0 \\ 0 & N_l^\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d^2/dx^2 \\ d^2/dx^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_m^M & 0 \\ 0 & N_m^\varphi \end{bmatrix} dx. \quad (6.16)$$

Таким чином:

$$\vec{f}_l = - \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ N_l^\varphi b \end{bmatrix} dx, \quad \mathbf{K}_{lm} = \int_0^1 \begin{bmatrix} N_l^M N_m^M & N_l^M d^2 N_m^\varphi / dx^2 \\ N_l^\varphi d^2 N_m^M / dx^2 & -N_l^\varphi N_m^\varphi \end{bmatrix} dx. \quad (6.17)$$

Ортогональність базисних функцій дозволяє в даному випадку порахувати (6.17) аналітично:

$$\vec{f}_l = -\frac{1}{m\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ (-1)^{m+1} + \{((m\pi)^2 - 2)(-1)^m + 2\} \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

$$\mathbf{K}_{lm} = \frac{\delta_m^l}{2} \begin{bmatrix} 1 & -(m\pi)^2 \\ -(m\pi)^2 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Як видно,  $K$  має блочно-діагональну структуру. Розв'язок (6.13) має вигляд:

$$\begin{bmatrix} a_l^\varphi \\ a_l^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/(1 + (l\pi)^4) \{(-1)^{l+1}/(l\pi) + \{((l\pi)^2 - 2)(-1)^l + 2\}/(l\pi)^3\} \\ (l\pi)^2 a_l^\varphi \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

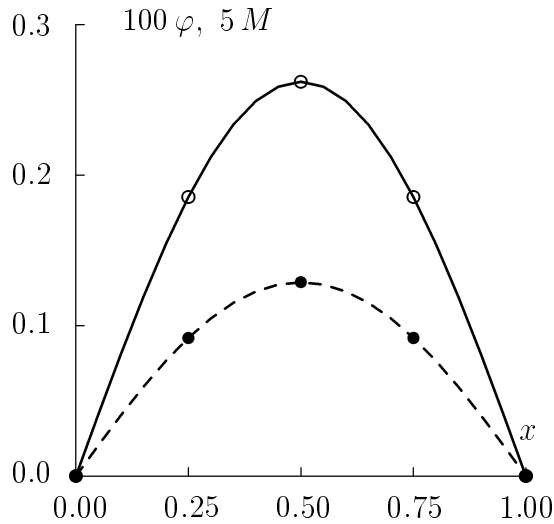


Рис 11. Апроксимація прогину балки та моменту з прикладу 6.1,  $\circ$  – точні значення прогину,  $\bullet$  – точні значення моменту, — – значення апроксимації прогину, - - – значення апроксимації моменту.

Результати розрахунків для чотириелементної апроксимації приведено на Рис. 11.

**Приклад 6.2** В двовимірній ламінарній течії ідеальної нестискаємої рідини потенціал  $\varphi$  та компоненти швидкості  $u$ ,  $v$  задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (6.21)$$

Побудувати апроксимацію для  $u$ ,  $v$ ,  $\varphi$  в квадраті  $-1 \leq x, y \leq 1$ , якщо

$$u|_{x=\pm 1} = 0, \quad v|_{y=-1} = 0, \quad v|_{y=1} = x. \quad (6.22)$$

**Розв'язок.** Очевидно, що  $v(-x, y) = -v(x, y)$ ,  $u(-x, y) = u(x, y)$ . Ско-ристаємось методом граничного розв'язку. Візьмемо за базисні функції для апроксимації  $\varphi$  дійсні та уявні частини аналітичних функцій  $z^m$  (див. (5.1)):

$$\begin{aligned}
N_1^\varphi &= x, \\
N_2^\varphi &= xy, \\
N_3^\varphi &= x^3 - 3xy^2, \\
N_4^\varphi &= x^3y - xy^3, \\
N_5^\varphi &= x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4,
\end{aligned} \tag{6.23}$$

базисні функції для розкладу  $u$  та  $v$  визначимо з перших двох рівнянь (6.22):

$$\begin{aligned}
N_1^u &= \partial N_1^\varphi / \partial x = 1, & N_1^v &= \partial N_1^\varphi / \partial y = 0, \\
N_2^u &= \partial N_2^\varphi / \partial x = y, & N_2^v &= \partial N_2^\varphi / \partial y = x, \\
N_3^u &= \partial N_3^\varphi / \partial x = 3x^2 - 3y^2, & N_3^v &= \partial N_3^\varphi / \partial y = -6xy, \\
N_4^u &= \partial N_4^\varphi / \partial x = 3x^2y - y^3, & N_4^v &= \partial N_4^\varphi / \partial y = x^3 - 3xy^2, \\
N_5^u &= \partial N_5^\varphi / \partial x = 5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4, & N_5^v &= \partial N_5^\varphi / \partial y = 20xy^3 - 20x^3y.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Апроксимація, таким чином, може бути записана у вигляді:

$$\vec{\tilde{\varphi}} = \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^M a_m \mathbf{N}_m, \quad \mathbf{N}_m = \begin{bmatrix} N_m^u \\ N_m^v \\ N_m^\varphi \end{bmatrix}. \tag{6.25}$$

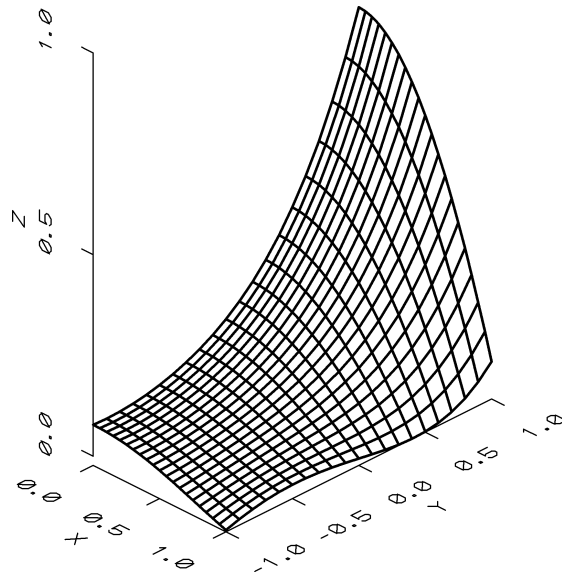


Рис 12. Апроксимація вертикальної компоненти швидкості з прикладу 6.2

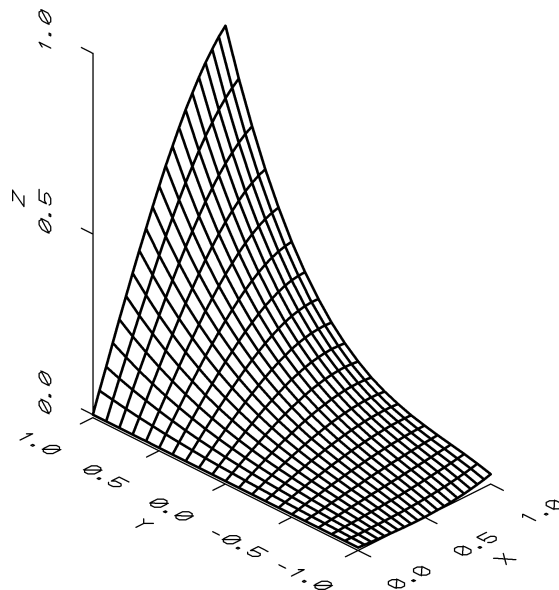


Рис 13. Апроксимація горизонтальної компоненти швидкості з прикладу 6.2



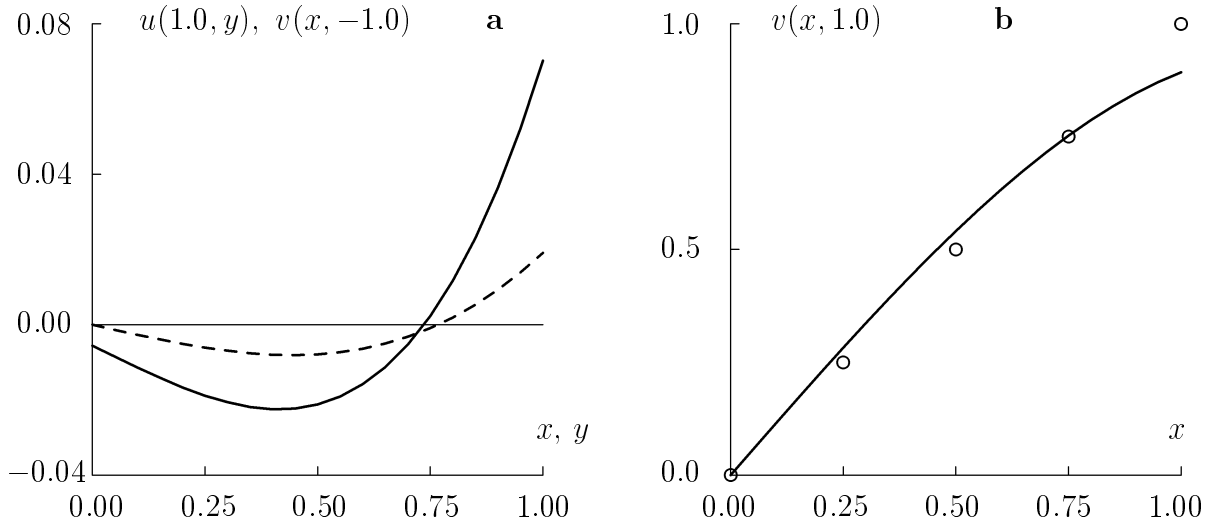


Рис 14. Виконання граничних умов в задачі з прикладу 6.2 (а): — —  $u(1.0, y)$ , - - -  $v(x, -1.0)$ , (b):  $\circ$  — точний розв'язок, — —  $v(x, 1.0)$ .

Такий вигляд апроксимації для довільних чисел  $a_m$  задовольняє рівнянню:

$$\mathbf{A}(\vec{\varphi}) = \mathbf{\Lambda}\vec{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\partial/\partial x \\ 0 & 1 & -\partial/\partial y \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & 0 \end{bmatrix} \vec{\varphi} = \mathbf{0}. \quad (6.26)$$

Симетрія задачі дає можливість задавільняти граничні умови лише на частині границі. Рівняння зважених граничних нев'язок має вигляд:

$$\sum_{m=1}^M \left\{ \int_0^1 \bar{\mathbf{W}}_l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}_m|_{y=-1} dx + \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{W}}_l \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}_m|_{x=1} dy + \int_0^1 \bar{\mathbf{W}}_l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}_m|_{y=1} dx \right\} a_m - \int_0^1 \bar{\mathbf{W}}_l|_{y=1} \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} dx = 0. \quad (6.27)$$

(6.27) визначає СЛАР:

$$\mathbf{K}\vec{a} = \vec{f}, \quad (6.28)$$

з компонентами:

$$K_{lm} = \int_0^1 N_l^v N_m^v|_{y=-1} dx + \int_0^1 N_l^u N_m^u|_{x=1} dy + \int_0^1 N_l^v N_m^v|_{y=1} dx, \quad (6.29)$$

$$f_l = \int_0^1 x N_l^v|_{y=1} dx. \quad (6.30)$$

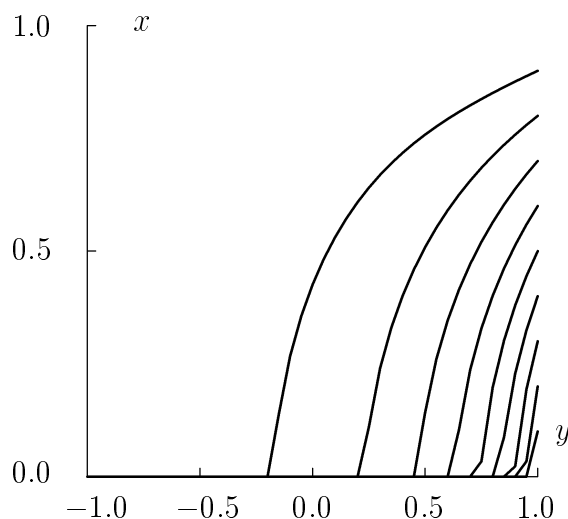


Рис. 15. Лінії току в задачі з прикладу 6.2

Розрахунки проведені для шестиелементної апроксимації. Розподіл горизонтальної  $u$  та вертикальної  $v$  складових вектора швидкості в потоці приведено на Рис.12 – Рис.13. На Рис. 14 ( $a, b$ ) проілюстровано задовільнення граничних умов. На Рис. 15 зображено лінії току, що визначаються як інтеграл рівняння  $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ .

### Вправи.

6.1. Повернутись до розгляду задачі з прикладу 6.1. Розв'язати задачу, вважаючи, що кінці балки консольно закріплені.

6.2. Розв'язати задачу з прикладу 6.2 для граничних умов:

$$u|_{x=\pm 1, |y| \leq 1} = 0, \quad v|_{y=-1, -1 \leq x \leq 0} = 0, \quad v|_{y=-1, 0 \leq x \leq 1} = x, \quad v|_{y=1, |x| \leq 1} = x.$$

6.3. Записати рівняння стаціонарної теплопровідності (приклад 5.1) у вигляді двох рівнянь: закону Фур'є (залежність інтенсивності теплового потоку від величини температури) та рівняння балансу тепла. Знайти апроксимацію розв'язку задачі стаціонарної теплопровідності для еліптичного диску  $x^2 + (y/2)^2 \leq 1$  з граничними умовами:

$$\varphi|_{\Gamma_\varphi} = 1, \quad \Gamma_\varphi : x \geq 0, \quad x^2 + (y/2)^2 = 1,$$

$$\varphi|_{\Gamma_q} = 1, \quad \Gamma_q : x \leq 0, \quad x^2 + (y/2)^2 = 1.$$

## 7 Двовимірні задачі лінійної теорії пружності

Позначимо:

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}^T &\equiv (u, v), \\ \vec{\varepsilon}^T &\equiv (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}) = \mathbf{L}\vec{\varphi}, \\ \vec{\sigma}^T &\equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) = \mathbf{D}\vec{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

$\vec{\varphi}$  – вектор переміщень,  $\vec{\varepsilon}$  – вектор деформацій,  $\vec{\sigma}$  – вектор напружень, та

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Рівняння рівноваги (Ламе):

$$\mathbf{A}(\vec{\varphi}) \equiv \begin{bmatrix} \partial\sigma_x/\partial x + \partial\sigma_{xy}/\partial y + X \\ \partial\sigma_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + Y \end{bmatrix} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \vec{\varphi} + \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad (7.3)$$

граничні умови:

$$\mathbf{B}(\vec{\varphi}) \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \sigma_{xy} n_y - \bar{t}_x \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_y n_y - \bar{t}_y \end{bmatrix} = \sigma_n - \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0}, \quad \text{на } \Gamma_\sigma, \quad (7.4)$$

$$\mathbf{B}(\vec{\varphi}) \equiv \begin{bmatrix} u - \bar{u} \\ v - \bar{v} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \text{на } \Gamma_\varphi, \quad (7.5)$$

$\vec{t}^T = (\bar{t}_x, \bar{t}_y)$  – заданий вектор напружень на частині поверхні  $\Gamma_\sigma$ ,  $\vec{u}^T = (\bar{u}, \bar{v})$  – заданий вектор переміщень на частині поверхні  $\Gamma_\varphi$ ,  $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_\varphi = \Gamma$ . Апроксимацію запишемо у вигляді:

$$\vec{\varphi} \approx \tilde{\varphi} = \vec{\psi} + \sum_{m=1}^M \mathbf{N}_m \mathbf{a}_m, \quad \vec{\sigma} = \mathbf{DL}\tilde{\varphi}. \quad (7.6)$$

Нехай

$$\vec{\psi} = \vec{u}|_{\Gamma_\varphi}, \quad \mathbf{N}_m|_{\Gamma_\sigma} = \mathbf{0}. \quad (7.7)$$

Рівняння зважених нев'язок:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{W}_l \mathbf{L}^T \mathbf{DL} \vec{\varphi} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{W}_l \mathbf{X} d\Omega + \\ & \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{W}}_l \vec{\sigma}_n d\Gamma - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{W}}_l \vec{t} d\Gamma = \mathbf{0}, \quad l = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Легко пересвідчитись, що це рівняння за допомогою теореми Остроградського-Гауса можна перетворити перетворюється на рівняння в слабкому формулюванні:

$$- \int_{\Omega} (\mathbf{L} \mathbf{W}_l)^T \vec{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{W}_l \mathbf{X} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma + \Gamma_\varphi} \mathbf{W}_l \vec{\sigma}_n d\Gamma - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{W}}_l \vec{t} d\Gamma = \mathbf{0}. \quad (7.9)$$

Покладемо:

$$\mathbf{W}_l|_{\Gamma_\sigma} = - \bar{\mathbf{W}}_l|_{\Gamma_\sigma}, \quad \mathbf{W}_l|_{\Gamma_\varphi} = 0. \quad (7.10)$$

Рівняння зважених нев'язок матиме вигляд:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L} \mathbf{W}_l)^T \vec{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{W}_l \mathbf{X} d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{W}}_l \vec{t} d\Gamma = \mathbf{0}, \quad (7.11)$$

або покомпонентно:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial W_l^u}{\partial x} \tilde{\sigma}_x + \frac{\partial W_l^u}{\partial y} \tilde{\sigma}_{xy} \right) d\Omega - \int_{\Omega} W_l^u X d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} W_l^u \bar{t}_x d\Gamma = 0, \quad (7.12)$$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial W_l^v}{\partial x} \tilde{\sigma}_{xy} + \frac{\partial W_l^v}{\partial y} \tilde{\sigma}_y \right) d\Omega - \int_{\Omega} W_l^v Y d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} W_l^v \bar{t}_y d\Gamma = 0. \quad (7.13)$$

Таким чином, граничні умови що задані на  $\Gamma_{\sigma}$  є натуральними.

**Приклад 7.1** Сторони пластини, що має форму квадрату  $|x|, |y| \leq 1$  навантажені  $y = \pm 1$  стискаючими зусиллями, що розташовані в її площині та мають інтенсивність  $1 - x^2$ . Сторони  $x = \pm 1$  можуть вільно ковзати вздовж напрямних. Визначити розподіл переміщень, напружень та деформацій в пластині для  $\nu = 1/3$ .

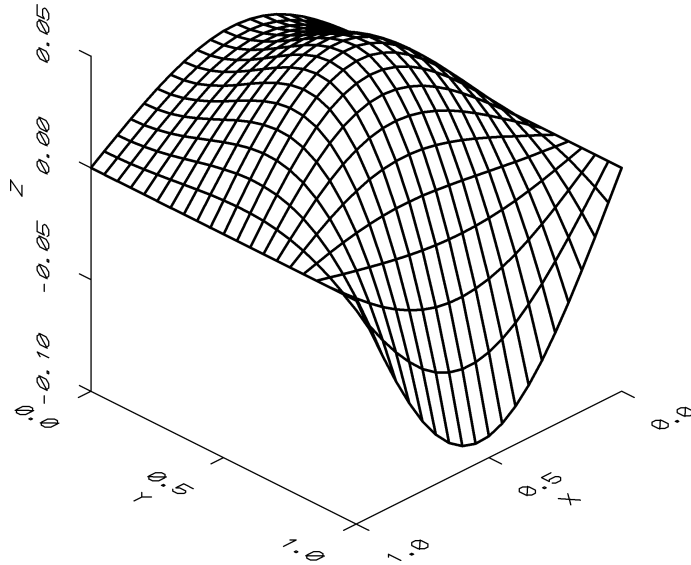


Рис. 16. Переміщення  $u$  в пластині з прикладу 7.1. По вісі  $z$  відкладено  $\frac{(1-\nu^2)}{E\bar{u}}$ .

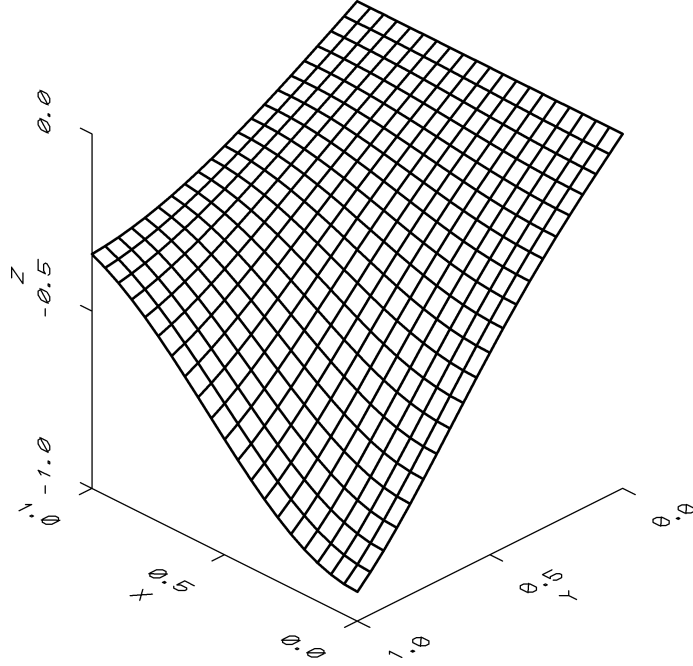


Рис. 17. Переміщення  $v$  в пластині з прикладу 7.1. По вісі  $z$  відкладено  $\frac{(1-\nu^2)}{E\bar{v}}$ .

**Розв'язок.** Як впливає з постановки задачі:

$$u|_{\Gamma_\varphi} = 0, \quad \Gamma_\varphi : \{x = \pm 1, -1 \leq y \leq 1\},$$

$$\sigma_{ny}|_{\Gamma_\sigma^1} = 0, \quad \Gamma_\sigma^1 : \{x = \pm 1, -1 \leq y \leq 1\}, \quad (7.14)$$

$$\vec{\sigma}_n|_{\Gamma_\sigma^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^2 - 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_\sigma^2 : \{y = \pm 1, -1 \leq x \leq 1\}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

Очевидно, що розв'язок задачі має задовольняти умовам симетрії:

$$u(x, y) = -u(-x, y) = u(x, -y), \quad v(x, y) = v(-x, y) = -v(x, -y). \quad (7.15)$$

Виберемо базисні функції у відповідності до (7.15):

$$N_1^u = \sin(\pi x), \quad N_2^u = \sin(\pi x) \cos(\pi y/2) \quad N_3^u = \sin(2\pi x),$$

$$N_4^u = \sin(2\pi x) \cos(\pi y/2), \quad N_5^u = \sin(\pi x) \cos(\pi y), \quad N_6^u = \sin(2\pi x) \cos(\pi y), \quad (7.16)$$

$$N_1^v = \sin(\pi y/2), \quad N_2^v = \sin(\pi y/2) \cos(\pi x/2), \quad N_3^v = \sin(\pi y),$$

$$N_4^v = \sin(\pi y) \cos(\pi x/2), \quad N_5^v = \sin(\pi y/2) \cos(\pi x), \quad N_6^v = \sin(\pi y) \cos(\pi x),$$

та скористаємось методом Гальоркіна:

$$-\bar{\mathbf{W}}_l = \mathbf{W}_l = \mathbf{N}_l, \quad \mathbf{N}_l = \begin{bmatrix} N_l^u & 0 \\ 0 & N_l^v \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

Згідно з (7.11) отримаємо СЛАР (6.13) з компонентами:

$$\mathbf{K}_{lm} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} N_{l,x}^u N_{m,x}^u + \frac{(1-\nu)}{2} N_{l,y}^u N_{m,y}^u & \nu N_{l,x}^u N_{m,y}^v + \frac{(1-\nu)}{2} N_{l,y}^u N_{m,x}^v \\ \frac{(1-\nu)}{2} N_{l,x}^v N_{m,y}^u + \nu N_{l,y}^v N_{m,x}^u & \frac{(1-\nu)}{2} N_{l,x}^v N_{m,x}^v + N_{l,y}^v N_{m,y}^v \end{bmatrix} dx dy \quad (7.18)$$

$$\mathbf{f}_l = \frac{1-\nu^2}{E} \int_0^1 \mathbf{N}_l|_{y=1} \begin{bmatrix} 0 \\ x^2 - 1 \end{bmatrix} dx = \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ N_l^v|_{y=1} (x^2 - 1) \end{bmatrix} dx. \quad (7.19)$$

Знайшовши  $\mathbf{a}_l^T = (a_l^u, a_l^v)$ ,  $l = 1, 2, \dots, M$ , апроксимацію компонентів вектора переміщень визначимо як:

$$\tilde{u} = \sum_{m=1}^M a_m^u N_m^u, \quad \tilde{v} = \sum_{m=1}^M a_m^v N_m^v, \quad (7.20)$$

компоненти вектора напружень:

$$\tilde{\sigma}_x = \sum_{m=1}^M (a_m^u N_{m,x}^u + \nu a_m^v N_{m,y}^v),$$

$$\tilde{\sigma}_y = \sum_{m=1}^M (\nu a_m^u N_{m,x}^u + a_m^v N_{m,y}^v), \quad (7.21)$$

$$\tilde{\sigma}_{xy} = (1 - \nu)/2 \sum_{m=1}^M (a_l^u N_{l,y}^u + a_l^v N_{l,x}^v).$$

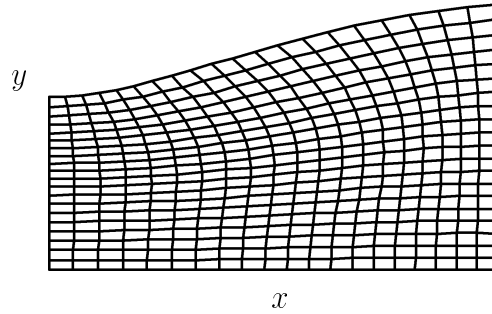


Рис. 18. Двовимірне деформування пружної пластини з прикладу 7.1

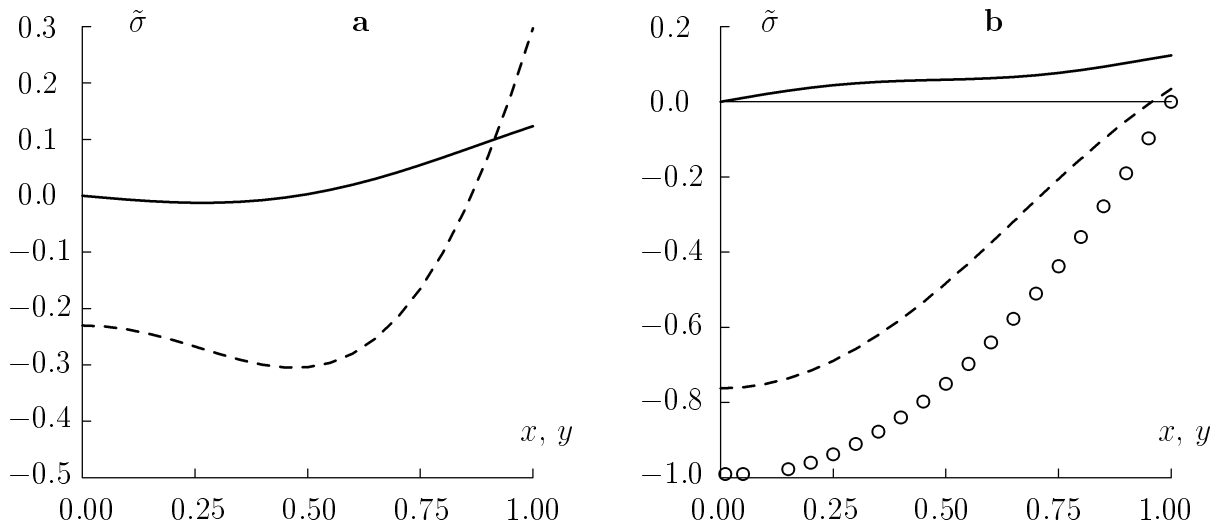


Рис. 19. Граничні напруження в задачі про деформування пластини з прикладу 7.1, **(а)** – нормальні напруження  $\tilde{\sigma}_x|_{x=1}$  на лінії ковзання (---) та дотичні напруження  $\tilde{\sigma}_{xy}|_{y=1}$  на лінії нормального навантаження (—), **(б)** – перевірка задовільнення натуральних граничних умов:  $\circ$  – точне значення заданих нормальних напружень  $\tilde{\sigma}_y|_{y=1}$ , --- – їх апроксимація, — – апроксимація дотичних напружень на лінії ковзання  $\tilde{\sigma}_{xy}|_{x=1}$ .



Переміщення, що виникають в пластині винесені на Рис. 16, Рис. 17. Картину деформування проілюстровано на Рис. 18. На Рис. 19 (**a**, **b**) приведено граничні напруження на контурі пластини. Як видно, дотичні та нормальні напруження близькі до заданих. Слід зауважити, що дана задача є змішаною. На частині контура  $x = \pm 1, -1 \leq y \leq 1$  задано  $u = 0$ . Як бачимо, (Рис. 16, Рис. 17) ця умова призвела до того, що нормальні напруження на цій частині границі міняють знак (від стиску на  $y = 0$  до розтягу на  $y = 1$ ). Отже, для повного розв'язку цієї задачі необхідно знайти частину границі, на якій  $\tilde{\sigma}_x|_{x=1} = 0$ , а на решті відрізка  $\tilde{\sigma}_x|_{x=1} \leq 0$ .

### **Вправи.**

7.1. Повернутись до розгляду задачі з прикладу 7.1. Врахувавши зауваження в кінці розв'язку, побудувати чисельну схему так, щоб на відзках границі  $x = \pm 1, |y| \leq 1$  нормальні напруження були стискаючими. Модифікувати програму з додатку А для отримання чисельних даних. Перевірити виконання граничних умов.

7.2. Квадратна пластинка з прикладу 7.1 зацімлена по бічних сторонах та знаходиться під дією однорізного навантаження одиничної інтенсивності по обом координатним напрямкам. Дві інші сторони звільнені від навантаження. Знайти апроксимацію розв'язку, використавши слабе формулювання рівняння зважених нев'язок.

## **8 Апроксимація розв'язку нелінійних граничних задач**

Якщо в (2.1), (2.2)  $\Lambda$  та  $\Upsilon$  – нелінійні диференціальні оператори, використання апроксимації (2.5) приводить до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{a}). \quad (8.1)$$

Система (8.1) може бути розв'язана методом простих ітерацій:

$$\mathbf{K}(\mathbf{a}^{n-1})\mathbf{a}^n = \mathbf{f}(\mathbf{a}^{n-1}). \quad (8.2)$$

### Приклад 8.1 Рівняння

$$e^{-\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 1 \quad (8.3)$$

виникає в одновимірних задачах стаціонарної теплопровідності в хімічно-активному середовищі, якщо інтенсивність тепловиділення залежить від величини температури. Знайти розподіл температури в такому середовищі ( $0 \leq x \leq 1$ ), якщо граничні умови:  $\varphi|_{x=0,1} = 0$ .

**Розв'язок.** Шукаємо апроксимацію у вигляді:

$$\tilde{\varphi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m. \quad (8.4)$$

Виберемо  $N_m|_{x=0,1} = 0$ . Рівняння зважених нев'язок в цьому випадку:

$$\sum_{m=1}^M \left( \int_0^1 \frac{d^2 N_m}{dx^2} W_l dx \right) a_m = \int_0^1 W_l \exp \left( \sum_{s=1}^M N_s a_s \right) dx. \quad (8.5)$$

Для апроксимації відрізком ряду Фур'є по методу Гальоркіна ( $N_m = W_m = \sin(m\pi x)$ ) матимемо:

$$K_{lm} = -\delta_l^m (\pi m)^2 / 2, \quad f_l = \int_0^1 \sin(l\pi x) \exp \left( \sum_{s=1}^M a_s \sin(s\pi x) \right) dx, \quad (8.6)$$

та згідно з методом простих ітерацій (8.2):

$$a_l^{(n)} = -\frac{2}{(\pi m)^2} \int_0^1 \sin(l\pi x) \exp \left( \sum_{s=1}^M a_s^{(n-1)} \sin(s\pi x) \right) dx, \quad (8.7)$$

де  $n$  – порядок ітерації.

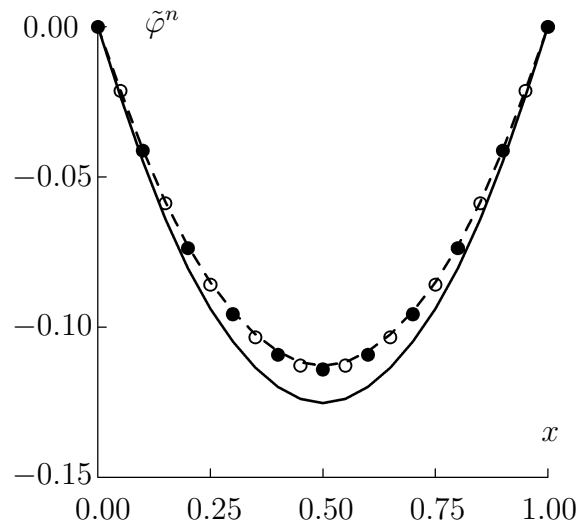


Рис. 20. Поітераційна збіжність розв'язку нелінійної задачі з прикладу 8.1, — – перша ітерація, - - - друга ітерація, о – третя ітерація, ● – четверта ітерація.

Виберемо за початкову ітерацію:  $\mathbf{a}^{(0)T} = (0, 0, \dots, 0)$ . Збіжність розв'язку в залежності від номера ітерації проілюстрована на Рис. 20.

**Приклад 8.2** Одновимірне рівняння Нав'є-Стокса при наявності нелінійного конвективного процесу та дисипації має вигляд:

$$u \frac{du}{dx} - \frac{1}{Re} \frac{d^2u}{dx^2} = 0, \quad (8.8)$$

$Re$  – число Рейнольдса.

Для  $Re = 1$  побудувати апроксимацію (8.8) в області  $0 \leq x \leq 1$  при граничних умовах:

$$u|_0 = 0, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_1 = 1, \quad (8.9)$$

**Розв'язок.** Точний розв'язок (8.8) – (8.9) може бути легко побудований:

$$u = atg(ax/2), \quad (a \approx 1.1765).$$

Виберемо  $N_m = x^m$ , тоді:

$$\sum_{m=1}^M \left\{ \int_0^1 \left( \sum_{s=1}^M N_s a_s \frac{dN_m}{dx} - \frac{d^2 N_m}{dx^2} \right) W_l dx \right\} a_m + \sum_{m=1}^M \frac{dN_m}{dx} a_m \bar{W}_l \Big|_1 - \bar{W}_l \Big|_1 = 0. \quad (8.10)$$

$$K_{lm}(\mathbf{a}) = \int_0^1 \left( \sum_{s=1}^M N_s a_s \frac{dN_m}{dx} - \frac{d^2 N_m}{dx^2} \right) W_l dx + \frac{dN_m}{dx} \bar{W}_l \Big|_1, \quad (8.11)$$

$$f_l = \bar{W}_l \Big|_1. \quad (8.12)$$

Використавши метод колокації по точкам  $x_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, M$ , отримаємо:

$$K_{lm}(\mathbf{a}^{(n)}) = m \sum_{s=1}^M a^{(n)} x_l^s x_l^{m-1} - m(m-1)x_l^{m-2} + m, \quad f_l = 1, \quad (8.13)$$

де  $n$  – порядок ітерації.

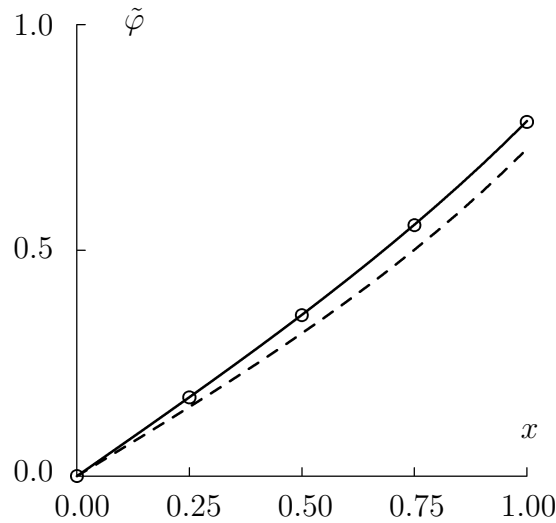


Рис. 21. Апроксимація розв'язку нелінійної задачі з прикладу 8.2,  $\circ$  – точний розв'язок,  $--$  – друга ітерація,  $—$  – четверта ітерація.

Результати розрахунків для сукупності ітерацій приведено на Рис. 21.

### **Вправи.**

8.1. Побудувати апроксимацію розв'язку одновимірної нелінійної задачі теплопровідності:

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{d\varphi}{dx}\right) = -10x, \quad k = 1 + 0.1\varphi$$

в області  $0 \leq x \leq 1$  з граничними умовами:  $\varphi|_{x=0,1} = 0$ .

8.2. Розв'язати граничну задачу:

$$\varphi(d\varphi/dx) = d^2\varphi/dx^2, \quad \varphi|_0 = -2, \quad \varphi|_1 = -1.$$

## Додаток

### Програма для чисельного розв'язку задачі з прикладу 7.1

```
#include <stdio.h> #include <string.h> #include <stdlib.h>
#include <alloc.h> #include <math.h>

int    lglob, mglob; double nu = 0.3;

double intgauss(double (*fun)(), double a, double b); double
ressys(int n, double *arr, double *b); double Nu(double xx, double
yy, int mm); double Nv(double xx, double yy, int mm); double
Nudxx(double xx, int mm); double Nudxy(double xx, int mm); double
Nudyx(double xx, int mm); double Nudyx(double xx, int mm); double
Nvdxx(double xx, int mm); double Nvdxy(double xx, int mm); double
Nvdyx(double xx, int mm); double Nvdyy(double xx, int mm);

double K111x(double xx); double K111y(double yy); double
K112x(double xx); double K112y(double yy); double K121x(double
xx); double K121y(double yy); double K122x(double xx); double
K122y(double yy); double K211x(double xx); double K211y(double
yy); double K212x(double xx); double K212y(double yy); double
K221x(double xx); double K221y(double yy); double K222x(double
xx); double K222y(double yy);

double f(double xx);

double Nu(xx, yy, mm) double xx, yy; int    mm; { switch (mm)
{
```

```

    case 1: return(sin(MA_PI*xx));
    case 2: return(sin(MA_PI*xx) * cos(MA_PI*yy*0.5));
    case 3: return(sin(2.0*MA_PI*xx));
    case 4: return(sin(2.0*MA_PI*xx) * cos(MA_PI*yy*0.5));
    case 5: return(sin(MA_PI*xx) * cos(MA_PI*yy));
    case 6: return(sin(2.0*MA_PI*xx) * cos(MA_PI*yy));
  }
return(0.0); }

```

```

double Nudyx(yy, mm) double yy; int mm; { switch (mm)
{
  case 1: return(0.0);
  case 2: return(-0.5*MA_PI * sin(MA_PI*yy*0.5));
  case 3: return(0.0);
  case 4: return(-0.5*MA_PI * sin(MA_PI*yy*0.5));
  case 5: return( -MA_PI * sin(MA_PI*yy));
  case 6: return( -MA_PI * sin(MA_PI*yy));
}
return(0.0); }

```

```

double Nudyx(xx, mm) double xx; int mm; { switch (mm)
{
  case 1: return(0.0);
  case 2: return(sin(MA_PI*xx));
  case 3: return(0.0);
  case 4: return(sin(2.0*MA_PI*xx));
  case 5: return(sin(MA_PI*xx));
  case 6: return(sin(2.0*MA_PI*xx));
}
return(0.0); }

```

```

double Nudxx(xx, mm) double xx; int mm; { switch (mm)
{
case 1: return(MA_PI*cos(MA_PI*xx));
case 2: return(MA_PI*cos(MA_PI*xx));
case 3: return(2.0*MA_PI*cos(2.0*MA_PI*xx));
case 4: return(2.0*MA_PI*cos(2.0*MA_PI*xx));
case 5: return(MA_PI*cos(MA_PI*xx));
case 6: return(2.0*MA_PI*cos(2.0*MA_PI*xx));
}
return(0.0); }

```

```

double Nudxy(yy, mm) double yy; int mm; { switch (mm)
{
case 1: return(1.0);
case 2: return(cos(MA_PI*yy*0.5));
case 3: return(1.0);
case 4: return(cos(MA_PI*yy*0.5));
case 5: return(cos(MA_PI*yy));
case 6: return(cos(MA_PI*yy));
}
return(0.0); }

```

```

double Nv(xx, yy, mm) double xx, yy; int mm; { switch (mm)
{
case 1: return(sin(MA_PI*yy*0.5));
case 2: return(sin(MA_PI*yy*0.5) * cos(MA_PI*xx*0.5));
case 3: return(sin(MA_PI*yy));
case 4: return(sin(MA_PI*yy) * cos(MA_PI*xx*0.5));
case 5: return(sin(MA_PI*yy*0.5) * cos(MA_PI*xx));
}
}

```



```

        case 6: return(sin(MA_PI*yy)      * cos(MA_PI*xx));
    }
return(0.0); }

```

```

double Nvdyy(yy, mm) double yy; int    mm; { switch (mm)
{
    case 1: return(0.5*MA_PI * cos(MA_PI*yy*0.5));
    case 2: return(0.5*MA_PI * cos(MA_PI*yy*0.5));
    case 3: return(    MA_PI * cos(MA_PI*yy));
    case 4: return(    MA_PI * cos(MA_PI*yy));
    case 5: return(0.5*MA_PI * cos(MA_PI*yy*0.5));
    case 6: return(    MA_PI * cos(MA_PI*yy));
}
return(0.0); }

```

```

double Nvdyx(xx, mm) double xx; int    mm; { switch (mm)
{
    case 1: return(1.0);
    case 2: return(cos(MA_PI*xx*0.5));
    case 3: return(1.0);
    case 4: return(cos(MA_PI*xx*0.5));
    case 5: return(cos(MA_PI*xx));
    case 6: return(cos(MA_PI*xx));
}
return(0.0); }

```

```

double Nvdxx(xx, mm) double xx; int    mm; { switch (mm)
{
    case 1: return(0.0);
    case 2: return(-0.5*MA_PI*sin(MA_PI*xx*0.5));
}

```

```

    case 3: return(0.0);
    case 4: return(-0.5*MA_PI*sin(MA_PI*xx*0.5));
    case 5: return(    -MA_PI*sin(MA_PI*xx));
    case 6: return(    -MA_PI*sin(MA_PI*xx));
    }
return(0.0); }

```

```

double Nvdxy(yy, mm) double yy; int    mm; { switch (mm)
    {
    case 1: return(0.0);
    case 2: return(sin(MA_PI*yy*0.5));
    case 3: return(0.0);
    case 4: return(sin(MA_PI*yy));
    case 5: return(sin(MA_PI*yy*0.5));
    case 6: return(sin(MA_PI*yy));
    }
return(0.0); }

```

```

double K111x(xx) double xx; { return(Nudxx(xx, lglob)*Nudxx(xx,
mglob)); } double K111y(xx) double xx; { return(Nudxy(xx,
lglob)*Nudxy(xx, mglob)); } double K112x(xx) double xx; {
return(Nudyx(xx, lglob)*Nudyx(xx, mglob)); } double K112y(xx)
double xx; { return(Nudyy(xx, lglob)*Nudyy(xx, mglob)); }

```

```

double K121x(xx) double xx; { return(Nudxx(xx, lglob)*Nvdxy(xx,
mglob)); } double K121y(xx) double xx; { return(Nudxy(xx,
lglob)*Nvdyy(xx, mglob)); } double K122x(xx) double xx; {
return(Nudyx(xx, lglob)*Nvdxx(xx, mglob)); } double K122y(xx)
double xx; { return(Nudyy(xx, lglob)*Nvdxy(xx, mglob)); }

```

```

double K211x(xx) double xx; { return(Nvdx(x, lglob)*Nudy(x,
mglob)); } double K211y(xx) double xx; { return(Nvdy(x,
lglob)*Nudx(x, mglob)); } double K212x(xx) double xx; {
return(Nvdy(x, lglob)*Nudx(x, mglob)); } double K212y(xx)
double xx; { return(Nvdy(x, lglob)*Nudy(x, mglob)); }

```

```

double K221x(xx) double xx; { return(Nvdx(x, lglob)*Nvdx(x,
mglob)); } double K221y(xx) double xx; { return(Nvdy(x,
lglob)*Nvdy(x, mglob)); } double K222x(xx) double xx; {
return(Nvdy(x, lglob)*Nvdy(x, mglob)); } double K222y(xx)
double xx; { return(Nvdy(x, lglob)*Nvdy(x, mglob)); }

```

```

double f(xx) double xx; { return(Nv(x, 1.0, lglob) * (xx*xx -
1.0)); }

```

```

main() { FILE *file, *filed; double *b, *arr, bu[7], bv[7];
int l, m; int countarr, countb; double xloc, yloc,
uloc, vloc; double sigxy0, sigx, sigy, sigxy1;

```

```

b = malloc(sizeof(double) * 21); arr = malloc(sizeof(double) *
401);

```

```

for (countarr = 0, countb = 0, lglob = 1; lglob < 7; lglob++)

```

```

{

```

```

countb++;

```

```

for (b[countb] = 0.0, mglob = 1; mglob < 7; mglob++)

```

```

{

```

```

countarr++;

```

```

arr[countarr] = intgauss(K111x, 0.0, 1.0)*intgauss(K111y, 0.0, 1.

```

```

(1.0 - nu) * 0.5 *

```

```

                                intgauss(K112x, 0.0, 1.0)*intgauss(K112y, 0.0, 1.0);
countarr++;
arr[countarr] = nu *
                                intgauss(K121x, 0.0, 1.0)*intgauss(K121y, 0.0, 1.0)
                                (1.0 - nu) * 0.5 *
                                intgauss(K122x, 0.0, 1.0)*intgauss(K122y, 0.0, 1.0);
}
countb++;
b[countb] = intgauss(f, 0.0, 1.0);
for (mglob = 1; mglob < 7; mglob++)
{
countarr++;
arr[countarr] =
                                (1.0 - nu) * 0.5 *
                                intgauss(K211x, 0.0, 1.0)*intgauss(K211y, 0.0, 1.0)
                                nu *
                                intgauss(K212x, 0.0, 1.0)*intgauss(K212y, 0.0, 1.0);
countarr++;
arr[countarr] =
                                (1.0 - nu) * 0.5 *
                                intgauss(K221x, 0.0, 1.0)*intgauss(K221y, 0.0, 1.0)
                                intgauss(K222x, 0.0, 1.0)*intgauss(K222y, 0.0, 1.0);
}
}
ressys(12, arr, b); for (l = 0; l < 6; l++)
{
bu[l+1] = b[2*l]; bv[l+1] = b[2*l+1];
}
file = fopen("21.dat", "w+t"); for (l = 0; l < 21; l++)
{

```

```

xloc = 0.05 * (double)l;
for (m = 0; m < 21; m++)
{
yloc = 0.05 * (double)m; uloc = 0.0; vloc = 0.0;
for (mglob = 1; mglob < 7; mglob++)
{
uloc += bu[mglob] * Nu(xloc, yloc, mglob);
vloc += bv[mglob] * Nv(xloc, yloc, mglob);
}
fprintf(file, "%10.4g %10.4g %10.4g %10.4g \n", xloc, yloc, vloc,
}
}
fclose(file); file = fopen("22.dat", "w+t"); filed =
fopen("22d.dat", "w+t"); for (l = 0; l < 21; l++)
{
xloc = 0.05 * (double)l; yloc = 0.05 * (double)l;
sigxy0 = sigxy1 = sigx = sigy = 0.0;
for (mglob = 1; mglob < 7; mglob++)
{
sigx += bu[mglob] * Nudxy(yloc, mglob) * Nudxx(1.0 , mglob
nu * bv[mglob] * Nvdyy(yloc, mglob) * Nvdyx(1.0 , mglob
sigy += nu * bu[mglob] * Nudxy(1.0 , mglob) * Nudxx(xloc, mglob
bv[mglob] * Nvdyy(1.0 , mglob) * Nvdyx(xloc, mglob
sigxy0 += bu[mglob] * Nudyy(yloc, mglob) * Nudyx(1.0 , mglob
bv[mglob] * Nvdxy(yloc, mglob) * Nvdxx(1.0 , mglob
sigxy1 += bu[mglob] * Nudyy(1.0 , mglob) * Nudyx(xloc, mglob
bv[mglob] * Nvdxy(1.0 , mglob) * Nvdxx(xloc, mglob
}
sigxy0 *= (1.0 - nu) * 0.5; sigxy1 *= (1.0 - nu) * 0.5;
fprintf(file, "%10.4g %10.4g %10.4g %10.4g %10.4g\n",

```

```
xloc, sigxy0, sigxy1, sigx, sigy);  
fprintf(filed, "%10.4g\n", xloc*xloc - 1.0);  
}  
fclose(file); fclose(filed); return; }
```

## Література

- [1] Зенкевич О., Морган К.. Конечные элементы и аппроксимация. Мир, 1986. 318 с.
- [2] Флетчер К. Численные методы на основе метода Гальоркина. Мир, 1988. 524с.
- [3] Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. Мир, 1987. 423 с.
- [4] Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. Мир, 1987. 328 с.
- [5] Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М. Методы граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Изд-во Казанского университета, 1986. 284 с.

# Зміст

1	Апроксимація базисними функціями	4
2	Апроксимація розв'язків диференціальних рівнянь	11
3	Одночасна апроксимація розв'язків диференціальних рівнянь та граничних умов	16
4	Натуральні граничні умови	20
5	Метод граничного розв'язку	23
6	Апроксимація розв'язків систем диференціальних рівнянь	26
7	Двовимірні задачі лінійної теорії пружності	35
8	Апроксимація розв'язку нелінійних граничних задач	41
	Додаток	46
	Список літератури	55