XXIII Всеукраїнська заочна математична олімпіада “5–12”

Цього року було проведено двадцять третю Всеукраїнську заочну математичну олімпіаду “5–12”. В ній міг взяти участь кожен учень 5-12 класів. Приємно відзначити, що саме учні 5 класів надіслали найбільшу кількість робіт. Переможцями та призерами олімпіади стали:

I місце

Шашков Владислав (м. Київ, 11 клас)
Шкриль Катерина (м. Київ, 9 клас)

II місце

Москалець Анастасія (м. Ромни, Сумська обл., 8 клас)
Чобітько Аліна (м. Одеса, 9 клас)
Остренко Іван (м. Київ, 5 клас)
Резниченко Діана (м. Київ, 5 клас)

III місце

Петрук Володимир (м. Київ, 10 клас)
Бровченко Андрій (м. Київ, 7 клас)
Самченко Сергій (м. Запоріжжя, 8 клас)
Тарасенко Микола (м. Київ, 7 клас)
Регент Євгенія (м. Київ, 7 клас)
Григоров Максим (м. Київ, 7 клас)
Каличак Арсеній (м. Київ, 5 клас)
Людоговський Ілля (м. Київ, 5 клас)
Проскурня Антон (м. Кобеляки, Полтавська обл., 7 клас)

Вітаємо всіх переможців та призерів олімпіади з їх досягненнями, які для когось були першими, і, сподіваємось, не останніми!

Тепер нагадаємо умови та наведемо розв’язки задач олімпіади.

1. Петрик вирішив купити у кіоску літровий пакет яблучного соку, але у продажу були лише півлітрові пакети за ціною 15 грн та двохлітрові пакети за ціною 36 грн. Петрик вважає, що ціна пакета є сумою ціни упаковки та ціни напою, а ціна упаковки не залежить від об’єму. Якою на думку Петрика має бути ціна літрового пакета соку?

Розв’язання. Ціна двохлітрового пакета менша за ціну чотирьох півлітрових пакетів на ціну трьох упаковок, або на $4 \cdot 15 - 36 = 24$ грн. Тому ціна упаковки становить 8 грн. Ціна літрового пакета менша за ціну двох півлітрових пакетів на ціну однієї упаковки, а отже дорівнює $2 \cdot 15 - 8 = 22$ грн.

Відповідь: 22 грн.

2. Прямокутник розміру 5×11 розрізали по лініях клітинок на дві однакові фігури, з яких можна скласти квадрат, та деяку кількість окремих клітинок. Яка найменша кількість окремих клітинок могла утворитися?

Розв'язання. Кількість клітинок у двох однакових фігурах парна та є точним квадратом, меншим за 55. Отже, у двох фігурах щонайбільше 36 клітинок, а окремих клітинок не менше за 19. На рис. 1 показано один зі способів вирізати з прямокутника розміру 5×11 дві однакові фігури, з яких можна скласти квадрат розміру 6×6.

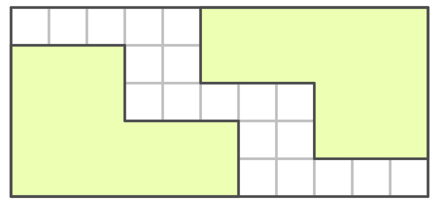

Рис. 1.

Відповідь: 19 клітинок.

3. Чи існують такі натуральні числа a та b, що сума остач від ділення чисел a, a^2 та a^3 на b дорівнює 2019?

Розв'язання. Наприклад, при $a = 2019$ та $b = 2019^2$ остачі від ділення чисел a, a^2 та a^3 на b дорівнюють 2019, 0 та 0 відповідно.

Відповідь: існують.

4. Двоє гравців по черзі заповнюють клітинки таблиці 3×3 різними числами від 1 до 9 (і числа, і клітинки можна обирати у довільному порядку). Коли таблиця заповнена, перший гравець отримує 1 бал за кожен рядок або стовпчик, у якому середнє число є більшим за обидва крайні, а другий гравець — за кожен рядок або стовпчик, у якому середнє число є меншим за обидва крайні. Виграє гравець, що отримав більшу кількість балів. При рівності балів оголошується нічия. Чи має хтось з гравців виграшну стратегію? Якщо має, то хто?

Розв'язання. Нехай перший гравець спочатку ставить у центральну клітинку число 9, а потім якщо другий гравець ставить у деяку клітинку число a, перший гравець ставить у симетричну відносно центра таблиці клітинку число $9-a$. Тоді він отримає 2 бали за другий рядок та другий стовпчик таблиці, а за інші рядки та стовпчики гравці отримають порівну балів. Справді, якщо у деякому з крайніх рядків (стовпчиків) середнє число є найменшим, то в іншому з крайніх рядків (стовпчиків) середнє число є найбільшим, і навпаки. Отже, перший гравець отримає на 2 бали більше та виграє.

Відповідь: виграшну стратегію має перший гравець.

5. У п'яти вазонах квітнуть червоні та блакитні кручені паничі. Чи обов'язково знайдуться три вазони, у яких росте не менше половини від загальної кількості червоних квіток та не менше половини від загальної кількості блакитних квіток?

Розв'язання. I спосіб. Занумеруємо вазони у порядку незростання кількості червоних квіток числами 1, 2, 2, 3, 3. Оберемо такі вазони: вазон з номером 1, той з вазонів з номером 2, у якому блакитних квіток не менше, ніж в іншому, та той з вазонів з номером 3, у якому блакитних квіток не менше, ніж в іншому. Тоді в обраних вазонах з номерами 1 та 2 не менше червоних квіток, ніж у необраних вазонах з номерами 2 та 3 відповідно, а тому у трьох обраних вазонах не менше половини від загальної кількості червоних квіток. Також у обраних вазонах з номерами 2 та 3 не менше червоних квіток, ніж у необраних вазонах з такими ж номерами, а тому у трьох обраних вазонах не менше половини від загальної кількості блакитних квіток.

II спосіб. Розставимо вазони по колу і будемо розглядати лише п'ять трійок вазонів, які при обході кола йдуть поспіль. Назвемо трійку вазонів червоною (блакитною), якщо у вазонах цієї трійки росте не менше половини від загальної кількості червоних (блакитних) квіток. Якщо деяка трійка є одночасно червоною та блакитною, то вона є шуканою. Зауважимо, що кожен вазон є крайнім у двох трійках. Ці трійки разом містять усі вазони, а отже всі квітки. Тому принаймні одна з цих двох трійок містить не менше половини від загальної кількості червоних квіток, тобто є червоною. Отже, кожен вазон є крайнім у принаймні одній червоній трійці. Таким чином, у всіх червоних трійках є принаймні п'ять крайніх вазонів. Але у одній трійці є лише два крайні вазони, тому червоних трійок принаймні три. Аналогічно дістаємо, що блакитними є принаймні три трійки вазонів з п'яти. Але тоді деяка трійка вазонів одночасно є червоною та блакитною, що завершує доведення.

Відповідь: так.

Зауваження. Обидва розв'язання легко узагальнюються на випадок $2n-1$ вазонів, серед яких потрібно обрати n, де $n \geq 1$.

6. Нехай AD та AE — висота та медіана трикутника ABC, у якому $\angle B = 2\angle C$. Довести, що $AB = 2DE$.

Розв'язання. Нехай F — середина AC (рис. 2). Тоді EF — середня лінія трикутника, отже $AB = 2EF$ та достатньо показати, що $DE = EF$. Оскільки DF — медіана, проведена до гіпотенузи AC прямокутного трикутника ADC, то $DF = FC = AF$, звідки $\angle CDF = \angle C$. Але $EF \parallel AB$, отже $\angle CEF = \angle B = 2\angle C$. Звідси дістаємо, що $\angle DFE = \angle CEF - \angle CDF = \angle C = \angle CDF$, тому $DE = EF$.

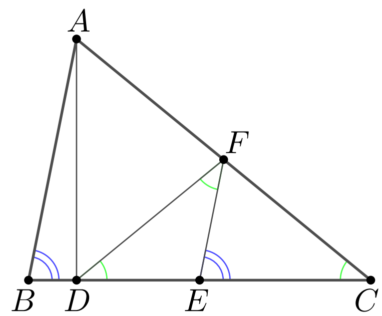

Рис. 2.

7. На дошці записано 300 чисел: $71, 711, 7111, \ldots$ (у записі кожного наступного числа на одну одиницю більше, ніж у записі попереднього). Довести, що серед цих чисел не більше 50 простих.

Розв'язання. Позначимо a_n число $71\ldots1$, у записі якого є n одиниць, та зауважимо, що $9a_n = 639\ldots9 = 640\ldots0 - 1 = 64 \cdot 10^n - 1$. Якщо $n = 2k$ при деякому натуральному k, то

$$9a_n = 64 \cdot 10^{2k} - 1 = (8 \cdot 10^k)^2 - 1 = (8 \cdot 10^k - 1)(8 \cdot 10^k + 1).$$

Таким чином, $a_n = (8 \cdot 10^k - 1) \cdot \frac{8 \cdot 10^k + 1}{9} = 79\ldots9 \cdot 8\ldots89$ (у першому множнику k дев'яток, у другому $k-1$ вісімок), а отже число a_n є складеним.

Аналогічно якщо $n = 3l$ при деякому натуральному l, то

$$9a_n = 64 \cdot 10^{3l} - 1 = (4 \cdot 10^l)^3 - 1 = (4 \cdot 10^l - 1)(16 \cdot 10^{2l} + 4 \cdot 10^l + 1).$$

Таким чином, $a_n = \frac{4 \cdot 10^l - 1}{3} \cdot \frac{16 \cdot 10^{2l} + 4 \cdot 10^l + 1}{3} = 13\ldots3 \cdot 53\ldots346\ldots67$ (у першому множнику l трійок, у другому $l-1$ трійок та $l-1$ шісток), а отже число a_n є складеним.

Нехай тепер n не ділиться на 2 та на 3. Тоді n дає остачу 1 або 5 при діленні на 6. Але якщо n дає остачу 5 при діленні на 6, то сума цифр числа a_n, яка дорівнює $n+7$, ділиться на 3, а отже число a_n ділиться на 3. Тому число a_n може бути простим лише за умови, що n дає остачу 1 при діленні на 6. Отже, не більше за одну шосту від кількості чисел на дошці є простими.

8. Про числа $a, b, c > 0$ відомо, що $a \geq bc^2$, $b \geq ca^2$ та $c \geq ab^2$. Довести нерівність

$$abc(a - bc^2)(b - ca^2)(c - ab^2) \leq \frac{1}{64}.$$

Розв'язання. I спосіб. За умовою існують такі числа $0 < x, y, z \leq 1$, що $bc^2 = xa$, $ca^2 = yb$ та $ab^2 = zc$. Тоді $(abc)^3 = xyz \cdot abc$, звідки $xyz = (abc)^2$, та

$$\begin{aligned} abc(a - bc^2)(b - ca^2)(c - ab^2) =& abc(a - xa)(b - yb)(c - zc) = \\ =& (abc)^2(1 - x)(1 - y)(1 - z) = xyz(1 - x)(1 - y)(1 - z). \end{aligned}$$

При $0 < x \leq 1$ маємо $0 \leq x(1 - x) = x - x^2 \leq \frac{1}{4}$, оскільки $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. Аналогічно $0 \leq y(1 - y) \leq \frac{1}{4}$ та $0 \leq z(1 - z) \leq \frac{1}{4}$, отже

$$xyz(1 - x)(1 - y)(1 - z) \leq \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}.$$

II спосіб. Покладемо $u = ab$, $v = bc$, $w = ca$. Зауважимо, що

$$abc(a - bc^2)(b - ca^2)(c - ab^2) = (ab - b^2c^2)(bc - c^2a^2)(ca - a^2b^2) = (u - v^2)(v - w^2)(w - u^2).$$

За умовою вирази у дужках є додатними, тому за нерівністю між середнім арифметичним та середнім геометричним

$$(u - v^2)(v - w^2)(w - u^2) \leq \left(\frac{u - v^2 + v - w^2 + w - u^2}{3}\right)^3.$$

Але $t - t^2 \leq \frac{1}{4}$ при всіх $t \in \mathbb{R}$, тому

$$\frac{u - v^2 + v - w^2 + w - u^2}{3} = \frac{1}{3}\big((u - u^2) + (v - v^2) + (w - w^2)\big) \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

що завершує доведення.

9. Нехай ABC — гострокутний трикутник, у якому $AB < AC$. На стороні BC відмітили таку точку D, що $AD = AB$, а на стороні AB — таку точку E, що відрізок DE проходить через ортоцентр трикутника ABC. Довести, що центр описаного кола трикутника ADE належить прямій AC.

Розв'язання. Нехай H — ортоцентр трикутника ABC, ℓ — дотична до описаного кола трикутника ADE в точці A (рис. 3). Позначимо α кут між хордою AE та ℓ. Тоді $\angle ADE = \alpha$ як вписаний кут та $\angle ABH = \angle ADE = \alpha$, оскільки точки B та D симетричні відносно AH. Звідси випливає, що $\ell \parallel BH$, тобто $\ell \perp AC$. Тому центр описаного кола трикутника ADE належить прямій AC.

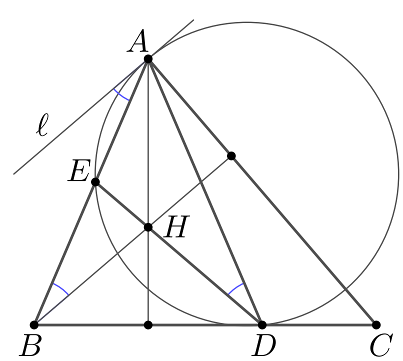

Рис. 3.

10. Знайти всі трійки дійсних чисел (x, y, z) такі, що $x + y + z = 1$ та

$$2017(x + yz) = 2018(y + xz) = 2019(z + xy).$$

Розв'язання. Оскільки $x + y + z = 1$, то $x + yz = 1 - y - z + yz = (1 - y)(1 - z)$. Аналогічно $y + xz = (1 - x)(1 - z)$ та $z + xy = (1 - x)(1 - y)$. Отже,

$$2017(1 - y)(1 - z) = 2018(1 - x)(1 - z) = 2019(1 - x)(1 - y).$$

Якщо деяке з чисел трійки (x, y, z) дорівнює 1, то ці рівності виконуються тоді й лише тоді, коли принаймні ще одне з чисел трійки дорівнює 1. При цьому третє з чисел трійки дорівнює -1, бо $x + y + z = 1$. Таким чином, умову задовольняють трійки $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ та $(1, 1, -1)$. Нехай тепер жодне з чисел x, y, z не дорівнює 1. Тоді після ділення на $(1 - x)(1 - y)(1 - z) \neq 0$ дістаємо рівносильні співвідношення

$$\frac{2017}{1 - x} = \frac{2018}{1 - y} = \frac{2019}{1 - z}.$$

Отже, $1 - x = 2017k$, $1 - y = 2018k$ та $1 - z = 2019k$ при деякому $k \neq 0$. Звідси

$$1 - x + 1 - y + 1 - z = 3 - (x + y + z) = 2 = 2017k + 2018k + 2019k = 6054k,$$

$k = \frac{1}{3027}$, $x = 1 - 2017k = \frac{1010}{3027}$, $y = 1 - 2018k = \frac{1009}{3027} = \frac{1}{3}$ та $z = 1 - 2019k = \frac{1008}{3027} = \frac{336}{1009}$.

Відповідь: $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$ та $\left(\frac{1010}{3027}, \frac{1}{3}, \frac{336}{1009}\right)$.

11. Чи можна розташувати на площині 5 кіл радіуса 12 та 12 кіл радіуса 5 так, аби кожне маленьке коло дотикалося до одного маленького та двох великих кіл?

Розв'язання. Нехай радіуси великих та маленьких кіл дорівнюють R та r відповідно, причому $R > 2r$. Зрозуміло, що маленькі кола мають розбиватися на пари кіл, які дотикаються, та відстань між центрами маленьких кіл у кожній парі дорівнює $2r$. Велике коло дотикається до обох маленьких кіл деякої пари зовнішнім або внутрішнім чином, якщо його центр знаходиться на відстані $R + r$ або $R - r$ від центрів маленьких кіл. При цьому центри великого та маленьких кіл є вершинами рівнобедреного трикутника з висотою $H = \sqrt{(R + r)^2 - r^2} = \sqrt{R^2 + 2Rr}$ або $h = \sqrt{(R - r)^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ (рис. 4). Отже, якщо відстань між центрами великих кіл дорівнює $2H$ або $2h$, то можна розташувати пару маленьких кіл так, аби вони дотикалися між собою та дотикалися до обох великих кіл. Якщо ж відстань між центрами великих кіл дорівнює $H + h$, то можна розташувати потрібним чином навіть дві пари маленьких кіл. Тепер неважко навести декілька способів розміщення кіл, які задовольняють умову задачі.

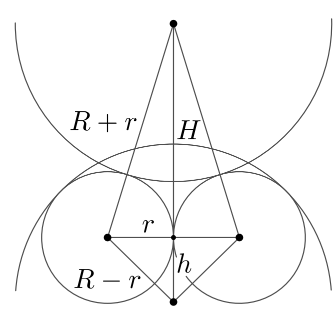

Рис. 4.

I спосіб. Розташуємо 5 великих кіл так, аби їх центри були вершинами трьох рівносторонніх трикутників зі стороною $2H$. Тоді можна розташувати 7 пар маленьких кіл як показано на рис. 5 та прибрати будь-яку зайву пару кіл.

II спосіб. Розташуємо 5 великих кіл так, аби їх центри були вершинами правильного п'ятикутника зі стороною $H + h$. Тоді можна розташувати 10 пар маленьких кіл як показано на рис. 6 та прибрати будь-які зайві 4 пари кіл.

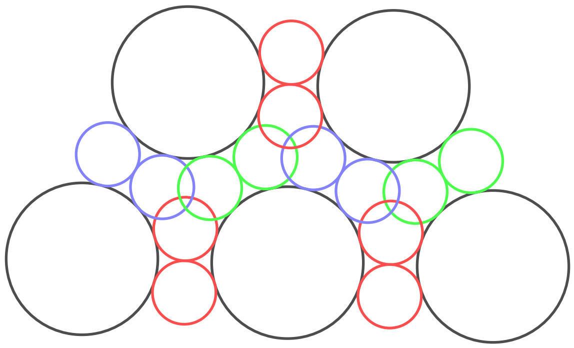

Рис. 5.

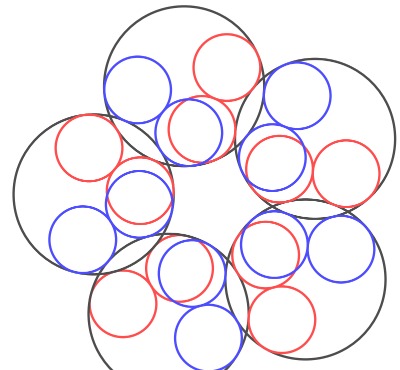

Рис. 6.

Відповідь: так.

12. Андрій, Борис, Віктор, Гліб та Дмитро по черзі працювали над файлом на комп'ютері. Вони домовились, що кожен відредагує файл один раз. Відомо, що за час роботи розмір файла збільшився з 0 до 100 рядків. Ось що колеги розповіли про свою роботу:

Андрій: Я подвоїв кількість рядків, а потім дописав ще 5 рядків.

Борис: Я потроїв кількість рядків, а потім дописав ще 15 рядків.

Віктор: Я спочатку видалив 10 рядків, а потім потроїв кількість рядків.

Гліб: Я збільшив кількість рядків у чотири рази, а потім видалив 20 рядків.

Дмитро: Я дописав 35 рядків, а потім видалив половину рядків.

Згодом з'ясувалося, що один з них збрехав і взагалі нічого не робив, а решта сказали правду. Хто брехун? У якому порядку редагували файл?

Розв'язання. Зрозуміло, що першим працювати міг лише Андрій або Борис, бо інакше кількість рядків мала б стати від'ємною або дробовою. Якщо першим працював Андрій, то другим не міг працювати Віктор, бо інакше кількість рядків стала б від'ємною.

Останнім над файлом не могли працювати ні Андрій (бо після його роботи кількість рядків є непарною), ні Борис або Віктор (бо після роботи кожного з них кількість рядків у файлі ділиться на 3). Отже, останнім працював Гліб або Дмитро. Якщо останнім був Гліб, то перед початком його роботи у файлі було 30 рядків, а тому Андрій не міг працювати третім, бо після його роботи кількість рядків є непарною. Якщо ж останнім був Дмитро, то перед початком його роботи у файлі було 165 рядків і третім не міг працювати Гліб, бо після його роботи кількість рядків є парною.

Обчислимо всі можливі кількості рядків у файлі після того, як над ним попрацювали перші дві особи, та всі можливі кількості рядків у файлі перед початком роботи останніх двох осіб:

перші дві особи	АБ	АГ	АД	БА	БВ	БГ	БД
кількість рядків після їх роботи	30	0	20	35	15	40	25

останні дві особи	БГ	ВГ	ДГ	АД	БД	ВД
кількість рядків до їх роботи	5	20	25	80	50	65

Кількість рядків після роботи перших двох осіб має бути такою ж, як перед початком роботи останніх двох осіб. Тому це 20, і тоді над файлом послідовно працювали Андрій, Дмитро, Віктор та Гліб, а збрехав Борис, або 25, і тоді над файлом послідовно працювали Борис, Дмитро, Дмитро та Гліб, що неможливо, оскільки Дмитро не міг працювати і другим, і третім.

Відповідь: збрехав Борис, а працювали послідовно Андрій, Дмитро, Віктор та Гліб.