

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
Кафедра математичного аналізу

«ЗАТВЕРДЖУЮ»  
Заступник декана  
з навчальної роботи



Безущак О.О.  
18 вересня 2018 року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ  
GAUSSIAN MEASURES IN HILBERT SPACE  
для здобувачів освітньо-наукового рівня «доктор філософії»

галузь знань	11 «Математика та статистика»
спеціальність	111 «Математика»
освітній рівень	третій (освітньо-науковий)
освітньо-наукова програма	«Математика»
вид дисципліни	вибіркова

Форма навчання	денна
Навчальний рік	2018/2019
Рік навчання	2
Кількість кредитів ECTS	4
Мова викладання, навчання та оцінювання	англійська/українська
Форма заключного контролю	екзамен

Викладачі: професор Кукуш О.Г., д.ф.-м.н.

Пролонговано: на 20<sup>19</sup>/20<sup>20</sup> н.р. (Кукуш О.Г.) «18» вересня 2019 р.  
на 20 /20 н.р. ( ) « » 20 р.

КИЇВ – 2018

Розробник: Кукуш О.Г., д.ф.м.н., професор, професор кафедри математичного аналізу.

ЗАТВЕДЖЕНО  
Зав. кафедри  
математичного аналізу

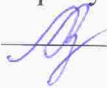


Шевчук І.О.

Протокол № 1 від 5.09 2018 р.

Схвалено науково-методичною комісією механіко-математичного факультету

Протокол від "12" 09 2018 року № 1

Голова науково-методичної комісії  професор, д.ф.-м.н. Курченко О.О.  
(підпис)

1. **Мета дисципліни** - Розвиток навичок розв'язання комплексних проблем в галузі математики, використання новітніх інформаційних і комунікаційних технологій, здатності до абстрактного мислення, здатності до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел, вміння генерувати нові ідеї, навичок роботи в міжнародному науковому просторі, навичок формулювання дослідницьких задач з математики, вміння формулювати і строго доводити математичні твердження, перевіряти правильність їх доведень, оволодіння базовими поняттями теорії гаусових мір для розв'язання задач теоретичного і прикладного характеру, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення.

**2. Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни:**

1. *Знати*: основні методи теорії міри та інтеграла, функціонального аналізу, теорії ймовірностей.
2. *Вміти*: проводити критичний аналіз, оцінку і синтез нових ідей і підходів в галузі функціонального аналізу та теорії ймовірностей, самостійно застосовувати методи функціонального аналізу і теорії ймовірностей при розв'язанні нових задач.

**3. Анотація навчальної дисципліни:**

Дисципліна «Gaussian measures in Hilbert space» належить до вибірових компонент освітньої програми (вибір блоками), ця дисципліна належить до спеціалізації «математичний аналіз та диференціальні рівняння». Вона забезпечує професійний розвиток, спрямована на формування концептуальних та методологічних знань у галузі математики, вміння критично аналізувати, оцінювати і синтезувати нові та комплексні ідеї, аналізувати наукові праці, формулювати методологічну базу власного наукового дослідження, здатність формулювати наукову проблему, робочі гіпотези досліджуваної проблеми. В рамках дисципліни розглядаються гаусові міри в евклідовому просторі та будується гаусова продакт-міра у просторі послідовностей  $l_2$ , вивчаються борельові міри в гільбертовому просторі та будується гаусова міра за допомогою характеристичного функціоналу.

**4. Завдання (навчальні цілі):** набуття знань, умінь та навичок (компетентностей) на рівні новітніх досягнень у математиці, відповідно науково-освітньої кваліфікації «Доктор філософії». Зокрема, розвивати: вміння аналізувати сучасні передові концептуальні та методологічні знання; здатність проводити критичний аналіз, оцінку і синтез нових та складних ідей; здатність застосовувати теоретичні та практичні підходи математики; вміння розробляти наукові і інформаційно-освітні ресурси для розв'язання професійних задач, пов'язаних з розвитком та використанням математики і статистики. Конкретними навчальними цілями є вивчення основних положень теорії ймовірносних мір у гільбертових просторах, вивчення способу побудови гаусової міри та її властивостей, формування здатності знаходити характеристики мір у гільбертовому просторі. Набуття компетентностей:

1. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу (ЗК-1).
2. Навички використання новітніх інформаційних і комунікаційних технологій (ЗК-2).
3. Здатність проведення самостійних досліджень на сучасному рівні (ЗК-3).
4. Здатність до пошуку, оброблення на аналізу інформації з різних джерел (ЗК-4).
5. Здатність генерувати нові ідеї (креативність) (ЗК-5).
6. Здатність працювати в міжнародному науковому просторі (ЗК-6).
7. Здатність розробляти та управляти науковими проектами (ЗК-7).
8. Здатність чітко формулювати і строго доводити математичні твердження (ЗК-8).
9. Здатність формулювати дослідницькі математичні задачі (ЗК-9)
10. Здатність розв'язувати задачі з нових розділів математики (ЗК-10).
11. Вміння встановлювати зв'язки між абстрактними математичними структурами і конкретними математичними об'єктами (ЗК-11).
12. Здатність перевіряти правильність доведень математичних тверджень (ЗК-12).

13. Здатність будувати, досліджувати і аналізувати математичні моделі процесів і явищ з використанням методів геометрії та топології, інтегральних та диференціальних рівнянь, математичної фізики, алгебри та теорії чисел, математичного аналізу, теорії ймовірностей, дискретної математики та теорії алгоритмів (ФК-1).
14. Здатність проводити наукові дослідження з математики і використовувати математичні методи для аналізу математичних моделей сучасного природознавства, соціо-гуманітарних наук і техніки (ФК-2).
15. Вміння використовувати методи геометрії та топології, інтегральних та диференціальних рівнянь, математичної фізики, алгебри та теорії чисел, математичного аналізу, теорії ймовірностей, дискретної математики та теорії алгоритмів при аналізі задач на предмет коректності та дослідженні зв'язків між математичними структурами (ФК-3).
16. Вміння досліджувати задачі теорії інтегральних та диференціальних рівнянь, математичної фізики, алгебри та теорії чисел, теорії ймовірностей, дискретної математики та теорії алгоритмів, математичного аналізу, геометрії та топології засобами інших розділів математики (ФК-4).
17. Здатність до оцінки адекватності математичної моделі об'єкту за допомогою аналітичного дослідження та імітаційного моделювання (ФК-5).
18. Здатність представляти та обґрунтовувати результати теоретичних та прикладних математичних досліджень у формі, яка відповідає можливостям сприйняття аудиторії.
19. Здатність до використання сучасного математичного програмного забезпечення для супроводження теоретичних досліджень, підтвердження теоретичних результатів і висунення гіпотез (ФК-7).
20. Здатність застосовувати алгебраїчні, геометричні, асимптотичні, ймовірнісно-стохастичні, динамічні методи та методи диференціальних рівнянь та математичного аналізу до розв'язування задач математики (СК-8).
21. Здатність застосовувати теоретико-ймовірнісні методи і методи фінансової математики, топологічні, алгебраїчні, комбінаторні, категорні методи та методи теорії узагальнених функцій, стохастичного аналізу, інтегральних та диференціальних рівнянь і математичного аналізу для досліджень в сучасній математиці (ФК-9).
22. Здатність здійснювати попередні експериментальні дослідження математичних задач з використанням інформаційних технологій та аналізувати отримані дані (ФК-10).
23. Здатність формулювати наукову проблему, робочі гіпотези досліджуваної проблеми, що передбачає глибоке переосмислення наявних та створення нових цілісних знань та/або професійної практики (ФК-11).

## 5. Результати навчання за дисципліною:

Результат навчання (РН) (1. знати; 2. вміти; 3. комунікація; 4. автономність та відповідальність)		Форми (та/або методи і технології) викладання і навчання	Методи оцінювання та пороговий критерій оцінювання (за необхідності)	Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни
Код	Результат навчання			
РН 1.1	Знати означення гаусового випадкового елемента і гаусової міри в евклідовому та гільбертовому просторах	<i>Лекція, практичне заняття</i>	<i>Контрольна робота 1 (60% правильних відповідей), екзамен, активна робота на лекції, усні відповіді</i>	10%
РН 1.2	Знати принцип побудови гаусової продукт-міри у просторі послідовностей			10%
РН 1.3	Знати властивості характеристичних функціоналів борельових мір у гільбертовому просторі			10%
РН 1.4	Знати теорему Мінлоса-Сазонова			10%
РН 2.1	Вміти застосовувати формулу заміни змінних під знаком інтеграла Лебега	<i>Лекція, практичне заняття, самостійна робота</i>	<i>Контрольна робота 2 (60% правильних відповідей), екзамен, виконання завдань, винесених на самостійну роботу</i>	20%
РН 2.2	Вміти знаходити середнє значення, кореляційний оператор та характеристичний функціонал борельових мір певного типу			20%
РН 2.3	Вміти знаходити розподіл лінійних функціоналів від гаусових випадкових елементів у гільбертовому просторі	<i>Практичне заняття, самостійна робота</i>	<i>Виступ з доповіддю за темою наукового дослідження</i>	5%
РН3.1	Здатність працювати у міжнародному просторі, обґрунтовувати власний погляд на задачу та формулювати робочі гіпотези, спілкуватися з колегами з питань застосування методів та теорій математики, писати наукові роботи			5%
РН4.1	Демонстрація авторитетності, інноваційності, високий ступінь самостійності, академічна та професійна доброчесність, послідовна відданість розвитку нових ідей або процесів у передових контекстах професійної та наукової діяльності.			5%
РН4.2	Відповідально ставитися до виконуваних робіт, нести відповідальність за їх якість			5%

## 6. Співвідношення результатів навчання дисципліни із програмними результатами навчання

Програмні результати навчання (з опису освітньої програми)	Результати навчання дисципліни									
	РН 1.1	РН 1.2	РН 1.3	РН 1.4	РН 2.1	РН 2.2	РН 2.3	РН 3.1	РН 4.1	РН 4.2
<b>ПРН-3-4.</b> Визначати методологічні принципи та методи наукового дослідження галузі інформаційних технологій в залежності від об'єкту і предмету, використовуючи	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

міждисциплінарні підходи.										
<b>ПРН-3-5.</b> Використовувати сучасні інформаційні та комунікативні технології при спілкуванні, обміні інформацією, зборі, аналізі, обробці, інтерпретації джерел; здійснювати публікацію джерел;	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>ПРН-3-6.</b> Знати, розуміти і застосовувати математичні концепції, методи системного аналізу і математичного моделювання.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>ПРН-У-1.</b> Аналізувати сучасні передові концептуальні та методологічні знання в галузі науково-дослідницької та/або професійної діяльності і на межі предметних галузей знань	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>ПРН-У-2.</b> Критичний аналіз, оцінка і синтез нових та складних ідей	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>ПРН-У-3.</b> Уміти з нових дослідницьких позицій формулювати загальну методологічну базу власного наукового дослідження, усвідомлювати його актуальність, мету і значення для розвитку інших галузей науки, суспільно-політичного, економічного життя;	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>ПРН-У-7.</b> Знати, розуміти і самостійно застосовувати методи аналізу предметної області, виявлення математичних потреб і збір даних для проектування;	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>ПРН-У-8.</b> Оцінювати, класифікувати і обґрунтовувати вибір методів формування вимог до математики, формулювати вимоги;	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>ПРН-У-9.</b> Аналізувати, оцінювати і вибирати сучасні інструментальні та обчислювальні засоби, технології, алгоритмічні і програмні рішення для конкретної задачі в галузі математики;	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>ПРН-У-10.</b> Формулювати, експериментально підтверджувати, обґрунтовувати і застосовувати на практиці нові конкурентоздатні ідеї, методи, технології розв'язку професійних, науково-технічних задач, в тому числі нестандартних;	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>ПРН-У-11.</b> Розробляти наукові і інформаційно-освітні ресурси для розв'язання професійних задач, пов'язаних з розвитком та використанням математики;	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>ПРН-У-15.</b> Розуміти, аналізувати, цілеспрямовано шукати і вибирати необхідні для рішення професійних наукових задач інформаційно-довідникові та науково-технічні ресурси і джерела знань з урахуванням сучасних досягнень науки і техніки.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

<b>ПРН-У-27.</b> Здатність саморозвиватися і самовдосконалюватися, нести відповідальність за новизну наукових досліджень та прийняття експертних рішень.									+	+	+
<b>ПРН-У-28.</b> Здатність приймати обґрунтовані рішення, мотивувати людей та рухатися до спільної мети.									+	+	+

## 7. Схема формування оцінки.

### 7.1. Форми оцінювання здобувачів освітньо-наукового ступеня:

#### - оцінювання впродовж навчального періоду:

1. *Активна робота на лекції, усні відповіді:* РН1.1, РН1.2, РН1.3, РН1.4 – 5 балів/3 бали;
2. *Виконання завдань, винесених на самостійну роботу:* РН2.1, РН2.2 – 5 балів/3 бали;
3. *Контрольна робота 1:* РН1.1, РН1.2, РН1.3, РН1.4 – 15 балів/9 балів;
4. *Контрольна робота 2:* РН2.1, РН2.2 – 15 балів/9 балів;
6. *Виступ з доповіддю за темою наукового дослідження:* РН2.3, РН3.1, РН4.1, РН4.2, – 20 балів/12 балів;

#### - підсумкове оцінювання: екзамен.

- *максимальна кількість балів, які можуть бути отримані:* 40 балів;
- *результати навчання, які будуть оцінюватись:* РН1.1, РН1.2, РН1.3, РН1.4, РН2.1, РН2.2;
- *форма проведення і види завдань:* письмова робота.

### 7.2. Організація оцінювання:

Обов'язковим є виконання завдань, винесених на самостійну роботу, та модульних контрольних робіт за графіком робочої програми.

У частину 1 входять теми 1 - 3, у частину 2 – теми 4 – 6 у частину 3 – теми 7 – 9. Обов'язковим для екзамену є виконання усіх контрольних робіт та доповідь за темою наукового дослідження до вказаної викладачем дати, перед початком екзаменаційної сесії, згідно навчального плану. Переписування чи перескладання тем не практикується..

#### Терміни проведення форм оцінювання:

1. *Контрольна робота: на 3-му тижні навчального періоду.*
2. *Контрольна робота: на 9-му тижні навчального періоду.*
3. *Доповідь за темою наукового дослідження: до 7-го тижня навчального періоду.*

У випадку відсутності з поважних причин відпрацювання та прездачі контрольні роботи здійснюються у відповідності до „Положення про організацію освітнього процесу”.

### 7.3. Шкала відповідності оцінок

<b>Відмінно / Excellent</b>	90-100
<b>Добре / Good</b>	75-89
<b>Задовільно / Satisfactory</b>	60-74
<b>Незадовільно / Fail</b>	0-59

**При визначенні оцінки основним є робота в семестрі.** Після завершення розгляду тем проводиться письмова контрольна робота і теоретичне опитування.

## 8. СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

№	Назва лекції	Кількість годин		
		Лекції	Практичні	Самостійна робота
<b>Частина 1. „Гаусові міри в евклідовому просторі та гаусова продакт-міра у просторі послідовностей”</b>				
1	<b>Тема 1.</b> Заміна змінної під знаком інтеграла Лебега. Інваріантність міри Лебега. <i>Самостійна робота:</i> Неіснування в нескінченновимірному гільбертовому просторі міри, інваріантної відносно зсувів чи ортогональних перетворень.	2		8
2	<b>Тема 2.</b> Продакт-міра у просторі всіх послідовностей. Критерій Колмогорова-Хінчина. <i>Самостійна робота:</i> Борельова та циліндрична сигма-алгебри у просторі всіх послідовностей.	2		8
3	<b>Тема 3.</b> Гаусова продакт-міра у просторі послідовностей $l_2$ . <i>Самостійна робота:</i> Продакт-міра від зліченного добутку множин; зв'язок із лемою Бореля-Кантеллі.	1	1	12
<i>Контрольна робота 1</i>		1		
<b>Частина 2. „Борельові міри та їхні характеристичні функціонали”</b>				
4	<b>Тема 4.</b> Неперервність моментної форми борельової міри в гільбертовому просторі. <i>Самостійна робота:</i> Оператори Гільберта-Шмідта та ядерні оператори.	2	1	12
5	<b>Тема 5.</b> Приклади борельових мір та підрахунок їхніх характеристик. <i>Самостійна робота:</i>	2	1	8



	S-оператори та їхні властивості.			
6	<b>Тема 6.</b> Властивості характеристичних функціоналів борельових мір у гільбертовому просторі. <i>Самостійна робота:</i> Характеристичні функціонали борельових мір у банаховому просторі.	2		12
<b>Частина 3. „ Побудова міри за характеристичним функціоналом”</b>				
7	<b>Тема 7.</b> Теорема Мінлоса-Сазонова. <i>Самостійна робота:</i> Приклади функціоналів, що задовольняють умови теореми Мінлоса-Сазонова.	1	1	12
8	<b>Тема 8.</b> Побудова загальної гаусової міри в гільбертовому просторі. <i>Самостійна робота:</i> Гаусова міра, породжена гаусовим випадковим процесом.	2		12
9	<b>Тема 9.</b> Властивості гаусової міри в гільбертовому просторі. <i>Самостійна робота:</i> Носій гаусової міри в гільбертовому просторі.	2		12
<i>Контрольна робота 2</i>		1		
<b>ВСЬОГО</b>		18	4	96

**Загальний обсяг 120 годин, у тому числі:  
лекції – 18 годин,  
практичні заняття – 4 години,  
консультації – 2 години,  
самостійна робота – 96 годин.**

### **9. Рекомендовані джерела**

#### **Основні:**

1. Kukush, A. Gaussian Measures in Hilbert Space: Construction and Properties. - *ISTE and Wiley*, London and Hoboken, 2020. - P. 243.

#### **Додаткові:**

1. Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. - Москва, Мир, 1979. - 176 с.

