Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет
Кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Перестюк М.О., Капустян О.В.,
Фекета П.В., Задоянчук Н.В.

Київ - 2015

Зміст

В навчальному посібнику представлено ряд методів дослідження асимптотичної поведінки розв'язків систем диференціальних рівнянь (глави 1, 2) та асимптотичних методів теорії нелінійних коливань (глава 3).

В главі 1 особливу увагу приділено якісній поведінці розв'язків лінійних систем з асимптотично-сталою матрицею.

В главі 2 розглянуто асимптотичну поведінку лінійних та квазілінійних систем з періодичними та майже-періодичними коефіцієнтами.

В главі 3 подано вступ до асимптотичних методів в теорії нелінійних коливань, зокрема, детально проаналізовано методи Ліндштедта, Пуанкаре та Крилова-Боголюбова.

Для зручності кожна глава розбита на параграфи, які закінчуються вправами для закріплення теоретичного матеріалу. В кінці посібника подано вказівки щодо їх розв'язання.

Матеріал навчального посібника розрахований на семестровий лекційний курс з урахуванням самостійного вивчення студентами частини матеріалу глави 3 і ґрунтується на нормативному курсі "Диференціальні рівняння" в межах підручника А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, І.О. Парасюка і розрахований на студентів 3, 4 курсів математичних факультетів університетів. Разом зі згаданим підручником, а також навчальними посібниками "Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь" (автор І.О. Парасюк), "Локальний аналіз нелінійних диференціальних рівнянь" (автори І.О. Парасюк, М.О. Перестюк), "Теорія стійкості" (автори М.О. Перестюк, О.С. Чернікова) даний навчальний посібник входить в комплекс навчальних видань, створених на кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, метою якого є сприяння студентам в оволодінні як класичними, так і сучасними якісними та асимптотичними методами дослідження систем диференціальних рівнянь.

Автори

Глава 1

Лінійні системи з майже сталою матрицею

§ 1.1. Основні поняття теорії стійкості

Розглядаємо систему

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{1.1}$$

де $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^1((a, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$.

В силу теореми Пікара [19] ці умови забезпечують для довільних початкових даних $t_0 > a$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ існування та єдиність розв'язку системи (1.1) $y = y(t)$ з початковими даними $y(t_0) = y_0$, що визначений в деякому околі точки t_0. Крім того, має місце наступна неперервна залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних [19]:

якщо $y = \eta(t)$, $t \in (a, b)$ - розв'язок (1.1), то для будь-яких $\epsilon > 0$, $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ існує $\delta > 0$ таке, що розв'язок (1.1) $y = y(t)$, що визначається початковими даними $y(t_0) = y_0$, де $t_0 \in [\alpha, \beta]$, $\|y_0 - \eta(t_0)\| < \delta$, буде визначеним на $[\alpha, \beta]$, причому $\forall\ t \in [\alpha, \beta]\ \|y(t) - \eta(t)\| < \epsilon$.

Означення 1.1. *Розв'язок $y = \eta(t)$, $t \in (a, +\infty)$ системи (1.1) називається **стійким**, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \forall t_0 > a\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ таке, що*

- *довільний розв'язок системи (1.1) $y = y(t)$ такий, що $\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta$, існує на $[t_0, +\infty)$;*

- $\forall t \geq t_0$ *виконується* $\|y(t) - \eta(t)\| < \varepsilon$.

Зауваження. Якщо умови означення стійкості виконуються для деякого $t_0 > a$, то вони виконуються для будь-якого $t_0' > a$.

Дійсно, нехай при $\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0) < \varepsilon$ маємо

$$\|y(t) - \eta(t)\| < \varepsilon$$

$\forall t \geq t_0$. З властивості неперервної залежності розв'язку від початкових даних маємо, що існує $\delta' = \delta'(\varepsilon, t_0')$ таке, що якщо $\|y(t_0') - \eta(t_0')\| < \delta'$, то

$$\|y(t) - \eta(t)\| < \delta \ \ \forall t \in [t_0', t_0],$$

а отже $\forall t \geq t_0'$ $\|y(t) - \eta(t)\| < \varepsilon$.

Отже, властивість стійкості завжди можна перевіряти для фіксованого t_0.

Означення 1.2. *Розв'язок* $y = \eta(t)$ *системи (1.1) називається* ***нестійким****, якщо порушуються умови означення стійкості, тобто або* $\eta(t)$ *не існує на* $(a, +\infty)$, *або*

$$\exists \varepsilon > 0 \ \exists t_0 > a \ \forall \delta > 0 \ \textit{існує}$$

$$y_\delta - \textit{розв'язок системи } (1.1) \ \textit{і } t_1 > t_0 \ \textit{такі, що}$$

$$\|y_\delta(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta, \ \|y_\delta(t_1) - \eta(t_1)\| \geq \varepsilon.$$

Означення 1.3. *Розв'язок* $y = \eta(t)$, $t \in (a, +\infty)$ *системи (1.1) називається* ***асимптотично стійким****, якщо він стійкий і* $\forall t_0 > a$ $\exists \triangle = \triangle(t_0) > 0$ *таке, що довільний розв'язок системи (1.1)* $y = y(t)$ *з* $\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \triangle$ *має властивість:* $\lim\limits_{t \to \infty} \|y(t) - \eta(t)\| = 0$.

Зауваження. Якщо в останньому означенні $\triangle = \infty$, то розв'язок $\eta(t)$ називається ***асимптотично стійким в цілому***.

Зауваження. В нелінійній системі (1.1) кожен розв'язок щодо стійкості може вести себе по-різному (див. вправу 1.1).

Якщо потрібно дослідити на стійкість розв'язок $y = \eta(t)$, $t \in (a, +\infty)$ системи (1.1), то заміною $z = y - \eta(t)$ ця задача зводиться до дослідження на стійкість розв'язку $z = 0$ системи

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z + \eta(t)) - \frac{d\eta(t)}{dt}.$$

Виходячи з цього, наведемо ряд результатів [19] про стійкість нульового розв'язку $y = 0$ автономної системи

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \tag{1.2}$$

де $f \in C^1(B_R(0))$, $f(0) = 0$, $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| < R\}$

Теорема 1.1 (про стійкість за 1-им наближенням).

1) *Якщо дійсні частини всіх власних чисел $\lambda(A)$ матриці $A = \frac{\partial f}{\partial y}(0)$ від'ємні, то розв'язок $y = 0$ системи (1.2) асимптотично стійкий.*
2) *Якщо хоча б для одного власного числа $\lambda(A)$ маємо $Re\lambda(A) > 0$, то розв'язок $y = 0$ системи (1.2) нестійкий.*

Означення 1.4. *Функція $V \in C^1(B_R(0))$ називається функцією Ляпунова системи (1.2), якщо $V(0) = 0$, $V(y) > 0$ $\forall\ y \in B_R(0) \setminus \{0\}$ та для її похідної в силу системи (1.2)*

$$\dot{V}_f(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} f_i(y)$$

для всіх $y \in B_R(0)$ справедлива нерівність $\dot{V}_f(y) \leq 0$.

Теорема 1.2 (Ляпунова про стійкість).

1) *Якщо система (1.2) має функцію Ляпунова, то її розв'язок $y = 0$ є стійким.*

2) *Якщо для функції Ляпунова V системи (1.2)* $\dot{V}_f(y) < 0 \ \forall\ y \in B_R(0) \setminus \{0\}$, *то її розв'язок* $y = 0$ *є асимптотично стійким.*
3) *Якщо для системи (1.2) існує функція* $V \in C^1(B_R(0)$ *така, що* $\dot{V}_f(y) < 0 \ \forall\ y \in B_R(0) \setminus \{0\}$, *і в будь-якому околі точки* $y = 0$ *існує точка* y_0 *така, що* $V(y_0)\dot{V}_f(y_0) > 0$, *то її розв'язок* $y = 0$ *є нестійким.*

Тепер розглянемо лінійну неоднорідну систему (ЛНС)

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t), \tag{1.3}$$

де $A(\cdot),\ f(\cdot) \in C([a, +\infty))$.

В силу теореми Пікара для лінійних систем [19] ці умови забезпечують для довільних початкових даних $t_0 \geq a$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ існування та єдиність розв'язку системи (1.3) $y = y(t)$ з початковими даними $y(t_0) = y_0$, що визначений на всьому проміжку $[a, +\infty)$.

Твердження 1.1. *Довільний розв'язок системи (1.3) є стійким (асимптотично стійким, нестійким) тоді і лише тоді, коли стійким (асимптотично стійким, нестійким) є розв'язок* $y \equiv 0$ *лінійної однорідної системи (ЛОС)*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y. \tag{1.4}$$

Тому кажуть про стійкість (асимптотичну стійкість, нестійкість) всієї лінійної системи.

Нехай $Y(t)$ – деяка фундаментальна матриця (1.4).

Теорема 1.3 (про стійкість ЛОС).

1) *Система (1.4) стійка тоді і лише тоді, коли* $\sup\limits_{t \geq a} \|Y(t)\| < \infty$;

2) *Система (1.4) асимптотично стійка тоді і лише тоді, коли* $\|Y(t)\| \to 0$, $t \to +\infty$;
3) *Система (1.4) нестійка тоді і лише тоді, коли* $\exists t_n \to \infty : \|Y(t_n)\| \to \infty$.

Зауваження. Асимптотично стійка система (1.4) є асимптотично стійкою в цілому.

Дійсно, для довільного $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ для розв'язку системи (1.4) $y = y(t)$, $y(t_0) = y_0$ маємо $\tilde{y}(t) = \triangle \frac{y(t)}{\|y_0\|}$ – розв'язок системи (1.4), $\|\tilde{y}(t_0)\| \le \triangle$, де $\triangle > 0$ – з означення асимптотичної стійкості. Звідси маємо, що $\tilde{y}(t) \to 0$, $t \to \infty$, що в свою чергу означає, що $y(t) \to 0$, $t \to \infty$.

Таким чином, лінійна система (1.4) є стійкою тоді і лише тоді, коли всі її розв'язки обмежені, і асимптотично стійкою тоді і лише тоді, коли всі її розв'язки прямують до нуля при $t \to \infty$.

Зауваження. Для нелінійних систем це, взагалі кажучи, не так. (див. вправи 1.2, 1.3).

Розглянемо лінійну однорідну систему зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \tag{1.5}$$

Має місце наступний результат щодо стійкості даної системи.

Теорема 1.4 (про стійкість ЛОС зі сталою матрицею).

1) *Система (1.5) є асимптотично стійкою тоді і лише тоді, коли дійсні частини всіх власних чисел матриці* A *є від'ємними;*
2) *система (1.5) є стійкою тоді і лише тоді, коли дійсні частини всіх власних чисел матриці* A *є недодатними, а власним числам з нульовою дійсною частиною*

відповідають одновимірні клітини Жордана в жордановій нормальній формі матриці A (тобто, коли алгебраїчна та геометрична кратність (дефект матриці A) власного числа співпадають);

3) *система (1.5) є нестійкою тоді і лише тоді, коли порушуються пункт 2), тобто або серед власних чисел матриці A є числа з додатною дійсною частиною, або дійсні частини всіх власних чисел недодатні, але хоча б одному власному числу з нульовою дійсною частиною відповідають неодновимірні клітини Жордана в жордановій нормальній формі матриці A ((тобто, коли алгебраїчна та геометрична кратність (дефект матриці A) власного числа не співпадають)).*

Вправа 1.1. Дослідити на стійкість розв'язки $x = \pm 1$ рівняння

$$\dot{x} = 1 - x^2.$$

Вправа 1.2. Довести, що всі розв'язки рівняння

$$\dot{x} = \sin^2 x$$

є обмеженими, проте тривіальний розв'язок $x = 0$ є нестійким.

Вправа 1.3. Довести, що для будь-якого розв'язку $(x(t), y(t))$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{t} - t^2 x y^2 \\ \dot{y} = -\frac{y}{t},\ t \geq 1 \end{cases}$$

виконується $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$, $t \to \infty$, проте тривіальний розв'язок є нестійким.

Вправа 1.4. Дослідити на стійкість всі положення рівноваги наступних систем:

a) $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + x^3 \\ \dot{y} = -x - 2y + 3x^5, \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x} = xy + 4 \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 17, \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 1 \\ \dot{y} = \ln(x^2 - y), \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dot{x} = 2y + \sqrt{1 - 3y - \sin x} \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases}$

Вправа 1.5. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок наступних систем:

a) $\begin{cases} \dot{x} = y^2 + z^2 \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -y, \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x} = -x(y^2 + z^2) \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -y. \end{cases}$

Вправа 1.6. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок наступних систем:

a) $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3 \\ \dot{y} = 6x - 2y, \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x \\ \dot{y} = x - 2y - y^3, \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$

Вправа 1.7. Дослідити на стійкість всі положення рівноваги системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases}$$

Вправа 1.8. Довести, що в системі

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x), \end{cases}$$

де $f(0) = 0$, $\forall\ x \neq 0\ xf(x) > 0$, нульовий розв'язок є стійким.

Вправа 1.9. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^3 + by \\ \dot{y} = cx + dy^5 \end{cases}$$

в залежності від значень числових параметрів a, b, c, d.

§ 1.2. Асимптотична поведінка розв'язків лінійних систем з майже сталою матрицею

Важливим інструментом при дослідженні якісної поведінки розв'язків систем диференціальних рівнянь є апріорні оцінки, вивід яких, як правило, ґрунтується на застосуванні наступних лем.

Лема (Біхарі). *Нехай функції* $u(t) \geq 0$, $f(t) \geq 0$ *– неперервні на* $[t_0, +\infty)$ *і виконується наступна нерівність*

$$u(t) \leq c + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\Phi(u(s))ds,$$

де $c > 0$, $\Phi(u) > 0$ *– неперервна неспадна функція при* $u \in (0, \bar{u})$, $\bar{u} \leq \infty$. *Нехай для* $\Psi(u) = \int\limits_{c}^{u} \frac{ds}{\Phi(s)}$ *виконується:*

$$\forall t \geq t_0 \quad \int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds < \Psi(\bar{u}-).$$

Тоді

$$u(t) \leq \Psi^{-1}\left(\int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds\right).$$

Наслідок (лема Гронуола-Беллмана). *Нехай* $u \geq 0$, $f \geq 0$ *– неперервні на* $[t_0, +\infty)$ *і виконується нерівність*

$$u(t) \leq c + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)u(s)ds,$$

тоді $\forall t \geq t_0$

$$u(t) \leq ce^{\int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds}.$$

Дійсно, поклавши в лемі Біхарі $\Phi(u) = u$, $\bar{u} = \infty$, $\Psi(u) = \int\limits_c^u \frac{ds}{s} = \ln u - \ln c$, $\Psi(\bar{u}-) = \lim\limits_{u\to\infty} \Psi(u) = \infty$, $\Psi(\Psi^{-1}(u)) = u = \ln \Psi^{-1}(u) - \ln c$, $\Psi^{-1}(u) = ce^u$, будемо мати твердження леми Гронуола-Беллмана.

Як приклад, покажемо, що для системи

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y$$

з неперервною матрицею для всіх $t \geq t_0$ виконується нерівність

$$\|y(t_0)\| e^{-\int\limits_{t_0}^{t} \|A(s)\| ds} \leq \|y(t)\| \leq \|y(t_0)\| e^{\int\limits_{t_0}^{t} \|A(s)\| ds}.$$

Дійсно, для розв'язку $y(t)$ даної системи запишемо

$$y(t) = y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} A(s)y(s)ds,$$

звідки

$$\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\| + \int\limits_{t_0}^{t} \|A(s)\|\|y(s)\|ds,$$

що в силу леми Гронуола-Беллмана означає виконання правої нерівності. Заміна $t = -s$ приводить до лівої нерівності.

Теорема 1.5 (про стійкість ЛОС з майже сталою матрицею). *Нехай (1.5) є стійкою, матриця $B(t) \in C([t_0, +\infty))$ така, що $\int\limits_{t_0}^{\infty} \|B(t)\|dt < \infty$. Тоді ЛОС з майже сталою матрицею*

$$\frac{dy}{dt} = (A + B(t))y \tag{1.6}$$

є стійкою.

▷ Нехай $t_0 = 0$, $Y(t) = e^{At}$ – фундаментальна матриця (1.5). Достатньо довести, що довільний розв'язок системи (1.6) є обмеженим на $[0, +\infty)$. Розглянемо систему (1.6) як лінійну неоднорідну систему з неоднорідністю $f(t) = B(t)y(t)$. Тоді за формулою варіації довільної сталої маємо

$$y(t) = Y(t)y_0 + \int\limits_0^t Y(t)Y^{-1}(s)B(s)y(s)ds.$$

Звідси

$$y(t) = Y(t)y_0 + \int\limits_0^t Y(t-s)B(s)y(s)ds.$$

Оскільки за умовою система (1.5) є стійкою, то за теоремою 1.3 маємо, що $\sup\limits_{t\geq 0}\|Y(t)\| \leq K$ для деякого $K > 0$. Звідси випливає, що

$$\|y(t)\| \leq K\|y_0\| + \int\limits_0^t K\|B(s)\|\|y(s)\|ds.$$

Тоді за лемою Гронуола-Беллмана

$$\|y(t)\| \leq K\|y_0\|e^{K\int\limits_0^\infty \|B(s)\|ds},$$

звідки маємо обмеженість розв'язку $y(t)$ системи (1.6), а відтак і стійкість самої системи (1.6). ◀

Теорема 1.6 (про асимптотичну стійкість ЛОС з майже сталою матрицею). *Нехай система (1.5) – асимптотична стійка, $B \in C([t_0, +\infty))$, $\|B(t)\| \to 0$, $t \to \infty$. Тоді система (1.6) також асимптотично стійка.*

▷ За умовою система (1.5) – асимптотично стійка. За теоремою 1.4 це означає, що дійсні частини всіх власних чисел λ матриці A є від'ємними. Нехай $\alpha = \max Re\lambda < 0$. Нехай $\varepsilon > 0$ таке, що $\alpha + 2\varepsilon < 0$.

Оскільки e^{At} – фундаментальна матриця системи (1.5), то аналогічно попередній теоремі маємо:

$$y(t) = e^{At}y_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}B(s)y(s)ds,$$

звідки

$$\|y(t)\| \leq \|e^{At}\|\|y_0\| + \int\limits_0^t \|e^{A(t-s)}\|\|B(s)\|\|y(s)\|ds.$$

Оскільки $\|e^{A(t-s)}\| \leq C(\varepsilon)e^{(\alpha+\varepsilon)t}$ $\forall t \geq 0$, то

$$\|y(t)\| \leq Ce^{(\alpha+\varepsilon)t}\|y_0\| + \int\limits_0^t Ce^{(\alpha+\varepsilon)(t-s)}\|B(s)\|\|y(s)\|ds,$$

звідки

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t}\|y(t)\| \leq C\|y_0\| + \int\limits_0^t Ce^{-(\alpha+\varepsilon)s}\|B(s)\|\|y(s)\|ds.$$

За лемою Гронуола-Беллмана маємо

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t}\|y(t)\| \leq C\|y_0\|e^{\int\limits_0^t C\|B(s)\|ds}$$

або

$$\|y(t)\| \leq C\|y_0\|e^{(\alpha+\varepsilon)t+C\int\limits_0^t \|B(s)\|ds}. \tag{1.7}$$

Скориставшись правилом Лопіталя, будемо мати

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C\int\limits_0^t \|B(s)\|ds}{t} = 0.$$

Тому $C\int\limits_0^t \|B(s)\|ds < \varepsilon t$ при $t \geq T(\varepsilon)$. А отже $\forall t \geq T$ $\|y(t)\| \leq C\|y_0\|e^{(\alpha+2\varepsilon)t} \to 0$ при $t \to \infty$. Тому система (1.6) є асимптотично стійкою. ◀

Зауваження. З нерівності (1.7) одразу випливає, що умову $\|B(t)\| \to 0$, $t \to \infty$ можна замінити на умову $\int\limits_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty$.

Зауваження. Якщо матриця A не є сталою, то теорема не вірна. Дійсно, розглянемо систему $\dot{x} = -\frac{x}{t}$ і нехай $t_0 = 1$. Тоді $x(t) = \frac{x(1)}{t} \to 0$, $t \to \infty$, отже дана система є асимптотично стійкою. Тепер розглянемо систему з майже сталою матрицею $\dot{y} = \frac{y}{t} = \left(-\frac{1}{t} + \frac{2}{t}\right) y$, тобто $B(t) = \frac{2}{t}$, причому $B(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Проте розв'язок $y(t) = y(1)t$ даної системи необмежений при $t \to \infty$, отже система нестійка.

Розглнянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \tag{1.8}$$

де $P(t) \in C([0, +\infty))$ і нехай виконується *умова Лаппо-Данилевського*

$$\forall t \geq s \geq 0 \quad P(t) \int\limits_{s}^{t} P(\tau) d\tau = \int\limits_{s}^{t} P(\tau) d\tau P(t). \tag{1.9}$$

Прикладом виконання умови Лаппо-Данилевського слугує симетрична матриця $P(t) = \begin{pmatrix} p(t) & q(t) \\ q(t) & p(t) \end{pmatrix}$.

Теорема 1.7 (про асимптотичну стійкість системи Лаппо-Данилевського). *Нехай виконуеться (1.9) і існує*

$$A = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int\limits_{0}^{t} P(s) ds.$$

Тоді, якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці A від'ємні, то (1.8) – асимптотично стійка.

$\triangleright$ Доведемо, що за умови (1.9) $Y(t) = e^{\int\limits_0^t P(s)ds}$ – фундаментальна матриця системи (1.8). Дійсно,

$$Y(t) = E+\int\limits_0^t P(s)ds+\frac{1}{2!}\left(\int\limits_0^t P(s)ds\right)^2+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\int\limits_0^t P(s)ds\right)^n+\ldots$$

і в силу (1.9) $\forall t \geq 0$ $Y(t)P(t) = P(t)Y(t)$. Тоді

$$Y(0) = E,\ \frac{d}{dt}Y(t) = e^{\int\limits_0^t P(s)ds}P(t) = P(t)e^{\int\limits_0^t P(s)ds} = P(t)Y(t).$$

Отже, довільний розв'язок системи (1.8) має вигляд

$$x(t) = e^{\int\limits_0^t P(s)ds}x(0).$$

Далі, з (1.9) після диференціювання по s маємо $P(t)(-P(s)) = -P(s)P(t)$, звідки

$$\forall t \geq s \geq 0\ \ P(t)P(s) = P(s)P(t).$$

Тоді

$$\int\limits_0^t P(\tau)d\tau \cdot \frac{1}{s}\int\limits_0^s P(\xi)d\xi = \frac{1}{s}\int\limits_0^t \left(\int\limits_0^s P(\tau)\cdot P(\xi)d\xi\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{s}\int\limits_0^s \left(\int\limits_0^t P(\xi)P(\tau)d\tau\right)d\xi = \frac{1}{s}\int\limits_0^s P(\xi)d\xi \cdot \int\limits_0^t P(\tau)d\tau$$

і при $s \to \infty$ маємо

$$\int\limits_0^t P(\tau)d\tau A = A\int\limits_0^t P(\tau)d\tau.$$

Покладемо

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t P(\tau)d\tau = A + B(t).$$

Тоді $B(t) \to 0$, $t \to \infty$. Крім того,

$$A \cdot B(t) = A\left(\frac{1}{t}\int_0^t P(\tau)d\tau - A\right) =$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t P(\tau)d\tau \cdot A - A^2 = B(t) \cdot A.$$

Тоді

$$x(t) = e^{\int_0^t P(s)ds} \cdot x(0) = e^{(At + t\cdot B(t))}x(0) = e^{At} \cdot e^{t\cdot B(t)}x(0).$$

Тепер нехай λ – власне число матриці A, $\max Re\lambda = \alpha < 0$ і нехай $\varepsilon > 0$ таке, що $\alpha + 2\varepsilon < 0$. Тоді $\exists T\ \forall t \geq T\ \|B(t)\| < \varepsilon$. Отже,

$$\|x(t)\| \leq \|e^{At}\| \cdot \|e^{B(t)t}\|\|x(0)\| < C(\varepsilon) \cdot e^{(\alpha+\varepsilon)t}e^{t\|B(t)\|} \cdot \|x(0)\| \leq$$

$$\leq C(\varepsilon)\|x(0)\|e^{(\alpha+2\varepsilon)t}$$

при $t \geq T$. Отже, $\|x(t)\| \to 0$, $t \to \infty$, а тому система (1.8) – асимптотично стійка. ◀

Вправа 1.10. Довести, що будь-який розв'язок рівняння

$$\ddot{x} + (1 + \frac{1}{1+t^2})x = 0$$

є обмеженою функцією на $(-\infty, +\infty)$ разом зі своєю похідною.

Вправа 1.11. Нехай $a > 0$, $\int_0^\infty \|b(t)\|dt < \infty$. Довести, що будь-який розв'язок рівняння

$$\ddot{x} + (a + b(t))x = 0$$

є обмеженою функцією на $[0, +\infty)$ разом зі своєю похідною.

Вправа 1.12. Довести, що пряма $x = 1$ є горизонтальною асимптотою при $t \to +\infty$ будь-якої інтегральної кривої рівняння

$$\ddot{x} + \dot{x} + (1 + \frac{1}{1+\sqrt{t}})x = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{t}}.$$

Вправа 1.13. Довести, що будь-який розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = (-3 + \frac{1}{t^2})x + 2y \\ \dot{y} = x - (4 + \frac{1}{t^3})y - e^{-3t - \frac{1}{t}} \end{cases}$$

прямує до нуля при $t \to +\infty$.

Вправа 1.14. Нехай система зі сталою матрицею $\dot{x} = Ax$ асимптотична стійка, $\int\limits_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty$, $\|f(t)\| \to 0$, $t \to +\infty$. Довести, що будь-який розв'язок неоднорідної системи

$$\frac{dy}{dt} = (A + B(t))y + f(t)$$

прямує до нуля при $t \to +\infty$.

Вправа 1.15. Довести, що система

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \cos(t)y \\ \dot{y} = \cos(t)x - y \end{cases}$$

є асимптотично стійкою.

§ 1.3. Асимптотично еквівалентні системи

Означення 1.5. *Системи*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.10}$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y) \tag{1.11}$$

називаються ***асимптотично еквівалентними****, якщо між їх розв'язками $x(t)$ та $y(t)$ можна встановити взаємно однозначну відповідність таку, що $\lim\limits_{t \to \infty} (x(t) - y(t)) = 0$.*

Теорема 1.8 (Левінсона). *Нехай система*

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{1.12}$$

є стійкою. Тоді система

$$\frac{dy}{dt} = (A + B(t))y, \tag{1.13}$$

де $B \in C([0, +\infty))$, $\int\limits_0^\infty \|B(t)\| dt < \infty$, *асимптотично еквівалентна системі (1.12).*

$\triangleright$ Існує невироджена матриця S така, що

$$A = SJ(A)S^{-1},$$

де $J(A)$ є Жордановою нормальною формою матриці A. При цьому заміна $\xi = Sx$ є взаємно однозначним перетворенням. Отже, якщо $\eta = Sy$ і $\xi(t) - \eta(t) \to 0$, то $x(t) - y(t) = S^{-1}(\xi(t) - \eta(t)) \to 0$. Таким чином, без обмеження загальності можемо вважати, що матриця A зведена до Жорданової нормальної форми, тобто

$$A = \mathrm{diag}[\underbrace{A_1}_{p\times p}, \underbrace{A_2}_{q\times q}], \quad p + q = n,$$

де $\mathrm{Re}\lambda(A_1) < -\alpha < 0$, $\mathrm{Re}\lambda(A_2) = 0$.

1) Нехай $X(t) = \mathrm{diag}[e^{A_1 t}, e^{A_2 t}]$ – фундаментальна матриця системи (1.12), $I_1 = \mathrm{diag}[E_p, 0]$, $I_2 = \mathrm{diag}[0, E_q]$, $I_1 + I_2 = E$. Тоді

$$X(t) = \underbrace{X(t) \cdot I_1}_{X_1(t)} + \underbrace{X(t) \cdot I_2}_{X_2(t)} = \mathrm{diag}[e^{A_1 t}, 0] + \mathrm{diag}[0, e^{A_2 t}].$$

При цьому

$$\|X_1(t)\| \le a \cdot e^{-\alpha t}, \quad \forall t \ge 0,$$

$$\|X_2(t)\| \le b, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Для системи (1.13) маємо для $t \geq t_0 \geq 0$:

$$
\begin{gathered}
y(t) = X(t-t_0)y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau = \\
= X(t-t_0)y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X_1(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau + \\
+ \int\limits_{t_0}^{t} X_2(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau.
\end{gathered} \tag{1.14}
$$

З теореми про стійкість лінійної системи з майже сталою матрицею всі розв'язки системи (1.13) обмежені на $[0, +\infty)$, тому

$$
\int\limits_{t_0}^{\infty} \|X_2(t-\tau)B(\tau)y(\tau)\|d\tau \leq b \cdot \sup_{t\geq 0}\|y(t)\| \int\limits_{t_0}^{\infty} \|B(\tau)\|d\tau < \infty,
$$

отже, інтеграл $\int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau$ – збіжний. Крім того,

$$
X_2(t-\tau) = X(t-\tau)I_2 = X(t-t_0)X(t_0-\tau)I_2 = X(t-t_0)X_2(t_0-\tau).
$$

Тоді (1.14) запишеться у вигляді: $\forall t \geq t_0 \geq 0$

$$
y(t) = X(t-t_0)\left[y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau\right] +
$$

$$
+ \int\limits_{t_0}^{t} X_1(t-\tau)B(\tau)y(\tau) - \int\limits_{t}^{\infty} X_2(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau.
$$

Тоді довільному розв'язку системи (1.13) $y = y(t)$ з початковим даним $y(t_0) = y_0$ співставимо розв'язок $x(t)$ системи (1.12) з початковим даним

$$
x(t_0) = y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau. \tag{1.15}
$$

Оскільки розв'язки $x(t)$ і $y(t)$ повністю визначаються своїми початковими даними, то формула (1.15) встановлює однозначну відповідність між всіма розв'язками (1.13) і (частиною) розв'язків системи (1.12).

2) Доведемо, що (1.15) – бієкція між множинами розв'язків (1.12) і (1.13). Нехай $Y(t)$ – фундаментальна матриця (1.13), $Y(t_0) = E$. Тоді

$$Y(t) = X(t-t_0)Y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X(t-\tau)B(\tau)Y(\tau)d\tau.$$

Але

$$\|X(t-t_0)\| \le \|X_1(t-t_0)\| + \|X_2(t-t_0)\| \le$$
$$\le ae^{-\alpha(t-t_0)} + b \le c \ \forall t \ge t_0,$$

тому

$$\|Y(t)\| \le c + \int\limits_{t_0}^{t} c \cdot \|B(\tau)\| \cdot \|Y(\tau)\| d\tau$$

і з нерівності Гроуола маємо:

$$\|Y(t)\| \le ce^{\int\limits_{t_0}^{t} c\|B(\tau)\|d\tau} \le ce^{c\int\limits_{0}^{\infty} \|B(\tau)\|d\tau} \le K \ \forall t \ge t_0,$$

причому K не залежить від $t_0 \in [0, +\infty)$.

Оскільки $y(t) = Y(t)y(t_0)$, то з (1.15) маємо:

$$x(t_0) = y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0-\tau)B(\tau)Y(\tau)y(t_0)d\tau =$$
$$= (E + Z(t_0))y(t_0),$$

де $Z(t_0) = \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0-\tau)B(\tau)Y(\tau)d\tau$, причому

$$\|Z(t_0)\| \le \int\limits_{t_0}^{\infty} \|X_2(t_0-\tau)\| \cdot \|B(\tau)\| \|Y(\tau)\| d\tau \le$$

$$\leq bK\int_{t_0}^{\infty}\|B(\tau)\|d\tau \to 0,\ t_0 \to \infty.$$

Отже, виберемо t_0 настільки великим, щоб

$$\det(E + Z(t_0)) > 0. \tag{1.16}$$

Тоді

$$y(t_0) = (E + Z(t_0))^{-1}x(t_0), \tag{1.17}$$

тому довільному розв'язку системи (1.12) з початковим даним $x(t_0)$ відповідає розв'язок (1.13) по формулі (1.15) з початковим даним $y(t_0)$, що визначається за допомогою (1.17). При цьому, в силу формул (1.15) і (1.17) різним y_1, y_2 відповідають різні x_1, x_2 і навпаки. Отже, (1.15) – бієкція.

3) Розглянемо $x(t) = X(t - t_0)x(t_0)$. Тоді з (1.15) і (1.17) маємо:

$$y(t) - x(t) = X(t - t_0)x(t_0) - X(t - t_0)x(t_0) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} X_1(t - \tau)B(\tau)y(\tau)d\tau - \int_{t}^{\infty} X_2(t - \tau)B(\tau)y(\tau)d\tau.$$

Оскільки $\|y(t)\| \leq \|Y(t)\|\|y(t_0)\| \leq K\|y(t_0)\|\ \forall t \geq t_0$, то

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|X_1(t - \tau)\|\|B(\tau)\|\|y(\tau)\|d\tau +$$

$$+ \int_{t}^{+\infty} \|X_2(t - \tau)\|\|B(\tau)\|\|y(\tau)\|d\tau \leq$$

$$\leq aK\|y(t_0)\|\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\|B(\tau)\|d\tau +$$

$$+bK\|y(t_0)\int_{t}^{\infty}\|B(\tau)\|d\tau,$$

де останній доданок прямує до нуля при $t \to \infty$. При $t \geq 2t_0$

$$\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\|B(\tau)\|d\tau \leq \int\limits_{t_0}^{\frac{t}{2}} e^{-\alpha(t-\tau)}\|B(\tau)\|d\tau + \int\limits_{\frac{t}{2}}^{t} \|B(\tau)\|d\tau \leq$$

$$\leq e^{-\frac{\alpha t}{2}} \int\limits_{t_0}^{\frac{t}{2}} e^{-\alpha(\frac{t}{2}-\tau)}\|B(\tau)\|d\tau + \int\limits_{\frac{t}{2}}^{t} \|B(\tau)\|d\tau \leq$$

$$\leq e^{-\frac{\alpha t}{2}} \int\limits_{0}^{\infty} \|B(\tau)\|d\tau + \int\limits_{\frac{t}{2}}^{t} \|B(\tau)\|d\tau \to 0,\ t \to \infty.$$

Отже, $\lim\limits_{t\to\infty} \|y(t) - x(t)\| = 0$. ◀

Зауваження. Якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці A від'ємні, то $A_2 = 0$, отже $X_2 = 0$, а тому $x(t_0) = y(t_0)$.

Теорема 1.9 (про асимптотичне інтегрування ЛОР 2-го порядку). *Нехай для рівняння*

$$\ddot{x} + q(t)x = 0 \tag{1.18}$$

виконується умова

$$\int\limits_{0}^{\infty} |1 - q(t)|dt < \infty.$$

Тоді для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *існує единий розв'язок рівняння (1.18)* $x = x(t)$ *такий, що*

$$x(t) = \alpha\cos t + \beta\sin t + o(1),\ t \to \infty.$$

▷ Розглянемо $q(t) = 1 + \tilde{q}(t)$, $\int\limits_0^\infty |\tilde{q}(t)|dt < \infty$. Зведемо рівняння до системи: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -q(t)x \end{cases}$ або $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \tilde{q}(t)x \end{cases}$. Розглянемо $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\tilde{q}(t) & 0 \end{pmatrix}$, тому система стійка. І за теоремою про асимптотичну еквівалентність системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -q(t)x \end{cases} \tag{1.19}$$

і

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{1.20}$$

асимптотично еквівалентні. Довільний розв'язок системи (1.20) має вигляд $x = \alpha\cos t + \beta\sin t$, $y = \dot{x} = -\alpha\sin t + \beta\cos t$. Тоді для довільних α, β існує єдиний розв'язок системи (1.19) $\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ такий, що $x(t) - \alpha\cos t - \beta\sin t = o(1)$, $\dot{x} + \alpha\sin t - \beta\cos t = o(1)$, $t \to \infty$. ◀

Вправа 1.16. Встановити асимптотичну еквівалентність між рівняннями $\dot{x_1} = -a_1 x_1$ та $\dot{x_2} = -a_2 x_2$, де $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Вправа 1.17. Довести, що за умови $\int\limits_0^\infty (|\alpha(t)| + |\beta(t)|)dt < \infty$ для довільного розв'язку системи $\begin{cases} \dot{x} = \alpha(t)y \\ \dot{y} = \beta(t)x \end{cases}$ існують числа c_1, c_2 такі, що $x(t) \to c_1$, $y(t) \to c_2$, $t \to \infty$.

Вправа 1.18. Довести, що система

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + e^{-t})\, x - y \\ \dot{y} = 2x - 2\left(1 + e^{-t^2}\right) y \end{cases}$$

має принаймні один нетривіальний розв'язок, що прямує до нуля при $t \to +\infty$.

Вправа 1.19. Довести, що система

$$\begin{cases} \dot{x} = y\left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right) \\ \dot{y} = -x\left(1 + e^{-t^2}\right) \end{cases}$$

не має нетривіальних розв'язків, що прямують до нуля при $t \to +\infty$.

Вправа 1.20. Довести, що система

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + e^{-t})\, x - 2y - \frac{2}{3}e^{-t} - e^{-2t} \\ \dot{y} = 2x - 4y \end{cases}$$

має принаймні два розв'язки, що прямують до нуля при $t \to +\infty$.

Вправа 1.21. Довести, що довільний розв'язок рівняння Бесселя

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{t} + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right) x = 0$$

має безліч нулів $\{t_k\}$ на $(0, +\infty)$ і знайти $\lim\limits_{k\to\infty} |t_{k+1} - t_k|$.

§ 1.4. Асимптотична поведінка розв'язків L-діагональних систем

Розглянемо сингулярне інтегральне рівняння Вольтерри

$$y(t) = \int\limits_a^t K(t,\tau)Q(\tau)y(\tau)d\tau + f(t), \tag{1.21}$$

де $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \in C([0, +\infty))$, K, Q – $n \times n$-матриці, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $0 \le T \le a_j \le \infty$ ($j \in I_1$, якщо $a_j < \infty$ та $j \in I_2$, якщо $a_j = \infty$).

Тоді (1.21) еквівалентне наступним співвідношенням:

$$y_j(t) = f_j(t) + \int\limits_{a_j}^t \sum_{k,s} K_{jk}(t,\tau)Q_{ks}(\tau)y_s(\tau)d\tau, \quad j \in I_1,$$

$$y_j(t) = f_j(t) - \int_t^{\infty} \sum_{k,s} K_{jk}(t,\tau) Q_{ks}(\tau) y_s(\tau) d\tau, \quad j \in I_2.$$

Теорема 1.10 (сингулярне інтегральне рівняння Вольтерри). *Нехай $K_{jk}(t,\tau)$ – неперервна і обмежена функція в кожній з областей $\Omega_j = \{t \in [T,+\infty), \tau \in [T,t]\}$, якщо $j \in I_1$ та $\Omega_j = \{t \in [T,+\infty), \tau \in [t,+\infty]\}$, якщо $j \in I_2$, Q – неперервна і абсолютно інтегровна на $[0,+\infty)$ функція, f – неперервна і обмежена на $[0,+\infty)$ функція. Тоді при достатньо великому T рівняння (1.21) має єдиний неперервний обмежений на $[T,+\infty)$ розв'язок.*

$\triangleright$ Нехай $X = C([T,+\infty);\mathbb{R}^n)$, $\rho(\varphi,\psi) = \sup\limits_{t \geq T} \|\varphi(t) - \psi(t)\|$. Тоді (X,ρ) – повний метричний простір. Нехай

$$(F\varphi)(t) = f(t) + \int_a^t K(t,\tau) Q(\tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Тоді з того, що $\|K(t,\tau)\| \leq c$ випливає, що

$$\|F\varphi(t) - F\psi(t)\| \leq c \int_T^{+\infty} \|Q(t)\| \|\varphi(t) - \psi(t)\| dt \leq$$

$$\leq c\rho(\varphi,\psi) \cdot \int_T^{+\infty} \|Q(t)\| dt$$

і при достатньо великому T маємо, що $c \cdot \int\limits_T^{+\infty} \|Q(t)\| dt = \lambda < 1$, звідки маємо, що F – стискуюче відображення, а отже, за теоремою Банаха має в X єдину нерухому точку.

Теорема доведена. ◀

Розглядаємо систему

$$\frac{dx}{dt} = (\Lambda(t) + Q(t))x, \tag{1.22}$$

де $\Lambda(t) = \operatorname{diag}[\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)] \in C([0, +\infty))$, Λ, Q – комплексні матриці,

$$\int\limits_0^\infty \|Q(t)\| dt < \infty. \tag{1.23}$$

Будемо вважати, що елементи матриці $\Lambda(t)$ асимптотично розділені, тобто $\exists T \geq 0 \quad \forall t \geq T$

$$\operatorname{Re}(\lambda_j(t) - \lambda_k(t)) \text{ не змінює знак } \forall j, k. \tag{1.24}$$

Зауваження. З умови (1.24) маємо, що $\exists \int\limits_0^\infty \operatorname{Re}(\lambda_j(t) - \lambda_k(t)) dt \leq \infty$.

Означення 1.6. *Система вигляду (1.22) називаєтьcя L-діагональною.*

Вивчимо поведінку розв'язків системи (1.22) при $t \to \infty$.

Теорема 1.11 (про асимптотику L-діагональної системи). *Система (1.22) має ФСР $\{x_s(t)\}_{s=1}^n$, яка при $t \geq T$ має вигляд:*

$$\forall s = \overline{1, n} \quad x_s(t) = e^{\int\limits_0^t \lambda_s(\tau) d\tau} (l_s + \eta_s(t)),$$

де $l_s = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ – s-ий орт в $\mathbb{R}^n$, $\eta_s(t) \to 0$, $t \to \infty$.

$\triangleright$ Нехай $\mu_s(t) = \int\limits_0^t \lambda_s(\tau) d\tau$. Зафіксуємо $s \in \overline{1, n}$ і зробимо в (1.22) заміну змінних

$$x = e^{\mu_s(t)} y_s,$$

$$\frac{dx}{dt} = e^{\mu_s(t)} \frac{dy_s}{dt} + \lambda_s(t) e^{\mu_s(t)} y_s = \Lambda(t) e^{\mu_s(t)} y_s + Q(t) e^{\mu_s(t)} y_s,$$

тобто маємо наступну систему

$$\frac{dy_s}{dt} = (\Lambda(t) - \lambda_s(t) E) y_s + Q(t) y_s. \tag{1.25}$$

Розглянемо функцію

$$K^{(s)}(t,\tau) = e^{\int\limits_{\tau}^{t}[\Lambda(p)-\lambda_s(p)E]dp}. \tag{1.26}$$

Оскільки матриця $\Lambda(p) - \lambda_s(p)E$ є діагональною, то $K^{(s)}(t,\tau)$ є матричним розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Y(t) = (\Lambda(t) - \lambda_s(t)E)Y(t) \\ Y(\tau) = E. \end{cases} \tag{1.27}$$

Розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$y_s(t) = l_s + \int\limits_a^t K^{(s)}(t,\tau)Q(\tau)y_s(\tau)d\tau, \tag{1.28}$$

де $a = (a_1, \ldots, a_n)$, причому

$$a_j = T \ (\Leftrightarrow j \in I_1), \text{ якщо } \int\limits_0^\infty \mathrm{Re}(\lambda_j(t) - \lambda_s(t))dt = -\infty,$$

$$a_j = \infty \ (\Leftrightarrow j \in I_2), \text{ якщо } \int\limits_0^\infty \mathrm{Re}(\lambda_j(t) - \lambda_s(t))dt > -\infty.$$

Неперервний розв'язок $y_s(t)$ системи (1.28) є розв'язком (1.25). Дійсно,

$$\frac{dy_s}{dt} = \underbrace{K^{(s)}(t,t)}_{=E}Q(t)y_s(t) + \int\limits_a^t \frac{d}{dt}K^{(s)}(t,\tau)Q(\tau)y_s(\tau)d\tau =$$

$$= Q(t)y_s(t) + \int\limits_a^t (\Lambda(t) - \lambda_s(t)E)K^{(s)}(t,\tau)Q(\tau)y_s(\tau)d\tau =$$

$$= Q(t)y_s(t) + [\Lambda(t) - \lambda_s(t)E](y_s(t) - l_s),$$

причому $(\Lambda(t) - \lambda_s(t)E)l_s = \bar{0}$.

Для розв'язності (1.28) з теореми про сингулярне інтегральне рівняння Вольтерри достатньо довести, що $K_j^{(s)}(t,\tau) = e^{\int\limits_\tau^t (\lambda_j(p)-\lambda_s(p))dp}$ обмежені в

$$\Omega_j = \{t \geq T,\ \tau \in [T,t]\} \text{ при } j \in I_1,$$

$$\Omega_j = \{t \geq T,\ \tau \geq t\} \text{ при } j \in I_2.$$

Дійсно, при $j \in I_1$ $\mathrm{Re}(\lambda_j(t) - \lambda_s(t)) < 0$ при $t \geq T$ (бо ця різниця не змінює знак). Отже,

$$\left|K_j^{(s)}(t,\tau)\right| = e^{\int\limits_\tau^t (\mathrm{Re}(\lambda_j(p)-\lambda_s(p)))dp} \leq 1,$$

оскільки $\tau \leq t$.

При $j \in I_2$ $\tau \geq t$, тому

$$\left|K_j^{(s)}(t,\tau)\right| = e^{-\int\limits_t^\tau (\mathrm{Re}(\lambda_j(p)-\lambda_s(p)))dp}.$$

Якщо $(\mathrm{Re}(\lambda_j(t) - \lambda_s(t)) \geq 0$ при $t \geq T$, то $\left|K_j^{(s)}(t,\tau)\right| \leq 1$.

Якщо ж $\mathrm{Re}(\lambda_j(t) - \lambda_s(t)) \leq 0$, то

$$\left|K_j^{(s)}(t,\tau)\right| \leq e^{-\int\limits_T^\infty (\mathrm{Re}(\lambda_j(p)-\lambda_s(p)))dp} < \infty,$$

бо $\int\limits_0^\infty (\mathrm{Re}(\lambda_j(p) - \lambda_s(p)))dp > -\infty$.

Отже, для достатньо великих T на $[T,+\infty)$ існує неперервний, обмежений на $[T,+\infty)$ розв'язок $y_s(t)$ рівняння (1.28).

Оскільки $[a_j,t] \subset [T,+\infty)$, то з (1.28) маємо:

$$\|y_s(t)\| \leq 1 + c\int\limits_T^\infty \|Q(\tau)\|\|y_s(\tau)\|d\tau,$$

звідки

$$\sup_{t\geq T}\|y_s(t)\| \leq 1 + \sup_{t\geq T}\|y_s(t)\| \cdot c\int\limits_T^\infty \|Q(\tau)\|d\tau.$$

Оскільки за вибором T $\lambda = c\int\limits_T^\infty \|Q(\tau)\|d\tau < 1$, то

$$\sup_{t\ge T}\|y_s(t)\| \le \frac{1}{1-\lambda}.$$

Доведемо, що $\exists \lim\limits_{t\to\infty} y_s(t) = l_s$. З (1.28) маємо:

$$y_{js}(t) = \delta_{js} + \int\limits_{a_j}^{t} e^{\int\limits_{\tau}^{t}(\lambda_j(p)-\lambda_s(p))dp}\sum_k Q_{jk}y_{ks}(\tau)d\tau.$$

Нехай $j \in I_1$. Тоді $j \ne s$, $\delta_{js} = 0$, звідки для $t' \in [T,t]$ маємо:

$$y_{js}(t) = \int\limits_{T}^{t'} e^{\int\limits_{\tau}^{t'}(\lambda_j(p)-\lambda_s(p))dp}\cdot e^{\int\limits_{t'}^{t}(\lambda_j(p)-\lambda_s(p))dp}\sum_k Q_{jk}y_{ks}(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t'}^{t} e^{\int\limits_{\tau}^{t}(\lambda_j(p)-\lambda_s(p))dp}\cdot\sum_k Q_{jk}y_{ks}(\tau)d\tau =$$

$$= e^{\int\limits_{t'}^{t}(\lambda_j(p)-\lambda_s(p))dp} y_{js}(t')+$$

$$+\int\limits_{t'}^{t} K_j^{(s)}(t,\tau)\sum_k Q_{jk}y_{ks}(\tau)d\tau.$$

Оскільки при $j \in I_1$ $|K_j^{(s)}(t,\tau)| \le 1$, то

$$\left|\int\limits_{t'}^{t} K_j^{(s)}(t,\tau)\sum_k Q_{jk}y_{ks}(\tau)d\tau\right| \le$$

$$\le \int\limits_{t'}^{t}\sum_k |Q_{jk}|\cdot|y_{ks}(\tau)|d\tau \le$$

$$\le \sup_{t\ge T}|y_{ks}(t)|\cdot\int\limits_{t'}^{t}\|Q(\tau)\|d\tau < \frac{\varepsilon}{2}$$

для достатньо великих $t' \le t$.

Оскільки $\int\limits_{t'}^{t} \mathrm{Re}(\lambda_j(p) - \lambda_s(p))dp \to -\infty$, $t \to \infty$, то

$$\left| e^{\int\limits_{t'}^{t}(\lambda_j(p)-\lambda_s(p))dp} \cdot y_{js}(t') \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $t > t''$, звідки $\lim\limits_{t\to\infty} y_{js}(t) = 0 = \delta_{js}$.

Якщо ж $j \in I_2$, то

$$y_{js}(t) = \delta_{js} - \int\limits_{t}^{\infty} e^{\int\limits_{\tau}^{t}(\lambda_j(p)-\lambda_s(p))dp} \sum_k Q_{jk} y_{ks}(\tau) d\tau.$$

Оскільки величина $\left| e^{\int\limits_{\tau}^{t}(\lambda_j(p)-h_s(p))dp} \right|$ є обмеженою в Ω_j при $j \in I_2$, то

$$\int\limits_{t}^{\infty} e^{\int\limits_{\tau}^{t}(\lambda_j(p)-h_s(p))dp} \sum_k Q_{jk} y_{ks}(\tau) d\tau \to 0, \ \ t \to \infty.$$

Отже, $y_s(t) = l_s + \eta_s(t)$, де $\eta_s(t) \to 0$, $t \to \infty$. При переході до старих змінних одержуємо шукане. ◀

Вправа 1.22. Довести, що довільний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \frac{1}{t^2} y \\ \dot{y} = \frac{2}{t^2} x - (t^3 - t) y \end{cases}$$

прямує до нуля при $t \to \infty$.

Вправа 1.23. Довести, що всі розв'язки системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -tx + e^{-t} y \\ \dot{y} = e^{-t^2} \cdot x + (\sin t) y \end{cases}$$

є обмеженими на $[0, +\infty)$.

Вправа 1.24. Довести, що для довільного числа $a \in \mathbb{R}$ існує розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{t^2}x + e^{-t^2}y \\ \dot{y} = \frac{3}{t^4}x - y \end{cases}$$

такий, що прямує до вектора $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ при $t \to +\infty$.

§ 1.5. Асимптотика розв'язків лінійних систем зі знаковизначеною матрицею

Розглядаємо систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \tag{1.29}$$

де $A \in C([0, +\infty))$.

Теорема 1.12 (випадок знаковизначеної матриці). *Нехай $\forall t \geq 0$ матриця $A(t) + A^T(t)$ є недодатно визначена, тобто*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad ((A + A^T)\xi, \xi) \leq 0.$$

Тоді існує розв'язок (1.29) $y = y_0(t) \neq 0$ такий, що

$$y_0(t) \to 0, \quad t \to \infty, \tag{1.30}$$

тоді і лише тоді, коли

$$\int_0^t \mathrm{tr} A(s) ds \to -\infty, \quad t \to \infty. \tag{1.31}$$

$\triangleright$ З того, що $\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 = ((A(t) + A^T(t))y, y) \leq 0$ маємо, що для довільного розв'язку (1.29) виконується нерівність

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 \leq 0 \ \forall t \geq 0,$$

а тому функція $t \mapsto \|y(t)\|$ є спадною. Отже, $\exists \lim\limits_{t\to\infty} \|y(t)\|$. Тоді для довільних розв'язків (1.29) $y = y(t)$ і $y = z(t)$ існує $\lim\limits_{t\to\infty}(y(t), z(t))$, що випливає з рівності

$$\|y(t) + z(t)\|^2 = \|y(t)\|^2 + \|z(t)\|^2 + 2(y(t), z(t)).$$

Нехай $Y(t)$ – фундаментальна матриця (1.29),

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y^1(t) & \dots & y^n(t) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix},$$

$$Y^T(t) = \begin{pmatrix} y^1(t)\dots \\ \vdots \\ y^n(t)\dots \end{pmatrix}.$$

Тоді $\exists \lim\limits_{t\to\infty} Y^T(t)Y(t) = \mathbb{D}$, причому $\mathbb{D}$ – симетрична. Оскільки $\det Y^T(t)Y(t) = (\det Y(t))^2$, то існує

$$\lim_{t\to\infty}(\det Y(t))^2 = \det\mathbb{D}.$$

Для розв'язку (1.29) $y = Y(t)c$, $c \in \mathbb{R}^n$ маємо:

$$\|y(t)\|^2 = (y(t), y(t)) = (Y^T(t)Y(t)c, c).$$

Тому

$$\lim_{t\to\infty} \|y(t)\|^2 = (\mathbb{D}c, c) \geq 0$$

Отже, $\mathbb{D}$ – симетрична, $(\mathbb{D}c, c) \geq 0$ $\forall c \in \mathbb{R}^n$. Тому $(\mathbb{D}c_0, c_0) = 0$ для $c_0 \neq 0$ тоді і лише тоді, коли $\det\mathbb{D} = 0$. Дійсно, для симетричної матриці $\mathbb{D}$ $\inf\limits_{\|x\|=1}(\mathbb{D}x, x) = \lambda_1$, де $\lambda_1 \geq 0$ – найменше власне число (всі інші $\lambda_i \geq 0$, дійсні в силу $\mathbb{D} \geq 0$). Без обмеження загальності можемо вважати, що $\|c_0\| = 1$, тому $\lambda_1 = 0 = (\mathbb{D}c_0, c_0)$. Звідси маємо, що $\exists c \neq 0$: $\mathbb{D}c = \lambda_1 c = 0$. Тому $\det\mathbb{D} = 0$.

Отже система (1.29) має нетривіальний розв'язок, що задовольняє (1.30) тоді і лише тоді, коли

$$\det\mathbb{D} = \lim_{t\to\infty}(\det Y(t))^2 = 0.$$

Але за формулою Якобі

$$\det Y(t) = \det Y(0)e^{\int\limits_0^t \mathrm{tr}A(s)ds}.$$

Тому рівність $\det\mathbb{D} = 0$ можлива тоді і лише тоді, коли

$$\int\limits_0^t \mathrm{tr}A(s)ds \to -\infty,\ t \to +\infty.$$

◄

Теорема 1.13 (випадок матриці з невід'ємними елементами). *Нехай* $A = ((a_{ij}))_{i,j=1}^n \in C([0,+\infty))$ *і* $\forall t \geq 0$ $\forall i,j = \overline{1,n}$ $a_{ij}(t) \geq 0$. *Тоді система*

$$\frac{dy}{dt} = -A(t)y \tag{1.32}$$

має нетривіальний розв'язок $y(t)$ *такий, що*

$$y(t) \geq 0,\ y'(t) \leq 0\ \forall t \geq 0.$$

Зауваження. Оскільки $\forall j = \overline{1,n}$ $y_j(t) \geq 0$, $y_j'(t) \leq 0$, то існує $\lim\limits_{t\to\infty} y_j(t) \geq y_j(0)$, отже,

$$\exists \lim_{t\to\infty} y(t) \in \mathbb{R}_+^n.$$

▷ В силу (1.32), якщо $y(t) \geq 0$ $\forall t \in (a,b)$, то $\frac{dy}{dt} \leq 0$ на (a,b). Зокрема, якщо для $a > 0$ $y(a) > 0$, то

$$y(t) \geq y(a) > 0\ \forall t \in [0,a].$$

Зафіксуємо $y_0 > 0$. Нехай $y_a(t)$ – розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -A(t)y \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

Тоді $\forall t \in [0, a]$ $y_a(t) \geq y_0 > 0$. Покладемо $c(a) = \|y_a(0)\| \geq \|y_0\| > 0$. Розглянемо $\overline{y}_a(t) = \frac{y_a(t)}{c(a)}$. Тоді $\overline{y}_a$ – розв'язок (1.32), $\overline{y}_a(t) \geq \frac{y_0}{c(a)} > 0$ $\forall t \in [0, a]$ $\|\overline{y}_a(0)\| = 1$. Тепер нехай $0 < a_1 < a_2 < \ldots$, $a_n \to \infty$.

Розглядаємо $y^n(t) = \overline{y}_{a_n}(t)$, причому можемо вважати, що $y^n(0) = \overline{y}_{a_n}(0) \to y_0$, $n \to \infty$ (оскільки $\|\overline{y}_{a_n}(0)\| = 1$). Тоді $\|y_0\| = 1$, $y^n \rightrightarrows y$ на довільному $[a, b] \subset [0, +\infty)$, оскільки $\{y^n\}$ – рівномірно обмежена та рівностепенево неперервна. Дійсно,

$$\frac{d}{dt}\|y^n\|^2 \leq 2 \max_{[a,b]} \|A(t)\| \|y^n(t)\|^2 \leq c\|y^n(t)\|^2,$$

$$\|y^n(t)\|^2 \leq \|y^n(0)\|^2 + c\int_0^t \|y^n(s)\|^2 ds$$

і за лемою Гронуола

$$\max_{[a,b]} \|y^n(t)\| \leq D, \ \max_{[a,b]} \left\| \frac{dy^n(t)}{dt} \right\| \leq cD.$$

Отже, послідовність $\{y^n\}$ є рівномірно обмеженою і рівностепенево неперервною. Тоді за теоремою Асколі-Арцела вона рівномірно збіжна до розв'язку (1.32) $y = y(t)$, $y(0) = y_0 \neq 0$

і $\forall\ t \geq 0$ $y(t) \geq 0$. ◀

Теорема 1.14 (про лінійну асимптотичну рівновагу). *Нехай для системи*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{1.33}$$

з матрицею $A \in C([0, +\infty))$ виконується умова

$$\int_0^\infty \|A(t)\| dt < \infty.$$

Тоді для будь-якого розв'язку $x = x(t)$ системи (1.33) існує $\lim_{t\to\infty} x(t) = c \in \mathbb{R}^n$ і навпаки, для будь-якого вектору $c \in \mathbb{R}^n$ існує розв'язок $x = x(t)$ системи (1.33) такий, що $\lim_{t\to\infty} x(t) = c$, тобто в системі (1.33) має місце лінійна асимптотична рівновага.

$\triangleright$ З нерівності Гронуола-Беллмана маємо

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 \leq 2\|A(t)\|\|x(t)\|^2,$$

$$\forall t \geq 0 \ \|x(t)\|^2 \leq \|x(0)\|^2 e^{2\int\limits_0^\infty \|A(t)\|dt}.$$

Отже, будь-який розв'язок $x = x(t)$ системи (1.33) є обмеженим на $[0, +\infty)$. Тоді

$$\int_0^\infty \|\dot{x}(t)\| dt \leq \int_0^\infty \|A(t)\|x(t)\| dt < \infty.$$

Тоді $\dot{x}$ інтегровна на $[0, +\infty)$, отже з формули

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s) ds$$

при $t \to \infty$ одержуємо існування $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

Тепер нехай $c \in \mathbb{R}^n$ задане і нехай $X(t) = ((x_{ij}(t)))$ - фундаментальна матриця системи (1.33). Тоді з попередніх міркувань для всіх i, j існує $\lim_{t\to\infty} x_{ij}(t) = c_{ij}$. Оскільки

$$det X(t) = det X(0) e^{\int\limits_0^t trA(s)ds},$$

то

$$det((c_{ij})) = \lim_{t\to\infty} detX(t) = detX(0)e^{\int\limits_0^\infty trA(s)ds} \neq 0.$$

Таким чином, матриця $((c_{ij}))$ невироджена і її стовпці можуть слугувати базисом в $\mathbb{R}^n$. Зокрема, вектор c є лінійною комбінацією стовпців матриці $((c_{ij}))$ і ця комбінація стовпців $X(t)$ визначає шуканий розв'язок. ◄

Тепер розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{1.34}$$

де матриця $A \in C(\mathbb{R})$ задовольняє умови

1) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\| \leq M$;
2) існує матриця $W \in C^1(\mathbb{R})$, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|W(t)\| = m < \infty$, $W(t)$ – додатно визначена $\forall t \in \mathbb{R}$ і число $\alpha > 0$ такі, що $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$((\dot{W}(t) + A(t)W + W \cdot A(t))x, x) < -\alpha\|x\|^2. \tag{1.35}$$

Зауважимо, що якщо $A(t)$ – від'ємно визначена рівномірно по $t \in \mathbb{R}$, тобто

$$\exists\alpha > 0\ \forall t \in \mathbb{R}\ \forall x \neq 0\ (A(t)x, x) < -\alpha\|x\|^2,$$

то умова 2) виконується з $W(t) = E$.

Теорема 1.15 (про експоненційну оцінку). *За умов 1), 2) існують $K > 0$, $\gamma > 0$ такі, що для довільного розв'язку $x(t)$ системи (1.34) виконується оцінка:*

$$\forall\tau \in \mathbb{R}\ \forall t \geq \tau\ \|x(t)\| \leq Ke^{-\gamma(t-\tau)}\|x(\tau)\|, \tag{1.36}$$

тобто всі розв'язки (1.34) з експоненційною швидкістю прямують до нуля.

▷ Нехай $x(t)$ –нетривіальний розв'язок (1.34). Покладемо

$$\omega(t) = (W(t)x(t), x(t))$$

і розглянемо функцію

$$V(t) = \frac{\omega(t)}{\alpha\|x(t)\|^2}. \tag{1.37}$$

В силу 2) $\forall t \in \mathbb{R}$ $\omega(t) > 0$ і оскільки $x(t)$ – нетривіальний розв'язок (1.34), то

$$V(t) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Покажемо, що в цьому випадку

$$\forall t \in \mathbb{R} \ V(t) \geq \frac{1}{2M}.$$

Дійсно, продиференціювавши (1.37), одержимо:

$$\frac{dV}{dt} + V(t)\frac{d}{dt}\ln\|x(t)\|^2 = \frac{\dot{\omega}(t)}{\alpha\|x(t)\|^2}.$$

Покладемо $a(t) = \frac{d}{dt}\ln\|x(t)\|^2$, $b(t) = \frac{\dot{\omega}(t)}{\alpha\|x(t)\|^2}$. В силу 2) $b(t) < -1$. Розглянемо задачу Коші:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = -1, \ y(\tau) = V(\tau).$$

її розв'язок має вигляд:

$$y(t) = e^{-\int\limits_\tau^t a(s)ds}\left(V(\tau) - \int\limits_\tau^t e^{\int\limits_\tau^s a(\xi)d\xi} ds\right) =$$

$$= \frac{\|x(\tau)\|^2}{\|x(t)\|^2}\left(V(\tau) - \int\limits_\tau^t \frac{\|x(s)\|^2}{\|x(\tau)\|^2} ds\right).$$

Тоді за теоремою порівняння

$$\forall t \geq \tau \ V(t) \leq y(t),$$

тобто

$$\forall t > \tau \; V(t) \leq \frac{\|x(\tau)\|^2}{\|x(t)\|^2}\left(V(\tau) - \int\limits_\tau^t \frac{\|x(s)\|^2}{\|x(\tau)\|^2}ds\right).$$

Звідси,

$$V(\tau) \geq \int\limits_\tau^t \frac{\|x(s)\|^2}{\|x(\tau)\|^2}ds \; \forall t \geq \tau.$$

З іншого боку, з нерівності Гронуола-Беллмана $\forall t \geq \tau$

$$e^{-2\int\limits_\tau^t \|A(s)\|ds} \leq \frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} \leq e^{2\int\limits_\tau^t \|A(s)\|ds}.$$

Тому

$$V(\tau) \geq \int\limits_\tau^t e^{-2\int\limits_\tau^s \|A(\xi)\|d\xi}ds \geq \int\limits_\tau^t e^{-2M(s-\tau)}ds = \frac{1-e^{-2M(t-\tau)}}{2M}.$$

Тоді при $t \to +\infty$ маємо, що

$$\forall \tau \in \mathbb{R} \; V(\tau) \geq \frac{1}{2M}.$$

Далі, з умови 2) маємо, що $\dot{\omega}(t) < -\alpha\|x(t)\|^2$. Оскільки $\omega(t) > 0$, то з нерівності $\omega(t) \leq m\|x(t)\|^2$ випливає нерівність

$$\dot{\omega}(t) < -\frac{\alpha}{m}\omega(t) \Rightarrow \frac{d\ln\omega(t)}{dt} < -\frac{\alpha}{m}.$$

Звідси $\omega(t) \leq \omega(\tau)e^{-\frac{\alpha}{m}(t-\tau)}$, отже

$$\|x(t)\|^2 = \frac{\omega(t)}{\alpha V(t)} \leq \frac{\omega(\tau)e^{-\frac{\alpha}{m}(t-\tau)}}{\alpha}\cdot 2M \leq \frac{2Mm}{\alpha}\|x(\tau)\|^2 e^{-\frac{\alpha}{m}(t-\tau)}.$$

Теорема доведена. ◀

Вправа 1.25. Довести, що система

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ty \\ \dot{y} = -tx - 2y + te^{-t} \end{cases}$$

має принаймні два розв'язки, що прямують до нуля при $t \to \infty$.

Вправа 1.26. Довести, що система

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sin^2(t)x \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

має нетривіальний розв'язок, що монотонно прямує до нуля при $t \to \infty$ і знайти цей розв'язок.

Вправа 1.27. Довести експоненційне прямування до нуля будь-якого розв'язку системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \frac{1}{2}\sin(t)y \\ \dot{y} = \frac{1}{2}\cos(t)x - y \end{cases}$$

Глава 2

Періодичні системи

§ 2.1. Асимптотична поведінка розв'язків ЛОС з періодичною матрицею

Розглядаємо лінійну систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{2.1}$$

де $A \in C(-\infty, +\infty)$, $A(t + \omega) \equiv A(t)$, $\omega > 0$.

Теорема 2.1 (Флоке). *Якщо $Y(t)$ – фундаментальна матриця (2.1), нормована в точці $t = 0$, то існує матриця $\Phi \in C^1(-\infty, +\infty)$, $\Phi(t + \omega) \equiv \Phi(t)$, $\det \Phi(t) \neq 0$, $\Phi(0) = E$ така, що*

$$Y(t) = \Phi(t)e^{\Lambda t},$$

Λ – стала матриця.

$\triangleright$ Нехай $Y(t)$ – фундаментальна матриця (2.1), $Y(0) = E$ (вона існує і єдина в силу теореми про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для (2.1)). Тоді $\widetilde{Y}(t) = Y(t + \omega)$ – також фундаментальна матриця (2.1). Дійсно, $\det \widetilde{Y}(t) \neq 0$. Маємо, що $\forall t$ $\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t)$, тому

$$\frac{dY(t + \omega)}{dt} = \frac{d\widetilde{Y}(t)}{dt} = A(t + \omega)Y(t + \omega) = A(t)\widetilde{Y}(t).$$

Тоді $\exists C : Y(t+\omega) = Y(t)C$ і при $t = 0$ маємо $Y(\omega) = C$, тобто

$$Y(t + \omega) = Y(t)Y(\omega).$$

Матриця $Y(\omega)$ називається ***матрицею монодромії***, її власні числа $\{\rho_i\}$ називаються ***мультиплікаторами***.

Для довільної невиродженої матриці A існує матриця B така, що $A = e^B$ ($B = \operatorname{Ln} A$ – визначена неоднозначно). При цьому ρ – власне число матриці A тоді і лише тоді, коли $\operatorname{Ln}\rho = \ln|\rho| + i(\arg\rho + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ – власне число матриці B, причому A і B мають однакові розміри відповідних клітин Жордана.

Оскільки $\det Y(\omega) \neq 0$, то $\exists\Lambda$: $Y(\omega) = e^{\Lambda\omega}$. Покладемо $\Phi(t) = Y(t)e^{-\Lambda t}$. Тоді $\Phi \in C^1$, $\det\Phi(t) = \det Y(t)\cdot\det(e^{-\Lambda t}) \neq 0$, $\Phi(0) = Y(0)E = E$. Крім цього, будемо мати

$$\Phi(t+\omega) = Y(t+\omega)e^{-\Lambda(t+\omega)} = Y(t)Y(\omega)e^{-\Lambda t}e^{-\Lambda\omega} =$$

$$= Y(t)Y(\omega)e^{-\Lambda\omega}e^{-\Lambda t} = Y(t)e^{-\Lambda t} = \Phi(t)$$

◄

Наслідок.*Для довільного власного числа* λ *матриці* Λ *існує розв'язок системи (2.1) виду* $x(t) = e^{\lambda t}\psi(t)$, *де* $\psi \in C^1$, $\psi(t+\omega) \equiv \psi(t)$. *Зокрема, якщо всі власні числа матриці* Λ $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ *– прості, то* $\{e^{\lambda_i t}\psi_i(t)\}_{i=1}^n$ *– фундаментальна система розв'язків системи (2.1).*

Теорема 2.2 (про періодичні розв'язки лінійної системи з періодичною матрицею). *Для довільного мультиплікатора* ρ *системи (2.1) існує нетривіальний розв'язок* $\xi(t)$ *системи (2.1) такий, що*

$$\forall t \quad \xi(t+\omega) = \rho\cdot\xi(t). \tag{2.2}$$

І навпаки, якщо для деякого нетривіального розв'язку системи (2.1) $\xi(t)$ *виконується (2.2), то* ρ *– мультиплікатор системи (2.1).*

Наслідок. *Система (2.1) має нетривіальний періодичний розв'язок тоді і лише тоді, коли існує мультиплікатор* $\rho = 1$.

$\triangleright$ Нехай $Y(t)$ – фундаментальна матриця системи (2.1), нормована в точці $t = 0$, ρ – власне число матриці $Y(\omega)$, h – відповідний власний вектор і нехай $\xi(t)$ – розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x \\ x(0) = h. \end{cases}$$

Тоді $\xi(t) = Y(t)h$,

$$\xi(t+\omega) = Y(t+\omega)h = Y(t)Y(\omega)h = Y(t)\rho h = \rho Y(t)h = \rho\xi(t),$$

звідки маємо рівність (2.2).

Навпаки, нехай для деякого $\xi(t) = Y(t)\xi(0)$, $\xi(0) \neq 0$, виконується (2.2). Тоді при $t = 0$

$$\xi(\omega) = \rho\xi(0) = Y(\omega)\xi(0).$$

Звідси

$$(Y(\omega) - \rho E)\xi(0) = 0,$$

отже, ρ – мультиплікатор системи (2.2). ◀

Теорема 2.3 (про стійкість періодичної системи).
1. Система (2.1) – стійка тоді і лише тоді, коли для довільного мультиплікатора ρ *системи (2.1)* $|\rho| \leq 1$*, причому якщо* $|\rho| = 1$*, то* ρ *відповідають одновимірні клітини Жордана в жордановій нормальній формі для* $Y(\omega)$*;*
2. система (2.1) – асимптотично стійка тоді і лише тоді, коли для довільного мультиплікатора ρ *системи (2.1)* $|\rho| < 1$.

$\triangleright$ Оскільки $Y(t) = \Phi(t)e^{\Lambda t}$, то система (2.1) – стійка (асимптотично стійка) тоді і лише тоді, коли стійкою (асимптотично стійкою) буде система

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda y. \tag{2.3}$$

Дійсно, $\widetilde{Y}(t) = e^{\Lambda t}$ – фундаментальна матриця системи (2.3). Якщо $\sup\limits_{t\ge 0} \|\widetilde{Y}(t)\| \le C$ для деякого $C > 0$, то $\sup\limits_{t\ge 0} \|Y(t)\| < \infty$. Якщо $\|\widetilde{Y}(t)\| \to 0$, $t \to \infty$, то $\|Y(t)\| \le \|\Phi(t)\| \cdot \|\widetilde{Y}(t)\| \to 0$, $t \to \infty$, оскільки $\|\Phi(t)\|$ – обмежена. Тому зі стійкості (асимптотичної стійкості) системи (2.3) випливає стійкість (асимптотична стійкість) системи (2.1).

Навпаки, якщо $\|Y(t)\| \le C$, то $e^{\Lambda t} = \Phi^{-1}(t)Y(t)$, $\Phi^{-1}(t + \omega) \equiv \Phi^{-1}(t)$, тому $\sup\limits_{t>0} \|\Phi^{-1}(t)\| < C$, а отже, маємо потрібне твердження. Але (2.3) – стійка (асимптотично стійка) тоді і лише тоді, коли дійсні частини всіх власних значень матриці Λ невід'ємні, а власним значенням з нульовою дійсною частиною відповідають одновимірні клітини Жордана (дійсні частини всіх власних чисел матриці Λ від'ємні). З того, що $Y(\omega) = e^{\Lambda\omega}$ маємо, що якщо ρ – власне число $Y(\omega)$, то $\lambda = \frac{1}{\omega}\mathrm{Ln}\,\rho = \frac{1}{\omega}ln|\rho| + \frac{1}{\omega}i(\arg\rho + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ – власні числа Λ. Отже, $|\rho| \le 1$ тоді і лише тоді, коли $\mathrm{Re}\,\lambda \le 0$ і $|\rho| < 1$ тоді і лише тоді, коли $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, звідки маємо твердження теореми. ◀

Тепер розглянемо рівняння другого порядку з періодичними коефіцієнтами

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \tag{2.4}$$

де $p \in C(\mathbb{R})$, $p(t + \omega) \equiv p(t)$, $\omega > 0$.

Дане рівняння еквівалентне системі

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -p(t)x. \end{cases} \tag{2.5}$$

Матриця системи (2.5) має вигляд $P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{tr} P(t) = 0$.

Будемо казати, що рівняння (2.4) – стійке тоді і лише тоді, коли система (2.5) – стійка, тобто (2.4) – стійке, якщо $x, \dot{x}$ – обмежені на $[0, +\infty)$.

Розглянемо рівняння (2.4) зі сталими коефіцієнтами.

1. $\ddot{x} + a^2 x = 0$. Розв'язки даного рівняння мають вигляд $x(t) = c_1 \cos at + c_2 \sin at$. Всі вони є обмеженими, тому відповідне рівняння стійке, але не асимптотично стійке.
2. $\ddot{x} - a^2 x = 0$. Розв'язки даного рівняння мають вигляд $x(t) = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at}$. З даної сім'ї можна виділити обмежені розв'язки, але рівняння нестійке.
3. $\ddot{x} = 0$. Розв'язки даного рівняння мають вигляд $x(t) = c_1 t + c_2$. З даної сім'ї можна виділити обмежені розв'язки, але рівняння нестійке.

Теорема 2.4 (про обмеженість розв'язків ЛОР другого порядку з періодичними коефіцієнтами). *Система (2.5) не є асимптотично стійкою. Якщо $x(t)$ – обмежений розв'язок рівняння (2.4) на $[0, +\infty)$, то $\dot{x}$ – також обмежений на $[0, +\infty)$.*

$\triangleright$ Нехай $Y(t)$ – фундаментальна матриця системи (2.5), нормована в точці $t = 0$, ρ_1, ρ_2 – мультиплікатори системи (2.5), λ_1, λ_2 – власні числа матриці Λ, де $Y(t) = \Phi(t) e^{\Lambda t}$, і $\Phi(t)$ – матриця з теореми Флоке, $\lambda_i = \frac{1}{\omega} \operatorname{Ln} \rho_i = \frac{1}{\omega}(\ln |\rho_i| + i(\arg \rho_i + 2\pi k))$, $k \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$.

За формулою Остроградського-Ліувілля

$$\det Y(t) = \det Y(0) e^{\int\limits_0^t \operatorname{tr} P(s) ds}.$$

Тоді $\det Y(\omega) = e^{\int\limits_0^{\omega} 0ds} = 1$. Оскільки ρ_1, ρ_2 – власні числа матриці $Y(\omega)$, то $\rho_1\rho_2 = \det Y(\omega) = 1$. Звідки $|\rho_1| \cdot |\rho_2| = 1$. Тоді або $|\rho_1| < 1$, $|\rho_2| > 1$, або $|\rho_1| = 1$, $|\rho_2| = 1$, звідки маємо, що система (2.5) не є асимптотично стійкою.

Далі,

$$\omega(\lambda_1 + \lambda_2) = \ln|\rho_1| + \ln|\rho_2| + i(\arg\rho_1 + \arg\rho_2 + 2\pi k).$$

Оскільки λ_1, λ_2 – власні числа Λ, то

1) $\lambda_{1,2} = \pm a$ (якщо вони дійсні, різні);

2) $\lambda_{1,2} = \pm ai$ (якщо вони комплексно спряжені);

3) $\lambda = 0$ кратності 2 (якщо вони однакові).

У першому випадку маємо, що, фундаментальна система розв'язків має вигляд $\{\psi_1(t)e^{at}, \psi_2(t)e^{-at}\}$, де $\{\psi_1, \psi_2\}$ – ω-періодичні, і якщо $x(t)$ – обмежений розв'язок системи (2.5), то $\dot{x}$ – обмежений. При цьому система (2.5) є нестійкою.

У другому випадку маємо, що фундаментальна система розв'язків має вигляд $\{\psi_1(t)e^{ait}, \psi_2(t)e^{-ait}\}$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ – ω-періодичні функції, а тому обмежені. Отже, $\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ – обмежений. При цьому система (2.5) є стійкою.

У третьому випадку фундаментальна система розв'язків має вигляд $\{\psi_1(t), t\psi_1(t) + \psi_2(t)\}$ і якщо $x(t)$ – обмежений розв'язок системи (2.5), то $\dot{x}$ – обмежений. При цьому система (2.5) є нестійкою. ◀

Наслідок. *Рівняння (2.4) – нестійке тоді і лише тоді, коли (2.4) має необмежений розв'язок $x(t)$ на $[0, +\infty)$.*

Наслідок. *Для рівняння (2.4) неможлива ситуація, щоб довільний розв'язок $x(t)$ асимптотично прямував до 0 при $t \to \infty$.*

Теорема 2.5 (про нестійкість ЛОР другого порядку з періодичними коефіцієнтами). *Якщо* $p(t+\omega) \equiv p(t)$, $p(t) \leq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, *то рівняння (2.4) – нестійке.*

$\triangleright$ Якщо $p(t) \equiv 0$, то, згідно останнього прикладу, рівняння (2.4) – нестійке. Тому вважаємо, що $p(t) \leq 0$, $p(t) \neq 0$. Побудуємо фундаментальну матрицю

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \dot{\varphi}(t) & \dot{\psi}(t) \end{pmatrix},$$

нормовану в точці $t=0$, де $\{\varphi, \psi\}$ – лінійно незалежні розв'язки рівняння (2.4), $\varphi(0)=1$, $\dot{\varphi}(0)=0$, $\psi(0)=0$, $\dot{\psi}(0)=1$. Далі одержимо вираз для φ і ψ у вигляді рядів. Для цього розглянемо рівняння

$$\ddot{x} = \mu p(t) x \tag{2.6}$$

і будемо шукати розв'язки рівняння (2.6) у вигляді

$$\varphi(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t)\mu^k.$$

Отже, маємо

$$\ddot{\varphi}(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{\varphi}_k(t)\mu^k = \mu p(t)\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t)\mu^k = \sum_{k=0}^{\infty} p(t)\varphi_k(t)\mu^{k+1}.$$

Перепозначивши індекси $k+1=s$, $s \geq 1$, будемо мати

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(t)\varphi_k(t)\mu^{k+1} = \sum_{s=1}^{\infty} p(t)\varphi_{s-1}(t)\mu^s.$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{\varphi}_k(t)\mu^k = \sum_{k=1}^{\infty} p(t)\varphi_{k-1}(t)\mu^k$$

тоді і лише тоді, коли $\ddot{\varphi}_0(t)=0$, $\ddot{\varphi}_k(t) = p(t)\varphi_{k-1}(t)$, $k \geq 1$.

Зафіксуємо початкові дані $\varphi_0(0) = 1$, $\dot{\varphi}_0(0) = 0$, $\varphi_k(0) = \dot{\varphi}_k(0) = 0$, $k \geq 1$. Тоді для $\varphi(t, -1)$ маємо:

$$\varphi(0, -1) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(0)(-1)^k = 1,$$

$$\dot{\varphi}(0, -1) = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{\varphi}_k(0)(-1)^k = 0.$$

Отже, $\varphi(t, -1) \equiv \varphi(t)$. Далі, $\varphi_0(t) = 1$,

$$\varphi_k(t) = \int_0^t \left(\int_0^s p(\tau)\varphi_{k-1}(\tau)d\tau \right) ds.$$

Змінивши порядок інтегрування, будемо мати

$$\int_0^t \left(\int_0^s p(\tau)\varphi_{k-1}(\tau)d\tau \right) ds =$$

$$= \int_0^t \left(\int_\tau^t p(\tau)\varphi_{k-1}(\tau)ds \right) d\tau = \int_0^t (t-\tau)p(\tau)\varphi_{k-1}(\tau)d\tau.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mu) = 1 + \mu \int_0^t (t - t_1)p(t_1)dt_1 + \\ +\mu^2 \int_0^t \left((t - t_1)p(t_1) \int_0^{t_1} (t_1 - t_2)p(t_2)dt_2 \right) dt_1 + \ldots \end{aligned} \tag{2.7}$$

Дослідимо збіжність ряду (2.7). Нехай $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |p(t)| \leq M$. Тоді $|\varphi_0(t)| = 1$, $|\varphi_1(t)| \leq \int_0^t |t - t_1| M dt_1 = \frac{Mt^2}{2}$, $|\varphi_2(t)| \leq \int_0^t |t - t_1| M \frac{Mt_1^2}{2} dt_1 = \frac{M^2}{2} \left(\frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4} \right) = \frac{M^2 t^4}{4!}$ і т. д., а отже,

$$|\varphi_k(t)| \leq \frac{M^k t^{2k}}{(2k)!}.$$

Тоді за ознакою Вейєрштраса ряд (2.7) збігається абсолютно і рівномірно в довільній області $G = \{(t, \mu) | \, |t| < T, |\mu| <$

$\mu_0\}$. Оскільки $\varphi_k(t) = t\int\limits_0^t p(\tau)\varphi_{k-1}(\tau)d\tau - \int\limits_0^t \tau p(\tau)\varphi_{k-1}(\tau)d\tau$, то $\dot{\varphi}_k(t) = \int\limits_0^t p(\tau)\varphi_{k-1}(\tau)d\tau$, $\ddot{\varphi}_k(t) = p(t)\varphi_{k-1}(t)$, тому після почленного диференціювання (2.7) одержуємо також збіжні в G ряди, отже, $\varphi(t,\mu)$ – розв'язок (2.6) і покладаючи $\mu = -1$, маємо

$$\begin{gathered}\varphi(t) = 1 - \int\limits_0^t (t-t_1)p(t_1)dt_1 + \\ + \int\limits_0^t \left((t-t_1)p(t_1)\int\limits_0^{t_1}(t_1-t_2)p(t_2)dt_2\right)dt_1 - \ldots\end{gathered} \tag{2.8}$$

Аналогічно будується інший розв'язок (2.6)

$$\psi(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(t)\mu^k,$$

виходячи з початкових умов

$$\psi_0(0) = 0,\ \dot{\psi}_0(0) = 1,\ \psi_k(0) = \dot{\psi}_k(0) = 0,\ r \geq 1.$$

Тоді $\psi(t,-1) \equiv \psi(t)$, $\psi_0(t) = t$,

$$\psi_k(t) = \int\limits_0^t (t-t_1)p(t_1)\psi_{k-1}(t_1)dt_1,$$

$$\psi(t,\mu) = t + \mu\int\limits_0^t (t-t_1)t_1p(t_1)dt_1 +$$

$$+\mu^2\int\limits_0^t \left((t-t_1)p(t_1)\int\limits_0^{t_1}(t_1-t_2)t_2p(t_2)dt_2\right)dt_1 + \ldots$$

А отже,

$$\begin{gathered}\psi(t) = t - \int\limits_0^t (t-t_1)t_1p(t_1)dt_1 + \\ + \int\limits_0^t \left((t-t_1)p(t_1)\int\limits_0^{t_1}(t_1-t_2)t_2p(t_2)dt_2\right)dt_1 - \ldots\end{gathered} \tag{2.9}$$

Тепер знайдемо власні числа матриці монодромії

$$Y(\omega) = \begin{pmatrix} \varphi(\omega) & \psi(\omega) \\ \dot\varphi(\omega) & \dot\psi(\omega) \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що $\det Y(\omega) = 1$. Характеристичне рівняння має вигляд $\det(Y(\omega) - \rho E) = 0$. А саме, $(\varphi(\omega) - \rho)(\dot\psi(\omega) - \rho) - \dot\varphi(\omega)\psi(\omega) = 0$. Перетворивши даний вираз, будемо мати $\rho^2 - \rho(\varphi(\omega) + \dot\psi(\omega)) + 1 = 0$. Оскільки, $(\varphi(\omega) + \dot\psi(\omega)) = \mathrm{tr} Y(\omega) \equiv a = const$ (бо матриця $Y(\omega)$ визначається однозначно), то власні числа мають вигляд $\rho_{1,2} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4})$. Оскільки

$$\left(\int\limits_0^t (t - t_1)t_1 p(t_1)dt_1\right)' = \left(t\int\limits_0^t t_1 p(t_1)dt_1 - \int\limits_0^t t_1^2 p(t_1)dt_1\right)' =$$

$$= \int\limits_0^t t_1 p(t_1)dt_1,$$

то з формули (2.9) маємо

$$\dot\psi(t) = 1 - \int\limits_0^t t_1 p(t_1)dt_1 +$$

$$+ \int\limits_0^t \left(t_1 p(t_1)\int\limits_0^{t_1}(t_1 - t_2)t_2 p(t_2)dt_2\right) dt_1 - \dots .$$

Отже,

$$a = \varphi(\omega) + \dot\psi(\omega) = 2 - \omega\int\limits_0^\omega p(t_1)dt_1 +$$

$$+ \int\limits_0^\omega \left(\int\limits_0^{t_1}(\omega - t_1 + t_2)(t_1 - t_2)p(t_1)p(t_2)dt_2\right) dt_1 - \dots$$

Тепер розглянемо випадки (зауважимо, що у нас $\rho_1 \cdot \rho_2 = 1$):

- якщо $|a| > 2$, то $\rho_{1,2}$ – дійсні, для $\rho_1 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4})$ виконується $|\rho_1| > 1$ і маємо нестійкість відповідного рівняння;
- якщо $|a| < 2$, то $\rho = \frac{1}{2}a \pm i\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$, $|\rho| = 1$ маємо стійкість

відповідного рівняння;

• якщо $|a| = 2$, то $\rho_1 = \rho_2$, $|\rho| = 1$ і потрібен більш детальний розгляд.

Проте, якщо $p(t) \le 0$, $p(t) \ne 0$, то $\int\limits_0^\omega p(t_1)dt_1 < 0$,

$$\int\limits_0^\omega \left(\int\limits_0^{t_1} (\omega - t_1 + t_2)(t_1 - t_2)p(t_1)p(t_2)dt_2 \right) dt_1 \ge 0,$$

оскільки $(\omega - t_1 + t_2) \ge 0$, $(t_1 - t_2) \ge 0$, $p(t_1) \le 0$, $p(t_2) \le 0$, і т.д. Отже, в нашому випадку $a > 2$, тому маємо нестійкість відповідного рівняння. ◀

Теорема 2.6 (ознака Ляпунова стійкості ЛОР другого порядку з періодичними коефіцієнтами). *Якщо* $p(t + \omega) \equiv p(t)$, $p(t) \ge 0$,

$$0 < \omega \int\limits_0^\omega p(t)dt \le 4, \tag{2.10}$$

то рівняння (2.4) – стійке.

▷ З доведення попередньої теореми для $a = \mathrm{tr}Y(\omega)$ маємо

$$a = 2 - I_1 + I_2 - \ldots + (-1)^k I_k + \ldots, \tag{2.11}$$

де

$$I_1 = \omega \int\limits_0^\omega p(t_1)dt_1,$$

$$I_2 = \int\limits_0^\omega \int\limits_0^{t_1} (\omega - t_1 + t_2)(t_1 - t_2)p(t_1)p(t_2)dt_2 dt_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_k = \int\limits_0^\omega \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{t_2} \ldots \int\limits_0^{t_{k-1}} (\omega - t_1 + t_k)(t_1 - t_2)\ldots$$

$$\ldots (t_{k-1} - t_k) p(t_1) \ldots p(t_k) dt_k \ldots dt_1 \geq 0.$$

Тоді з нерівності $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ маємо: для $0 \leq t_k < t_1 < \omega$

$$(\omega - t_1 + t_{k+1})(t_k - t_{k+1}) \leq \frac{1}{4}(\omega - t_1 + t_k)^2 < \frac{\omega}{4}(\omega - t_1 + t_k).$$

Отже,

$$I_{k+1} < \frac{\omega}{4} \int\limits_0^\omega \ldots \int\limits_0^{t_{k-1}} (\omega - t_1 + t_k)(t_1 - t_2) \ldots (t_{k-1} - t_k) p(t_1) \ldots$$

$$\ldots p(t_k) \int\limits_0^{t_k} p(t_{k+1}) dt_{k+1} \ldots dt_1 < \frac{\omega}{4} \int\limits_0^\omega p(t) dt \cdot I_k \leq I_k.$$

Отже,

$$2 - a = I_1 - I_2 + I_3 - \ldots,$$

де права частина останньої рівності являє собою ряд Лейбниця. Звідси,

$$0 < 2 - a < I_1 = \omega \int\limits_0^\omega p(t) dt,$$

отже,

$$-2 \leq 2 - \omega \int\limits_0^\omega p(t) dt < a < 2,$$

тому $|a| < 2$, а тому $\rho_{1,2}$ – комплексно спряжені і $|\rho_i| = 1$, звідки маємо стійкість рівняння (2.4). ◀

Вправа 2.1. Для рівняння $\ddot{x} - (\sin^2 2t)x = 0$ показати:
а) існування необмеженого на $[0, +\infty)$ розв'язку;
б) що кожен розв'язок з початковими даними $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) > 0$ є необмеженим на $[0, +\infty)$.

Вправа 2.2. Для рівняння $\ddot{x} + (\sin^2 2t)x = 0$ довести обмеженість на $[0, +\infty)$ кожного розв'язку.

Вправа 2.3. Дослідити стійкість рівняння Матьє

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos t)x = 0$$

в залежності від числових параметрів α, β.

Вправа 2.4. Нехай $\{\rho_i\}$ – мультиплікатори системи $\dot{x} = A(t)x$, $A(t+\omega) \equiv A(t)$. Довести, що $\{\frac{1}{\rho_i}\}$ – мультиплікатори $\dot{\xi} = -A^T(t)\xi$.

§ 2.2. Асимптотична поведінка розв'язків неоднорідних систем з періодичними коефіцієнтами

Розглядаємо лінійну неоднорідну систему (ЛНС)

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t), \tag{2.12}$$

$A(t+\omega) \equiv A(t)$, $f(t+\omega) \equiv f(t)$. Відповідна їй однорідна система (ЛОС) матиме вигляд

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x. \tag{2.13}$$

Теорема 2.7 (про періодичний розв'язок ЛНС з періодичними коефіцієнтами). *Нехай (2.13) не має нетривіальних ω-періодичних розв'язків (тобто довільний мультиплікатор ρ системи (2.13) такий, що $\rho \neq 1$). Тоді система (2.12) має единий ω-періодичний розв'язок.*

▷ Нехай $Y(t)$ – фундаментальна матриця системи (2.13), $Y(0) = E$. Тоді для розв'язку $y(t)$ системи (2.12) маємо:

$$y(t) = Y(t)y(0) + \int\limits_0^t Y(t)Y^{-1}(s)f(s)ds.$$

y буде ω-періодичним розв'язком системи (2.12) тоді і лише тоді, коли $y(0) = y(\omega)$ (в силу теореми про існування і єдиність розв'язку задачі Коші). Отже, y – ω-періодичний розв'язок тоді і лише тоді, коли

$$y(\omega) = y(0) = Y(\omega)y(0) + \int_0^\omega Y(\omega)Y^{-1}(s)f(s)ds$$

або

$$(E - Y(\omega))y(0) = Y(\omega)\int_0^\omega y^{-1}(t)f(t)dt.$$

Оскільки $\det(E - Y(\omega)) \neq 0$, то існує і єдиний $y(0) = (E - y(\omega))^{-1}Y(\omega)\int_0^\omega Y^{-1}(t)f(t)dt.$ ◀

Якщо (2.13) має нетривіальний ω-періодичний розв'язок (резонансний випадок), то (2.12) не завжди має ω-періодичний розв'язок.

Теорема 2.8 (про періодичний розв'язок ЛНС з періодичними коефіцієнтами в резонансному випадку). *Нехай (2.13) має k лінійно незалежних ω-періодичних розв'язків $\{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t)\}$, $1 \le k \le n$. Тоді*

1) *спряжена система*

$$\frac{d\xi}{dt} = -A^T(t)\xi \tag{2.14}$$

також має k лінійно незалежних ω-періодичних розв'язків $\{\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)\}$, $1 \le k \le n$;

2) *(2.12) має ω-періодичний розв'язок тоді і лише тоді, коли виконана умова ортогональності*

$$\int_0^\omega (\psi_i(t), f(t))dt = 0, \quad i = \overline{1,k}. \tag{2.15}$$

Перед тим, як доводити теорему, проаналізуємо її умови у випадку $n = 1$. Розглянемо рівняння $y'(t) = a(t)y + f(t)$. Тоді $\rho = e^{\int\limits_0^\omega a(s)ds}$ – мультиплікатор, і якщо $\rho \neq 1$, то існує і єдиний ω-періодичний розв'язок. Якщо $\rho = 1$, то довільний розв'язок системи $\dot{x}(t) = a(t)x$ представляється у вигляді $x(t) = x(0)e^{\int\limits_0^t a(s)ds}$, $x(\omega) = x(0)$, тому довільний розв'язок є ω-періодичним. Нехай $\varphi(t) = e^{\int\limits_0^t a(s)ds}$, тоді $\psi(t) = e^{-\int\limits_0^t a(s)ds}$, і в даному випадку умова (2.15) має вигляд $\int\limits_0^\omega e^{-\int\limits_0^t a(s)ds} f(t)dt = 0$.

$\triangleright$[теореми про періодичний розв'язок ЛНС з періодичними коефіцієнтами в резонансному випадку] 1) Нехай x_0 – початкове дане ω-періодичного розв'язку $x(t)$ системи (2.13). Тоді

$$x(\omega) = x_0 = Y(\omega)x_0 \Leftrightarrow (Y(\omega) - E)x_0 = 0. \tag{2.16}$$

За умовою (2.13) має k лінійно незалежних ω-періодичних розв'язків, тому (2.16) має k лінійно незалежних розв'язків, звідси $\operatorname{rank}(Y(\omega) - E) = n - k$. Далі, матриця $(Y^{-1}(t))^T$ є фундаментальною для (2.14). Дійсно, якщо $\Psi(t)$ – фундаментальна матриця для (2.14), нормована при $t = 0$, то $\xi(t) = \Psi(t)\xi(0)$, а тому

$$(\xi(t), x(t)) \equiv (\xi(0), x(0)) = (\Psi(t)\xi(0), Y(t)x(0)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Psi^T(t) \cdot Y(t) = E \Rightarrow \Psi^T(t) = Y^{-1}(t) \Rightarrow \Psi(t) = (Y^{-1}(t))^T.$$

Отже, для ξ_0 – початкового даного ω-періодичного розв'язку (2.14) маємо:

$$((Y^{-1}(\omega))^T - E)\xi_0 = 0.$$

Помноживши цей вираз на $(Y(\omega))^T$, будемо мати:

$$(E - Y(\omega))^T \xi_0 = 0, \tag{2.17}$$

звідки (2.17) має k лінійно незалежних розв'язків, а тому (2.14) має k лінійно незалежних ω-періодичних розв'язків.
2) Спочатку доведемо необхідність. Нехай y – ω-періодичний розв'язок системи (2.12). Тоді

$$y(\omega) = y(0) = Y(\omega)y(0) + Y(\omega)\int\limits_0^\omega Y^{-1}(t)f(t)dt$$

або

$$(E - Y(\omega)y(0)) = Y(\omega)\int\limits_0^\omega Y^{-1}(t)f(t)dt.$$

Нехай $\psi_i(t)$ – ω-періодичні розв'язки системи (2.14). Тоді

$$(E - Y(\omega))^T\psi_i(0) = 0.$$

Отже,

$$0 = ((E - Y(\omega))^T\psi_i(0), y(0)) = (\psi_i(0), (E - Y(\omega))y(0)) =$$

$$= \left(\psi_i(0), Y(\omega)\int\limits_0^\omega Y^{-1}(t)f(t)dt\right) =$$

$$= \left(Y^T(\omega)\psi_i(0), \int\limits_0^\omega Y^{-1}(t)f(t)dt\right) =$$

$$= \int\limits_0^\omega (\psi_i(0), Y^{-1}(t)f(t))dt = \int\limits_0^\omega ((Y^{-1}(t))^T\psi_i(0), f(t))dt =$$

$$= \int\limits_0^\omega (\psi_i(t), f(t))dt,$$

звідки маємо умову (2.15).

Тепер доведемо достатність. Нехай виконується умова (2.15). Нехай ξ_0 – власний вектор $(Y(\omega))^T$, що відповідає мультиплікатору $\rho = 1$ (він існує, бо (2.13) має нетривіальний ω-періодичний розв'язок). Тоді

$$(Y(\omega))^T \xi_0 = \xi_0, \;\; \Psi(t)\xi_0 = \sum_{i=1}^{k} c_i \psi_i(t),$$

отже,

$$0 = \int_0^\omega (\Psi(t)\xi_0, f(t))dt = \int_0^\omega (\xi_0, \Psi^T(t) f(t))dt =$$

$$= \int_0^\omega (\xi_0, Y^{-1}(t) f(t))dt = \int_0^\omega ((Y(\omega))^T \xi_0, Y^{-1}(t) f(t))dt =$$

$$= \left(\xi_0, \int_0^\omega Y(\omega) Y^{-1}(t) f(t) dt \right).$$

Отже, система $(Y(\omega) - E)^T \xi_0 = 0$ еквівалентна системі

$$\begin{cases} (Y(\omega) - E)^T \xi_0 = 0 \\ \left(\xi_0, \int_0^\omega Y(\omega) Y^{-1}(t) f(t) dt \right) = 0, \end{cases}$$

отже, ранг цих систем однаковий і рівний $n - k$, а тому з теореми Кронекера-Капеллі система

$$(E - Y(\omega)) y_0 = Y(\omega) \int_0^\omega Y^{-1}(t) f(t) dt,$$

що визначає початкове дане ω-періодичного розв'язку системи (2.12), є сумісною.

◀

Теорема 2.9 (Массера). *Якщо система (2.12) має обмежений на $[0, +\infty)$ розв'язок $\hat{y}(t)$, то (2.12) має ω-періодичний розв'язок.*

▹ Запишемо $\hat{y}(t)$ в наступному вигляді

$$\hat{y}(t) = Y(t)\hat{y}_0 + \int\limits_0^t Y(t)Y^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Тоді

$$\hat{y}(\omega) = Y(\omega)\hat{y}_0 + b,$$

де

$$b = \int\limits_0^\omega Y(\omega)Y^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Оскільки $z(t) = \hat{y}(t+\omega)$ – також розв'язок системи (2.12), то

$$z(\omega) = \hat{y}(2\omega) = Y(\omega)\hat{y}(\omega) + b = Y(\omega)(Y(\omega)\hat{y}_0 + b) + b =$$
$$= Y^2(\omega)\hat{y}_0 + Y(\omega)b + b$$

і т.д., в результаті матимемо

$$\hat{y}(m\cdot\omega) = Y^m(\omega)\hat{y}_0 + \sum_{k=0}^{m-1} Y^k(\omega)b. \qquad (2.18)$$

Доведемо від супротивного. Нехай (2.12) не має ω-періодичного розв'язку. Тоді система

$$(E - Y(\omega)y_0 = b, \qquad (2.19)$$

що реалізує умову $y(\omega) = y_0$, є несумісною, зокрема,

$$\det(E - Y(\omega)) = 0,$$

звідки маємо, що існує $c \neq 0$ таке, що $(E - Y(\omega))^T c = 0$, причому $(b, c) \neq 0$ (інакше система (2.19) була б сумісною). Тоді $c = (Y(\omega))^T c$, звідки $c = (Y^k(\omega))^T c$. Помножимо (2.18) на c і будемо мати:

$$(\hat{y}(m\cdot\omega), c) = (Y^m(\omega)\hat{y}_0, c) + \sum_{k=0}^{m-1}(Y^k(\omega)b, c) =$$
$$= (\hat{y}_0, c) + m\cdot(b, c) \to \infty, \quad m \to \infty.$$

З іншого боку, $\|\hat{y}(m \cdot \omega)\| \leq K$, звідки маємо протиріччя. ◀

Тепер розглядаємо квазілінійну періодичну систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t) + \mu \cdot \varphi(t, y), \tag{2.20}$$

де $A(t+\omega) \equiv A(t)$, $f(t+\omega) \equiv f(t)$, $\varphi \in C^1$, $\varphi(t+\omega, y) \equiv \varphi(t, y)$, μ – малий параметр. При $\mu = 0$ маємо лінійну (породжуючу) систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t). \tag{2.21}$$

Теорема 2.10 (метод малого параметра Пуанкаре). *Якщо всі мультиплікатори системи (2.21)* $\rho \neq 1$ *(отже, (2.21) має єдиний* ω*-періодичний розв'язок* $y_0(t)$*), то* $\exists \mu_0$*:* $\forall |\mu| \leq \mu_0$ *система (2.20) має єдиний* ω*-періодичний розв'язок* $y(t, \mu)$ *і при цьому* $\lim\limits_{\mu \to 0} y(t, \mu) = y_0(t)$.

▹ Позначимо через $y(t, \eta, \mu)$ розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + f + \mu\varphi \\ y(0) = \eta. \end{cases}$$

Права частина (2.20) є ω-періодичною, отже, (2.20) має ω-періодичний розв'язок тоді і лише тоді, коли існує η:

$$\Phi(\eta, \mu) := y(\omega, \eta, \mu) - y(0, \eta, \mu) = y(\omega, \eta, \mu) - \eta = 0. \tag{2.22}$$

Нехай $y_0(0) = \eta_0$. Тоді $\Phi(\eta_0, 0) = 0$. З теореми про неявну функцію випливає, що для того, щоб рівняння (2.22) мало розв'язок в околі точки $(\eta_0, 0)$ достатньо, щоб

$$\triangle = \det \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\bigg|_{\substack{\eta = \eta_0 \\ \mu = 0}} \neq 0,$$

$$\triangle = \det \left(\frac{\partial y_j(\omega, \eta_0, 0)}{\partial \eta_k} - \delta_{jk} \right)_{j,k=1}^{n} = \det(y'_\eta(\omega, \eta_0, 0) - E).$$

Покладемо $Z = y'_\eta(t,\eta,\mu)$. Зауважимо, що ця матриця визначена коректно в силу диференційовності розв'язку за початковими даними. З (2.20) маємо:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{dy}{dt}\right) = A(t)\frac{\partial y}{\partial\eta} + \mu\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta},$$

звідки

$$\frac{dZ}{dt} = A(t)Z + \mu\frac{\partial\varphi}{\partial y}Z.$$

При $\mu = 0 : \frac{dZ}{dt} = A(t)Z$. При $t = 0$ $y(0,\eta,\mu) \equiv \eta$, звідки $Z(0) = E$. Отже, матриця $Z = Z(t,\eta,0)$ є фундаментальною матрицею ЛОС $\dot{x} = A(t)x$, нормованою в точці $t = 0$ і $\triangle = \det(Z(\omega,\eta_0,0) - E)$. Оскільки довільний мультиплікатор $\rho \neq 1$, то $\rho = 1$ не є коренем характеристичного рівняння $\det(Z(\omega,\eta_0,0) - \rho E) = 0$, отже, $\triangle \neq 0$, а тому $\exists\mu_0 > 0$: $\forall|\mu| \leq \mu_0$ $\exists!\eta = \eta(\mu)$: $\Phi(\eta,\mu) = 0$, звідки маємо існування і єдиність $y(t,\mu)$ – ω-періодичного розв'язку (2.20), причому, в силу неперервності розв'язку за параметром, маємо $y(t,\mu) \to y(t,0) = y_0(t)$ при $\mu \to 0$. ◀

Вправа 2.5. Довести, що рівняння

$$\dot{x} = 2x\cos^2(t) - \sin(t)$$

має єдиний 2π-періодичний розв'язок і знайти цей розв'язок.

Вправа 2.6. Довести, що в рівнянні $y' = a(t)y + b(t)$ з ω-періодичними коефіцієнтами будь-який обмежений розв'язок є ω-періодичним.

Вправа 2.7. На прикладі лінійного неоднорідного рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами і ω-періодичною правою частиною показати, що може існувати обмежений, але не ω-періодичний розв'язок.

Вправа 2.8. Довести, що система

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y - \sin t \\ \dot{y} = -x + y - \cos t \end{cases}$$

має єдиний 2π-періодичний розв'язок і знайти цей розв'язок.

Вправа 2.9. Довести, що система

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 3 + \mu \cdot e^{x^2 \cos t} \\ \dot{y} = 2x + 3y - 5 + \mu \cdot e^{y^2 \sin t} \end{cases}$$

для достатньо малих μ має єдиний 2π-періодичний розв'язок

$$z(t, \mu) = \begin{pmatrix} x(t, \mu) \\ y(t, \mu) \end{pmatrix}$$

і знайти $\lim\limits_{\mu \to 0} z(t, \mu)$.

Вправа 2.10. Нехай $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ – ω-періодичний. Довести, що система $\dot{y} = J(\lambda)y + e^{\lambda t} f(t)$ має розв'язок виду $y = e^{\lambda t} \cdot \varphi(t)$, де $\varphi(t + \omega) \equiv \varphi(t)$ тоді і лише тоді, коли $\int\limits_0^\omega f_n(t)dt = 0$.

§ 2.3. Асимптотична поведінка розв'язків неоднорідних систем зі сталою матрицею та періодичною правою частиною

Розглянемо ситему

$$\dot{y} = Ay + f(t), \tag{2.23}$$

де A – стала матриця.

Теорема 2.11 (про існування обмеженого розв'язку ЛНС зі сталою матрицею). *Нехай дійсні частини всіх власних чисел матриці* A *ненульові,* $\sup\limits_{t\in R}\|f(t)\| = K < \infty$. *Тоді існує матриця* $G(t) \in C^{\infty}(|t| > 0)$ *така, що:*

1) $G(0+) - G(0-) = E$;
2) $\|G(t)\| \le ce^{-\alpha|t|}$, $\forall t \ne 0$, $c > 0$, $\alpha > 0$;
3) $\dot{G}(t) = AG(t)$, $t \ne 0$;
4) *формула*

$$\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{2.24}$$

визначає єдиний обмежений на $\mathbb{R}$ *розв'язок системи (2.23).*

$\triangleright$ Можемо сказати, що існує невироджена матриця S така, що $A = S^{-1}\mathrm{diag}[P, N]S$, де $\mathrm{Re}\lambda_j(P) > 0$, $j = \overline{1,m}$, $\mathrm{Re}\lambda_j(N) < 0$, $j = \overline{m+1,n}$. Покладемо

$$G(t) = \begin{cases} -S^{-1}\mathrm{diag}(e^{Pt}, 0)S, & t < 0 \\ S^{-1}\mathrm{diag}(0, e^{Nt})S, & t > 0. \end{cases}$$

Тоді $G \in C^{\infty}(|t| > 0)$, $G(0+) - G(0-) = E$, звідки маємо пункт 1).

Покладемо $0 < \alpha_1 < \min \mathrm{Re}\lambda_j(P)$, $0 < \alpha_2 < \min(-\mathrm{Re}\lambda_j(N))$. Тоді $\|e^{Pt}\| \le c_1 e^{\alpha_1 t}$, $t \le 0$, $\|e^{Nt}\| \le c_2 e^{-\alpha_2 t}$, $t \ge 0$, звідки маємо пункт 2).

При $t < 0$

$$\dot{G}(t) = -S^{-1}\mathrm{diag}[Pe^{Pt}, 0]S =$$
$$= -S^{-1}\mathrm{diag}[P, N]S \cdot S^{-1}\mathrm{diag}[e^{Pt}, 0]S =$$
$$= -A(-G(t)) = AG(t).$$

Аналогічно при $t > 0$ $\dot{G}(t) = AG(t)$, звідки маємо пункт 3).

Далі,

$$\|\eta(t)\| = \left\| \int\limits_t^{+\infty} G(t-s)f(s)ds + \int\limits_{-\infty}^t G(t-s)f(s)ds \right\| \leq$$

$$\leq \int\limits_t^{+\infty} c_1 e^{\alpha_1(t-s)}\|f(s)\|ds + \int\limits_{-\infty}^t c_2 e^{-\alpha_2(t-s)}\|f(s)\|ds \leq$$

$$\leq K\left(\frac{c_1}{\alpha_1} + \frac{c_2}{\alpha_2}\right),$$

звідки маємо обмеженість $\eta(t)$ на $\mathbb{R}$.

Доведемо, що $\eta(t)$ – розв'язок системи (2.23). Для цього розглянемо

$$\dot{\eta}(t) = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_t^{+\infty} G(t-s)f(s)ds + \int\limits_{-\infty}^t G(t-s)f(s)ds \right) =$$

$$= -G(0-)f(t) + \int\limits_t^{+\infty} G'(t-s)f(s)ds + G(0+)f(t) +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^t G'(t-s)f(s)ds = f(t) + \int\limits_t^{+\infty} AG(t-s)f(s)ds +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^t AG(t-s)f(s)ds = f(t) + A\eta(t),$$

що і означає, що η – розв'язок системи (2.23) на $\mathbb{R}$.

Нехай $\tilde{\eta}$ – інший обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок системи (2.23). Тоді $z = \eta - \tilde{\eta}$ – обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок системи $\dot{x} = Ax$, але оскільки дійсні частини всіх власних чисел матриці A ненульові, то єдиним обмеженим на $\mathbb{R}$ розв'язком є $x \equiv 0$. Отже, $\eta(t)$ – єдиний обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок системи (2.23). ◀

Наслідок. *Якщо в умовах теореми дійсні частини всіх власних значень матриці A від'ємні, то для будь-якого розв'язку (2.23) $y = y(t)$ маємо*

$$\lim_{t\to+\infty} \|y(t) - \eta(t)\| = 0.$$

Тепер розглянемо нелінійну систему

$$\frac{dy}{dt} = Ay + \varphi(t, y), \qquad (2.25)$$

де A – стала матриця, $\varphi \in C(\mathbb{R}^{n+1})$.

Теорема 2.12 (Боля). *Нехай виконані умови*

1) *дійсні частини всіх власних чисел матриці A ненульові;*
2) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|\varphi(t, 0)\| = K < \infty$*;*
3) $\forall (t, y),\ (t, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $\|\varphi(t, y) - \varphi(t, z)\| \leq N\|y - z\|$ *з достатньо малою сталою $N > 0$.*

Тоді

1) *існує обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок $\eta(t)$ системи (2.25);*

2) *якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці A від'ємні, то $\eta(t)$ – єдиний обмежений розв'язок і розв'язки $y = y(t, 0, y_0)$ системи (2.25) мають властивість:*

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{t\to\infty} \|y(t, 0, y_0) - \eta(t)\| = 0.$$

$\triangleright$ 1) Будемо вважати, що $\mathrm{Re}\lambda_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$, $j = \overline{m+1, n}$ (можливо, $\forall i = \overline{1, n}$ $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$ або $\mathrm{Re}\lambda_j > 0$). Розглянемо інтегральне рівняння

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t - s)\varphi(s, y(s))ds, \qquad (2.26)$$

де G – матриця з попередньої теореми. Тоді з властивостей G маємо, що, якщо $\eta(t)$ – неперервний, обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок (2.26), то

$$\|\varphi(s,\eta(s))\| = \|\varphi(s,\eta(s)) - \varphi(s,0) + \varphi(s,0)\| \le$$

$$\le N\|\eta(s)\| + K \le \tilde{K} \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

отже права частина – збіжний невласний інтеграл і аналогічно попередній теоремі

$$\eta'(t) = \varphi(t,\eta(t)) + A\eta(t),$$

звідки маємо, що $\eta(t)$ – розв'язок системи (2.25).

Покладемо $c_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|G(t)\|dt < \infty$,

$$y^{(0)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\varphi(s,0)ds.$$

Тоді

$$\|y^{(0)}(t)\| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|G(t-s)\|\|\varphi(s,0)\|ds \le K \cdot c_1 = K_1.$$

Виберемо $H > 2K_1$ і розглянемо повний метричний простір

$$X = \{y \in C(\mathbb{R}) | \sup_{t\in\mathbb{R}} \|y(t)\| \le H\},$$

$$\rho(y,z) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|y(t) - z(t)\|.$$

Покладемо $\forall y \in X \ Ty := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\varphi(s,y(s))ds$. Нехай константа Ліпшиця з умови 3) задовольняє нерівність:

$$N < \frac{1}{2c_1}. \tag{2.27}$$

Тоді $\forall y \in X$

$$Ty(t) = y^{(0)}(t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)[\varphi(s, y(s)) - \varphi(s, 0)]ds,$$

$$\|Ty(t)\| \le \|y^{(0)}(t)\| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|G(t-s)\| \cdot N \cdot \|y(s)\| ds \le K_1 + N \cdot Hc_1 \le H.$$

Отже, $T : X \to X$. Доведемо, що T – відображення стиску. Для довільного $t \in \mathbb{R}$

$$\|Ty(t) - Tz(t)\| \le N\rho(y, z) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|G(t-s)\| ds = N \cdot c_1 \rho(y, z),$$

звідки $\rho(Ty, Tz) \le \frac{1}{2}\rho(y, z)$. Отже, існує єдине $\eta \in X$ таке, що $\eta = T\eta$, тому η – обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок системи (2.25).

2) Якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці A від'ємні, то якщо $\tilde{\eta}$ – інший обмежений розв'язок, то $z = \eta - \tilde{\eta}$ – обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок системи $\dot{x} = Ax + f(t)$, де $f(t) = \varphi(t, \eta) - \varphi(t, \tilde{\eta})$, $\|f(t)\| \le N\|\eta(t) - \tilde{\eta}(t)\|$. Тоді з попередньої теореми

$$z(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) f(s) ds,$$

де

$$\|z(t)\| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|G(t-s)\| \cdot N\|z(s)\| ds,$$

тоді, якщо $\|z(t)\| \ne 0$, то з (2.27) маємо

$$1 \le N \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|G(t-s)\| ds = N \cdot c_1 < \frac{1}{2},$$

звідки маємо протиріччя, а тому $\eta(t) \equiv \tilde{\eta}(t)$.

Розглянемо $y(t,0,y_0)=y(t)$ – розв'язок (2.25). Тоді

$$y(t)=e^{At}y_0+\int\limits_0^t e^{A(t-s)}\varphi(s,y(s))ds,$$

$$\eta(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t-\tau)\varphi(\tau,\eta(\tau))d\tau=$$

$$\int\limits_{-\infty}^{t}S^{-1}e^{J(A)(t-\tau)}S\varphi(\tau,\eta(\tau))d\tau=\int\limits_{-\infty}^{t}e^{A(t-\tau)}\varphi(\tau,\eta(\tau))d\tau.$$

Тоді

$$\|y(t)-\eta(t)\|\le\|e^{At}\|\cdot\|y_0\|+\int\limits_0^t\|e^{A(t-\tau)}\|N\|y(\tau)-\eta(\tau)\|d\tau+$$

$$+\left\|\int\limits_{-\infty}^{0}e^{A(t-\tau)}\varphi(\tau,\eta(\tau))d\tau\right\|\le Ce^{-\alpha t}+$$

$$+\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\cdot N\|y(\tau)-\eta(\tau)\|d\tau,$$

і за лемою Гронуола маємо:

$$\|y(t)-\eta(t)\|e^{\alpha t}\le Ce^{Nt},$$

$$\|y(t)-\eta(t)\|\le Ce^{(N-\alpha)t},$$

і оскільки $c_1=\int\limits_0^{+\infty}\|e^{At}\|dt$, то $N-\alpha<0$, отже, $\|y(t)-\eta(t)\|\to 0$, $t\to\infty$. ◀

Вправа 2.11. Довести, що система

$$\begin{cases}\dot{x}=-x-2y+1\\ \dot{y}=2x+3y+\sin t^2\end{cases}$$

має єдиний обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок і знайти цей розв'язок.

Вправа 2.12. Довести, що якщо в системі $\dot{y} = Ay + f(t)$ дійсні частини всіх власних значень матриці A ненульові і $f(t + \omega) \equiv f(t)$, то ця система має єдиний ω-періодичний розв'язок.

Вправа 2.13. Довести, що система

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y + \cos^2 t \\ \dot{y} = -x + 3y - 1 \end{cases}$$

має єдиний π-періодичний розв'язок і знайти цей розв'язок.

Вправа 2.14. Довести, що система

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + \varepsilon \cos(xy) \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases}$$

для достатньо малих $\varepsilon > 0$ має обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок.

Вправа 2.15. Для системи $\frac{dy}{dt} = Ay + \varphi(t, y)$ в умовах теореми Боля довести, що якщо $\varphi(t + \omega, y) \equiv \varphi(t, y)$, то $\eta(t + \omega) \equiv \eta(t)$.

Вправа 2.16. Довести, що система

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = -x + 2y + \varepsilon \sin t \cos(xy) \end{cases}$$

для достатньо малих $\varepsilon > 0$ має 2π-періодичний розв'язок.

§ 2.4. Асимптотична поведінка розв'язків неоднорідних систем зі сталою матрицею та майже періодичною правою частиною

Означення 2.1. *Неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називаєтьcя* ***майже періодичною****, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists l = l(\varepsilon)\ \forall a \in \mathbb{R}\ \exists \tau \in [a, a + l]$:*

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Зауваження. Число $\tau = \tau_f(\varepsilon)$ називається ***ε-майже періодом*** f.

Приклад. Довільна періодична функція є майже періодичною. Дійсно, нехай $f(x+T) \equiv f(x)$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ для $l = 2T$ $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists \tau = nT \in [a, a+2T]$:

$$|f(x+nT) - f(x)| = 0 < \varepsilon.$$

Зауваження. На відміну від періодичних функцій дві майже періодичних функції $\forall \varepsilon > 0$ завжди мають спільний ε-майже період. Більше того, для довільних чисел $\alpha_k, \beta_k, c_k, d_k$ функція

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \Big(c_k \cos(\alpha_k x) + d_k \sin(\beta_k x) \Big)$$

є майже періодичною. Наступні дві теореми дозволяють охарактеризувати клас майже-періодичних функцій.

Теорема 2.13 (Бохнера). *Неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є майже періодичною тоді і лише тоді, коли $\forall h_n \in \mathbb{R}$ послідовність $\{f(x+h_n)\}$ має рівномірно збіжну на $\mathbb{R}$ підпослідовність, тобто $\exists n_k$ $\exists g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+h_{n_k}) - g(x)| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Теорема 2.14 (Бора). *Якщо f – майже періодична, то*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P_\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} [c_n(\varepsilon) \cos \lambda_n(\varepsilon) x + d_n(\varepsilon) \sin \lambda_n(\varepsilon) x] :$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

З двох попередніх теорем маємо наступні властивості майже періодичних функцій: нехай f і g – майже періодичні функції. Тоді

1) f – обмежена і рівномірно неперервна на $\mathbb{R}$;
2) $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ – майже періодичні функції;

3) якщо f' – рівномірно неперервна на $\mathbb{R}$, то f' – майже періодична функція;
4) якщо $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$ – обмежена на $\mathbb{R}$, то F – майже періодична функція.

Тепер розглянемо систему

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t), \tag{2.28}$$

де A – стала матриця.

Теорема 2.15 (Бора-Нейгебауера). *Нехай f – майже періодична функція. Тоді довільний обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок системи (2.28) є майже періодичною функцією. Якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці A ненульові, то система (2.28) має єдиний майже періодичний розв'язок $\eta(t)$. Якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці A від'ємні, то для будь-якого розв'язку (2.28) $y = y(t)$ маємо*

$$\lim_{t\to+\infty} \|y(t) - \eta(t)\| = 0.$$

$\triangleright$ Друга частина теореми – наслідок того, що за умови ненульових дійсних частин всіх власних чисел система (2.28) має єдиний обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок. Отже, нехай f – майже періодична функція. Спочатку розглянемо скалярне (комплексне) рівняння

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y + f(t), \tag{2.29}$$

де $\lambda = \alpha + i\beta$, f – майже періодична функція, і доведемо, що якщо (2.29) має обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок $y = \eta(t)$, то $\eta(t)$ – майже періодичний.

Якщо $\mathrm{Re}\lambda = \alpha \neq 0$, то з теореми про обмежений розв'язок ЛНС зі сталою матрицею (2.29) має єдиний обмежений розв'язок, який, враховуючи, що $J(A) = \lambda$, а отже, $S = S^{-1} = E$, можна записати в наступному вигляді:

$$\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)f(s)ds,$$

де

$$G(p) = \begin{cases} -e^{\lambda p},\ p<0, \\ 0,\ p \geq 0 \end{cases} \quad \text{для } \alpha > 0,$$

$$G(p) = \begin{cases} 0,\ p<0, \\ e^{\lambda p},\ p \geq 0 \end{cases} \quad \text{для } \alpha < 0,$$

тобто

$$\eta(t) = -\int\limits_{t}^{\infty} e^{\lambda(t-s)} f(s)ds, \quad \text{для } \alpha > 0,$$

$$\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t-s)} f(s)ds \quad \text{для } \alpha < 0.$$

Нехай $\eta(t) = -\int\limits_{t}^{\infty} e^{\lambda(t-s)} f(s)ds$, $\tau = \tau_f(\varepsilon)$ – ε-майже період функції f. Тоді

$$\eta(t+\tau) = -\int\limits_{t+\tau}^{\infty} e^{\lambda(t+\tau-s)} f(s)ds =$$

$$= \left| \begin{array}{l} s-\tau = p \\ s \in [t+\tau, +\infty) \\ p \in [t, +\infty) \end{array} \right| = -\int\limits_{t}^{\infty} e^{\lambda(t-p)} f(p+\tau)dp.$$

Отже,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\eta(t+\tau) - \eta(t)| = \left| \int\limits_{t}^{+\infty} e^{\lambda(t-s)} [f(s+\tau) - f(s)]ds \right| \leq$$

$$\leq \sup_s |f(s+\tau) - f(s)| \cdot \int\limits_{t}^{\infty} |e^{\lambda(t-s)}| ds < \frac{\varepsilon}{2},$$

звідки маємо, що η – майже періодична.

Тепер нехай $\mathrm{Re}\lambda = \alpha = 0$. Довільний розв'язок системи (2.29) має вигляд:

$$y(t) = e^{\lambda t}\left(c + \int\limits_0^t e^{-\lambda s} f(s)ds\right).$$

Нехай при $c = c_0$ $\eta(t) = e^{\lambda t}\left(c_0 + \int\limits_0^t e^{-\lambda s} f(s)ds\right)$ – обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок системи (2.29), тобто

$$\eta(t) = c_0(\cos\beta t + i\sin\beta t) + ((\cos\beta t + i\sin\beta t)) \cdot \int\limits_0^t e^{-\lambda s} f(s)ds.$$

Звідси

$$\int\limits_0^t e^{-\lambda s} f(s)ds \ - \ \text{обмежена},$$

$$e^{-\lambda s} \cdot f(s) = (\cos\beta t + i\sin\beta t)f(s) \ - \ \text{м.п.},$$

отже, $\int\limits_0^t e^{-\lambda s} f(s)ds$ – майже періодична, а тому $\eta(t)$ – майже періодична. Отже, при $\alpha = 0$ довільний розв'язок системи (2.29) є майже періодичним.

Повертаємось до (2.28). Відомо, що існує невироджена матриця S така, що $B = S^{-1}AS$ – нижня трикутна матриця. Тоді після заміни $y = Sx$ маємо:

$$S\dot{x} = ASx + f \Rightarrow \dot{x} = Bx + S^{-1}f \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 + g_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = b_{21}x_1 + \lambda_2 x_2 + g_2(t) \\ \ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = b_{n1}x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + g_n(t), \end{array} \tag{2.30}$$

причому $\forall i = \overline{1, n}$ функції $g_i(t)$ є майже періодичними. Нехай $\eta(t)$ – обмежений розв'язок системи (2.28), тому $S^{-1}\eta(t) = x(t)$ – обмежений розв'язок системи (2.30), звідки $\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 +$

$g_1(t)$, тобто $x_1(t)$ – майже періодична; $\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 x_2 + (b_{21}x_1(t) + g_2(t))$, тому $x_2(t)$ – майже періодична, і т.д., звідки маємо, що $\eta(t)$ – майже періодична. ◀

Тепер розглядаємо нелінійну систему

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t) + \mu \cdot \varphi(t, y), \tag{2.31}$$

де $\mu > 0$ – малий параметр.

Теорема 2.16 (Бірюк). *Нехай виконані умови:*

1) *для довільного λ – власного числа матриці A $\mathrm{Re}\lambda(A) \neq 0$;*
2) *f – майже періодична функція;*
3) $\forall (t, y)\ (t, z)\ \|\varphi(t, y) - \varphi(t, z)\| \leq N\|y - z\|$;
4) *$\varphi(\cdot, y)$ – майже періодична рівномірно по $\|y\| \leq R$ $\forall R > 0$, тобто*

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall R > 0\ \exists l = l(\epsilon, R)\ \forall a \in \mathbb{R}\ \exists \tau = \tau(R) \in [a, a + l]$$

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \forall \|y\| \leq R\ \|\varphi(t + \tau, y) - \varphi(t, y)\| < \varepsilon,$$

де τ залежить від R, але не від $\|y\| \leq R$.

Тоді $\exists \mu_0 > 0$ $\forall |\mu| \leq \mu_0$ система (2.31) має майже періодичний розв'язок $\eta = \eta(t, \mu)$, причому

$$\lim_{\mu \to 0} \|\eta(t, \mu) - \eta(t)\| = 0,$$

де $\eta(t)$ – єдиний майже-періодичний розв'язок породжуючої системи (2.28).

Якщо, крім того, для довільного λ – власного числа матриці A $\mathrm{Re}\lambda(A) < 0$, то майже періодичний розв'язок системи (2.31) $\eta(t) = \eta(t, \mu)$ єдиний, причому для довільного іншого розв'язку системи (2.31) виконується

$$\|y(t) - \eta(t, \mu)\| \to 0,\ t \to +\infty.$$

$\triangleright$ Спочатку доведемо останнє твердження теореми. Дійсно, якщо дійсні частини власних чисел матриці A від'ємні, то для $\tilde{\varphi}(t, y) = f(t) + \mu\varphi(t, y)$ виконуються умови теореми Боля. Дійсно, $\|\tilde{\varphi}(t, 0)\| = \|f(t) + \mu\varphi(t, 0)\|$ – обмежена, бо майже періодична, $\|\tilde{\varphi}(t, y) - \tilde{\varphi}(t, z)\| \leq \mu N\|y - z\|$, отже існує єдиний обмежений розв'язок $\eta = \eta(t, \mu)$, і, крім того, для довільного іншого розв'язку (2.31) $y(t)$ виконується $\|y(t) - \eta(t, \mu)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Перейдемо до першої частини теореми. Оскільки функція $\psi(t, y) = f(t) + \mu\varphi(t, y)$ задовольняє умови теореми Боля, то система (2.31) при $|\mu| \leq \mu_0$ має обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок $\eta = \eta(t, \mu)$, що задовольняє рівняння

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)[f(s) + \mu\varphi(s, \eta(s))]ds,$$

де $\|G(t)\| \leq Ce^{-\alpha|t|}$ $\forall t$.

Доведемо, що $\eta(t)$ є майже періодичною. Нехай

$$\|\eta(t, \mu)\| < b \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall |\mu| \leq \mu_0.$$

Нехай $\tau = \tau_f(\varepsilon)$ – спільний ε-майже період функцій $f(t)$ і $\varphi(t, y)$ при $\|y\| \leq b$. Тоді

$$\eta(t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t+\tau-s)[f(s) + \mu\varphi(s, \eta(s))]ds = |s - \tau = p| =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-p)[f(p+\tau) + \mu\varphi(p+\tau, \eta(p+\tau))]dp,$$

отже,

$$\|\eta(t+\tau) - \eta(t)\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t-s)\|[\|f(s+\tau) - f(s)\| +$$

$$+ |\mu|\|\varphi(s+\tau, \eta(s+\tau)) - \varphi(s, \eta(s+\tau))\| +$$

$$+|\mu|\|\varphi(s,\eta(s+\tau))-\varphi(s,\eta(s))\|]ds \leq$$

$$\leq (\sup_t \|f(t+\tau)-f(t)\| + |\mu| \sup_{t,y} \|\varphi(t+\tau,y)-\varphi(t,y)\| +$$

$$+|\mu|N \sup_t \|\eta(t+\tau)-\eta(t)\|) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t)\|dt <$$

$$< c_1(\varepsilon + |\mu| \cdot \varepsilon + N|\mu| \sup_t \|\eta(t+\tau)-\eta(t)\|),$$

де $c_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|G(t)\|dt \leq \frac{2C}{\alpha}$. Тоді

$$\sup_t \|\eta(t+\tau)-\eta(t)\| \leq \frac{(1+|\mu|)c_1}{1-c_1N|\mu|} \cdot \varepsilon,$$

якщо $N \cdot c_1 \cdot |\mu| < 1$. Теорема доведена. ◀

Вправа 2.17. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ x \leq 0, \\ e^{-x}, \ x > 0 \end{cases}$$

не є майже періодичною.

Вправа 2.18. Довести, що формула

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t-s)} f(s)ds$$

для $Re\lambda < 0$ визначає майже-періодичну функцію.

Вправа 2.19. Довести, що рівняння $\dot{x} = a(t)x + b(t)$, a, b – майже періодичні функції, $a(t) \geq \alpha > 0 \ \forall t$, має єдиний майже періодичний розв'язок.

Вправа 2.20. Довести, що система

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - y + \sin\sqrt{2}t \\ \dot{y} = x + 2y - \cos\sqrt{3}t \end{cases}$$

має єдиний майже-періодичний розв'язок.

Вправа 2.21. Довести, що система

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + y + \mu(\cos\sqrt{2}t)e^{-x^2y^2} \\ \dot{y} = -x - 2y + \mu(\sin\sqrt{3}t)e^{-x^2y^2} \end{cases}$$

для достатньо малих $\mu > 0$ має майже-періодичний розв'язок $z = z(t, \mu)$ і знайти $\lim\limits_{\mu\to 0} z(t, \mu)$.

Глава 3

Асимптотичні розвинення

§ 3.1. Вступ до теорії нелінійних коливань

Вивчення коливних процесів має основне значення для найрізноманітніших розділів механіки, фізики та техніки. Вібрації будівель і машин, автоколивання в системах регулювання, звукові та ультразвукові коливання — усі ці процеси об'єднуються математичними методами в одне спільне вчення про коливання. Доволі ефективним інструментом дослідження нелінійних коливань є методи асимптотичних розвинень за степенями малого параметра. З їх допомогою у великій частині практично важливих випадків вдається одержати порівняно прості розрахункові схеми і детально з'ясувати характер перебігу коливного процесу.

Витоки сучасного вчення про коливання беруть початок з класичної механіки часів Галілея, Гюйгенса, Ньютона в задачі про рух маятника. В роботах Лагранжа вже є сформована теорія малих коливань. В подальшому розвитку вона одержала назву теорії лінійних коливань, тобто коливань, які характеризуються лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами. Пізніше, А. М. Крилов та його учні, які розвивали теорію лінійних коливань, з успіхом застосували її до розв'язання практично важливих задач про качку човна, до теорії гіроскопа, до задач військової артилерії.

Простота основних принципів теорії лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами сприяла детальній розбудові теорії лінійних коливань, узагальненості формулювань її законів та їх фізичну наочність. Такі основні поняття цієї теорії, як власна частота, декремент затухання, резонанс набули широкої популярності і стали незамінними засобами дослідження майже у всіх розділах фізики та техніки. Властивість лінійності диференціальних операторів, що інтерпретувалася як принцип суперпозиції коливань, факт переходу гармонічних функцій часу при застосуванні цих операторів до гармонічних функції з тією ж частотою, дозволили зводити дослідження впливу довільних прикладених сил на лінійну коливну систему до дослідження впливу сил найпростішого типу, що гармонічно залежать від часу. Тим самими вибудувався "спектральний" підхід до коливних процесів, який одержав величезне значення і поза теорією коливань.

З огляду на те, що теорія лінійних коливань розроблена дуже детально, дослідники, досліджуючи коливні процеси, намагалися по можливості підлаштовувати їх під лінійні схеми, відкидаючи часто без належного обґрунтування нелінійні члени. При цьому іноді зовсім залишали поза увагою, що така "лінійна" трактовка може привести до суттєвих похибок не лише кількісного, а й принципово якісного характеру.

На першому етапі розвитку вчення про коливання лише в окремих випадках вчені не користувалися лінеаризацією і розглядали нелінійні коливання як такі. Разом з тим, варто підкреслити, що вже у XIX столітті існував математичний апарат, який би при належному розвиненні і узагальненні міг бути застосований до дослідження нелінійних коливань, принаймні близьких до лінійних. Достатньо близькими до лінійних називають зазвичай коливання, для яких відповідні диференціальні рівняння хоча і є нелінійними, але містять деякий параметр ε, який входить в ці рівняння так, що при $\varepsilon = 0$ вони вироджуються в лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. При цьому вважається, що параметр ε є малим, тобто може приймати достатньо малі за абсолютною величиною значення. Говорячи про такий математичний апарат, ми маємо на увазі перш за все теорію збурень, розроблену астрономами для вивчення руху планет. Тут також доводиться мати справу із дослідженням рухів, які описуються диференціальними рівняннями, що містять малий параметр. При його нульовому значенні вони вироджуються у рівняння, які інтегруються елементарними прийомами. Такі задачі розглядалися ще біля самих витоків небесної механіки, причому швидко виявилася суттєва складність, яка полягає в неможливості використання звичайних розвинень за степенями малого параметра для одержання результатів, які б згодилися для дослідження рухів за достатньо тривалий проміжок часу.

Річ у тім, що звичайні розвинення за степенями малого параметра приводять до наближених формул, де поряд із членами, які гармонічно залежать від часу, присутні також ще і так звані секулярні члени вигляду

$$t^m \sin \alpha t, \quad t^m \cos \alpha t,$$

в яких час t входить поза синусом і косинусом. Внаслідок того, що інтенсивність секулярних членів швидко зростає разом із t, навіть без детального аналізу похибки ясно, что область застосування одержуваних наближених формул обмежена зовсім коротким інтервалом часу.

Цю складність можна в повній мірі проілюструвати на простому прикладі затухаючого руху, що описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = -\varepsilon x$$

з малим додатним параметром ε. Розв'язом цього рівняння є

$$x = Ce^{-\varepsilon t}.$$

Але якби ми застосовували для розв'язання цього рівняння звичайний метод розвинення за степенями ε, то б одержали

$$x = C\left(1 - \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} - \dots\right).$$

Зупиняючись тут на одному, двох і т. д. членах, тобто розглядаючи формули першого, другого і т. д. наближень, ми не зможемо побачити по ним, що наша величина затухає при зростанні t, оскільки ці формули будуть застосовні, лише поки $t << \frac{1}{\varepsilon}$, а за цей час x не встигне суттєво змінитися.

Вказана властивість звичайних розвинень за степенями малого параметра легко також виявляється при розгляді методу, запропонованого Пуассоном при дослідженні задачі про коливання маятника.

Метод Пуассона зводиться до наступного: нехай необхідно знайти розв'язок нелінійного диференціального рівняння, що містить малий параметр,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{3.1}$$

Тоді розв'язок, який задовольняє рівнянню з точністю до величини порядку малості ε^{n+1}, шукають у вигляді n-ї часткової суми ряду

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots + +\varepsilon^n x_n + \ldots. \tag{3.2}$$

Підставляючи ряд (3.2) у ліву частину рівняння (3.1), розкладають результат підстановки за степенями ε, причому відкидають члени, що містять ε в степені вищій за n. Після цього прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях параметра ε.

Таким чином, одержують систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d^2x_0}{dt^2} + \omega^2 x_0 = 0, \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = f\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right), \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = f'_x\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right) x_1 + f'_{x'}\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right) x'_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{3.3}$$

Легко переконатися, що застосування цього методу приводить до появи в розв'язку вищезгаданих секулярних членів.

Дійсно, розглянемо конкретне рівняння

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x + \gamma x^3 = 0, \quad \alpha > 0, \quad \gamma > 0, \tag{3.4}$$

яке може бути проінтерпретоване як рівняння незатухаючих коливань деякої маси m, яка притягується до положення рівноваги відновлюваною пружньою силою

$$p(x) = \alpha x + \gamma x^3. \tag{3.5}$$

Припустимо, що характеристика відновлюючої сили $p(x)$ близька до лінійної. Тоді, позначаючи $\frac{\alpha}{m} = \omega^2$, $\frac{\gamma}{m} = \varepsilon$, утворюємо наближений розв'язок з точністю до величин другого порядку малості.

Маємо

$$x = x_0 + \varepsilon x_1, \tag{3.6}$$

причому

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + \omega^2 x_0 = 0, \tag{3.7}$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = -x_0^3. \tag{3.8}$$

З рівняння (3.7) знаходимо

$$x_0 = a\cos(\omega t + \theta), \tag{3.9}$$

і, підставляючи в праву частину (3.8), одержуємо

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = -\frac{3}{4}a^3\cos(\omega t + \theta) - \frac{1}{4}a^3\cos 3(\omega t + \theta). \tag{3.10}$$

Звідси знаходимо для x_1 наступне значення

$$x_1 = -\frac{3}{8\omega}a^3 t\sin(\omega t + \theta) + \frac{a^3}{32\omega^2}\cos 3(\omega t + \theta). \tag{3.11}$$

Підставляючи (3.9) і (3.11) в (3.6), одержуємо шуканий розв'язок у вигляді

$$\begin{gathered} x = a\cos(\omega t + \theta) - \frac{3\varepsilon}{8\omega}a^3 t\sin(\omega t + \theta) + \\ + \frac{\varepsilon a^3}{32\omega^2}\cos 3(\omega t + \theta). \end{gathered} \tag{3.12}$$

В знайденому наближеному розв'язку наявний секулярний член

$$-\frac{3\varepsilon}{8\omega}a^3 t\sin(\omega t + \theta),$$

і тому коливання, представлені формулою (3.12), повинні розгойдуватися, а їх амплітуда при необмеженому зростанні t повинна необмежено зростати, що знаходиться в явному протиріччі з характером точного розв'язку рівняння (3.4), який виражається через еліптичні функції і є обмеженим.

Невідповідність розв'язку (3.12) дійсності підтверджується ще й наступним фактом.

Якщо помножити рівняння (3.4) на $\frac{dx}{dt}$ і проінтегрувати, то легко знайдемо перший інтеграл

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{\gamma}{4}x^4 = E, \tag{3.13}$$

який виражає закон збереження енергії.

З (3.13) слідує, що при $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ x^2 не може бути більшим за $\frac{2E}{\alpha}$, і, відповідно, амплітуда коливань не може необмежено зростати.

Аналізуючи вищенаведені прості приклади, ми переконуємося в тому, що розглядуваний спосіб одержання наближених розв'язків за допомогою розвинення x в ряд за степенями малого параметру ε придатний лише для дуже малого інтервалу часу.

Ряд (3.2) через присутність секулярних членів не придатний не лише для кількісного, а також й для якісного аналізу поведінки розв'язку рівняння (3.4) на всій дійсній осі, навіть у випадку, якщо ряд (3.2) збігається.

Зауважимо, що наявність у виразі (3.12) секулярних членів ні в якому разі не означає, що рівняння (3.4) взагалі не має періодичних розв'язків. Це свідчить лише про невідповідний вибір розвинення.

Проілюструємо це наступним простим прикладом. Розглянемо функцію

$$\sin(\omega + \varepsilon)t,$$

яка має період $\frac{2\pi}{\omega}$. При малих ε і довільних ω та t ми можемо розкласти її в ряд

$$\begin{aligned} \sin(\omega + \varepsilon)t = \sin\omega t + \varepsilon t\cos\omega t - \frac{\varepsilon^2 t^2}{2!}\sin\omega t - \\ -\frac{\varepsilon^3 t^3}{3!}\cos\omega t + \ldots . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Розглядаючи праву частину (3.14), важко встановити її періодичність через наявність секулярних членів.

Такий самий характер має і зазначена складність вікових членів в теорії збурень. Для її подолання була запропонована низка ефективних методів. Однак, степеневі ряди за степенями малого параметра, до яких вони приводять, є, як правило, розбіжними, але тим не менше наближені формули, одержані тут, якщо обмежитися деякою фіксованою кількістю членів $m = 1, 2, 3, \ldots$, виявляються достатньо придатними для практичних розрахунків. Річ в тім, що ці ряди є асимптотичними в тому сенсі, що похибка m-го наближення пропорційна $(m + 1)$-й степені малого параметра ε, тобто при фіксованому $m = 1, 2, 3, \ldots$ буде прямувати до нуля зі швидкістю ε^{m+1}. Звісно, збільшуючи необмежено m, ми не одержимо, взагалі кажучи, збіжності при $m \to \infty$, але її відсутність є несуттєвою для практичних розрахунків, оскільки на практиці визначення коефіцієнтів при наступних степенях ε настільки швидко ускладнюється, що фактично можуть бути використані наближення лише першого, другого, взагалі дуже невисокого порядку, а їх застосовність повністю обумовлюється властивістю асимптотичності.

Також відмітимо, що безпосередньо нелінійні коливання набули особливої актуальності і викликали до себе особливий інтерес лише з 20-х років минулого століття у зв'язку зі стрімким розвитком радіотехніки після появи електронної лампи. Такі проблеми, як проблема стійкої генерації незатухаючих коливань, трансформації частоти, примусової синхронізації і модуляції, могли бути вирішені лише з допомогою введення в коливні системи нелінійних елементів, оскільки в чисто лінійних коливних системах не можуть існувати усталені коливні режими, які не залежать від початкових умов. При дії зовнішніх гармонічних сил з деякою частотою ω виникають коливання лише з тією ж частотою ω. Електронні лампи виявилися гнучким і зручним засобом для створення відповідних нелінійних елементів.

Тільки після появи численних досліджень, пов'язаних з проблемами наведеного типу, стала фізично ясною та глибока і принципова відмінність механіки нелінійних коливань від механіки лінійних коливань, яка повністю зберігається навіть при розгляді слабко нелінійних коливань, що описуються диференціальними рівняннями, які відрізняються від лінійних зі сталими коефіцієнтами лише наявність достатньо малих членів.

Уявімо собі, що система настільки близька до лінійної, що коливання протягом одного періоду має форму, достатньо близьку до гармонічної. Однак, якщо розглядати ці коливання на великому інтервалі часу в порівнянні з періодом коливання, то вже суттєво буде проявлятися вплив навіть малих відхилень системи від лінійної, які виражаються в наявності малих нелінійних членів в диференціальних рівняннях.

Так, наприклад, в системі можуть бути джерела та поглиначі енергії, які виробляють і споживають достатньо малу роботу за один період коливання, однак при тривалій дії, їх ефект може накопичуватися і суттєво впливати на перебіг коливного процесу, його затухання, розгойдування та стійкість.

Таким чином, малі нелінійні члени можуть мати кумулятивну дію.

Підкреслимо також, що через нелінійність порушується принцип суперпозиції, і окремі гармоніки коливань вступають у взаємодію між собою, внаслідок чого виявляється неможливим індивідуальний розгляд поведінки кожного гармонічного доданку коливань окремо.

Природньо, що найбільш доступними для дослідження є коливні системи з малою нелінійністю, оскільки до них в тій чи іншій формі можна застосовувати методи теорії збурень.

Дослідження ж систем з сильною нелінійністю є з математичної точки зору достатньо складною проблемою, яка вимагає індивідуального підходу в кожному конкретному випадку.

В наступних параграфах описано ряд типових методів дослідження коливань слабко нелінійних систем, з малим параметром при нелінійних членах, які часто зустрічаються на практиці.

§ 3.2. Методи Ліндштедта та Пуанкаре

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{3.15}$$

де ε — додатний параметр. Так як параметр ε малий, природньо шукати розв'язки рівняння (3.15) у вигляді степеневого ряду, розкладеного за степенями ε

$$x = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots, \tag{3.16}$$

в якому коефіцієнти є функціями t.

Для того, щоб бути впевненому, що x в (3.16) — періодична функція, потрібно вимагати, щоб всі x_n, $n = 0, 1, \ldots$ були періодичними. Цю вимогу задовольнити не просто, так як в результаті підстановки правої частини (3.16) в рівняння (3.15) і прирівняння коефіцієнтів при степенях ε одержується послідовність лінійних диференціальних рівнянь, які можуть і не мати періодичних розв'язків. В розв'язках деяких з цих рівнянь можуть зустрітися секулярні члени вигляду $t\cos t$. Члени диференціального рівняння, які приводять до появи подібних розв'язків потребують детального дослідження. Метод Ліндштедта полягає в тому, що вказані члени відкидаються по мірі їх появи в послідовності лінійних диференціальних рівнянь. Виникає проблема збіжності ряда (3.16) до розв'язку рівняння (3.15). Анрі Пуанкаре показав на прикладі, що ряд, одержаний методом Ліндштедта, може і не збігатися. З іншого боку, може статися, що величина x, що виражається рівністю (3.16), буде періодичною, в той самий час коли кожна функція x_n не буде періодичною. В цьому випадку можна вказати деякі умови періодичності і домогтися, щоб ряд (3.16) їм задовольняв.

Зробимо деякі зауваження стосовно можливих періодів коливань. Рівняння (3.15) при $\varepsilon = 0$ має періодичний розв'язок з періодом $\frac{2\pi}{\omega}$. Можна очікувати, якщо періодичний розв'язок існує при малому ε, то період коливання буде $\frac{2\pi}{\omega} + o(\varepsilon)$, тобто період може залежати від ε. Тому можна також очікувати, що частота збуреного періодичного розв'язку запишеться у вигляді $\frac{\tau}{2\pi}$, де $\tau = \omega + \tau_1\varepsilon + \tau_1\varepsilon^2 + \ldots$ — степеневий ряд по ε.

Приклад. Застосуємо метод Ліндштедта до рівняння Вандер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt}. \tag{3.17}$$

$\triangleright$ Ми не знаємо частоти періодичного розв'язку рівняння (3.17) при малих ε ($\varepsilon \neq 0$), однак в результаті проведених міркувань можемо очікувати, що частота цих нелінійних коливань близька до $\frac{1}{2\pi}$. Замінюючи в (3.17) незалежну змінну t на $\theta = \sigma t$, одержимо, що рівняння (3.17) набуває вигляду

$$\sigma^2\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = \varepsilon\sigma(1 - x^2)\frac{dx}{d\theta}. \tag{3.18}$$

Тепер визначимо σ так, щоб рівняння (3.18) мало періодичний розв'язок $x(\theta)$ періоду 2π, тобто $x(\theta) = x(\theta + 2\pi)$, тоді відповідний розв'язок x^* рівняння (3.17) буде мати період $\frac{2\pi}{\sigma}$, тобто

$$x^*(t) = x^*\left(t + \frac{2\pi}{\sigma}\right),$$

і якщо наші припущення коректні, то $\sigma = 1 + o(\varepsilon)$. Запишемо x та σ у вигляді степеневих рядів

$$\begin{gathered} x = x_0(\theta) + \varepsilon x_1(\theta) + \varepsilon^2 x_2(\theta) + \ldots, \\ \sigma = \sigma_0 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2 + \ldots \end{gathered} \tag{3.19}$$

і припустимо, що розв'язок $x(\theta)$ рівняння (3.18) має період 2π та

$$\frac{dx}{d\theta}|_{\theta=0} = 0.$$

Остання умова є несуттєвою, так як вона зводиться лише до зсуву розв'язку вздовж осі θ. Підставлюючи (3.19) у (3.18), одержимо

$$\begin{gathered} (\sigma_0^2 + 2\varepsilon\sigma_0\sigma_1 + \ldots)\left(\frac{d^2x_0}{d\theta^2} + \varepsilon\frac{d^2x_1}{d\theta^2} + \ldots\right) + \\ + x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots = \varepsilon(\sigma_0 + \varepsilon\sigma_1 + \ldots)\times \\ \times(1 - x_0^2 - 2\varepsilon x_0 x_1 - \ldots)\left(\frac{dx_0}{d\theta} + \varepsilon\frac{dx_1}{d\theta} + \ldots\right). \end{gathered} \tag{3.20}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, одержимо

$$\begin{cases} (a) \quad \sigma_0^2\dfrac{d^2x_0}{d\theta^2} + x_0 = 0, \\ (b) \quad \sigma_0^2\dfrac{d^2x_1}{d\theta^2} + x_1 = -2\sigma_0\sigma_1\dfrac{d^2x_0}{d\theta^2} + \sigma_0(1 - x_0^2)\dfrac{dx_0}{d\theta}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{3.21}$$

Загальний розв'язок рівняння (3.21,a)

$$x_0 = A_0\cos\frac{\theta}{\sigma_0} + B_0\sin\frac{\theta}{\sigma_0} \tag{3.22}$$

повинен задовольняти умовам

$$x_0(\theta) = x_0(\theta + 2\pi), \quad \frac{dx_0}{d\theta}|_{\theta=0} = 0.$$

Тому $\sigma_0 = 1$, $B_0 = 0$, а $x_0 = A_0\cos\theta$.

З рівняння (3.21, b) визначаємо A_0 та σ

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{d\theta^2}+x_1 &= 2\sigma_1 A_0\cos\theta - A_0(1-A_0^2\cos^2\theta)\sin\theta = \\ & 2\sigma_1 A_0\cos\theta - A_0\left(1-\frac{A_0^2}{4}\right)\sin\theta+\left(\frac{A_0^3}{4}\right)\sin 3\theta.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Доданки

$$2\sigma_1 A_0\cos\theta \quad \text{та} \quad A_0\left(1-\frac{A_0^2}{4}\right)\sin\theta$$

в правій частині викликають в розв'язках доданки

$$K_1\theta\cos\theta + K_2\theta\sin\theta,$$

які не є періодичними. Це і є секулярні члени. Щоб їх позбавитися, слідуючи Ліндштедту, вибираємо $A_0 = 2$, $\omega_1 = 0$. Тоді загальний розв'язок (3.23) набуде вигляду

$$x_1 = A_1\cos\theta + B_1\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta.$$

Стала B_1 визначається із умови

$$\frac{dx_1}{d\theta}|_{\theta=0} = 0.$$

Сталі A_1 і σ_2 визначаються на наступному кроці. Таким чином, одержуємо

$$x = 2\cos\sigma t + o(\varepsilon), \quad \sigma = 1 + o(\varepsilon). \tag{3.24}$$

◀

Вправа 3.1. Побудувати друге наближення x_2 розв'язку рівняння Ван-дер-Поля (3.17) методом Ліндштедта. Знайти явний вигляд A_1 і σ_2 та переконатися у правильності формули (3.24).

§ 3.3. Побудова асимптотичних розв'язків коливних систем, близьких до лінійних. Метод Крилова-Боголюбова

Розглянемо метод Крилова-Боголюбова побудови асимптотичних наближень коливань [2], що визначаються диференціальним рівнянням вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \qquad (3.25)$$

де ε — малий додатний параметр.

Проаналізуймо характер коливного процесу описаного фізичного явища. Так, при відсутності збурення, тобто при $\varepsilon = 0$, коливання будуть суто гармоничними

$$x = a\cos\psi$$

зі сталою амплітудою та рівномірно обертаючимся фазовим кутом:

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega \quad (\psi = \omega t + \theta).$$

Амплітуда коливання a та його фаза θ будуть сталими за часом величинами і залежатимуть від початкових умов.

Наявність нелінійного збурення ($\varepsilon \neq 0$) приводить до появи в розв'язку рівняння (3.25) обертонів, зумовлює залежність миттєвої частоти $\frac{d\psi}{dt}$ від амплітуди і, нарешті, може викликати систематичне збільшення або зменшення амплітуди коливань в залежності від притоку або поглинання енергії збурюючими силами. Всі ці ефекти зникають в граничному випадку ($\varepsilon = 0$).

Беручи це все до уваги, шукатимемо загальний розв'язок рівняння (3.25) у вигляді розкладу [7]

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,\psi) + \varepsilon^2 u_2(a,\psi) + \varepsilon^3 u_3(a,\psi) + \ldots, \qquad (3.26)$$

в якому $u_1(a,\psi), u_2(a,\psi), \ldots$ — періодичні функції кута ψ з періодом 2π, а величини a, ψ як функції часу визначаються диференціальними рівняннями

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots, \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots. \end{cases} \tag{3.27}$$

Перед нами виникає задача підбору функцій $u_1(a,\psi)$, $u_2(a,\psi)$, $\ldots$, $A_1(a)$, $B_1(a)$, $A_2(a)$, $B_2(a)$, $\ldots$ таким чином, щоб вираз (3.26), в якому замість a і ψ будуть підставлені функції часу, визначені рівняннями (3.27), виявився б розв'язком початкового рівняння (3.25). Визначення коефіцієнтів вказаних розкладів не представляє принципових труднощів, однак в силу швидкого ускладнення формул практично ефективно можуть бути знайденими зазвичай лише два-три перших члени. Зупиняючися в наших розкладах на цих членах, тобто покладаючи

$$\begin{gathered} x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,\psi) + \varepsilon^2 u_2(a,\psi) + \ldots \\ \ldots + \varepsilon^m u_m(a,\psi), \quad m = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{3.28}$$

і

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots + \varepsilon^m A_m(a), \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots + \varepsilon^m B_m(a), \end{cases} \tag{3.29}$$

ми зможемо одержати наближення першого, другого і т. д., взагалі кажучи, невеликого, порядку, і тому практична застосовність методу визначається не властивостями збіжності сум (3.28), (3.29) при $m \to \infty$, а їх асимптотичними властивостями для даного фіксованого m при $\varepsilon \to 0$. Потрібно лише, щоб при малому ε вираз (3.28) давав би достатньо точне представлення розв'язку рівняння (3.25) для достатньо тривалого інтервалу часу. Тому ми не будемо досліджувати проблему збіжності при $m \to \infty$ і розглядатимемо розклади (3.26), (3.27) як формальні розклади, необхідні для побудови асимптотичних наближень (3.28).

Інакше кажучи, розглянемо задачу знаходження таких функцій:

$$\begin{gathered} u_1(a,\psi), u_2(a,\psi), \ldots, A_1(a), A_2(a), \ldots \\ \ldots, B_1(a), B_2(a), \ldots, \end{gathered} \tag{3.30}$$

щоб вираз (3.28), в якому функції часу a, ψ визначаються рівняннями m-го наближення (3.29), задовольняв рівнянню (3.25) з точністю до величини порядку малості ε^{m+1}.

Зауважимо, що похибка порядку ε^{m+1} забезпечує відхилення наближеного розв'язку від відповідного точного, що не перевищує величини порядку $\varepsilon^{m+1}t$ і, таким чином, це відхилення залишатиметься малим при якзавгодно великих значеннях εt, якщо тільки параметр ε достатньо малий.

Задача визначення виразів (3.30) є неоднозначною. Припустимо знайдені деякі вирази цих функцій. Здійснюючи в (3.26), (3.27) заміну змінних

$$\begin{aligned} a &= b + \varepsilon\alpha_1(b) + \varepsilon^2\alpha_2(b) + \ldots, \\ \psi &= \varphi + \varepsilon\beta_1(b) + \varepsilon^2\beta_2(b) + \ldots, \end{aligned}$$

де $\alpha_1(a), \alpha_2(a), \ldots, \beta_1(a), \beta_2(a), \ldots$ — довільні функції, одержимо знову формули типу (3.26), (3.27), але із зміненими виразами коефіцієнтів (3.30). Тому для однозначності визначення цих коефіцієнтів накладемо додаткову умову — відсутності першої гармоніки у виразах $u_1(a,\psi), u_1(a,\psi), \ldots$. Тобто будемо визначати ці періодичні функції фазового кута так, щоб виконувалися рівності

$$\begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} u_1(a, \psi) \cos\psi d\psi = 0, \\ \int\limits_0^{2\pi} u_2(a, \psi) \cos\psi d\psi = 0, \ldots, \\ \int\limits_0^{2\pi} u_1(a, \psi) \sin\psi d\psi = 0, \\ \int\limits_0^{2\pi} u_2(a, \psi) \sin\psi d\psi = 0, \ldots . \end{cases} \tag{3.31}$$

З фізичної точки зору прийняття цих умов відповідає вибору в якості величини a повної амплітуди першої основної гармоніки коливання.

Після зроблених попередніх зауважень перейдемо до поставленої задачі знаходження відповідних виразів для (3.30) із урахуванням додаткових умов (3.31). Диференціюючи праву частину (3.26), знаходимо

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \ldots , \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt}\left\{\cos\psi + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial a} + \ldots\right\} + \\ + \frac{d\psi}{dt}\left\{-a\sin\psi + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \ldots\right\}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2a}{dt^2}\left\{\cos\psi + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial a} + \ldots\right\} + \\
&+ \frac{d^2\psi}{dt^2}\left\{-a\sin\psi + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial\psi} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial\psi} + \ldots\right\} + \\
&+ \left(\frac{da}{dt}\right)^2\left\{\varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} + \ldots\right\} + \\
&+2\frac{da}{dt}\frac{d\psi}{dt}\left\{-\sin\psi + \varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\psi} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial a\partial\psi} + \ldots\right\} + \\
&+ \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\left\{-a\cos\psi + \varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2} + \ldots\right\}.
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

Враховуючи рівняння (3.27), можемо знайти наступні величини:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2a}{dt^2} = \left(\varepsilon\dfrac{dA_1}{da} + \varepsilon^2\dfrac{dA_2}{da} + \ldots\right)(\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots) = \\
\qquad = \varepsilon^2 A_1\dfrac{dA_1}{da} + \varepsilon^3\ldots, \\
\dfrac{d^2\psi}{dt^2} = \left(\varepsilon\dfrac{dB_1}{da} + \varepsilon^2\dfrac{dB_2}{da} + \ldots\right)(\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots) = \\
\qquad = \varepsilon^2 A_1\dfrac{dB_1}{da} + \varepsilon^3\ldots, \\
\left(\dfrac{da}{dt}\right)^2 = (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots)^2 = \varepsilon^2 A_1^2 + \varepsilon^3\ldots, \\
\dfrac{da}{dt}\dfrac{d\psi}{dt} = (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots)(\omega + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \ldots) = \\
\qquad = \varepsilon A_1\omega + \varepsilon^2(A_2\omega + A_1 B_1) + \varepsilon^3\ldots, \\
\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2 = (\omega + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \ldots)^2 = \\
= \omega^2 + \varepsilon 2\omega B_1 + \varepsilon^2(B_1^2 + 2\omega B_2) + \varepsilon^3\ldots.
\end{cases} \tag{3.35}
$$

Підставивши (3.27), (3.35) в (3.32), (3.33), (3.34) і групуючи результат по степеням параметра ε, знайдемо

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = -a\omega\sin\psi + \varepsilon\left\{A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \omega\dfrac{\partial u_1}{\partial\psi}\right\} + \\
+\varepsilon^2\left\{A_2\cos\psi - aB_2\sin\psi + A_1\dfrac{\partial u_1}{\partial\psi} + B_1\dfrac{\partial u_1}{\partial\psi} + \omega\dfrac{\partial u_2}{\partial\psi}\right\} + \\
+\varepsilon^3\ldots, \\
\dfrac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2\cos\psi + \\
+\varepsilon\left\{-2\omega A_1\sin\psi - 2\omega aB_1\cos\psi + \omega^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}\right\} + \\
+\varepsilon^2[\left(A_1\dfrac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2\omega aB_2\right)\cos\psi - \\
-\left(2\omega A_2 + 2A_1B_1 + A_1\dfrac{dB_1}{da}a\right)\sin\psi + \\
+2\omega A_1\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\psi} + 2\omega B_1\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + \omega^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2}] + \varepsilon^3\ldots,
\end{cases}
\tag{3.36}
$$

звідки слідує, що ліву частину рівняння (3.25) можна представити у вигляді

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \\
= \varepsilon\left\{-2\omega A_1\sin\psi - 2\omega aB_1\cos\psi + \omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + \omega^2 u_1\right\} + \\
+\varepsilon^2[\left(A_1\frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2\omega aB_2\right)\cos\psi - \\
-\left(2\omega A_2 + 2A_1B_1 + A_1\frac{dB_1}{da}a\right)\sin\psi + \\
+2\omega A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\psi} + 2\omega B_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + \omega^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2} + \omega^2 u_2] + \varepsilon^3\ldots.
\end{gathered}
\tag{3.37}
$$

Праву частину рівняння (3.25), враховуючи (3.26) та (3.36), можна записати наступним чином:

$$\begin{gathered}
\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \varepsilon f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) + \\
+\varepsilon^2[u_1 f'_x(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) + \\
+\left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right) f'_{x'}(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)] + \\
+\varepsilon^3\ldots.
\end{gathered} \tag{3.38}$$

Для того, щоб вираз (3.26) задовольняв початковому рівнянню (3.25) з точністю до величини порядку малості ε^{m+1}, необхідно прирівняти коефіцієнти при однакових степенях ε в правих частинах (3.37) і (3.38) до членів m-го порядку включно. В результаті одержимо наступні рівняння:

$$\begin{cases}
\omega^2\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + u_1\right) = f_0(a,\psi) + 2\omega A_1\sin\psi + 2\omega a B_1\cos\psi, \\
\omega^2\left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2} + u_2\right) = f_1(a,\psi) + 2\omega A_2\sin\psi + 2\omega a B_2\cos\psi, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\omega^2\left(\dfrac{\partial^2 u_m}{\partial\psi^2} + u_m\right) = f_{m-1}(a,\psi) + 2\omega A_m\sin\psi + 2\omega a B_m\cos\psi,
\end{cases} \tag{3.39}$$

де для скорочення введені позначення:

$$f_0(a,\psi) = f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi),$$

$$
\begin{gathered}
f_1(a,\psi) = u_1 f'_x(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)+ \\
+\left[A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right] f'_{x'}(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)+ \\
+\left(aB_1^2 - A_1\frac{dA_1}{da}\right)\cos\psi + \left(2A_1B_1 + A_1\frac{dB_1}{da}a\right)\sin\psi- \\
-2\omega A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\psi} - 2\omega B_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}
\tag{3.40}
$$

Неважко бачити, що $f_k(a,\psi)$ є періодичною функцією змінної ψ з періодом 2π, яка залежить лише від a; її явний вираз відомий, як тільки знайдені вирази $A_j(a), B_j(a), u_j(a,\psi)$ до k-го номера включно.

Щоб визначити $A_1(a), B_1(a), u_1(a,\psi)$ з першого рівняння системи (3.39), розглянемо розклади Фур'є для функцій $f_0(a,\psi)$ та $u_1(a,\psi)$:

$$
\begin{cases}
\qquad f_0(a,\psi) = g_0(a)+ \\
+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\{g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi\}, \\
\qquad u_1(a,\psi) = v_0(a)+ \\
+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\{v_n(a)\cos n\psi + w_n(a)\sin n\psi\}.
\end{cases}
\tag{3.41}
$$

Підставляючи праві частини виразів (3.41) в перше рівняння системи (3.39), одержимо вираз

$$\omega^2 v_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \omega^2(1-n^2)\{v_n(a)\cos n\psi + w_n(a)\sin n\psi\} =$$
$$= g_0(a) + \{g_1(a) + 2\omega a B_1\}\cos n\psi + \{h_1(a) + 2\omega A_1\}\sin n\psi +$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\{g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi\},$$

з якого, прирівнюючи коефіцієнти при однакових гармоніках, одержимо

$$\begin{cases} g_1(a) + 2\omega a B_1 = 0, \quad h_1(a) + 2\omega A_1 = 0, \\ v_0(a) = \dfrac{g_0(a)}{\omega^2}, \quad v_n(a) = \dfrac{g_n(a)}{\omega^2(1-n^2)}, \\ w_n(a) = \dfrac{h_n(a)}{\omega^2(1-n^2)}, \quad (n = 2, 3, \ldots). \end{cases} \tag{3.42}$$

Таким чином, нами однозначно визначені $A_1(a)$ і $B_1(a)$, а також всі гармонічні компоненти функції $u_1(a,\psi)$, окрім перших $v_1(a)$ і $w_1(a)$. Однак в силу додаткових умов (3.31) ця функція не містить першої гармоніки, тому

$$v_1(a) = 0, \quad w_1(a) = 0$$

і, відповідно,

$$u_1(a,\psi) = \frac{g_0(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi}{1-n^2}. \tag{3.43}$$

Визначивши $u_1(a,\psi), A_1(a)$ і $B_1(a)$, з (3.40) маємо явний вигляд $f_1(a,\psi)$. Розкладаючи його в ряд Фур'є

$$f_1(a,\psi) = g_0^{(1)}(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\{g_n^{(1)}(a)\cos n\psi + h_n^{(1)}(a)\sin n\psi$$

і використавши друге рівняння з (3.39) та умову (3.31), знаходимо

$$g_1^{(1)}(a) + 2\omega a B_2 = 0, \quad h_1^{(1)}(a) + 2\omega A_2 = 0 \tag{3.44}$$

і

$$u_2(a,\psi) = \frac{g_0^{(1)}(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_n^{(1)}(a)\cos n\psi + h_n^{(1)}(a)\sin n\psi}{1-n^2}.$$

Таким чином, одержується процес для послідовного однозначного визначення величин (3.30). Викладений метод дозволяє визначити

$$u_n(a,\psi), \quad A_n(a), \quad B_n(a) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

для якзавгодно великого n, які задовольнятимуть початковому рівнянню (3.25) з точністю до величин якзавгодно високого порядку малості по відношенню до ε. Додаткові умови (3.31) забезпечують однозначність визначення цих функцій та відсутність в розв'язку секулярних членів.

Розглянемо більш детально перше наближення

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,\psi), \tag{3.45}$$

в якому

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a). \end{cases} \tag{3.46}$$

З (3.46) слідує, що

$$\Delta a = a(t) - a(0) \sim \varepsilon t\tilde{A}_1,$$
$$\Delta(\psi - \omega t) = [\psi(t) - \omega t] - \psi(0) \sim \varepsilon t\tilde{B}_1,$$

де $\tilde{A}_1$ і $\tilde{B}_1$ — деякі середні значення $A_1(a)$ і $B_1(a)$ на інтервалі $(0,t)$. З останнього виразу видно, що час, протягом якого величини a та $\psi - \omega t$ зможуть отримати скінченні прирости, має бути порядку $\frac{1}{\varepsilon}$.

З іншого боку, рівняння першого наближення (3.46) одержуються після нехтування в рівняннях (3.27) членами порядка малості ε^2, а така похибка в значеннях перших похідних $\frac{da}{dt}, \frac{d\psi}{dt}$ за час t приводить до похибки порядку $\varepsilon^2 t$ в значеннях самих функцій a та ψ. Тому в інтервалі часу, протягом якого $a, \psi - \omega t$ встигнуть суттєво відхилитися від своїх початкових значень, похибки в значеннях амплітуди і фази коливань будуть величинами порядку ε і тому на цьому інтервалі у виразах (3.45) немає сенсу зберігати член $\varepsilon u_1(a, \psi)$ першого порядку малості, оскільки як похибка формули (3.45), так і похибка спрощеної формули $x = a\cos\psi$ будуть величинами першого порядку малості.

Беручи це все до уваги, природньо надалі брати в якості першого наближення спрощений вираз

$$x = a\cos\psi, \tag{3.47}$$

в якому a і ψ визначаються рівняннями

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a). \end{cases} \tag{3.48}$$

Міркуючи аналогічно, в якості другого наближення візьмемо вираз

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a, \psi), \tag{3.49}$$

в якому функції часу a і ψ визначаються рівняннями

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a), \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a). \end{cases} \tag{3.50}$$

Наведемо явні формули для $A_1(a), A_2(a), B_1(a), B_2(a)$ та $u_1(a,\psi)$ [2, Гл. 1, §1]. З (3.40), (3.41) і (3.42) маємо

$$\begin{cases} A_1(a) = -\dfrac{1}{2\pi\omega}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi d\psi, \\ B_1(a) = -\dfrac{1}{2\pi a\omega}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi d\psi. \end{cases} \tag{3.51}$$

Далі, з (3.43) слідує, що

$$u_1(a,\psi) = \frac{g_0(a)}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi}{n^2-1}, \tag{3.52}$$

де $g_n(a)$ і $h_n(a)$ знаходимо за формулами

$$\begin{cases} g_n(a) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos n\psi d\psi, \\ h_n(a) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin n\psi d\psi. \end{cases} \tag{3.53}$$

Нарешті, в силу (3.40) і (3.44) можемо записати:

$$\begin{gathered} A_2(a) = -\frac{1}{2\omega}\left\{2A_1B_1 + A_1\frac{dB_1}{da}a\right\} - \\ -\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}[u_1(a,\psi)f'_x(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) + \\ +\left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right)\times \\ \times f'_{x'}(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)]\sin\psi d\psi, \end{gathered} \tag{3.54}$$

$$\begin{gathered}B_2(a) = -\frac{1}{2\omega}\left\{B_1^2 - \frac{A_1}{a}\frac{dA_1}{da}\right\} - \\ -\frac{1}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi}[u_1(a,\psi)f'_x(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) + \\ +\left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right)\times \\ \times f'_{x'}(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)]\cos\psi d\psi.\end{gathered} \tag{3.55}$$

Як бачимо, рівняння другого наближення (3.50), де $A_2(a)$ і $B_2(a)$ визначаються згідно (3.54), (3.55), достатньо складні так як вони записані в найзагальнішому випадку. Для конкретних коливних систем, як буде показано нижче, ці рівняння суттєво спрощуються.

Вправа 3.2. Побудувати перше наближення коливань математичного маятника, які затухають під дією сили, що пропорційна швидкості:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + \frac{g}{l}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) = 0. \tag{3.56}$$

§ 3.4. Консервативні системи, близькі до лінійних

В якості частинного випадку рівняння (3.25) розглянемо вільні псевдогармонічні коливання без затухання деякої маси m

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + p(x) = 0, \tag{3.57}$$

де залежність між пружною силою та переміщенням $p(x)$ є нелінійною. Припустимо, що ця нелінійність є достатньо слабкою, тому покладемо

$$p(x) = kx + \varepsilon\Phi(x). \tag{3.58}$$

Тоді рівняння (3.57) буде належати до типу рівнянь (3.25), причому

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = -\frac{\Phi(x)}{m}, \tag{3.59}$$

де ε — малий додатний параметр.

Для побудови першого наближення розглянемо розклад Фур'є для функції $\Phi(a\cos\psi)$. Так як ця функція є парною, то в її розкладі в ряд Фур'є синуси будуть відсутніми:

$$\Phi(a\cos\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(a)\cos n\psi. \tag{3.60}$$

Звідси на основі (3.41) та (3.59) одержимо

$$g_n(a) = -\frac{C_n(a)}{m}, \quad h_n(a) = 0,$$

звідки знаходимо

$$A_1(a) = 0, \quad B_1(a) = \frac{1}{2\omega ma} C_1(a). \tag{3.61}$$

Таким чином, враховуючи (3.47), (3.48), в першому наближенні маємо

$$x_I = a\cos\psi,$$

де a і ψ визначаються рівняннями

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{\varepsilon C_1(a)}{2\omega ma} = \omega_I(a) \tag{3.62}$$

(індекс поряд з x та ω вказує номер наближення).

З першого рівняння системи (3.62) слідує, що амплітуда коливання не залежить від часу і зберігає своє початкове значення

$$a = a_0 = const.$$

Враховуючи сталість a, з другого рівняння (3.62) одержуємо

$$\psi = \omega_I(a)t + \theta,$$

де θ — фазова стала, рівна початковому значенню фази ψ.

Таким чином, в розглядуваному випадку коливання в першому наближенні буде гармонічним. Вплив нелінійного характеру рівняння (3.57) в першому наближення виявляється лише в тому, що частота коливань $\omega_I(a)$ залежить від амплітуди. Тобто коливна система через нелінійний член $\varepsilon\Phi(x)$ втрачає властивість ізохронності.

Перейдемо до побудови другого наближення. За формулою (3.43) знаходимо

$$x_1(a,\psi) = \frac{1}{k} \sum_{n=0, n\neq 1}^{\infty} \frac{C_n(a)\cos n\psi}{n^2-1}. \tag{3.63}$$

Підставивши знайдені вирази (3.61) та (3.63) в (3.54), (3.55), одержимо

$$\begin{gathered} A_2(a) = 0, \\ B_2(a) = -\frac{1}{2\omega}\left(\frac{C_1(a)}{2\omega m a}\right)^2 + \\ +\frac{1}{2\omega m\pi a} \sum_{n=0, n\neq 1}^{\infty} \frac{C_n(a)}{k(n^2-1)} \int_0^{2\pi} \Phi'(a\cos\psi)\cos\psi\cos n\psi d\psi. \end{gathered} \tag{3.64}$$

Оскільки

$$\begin{gathered} C_0(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(a\cos\psi)d\psi, \\ C_n(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(a\cos\psi)\cos n\psi d\psi, \quad (n\geq 1), \end{gathered}$$

то, диференціюючи, знайдемо

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi'(a\cos\psi)\cos\psi d\psi = \frac{dC_0(a)}{da}, \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi'(a\cos\psi)\cos\psi\cos n\psi d\psi = \frac{dC_n(a)}{da}. \end{gathered}$$

Тоді можемо записати:

$$B_2(a) = -\frac{1}{2\omega}\left(\frac{C_1(a)}{2\omega ma}\right)^2 + \\ +\frac{1}{2\omega mka}\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n(a)\frac{dC_n(a)}{da}}{n^2-1} - 2C_0(a)\frac{dC_0(a)}{da}\right\}. \tag{3.65}$$

Таким чином, в другому наближенні маємо

$$x_{II} = a\cos\psi - \frac{\varepsilon C_0(a)}{k} + \frac{\varepsilon}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n(a)\cos n\psi}{n^2-1}, \tag{3.66}$$

причому

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = 0, \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega_{II}(a), \end{cases} \tag{3.67}$$

де

$$\omega_{II}(a) = \omega + \frac{\varepsilon C_1(a)}{2\omega ma} - \frac{\varepsilon^2}{2\omega}\left(\frac{C_1(a)}{2\omega ma}\right)^2 + \\ +\frac{\varepsilon^2}{2\omega mka}\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n(a)\frac{dC_n(a)}{da}}{n^2-1} - 2C_0(a)\frac{dC_0(a)}{da}\right\}. \tag{3.68}$$

Ми бачимо, що і в другому наближенні амплітуда a не залежить від часу і зберігає будь-яке своє початкове значення. Фазовий кут ψ обертається з постійною швидкістю

$$\psi = \omega_{II}(a)t + \theta \quad (\theta = const).$$

Так як похибка формули (3.66) є величиною порядку ε^2, то, проводячи обрахунки з тією ж точністю, одержимо наступні вирази для максимального та мінімального відхилень

$$x_{IImax} = a - \frac{\varepsilon C_0(a)}{k} + \frac{\varepsilon}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n(a)}{n^2-1}, \\ x_{IImin} = -a - \frac{\varepsilon C_0(a)}{k} + \frac{\varepsilon}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n C_n(a)}{n^2-1} \tag{3.69}$$

Перетворимо формулу (3.68), яка визначає залежність частоти від амплітуди коливань. Підносячи обидві її частини до квадрату та утримуючи члени не вище другого порядку, одержимо

$$\omega_{II}^2 = \omega^2 + \frac{\varepsilon C_1(a)}{ma} + \\ + \frac{\varepsilon^2}{mka}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n(a)\frac{dC_n(a)}{da}}{n^2-1} - 2C_0(a)\frac{dC_0(a)}{da}\right). \tag{3.70}$$

Обмежуючись першим наближенням, одержимо

$$\omega_I^2 = \omega^2 + \frac{\varepsilon C_1(a)}{ma}. \tag{3.71}$$

Розглянемо тепер розклад Фур'є

$$p(a\cos\psi) = p_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(a)\cos n\psi \tag{3.72}$$

і помітимо, що згідно з (3.58) та (3.60) маємо

$$\begin{cases} p_n(a) = \varepsilon C_n(a) \quad (n = 0, 2, 3, 4, \ldots), \\ p_1(a) = ak + \varepsilon C_1(a). \end{cases} \tag{3.73}$$

Використовуючи (3.73), звільняємо формули (3.66), (3.69), (3.70), (3.71) від параметра ε, перебудувавши їх так, щоб в них входила лише відома функція $p(x)$. Остаточно перше наближення матиме вигляд

$$x_I = a\cos\psi, \\ \omega_I^2(a) = \frac{p_1(a)}{ma}. \tag{3.74}$$

Друге наближення —

$$x_{II} = a\cos\psi - \frac{p_0(a)}{k} + \frac{1}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p_n(a)\cos n\psi}{n^2-1},$$

$$\omega_{II}^2(a) = \omega_I^2(a) + \frac{1}{mka}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p_n(a)\frac{dp_n(a)}{da}}{n^2-1} - \qquad (3.75)$$

$$-2p_0(a)\frac{dp_0(a)}{da}\frac{1}{mka}.$$

В частинному випадку симетричних коливань, коли пружна характеристика системи $p(x)$ симетрична відносно початку координат: $p(x) = -p(-x)$, всі парні гармоніки в розкладі (3.72) зникають і формули (3.75) набувають вигляду

$$x_{II} = a\cos\psi + \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{2n+1}(a)\cos(2n+1)\psi}{(2n+1)^2-1},$$

$$\omega_{II}^2(a) = \omega_I^2(a) + \frac{1}{mka}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{2n+1}(a)\frac{dp_{2n+1}(a)}{da}}{(2n+1)^2-1}. \qquad (3.76)$$

Нарешті, звільняємося від параметра ε у виразах для максимального та мінімального відхилень. З (3.69) та (3.73) знаходимо

$$x_{IImax} = a - \frac{p_0(a)}{k} + \frac{1}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p_n(a)}{n^2-1},$$

$$x_{IImax} = -a - \frac{p_0(a)}{k} + \frac{1}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n p_n(a)}{n^2-1}. \qquad (3.77)$$

Вправа 3.3. Побудувати перше та друге наближення вільних коливань математичного маятника довжини l без врахування тертя:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin x = 0.$$

Вправа 3.4. Побудувати перше та друге наближення коливань системи, для якої характеристика відновлюючої пружної сили має вигляд

$\alpha x + \gamma x^3$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x + \gamma x^3 = 0.$$

§ 3.5. Випадок нелінійного тертя

Розглянемо рівняння вигляду

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = \varepsilon F\left(\frac{dx}{dt}\right), \tag{3.78}$$

яке можна інтерпретувати як рівняння коливань маси m, що знаходиться під дією лінійної пружної сили kx і нелінійного слабкого тертя $\varepsilon F\left(\frac{dx}{dt}\right)$, яке залежить від швидкості. Це рівняння належить до типу загального рівняння (3.25), причому тут

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{m}F\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Щоб скористатися формулами (3.46) – (3.52), що визначають шукані наближені розв'язки, розглянемо розклад

$$\frac{1}{m}F(a\cos\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a)\cos n\psi,$$

з якого одержимо

$$\frac{1}{m}F(-a\omega\sin\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a\omega)\cos n\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right). \tag{3.79}$$

Порівнюючи останній розклад з (3.41), знаходимо

$$g_n(a) = F_n(a\omega)\cos\frac{n\pi}{2}, \quad h_n(a) = -F_n(a\omega)\sin\frac{n\pi}{2}. \tag{3.80}$$

Тому згідно (3.42) маємо

$$A_1(a) = \frac{1}{2\omega}F_1(a\omega), \quad B_1(a) = 0. \tag{3.81}$$

Таким чином, враховуючи (3.47) і (3.48), одержимо перше наближення у вигляді:

$$\begin{cases} x = a\cos\psi, \\ \frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\omega}F_1(a\omega), \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \end{cases} \tag{3.82}$$

Звідси легко бачити, що для систем типу (3.78) в першому наближенні амплітуда коливання затухає згідно із законом, що виражається другим рівнянням з (3.82). Миттєва ж частота є сталою і рівна звичайній лінійній частоті ω, так що $\psi = \omega t + \theta$, де θ — початкове значення фази ψ. Таким чином, у першому наближенні коливання виявляються гармонічними зі сталою частотою ω.

Перейдемо до розгляду другого наближення. Згідно (3.52) та (3.80) знаходимо

$$u_1(a,\psi) = -\frac{1}{\omega^2}\sum_{n=0, n\neq 1}^{\infty}\frac{F_n(a\omega)\cos n(\psi+\pi/2)}{n^2-1}. \tag{3.83}$$

Далі з (3.54), (3.55), (3.81) та (3.83) одержуємо

$$\begin{gathered} A_2(a) = -\frac{A_1(a)}{2\omega\pi m}\int_0^{2\pi}F'(-a\omega\sin\psi)\cos\psi\sin\psi d\psi - \\ -\frac{1}{2\omega^2\pi m}\sum_{n=0, n\neq 1}^{\infty}\frac{nF_n(a\omega)}{n^2-1}\times \\ \times\int_0^{2\pi}F'(-a\omega\sin\psi)\sin n\left(\psi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\psi d\psi, \end{gathered} \tag{3.84}$$

$$
\begin{gathered}
B_2(a) = \frac{1}{2\omega}\frac{A_1(a)}{a}\frac{dA_1(a)}{da} - \\
-\frac{A_1(a)}{2\omega\pi am}\int_0^{2\pi} F'(-a\omega\sin\psi)\cos^2\psi d\psi - \\
-\frac{1}{2\omega^2\pi am}\sum_{n=0,n\neq 1}^{\infty}\frac{nF_n(a\omega)}{n^2-1}\times \\
\times\int_0^{2\pi} F'(-a\omega\sin\psi)\sin n\left(\psi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\psi d\psi.
\end{gathered} \tag{3.85}
$$

З іншого боку, замінюючи в інтегралах ψ на $\psi - \frac{\pi}{2}$ та інтегруючи частинами, одержимо

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{m}\int_0^{2\pi} F'(-a\omega\sin\psi)\sin n\left(\psi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\psi d\psi = \\
= \frac{1}{m}\int_0^{2\pi} F'(a\omega\cos\psi)\sin n\psi\sin\psi d\psi = \\
= -\frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\sin n\psi d\left[\frac{F(a\omega\cos\psi)}{a\omega}\right] = \\
= \frac{n}{a\omega m}\int_0^{2\pi} F(a\omega\cos\psi)\cos n\psi d\psi = \frac{n\pi}{a\omega}F_n(a\omega).
\end{gathered}
$$

Тому (3.84), (3.85) можна записати наступним чином

$$
\begin{gathered}
A_2(a) = 0, \\
B_2(a) = \frac{F_1(a\omega)}{8\omega^3 a}\frac{dF_1(a\omega)}{da} - \frac{F_1^2(a\omega)}{4\omega^3 a^2} - \\
-\frac{1}{2\omega^3 a^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2F_n^2(a\omega)}{n^2-1}.
\end{gathered} \tag{3.86}
$$

Зрештою, в розглядуваному випадку друге наближення матиме вигляд

$$
x = a\cos\psi - \frac{\varepsilon}{\omega^2} + \sum_{n=0,n\neq 1}^{\infty}\frac{F_n(a\omega)\cos n(\psi+\pi/2)}{n^2-1}, \tag{3.87}
$$

причому

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon F_1(a\omega)}{2\omega}, \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon^2 B_2(a), \end{cases} \tag{3.88}$$

де $B_2(a)$ визначається виразом (3.86).

Приклад. Розглянемо лінійне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{3.89}$$

з малим коефіцієнтом затухання $\lambda = \varepsilon v$.

▷ Для даного рівняння $F\left(\frac{dx}{dt}\right) = -v\frac{dx}{dt}$, і тому

$$F_1(a\omega) = -v\omega a, \quad F_n(a\omega) = 0 \quad (n = 0, 2, 3, \ldots).$$

Таким чином, згідно (3.86),(3.87) і (3.88) одержимо в другому наближенні

$$\begin{cases} x = a\cos\psi, \\ \frac{da}{dt} = -\frac{\lambda a}{2}, \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega\left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2\right]. \end{cases} \tag{3.90}$$

Як видно з (3.90), для закону затухання амплітуди одержуємо $a = a_0 e^{-\lambda t/2}$, а для частоти одержуємо наближену формулу

$$\omega_2 = \omega\left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2\right].$$

◀

Вправа 3.5. Знайти перше наближення коливань тіла, що знаходиться під дією кулонівського тертя

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = -A sign\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

§ 3.6. Автоколивні системи

Розглянемо коливну систему, що описується рівнянням вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(x)\frac{dx}{dt}, \tag{3.91}$$

яке є частинним випадком рівняння (3.25). Узгоджуючи рівняння (3.91) з (3.25) маємо

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = f(x)\frac{dx}{dt};$$

тому, для того, щоб скористатися формулами (3.46) – (3.52), необхідно розкласти в ряд Фур'є вираз $f(a\cos\psi)a\omega\sin\psi$. Для спрощення цієї операції розглянемо функцію

$$F^*(x) = \int_0^x f(x)dx \tag{3.92}$$

і розклад в ряд Фур'є

$$F^*(a\cos\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^*(a)\cos n\psi. \tag{3.93}$$

Диференціюючи (3.93) по ψ, на підставі (3.92) одержимо

$$f(a\cos\psi)a\omega\sin\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \omega n F_n^*(a)\sin n\psi. \tag{3.94}$$

Узгоджуючи (3.94) з (3.41) і (3.42), знаходимо

$$A_1(a) = \frac{1}{2}F_1^*(a), \quad B_1(a) = 0, \tag{3.95}$$

звідки в першому наближенні маємо

$$x = a\cos\psi,$$

де a і ψ повинні задовольняти рівнянням

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2}F_1^*(a), \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega. \end{cases} \tag{3.96}$$

Для побудови другого наближення можемо скористатися результатами попереднього параграфу. Виходячи з виразів (3.79), (3.83) – (3.86), (3.94) і враховуючи, що

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi)\cos\psi\sin\psi d\psi = 0,$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi)\cos^2\psi d\psi = \frac{dF_1^*(a)}{da},$$

можемо записати:

$$x = a\cos\psi + \frac{\varepsilon}{\omega}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nF_n^*(a)\sin n\psi}{n^2-1}, \tag{3.97}$$

де a і ψ визначаються рівняннями

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2}F_1^*(a), \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon^2 B_2(a), \end{cases} \tag{3.98}$$

а $B_2(a)$ має наступний вигляд:

$$B_2(a) = -\frac{1}{8a\omega}F_1^*(a)\frac{dF_1^*(a)}{da} - \frac{1}{2\omega a^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2F_n^{*2}(a)}{n^2-1}. \tag{3.99}$$

Співставляючи наближені розв'язки з розв'язками рівняння (3.78), знайденими в попередньому параграфі, впевнюємося в їх повній ідентичності.

Приклад. Розглянемо рівняння Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0. \tag{3.100}$$

▷ Зіставляючи (3.100) і (3.91), маємо

$$f(x) = 1 - x^2,$$

і тому

$$F^*(x) = x - \frac{x^3}{3},$$

після чого знаходимо розклад (3.93) для нашого випадку

$$F^*(a\cos\psi) = s\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\cos\psi - \frac{a^3}{12}\cos 2\psi,$$

згідно якого одержимо

$$\begin{cases} F_1^*(a) = a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right), \\ F_3^*(a) = \frac{a^3}{12}, \\ F_n^*(a) = 0, \quad \text{якщо} \quad n \neq 1,\ n \neq 3. \end{cases} \tag{3.101}$$

Таким чином, враховуючи (3.96), в першому наближенні маємо

$$x = a\cos\psi, \tag{3.102}$$

де a і ψ мають бути визначеними із системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right), \\ \frac{d\psi}{dt} = 1. \end{cases} \tag{3.103}$$

Отже, в першому наближенні одержуємо гармонічне коливання зі сталою частотою $\omega = 1$, амплітуда якого змінюється у відповідності до першого диференціального рівняння з системи (3.103). Щоб знайти у явному вигляді закон залежності амплітуди коливань від часу, необхідно розв'язати це рівняння. Домноживши обидві його частини на a, маємо

$$\frac{da^2}{dt} = \varepsilon\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)a^2, \tag{3.104}$$

звідки

$$\frac{da^2}{\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)a^2} = \varepsilon dt,$$

або

$$\frac{da^2}{4 - a^2} + \frac{da^2}{a^2} = \varepsilon dt,$$

що дає

$$\ln\frac{a^2}{4-a^2}=\ln\frac{a_0^2}{4-a_0^2}+\varepsilon t, \tag{3.105}$$

де a_0 — початкове значення амплітуди.

З (3.105) остаточно знаходимо

$$a=\frac{a_0e^{\frac{\varepsilon t}{2}}}{\sqrt{1+a_0^2\frac{e^{\varepsilon t}-1}{4}}}. \tag{3.106}$$

Підставивши (3.106) в (3.102), маємо вираз для першого наближення в явному вигляді

$$a=\frac{a_0e^{\frac{\varepsilon t}{2}}}{\sqrt{1+a_0^2\frac{e^{\varepsilon t}-1}{4}}}\cos(\omega t+\theta). \tag{3.107}$$

◄

Як видно з (3.107), якщо початкове значення амплітуди a_0 рівне 0, то амплітуда залишиться нульовою для будь-якого t, і ми одержимо $x=0$, тобто тривіальний розв'язок рівняння Ван-дер-Поля. Цей тривіальний розв'язок відповідає статичному режиму, тобто відсутності коливань в системі.

Однак, виходячи з цієї ж формули, неважко побачити, що цей статичний режим нестійкий. Дійсно, яким би малим не було початкове значення амплітуди, воно буде монотонно зростати, наближаючись до граничного значення, рівного 2. Таким чином, оскільки випадкові малі поштовхи практично невідворотні, у розглядуваній коливній системі, яка знаходиться у стані спокою, автоматично збуджуються коливання з наростаючою амплітудою, тобто система самозбуджується.

З (3.106) також зауважуємо, що якщо $a_0=2$, то $a=2$ для довільних $t\geq 0$. Цей розв'язок відповідає стаціонарному динамічному режиму:

$$x=2\cos(t+\theta). \tag{3.108}$$

На відміну від статичного, динамічний режим володіє сильною стійкістю, яка полягає в тому, що яке б не було значення $a_0 \neq 0$, мале чи велике, все рівно $a(t) \to 2$ при $t \to \infty$. Іншими словами, всяке коливання при збільшенні t наближається до стаціонарного коливання (3.108).

Зауважимо, що тільки в першому наближенні можна представити стаціонарний режим (3.108) як гармонічне коливання з частотою $\omega = 1$ і амплітудою, рівною 2. В дійсності ж стаціонарний режим не гармонічний.

Приклад. Побудуємо друге наближення для рівняння Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

▷ Згідно (3.97), (3.98) і (3.101) знаходимо

$$x = a\cos\psi - \frac{\varepsilon a^3}{32}\sin 3\psi, \tag{3.109}$$

де a і ψ повинні визначатися із рівнянь

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right), \\ \frac{d\psi}{dt} = 1 - \varepsilon^2\left(\frac{1}{8} - \frac{a^2}{8} + \frac{7a^4}{256}\right). \end{cases} \tag{3.110}$$

Для стаціонарних коливань в другому наближенні одержимо

$$x = 2\cos(\omega t + \theta) - \frac{\varepsilon}{4}\sin 3(\omega t + \theta), \tag{3.111}$$

причому

$$\omega = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}.$$

◀

На розглянутому простому прикладі коливної самозбуджуваної системи, що описуються рівнянням Ван-дер-Поля, зауважуємо корінну відмінність цієї системи від коливних консервативних систем, що описуються рівнянням виду (3.57).

Саме в консервативних коливних системах можливі коливання з довільною сталою амплітудою. В автоколивних системах коливання зі сталою амплітудою можливі лише при деякому визначеному її значенні. Фізично це зрозуміло із наступних міркувань. Оскільки у цій системі немає ні розсіювання, ні джерела енергії, то коливання не можуть ні зростати, ні затухати, і їх амплітуда залишається рівною початковому її значенню.

У самозбуджуваних системах наявне розсіювання енергії та її джерело. Тому амплітуда коливань буде зростати, якщо притік енергії від джерела перевищує енергію, що розсіюється дисипативними силами. Навпаки, якщо кількість енергії, що надходить від джерела, менша за кількість розсіюваної енергії, коливання будуть затухати.

Стале значення амплітуди буде зберігатися лише у випадку, коли обидві згадані кількості енергії врівноважують одна одну.

§ 3.7. Метод усереднення

Асимптотичні методи, запропоновані М. М. Криловим та М. М. Боголюбовим, стали практично зручним і строго математично обґрунтованим інструментом дослідження коливних процесів з широким спектром застосувань. При одержанні рівнянь перших наближень, вони виявили глибокий зв'язок асимптотичного алгоритму з методом усереднення в небесній механіці та показали, що рівняння першого наближення одержуються з точних шляхом їх усереднення по часу і сформулювали це у вигляді загального принципу, назвавши його *принципом усереднення.*

Нехай функція $X(t, x, \lambda)$ визначена в області $\Omega = \{[0, T] \times \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \times \Lambda\}$, $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$.

Означення 3.1. *Вектор-функція $X(t, x, \lambda)$ називається* ***інтегрально неперервною*** *в Ω по параметру λ в точці λ_0, якщо $\forall t \in [0, T]$, $\forall x \in \mathbb{D}$ виконується*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_0^t X(\tau, x, \lambda) d\tau = \int_0^t X(\tau, x, \lambda_0) d\tau. \tag{3.112}$$

Зауваження. Інтегральна неперервність не еквівалентна звичайній неперервності.

Приклад. Розглянемо функцію

$$X(t, \lambda) = \begin{cases} \sin \frac{t}{\lambda}, \ \lambda \neq 0 \\ 0, \ \lambda = 0 \end{cases}.$$

$\triangleright$ Ця функція не є в області $\{0 \leq t \leq T, -\infty < \lambda < \infty\}$ неперервною по λ при $\lambda = 0$. Проте ця функція є інтегрально неперервною по λ при $\lambda = 0$, оскільки для кожного відрізку $[0, t] \subset [0, T]$ маємо

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_0^t X(\tau, \lambda) d\tau = \lim_{\lambda \to 0} \int_0^t \sin \frac{\tau}{\lambda} d\tau =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \lambda \left(1 - \cos \frac{t}{\lambda}\right) = 0 = \int_0^t X(\tau, \lambda_0) d\tau.$$

◀

Теорема 3.1 (Красносельського-Крейна). *Нехай виконуються умови:*

1) $X(\cdot, x, \lambda) \in C([0, T])$ $\forall x$, $\forall \lambda$;
2) $X(t, \cdot, \lambda) \in C(\mathbb{D})$ *рівномірно по* $(t, \lambda) \in [0, T] \times \Lambda$, *тобто* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ *таке, що для* $\forall t \in [0, T]$,

$\forall \lambda \in \Lambda$ таких, що $\|y-y'\| < \delta$ справедливо $\|X(t,y,\lambda) - X(t,y',\lambda)\| < \varepsilon$;

3) *$X(t,x,\lambda)$ – інтегрально неперервна в Ω по параметру λ в точці $\lambda_0 \in \Lambda$.*

Тоді, якщо $x_\lambda(t) = x(t,\lambda) \in KC([0,T])$, $x_\lambda(t) \in \mathbb{D}$ $\forall t \in [0,T]$, $\forall \lambda \in \Lambda$ і

$$\max_{t\in[0,T]} \|x_\lambda(t) - x_{\lambda_0}(t)\| \to 0, \quad \lambda \to \lambda_0, \tag{3.113}$$

то

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_0^t X(\tau, x_\lambda(\tau), \lambda)d\tau = \int_0^t X(\tau, x_{\lambda_0}(\tau), \lambda_0)d\tau, \quad (0 \le t \le T). \tag{3.114}$$

$\triangleright$ 1) Доведемо справедливість (3.112) для довільної кусково-сталої вектор-функції $x = \hat{x}(\tau)$, $\hat{x}(\tau) = x_k \equiv \text{const}$ при $t_{k-1} < \tau \le t_k$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, $x_n \in \mathbb{D}$.

Дійсно, для $t \in (t_k, t_{k+1}]$ маємо:

$$\int_0^t X(\tau,\hat{x}(\tau),\lambda)d\tau = \sum_{m=1}^{k} \int_{t_{m-1}}^{t_m} X(\tau,x_m,\lambda)d\tau + \int_{t_k}^{t} X(\tau,x_{k+1},\lambda)d\tau =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \left[\int_0^{t_m} X(\tau,x_m,\lambda)d\tau - \int_0^{t_{m-1}} X(\tau,x_m,\lambda)d\tau \right] +$$

$$+ \left[\int_0^{t} X(\tau,x_{k+1},\lambda)d\tau - \int_0^{t_k} X(\tau,x_{k+1},\lambda)d\tau \right].$$

В силу (3.112) при $\lambda \to \lambda_0$ маємо:

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_0^t X(\tau,\hat{x}(\tau),\lambda)d\tau =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \left[\int_0^{t_m} X(\tau,x_m,\lambda_0)d\tau - \int_0^{t_{m-1}} X(\tau,x_m,\lambda_0)d\tau \right] +$$

$$+\int\limits_0^t X(\tau, x_{k+1}\lambda_0)d\tau - \int\limits_0^{t_k} X(\tau, x_{k+1}, \lambda_0)d\tau = \int\limits_0^t X(\tau, \hat{x}(\tau), \lambda_0)d\tau.$$

2) Тепер нехай $\{x_\lambda(t)\}$ задовольняє (3.113), $\varepsilon > 0$ – фіксоване. Виберемо $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$. Так як $X(t, x, \lambda)$ рівномірно неперервна по x, то $\exists\delta > 0$: $\forall t \in [0, T]$, $\forall\lambda \in \Lambda$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ таких, що $\|x_1 - x_2\| < \delta$ виконується

$$\|X(t, x_1, \lambda) - X(t, x_2, \lambda)\| < \varepsilon_1.$$

В силу (3.113) $\exists O(\lambda_0)$: $\forall t \in [0, T]$ $\forall\lambda \in O(\lambda_0)$

$$\|x_\lambda(t) - x_{\lambda_0}(t)\| < \delta.$$

Оскільки $x_{\lambda_0} \in KC([0, T])$, то існує кусково-стала функція $\hat{x}(t)$ така, що $\forall t \in [0, T]$ $\|x_{\lambda_0}(t) - \hat{x}(t)\| < \delta$. Тоді для $t \in [0, T]$

$$I = \left\| \int\limits_0^t X(\tau, x_\lambda(\tau), \lambda)d\tau - \int\limits_0^t X(\tau, x_{\lambda_0}(\tau), \lambda_0)d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \int\limits_0 \|X(\tau, x_\lambda(\tau), \lambda) - X(\tau, x_{\lambda_0}(\tau), \lambda)\|d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \|X(\tau, x_{\lambda_0}(\tau), \lambda) - X(\tau, \hat{x}(\tau), \lambda)\|d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \|X(\tau, \hat{x}(\tau), \lambda) - X(\tau, \hat{x}(\tau), \lambda_0)\|d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \|X(\tau, \hat{x}(\tau), \lambda_0) - X(\tau, x_{\lambda_0}(\tau), \lambda_0)\|d\tau = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

В силу пункту 1) при $t \in [0, T]$ $\exists O(\lambda_0, t)$ такий, що $I_3 < \varepsilon_1$ $\forall\lambda \in O(\lambda_0, t)$.

В силу умови 2) $I_1 < \varepsilon_1 t \leq \varepsilon_1 T$, $I_2 < \varepsilon_1 t \leq \varepsilon_1 T$, $I_4 < \varepsilon_1 t \leq \varepsilon_1 T$. Отже, $I < \varepsilon_1(1 + 3T) < \varepsilon$.

Для довільного $\lambda \in O(\lambda_0, t)$ маємо

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_0^t X(\tau, x_\lambda(\tau), \lambda)d\tau = \int_0^t X(\tau, x_{\lambda_0}(\tau), \lambda_0)d\tau.$$

◀

Приклад. Доведемо, що для $x(\cdot) \in C([0,T])$ для $\forall\varepsilon > 0$ існує кусково-стала функція $\hat{x}(t)$ така, що $\forall t \in [0,T]$ $|x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon$.
▷ Дійсно, нехай $x(\cdot) \in C([0,T])$, тому x – рівномірно неперервна, тобто $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ $\forall|u - v| < \delta$: $|x(u) - x(v)| < \varepsilon$. Нехай $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n = T$, причому $|t_{i+1} - t_i| = \frac{\delta}{2}$, звідки $\forall t \in (t_i, t_{i+1}]$ $|x(t) - x(t_{i+1})| < \varepsilon$. Покладемо $\hat{x}(t) = x(t_{i+1})$, $t \in (t_i, t_{i+1}]$. Тоді $\forall t \in [0,T]$ $|x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon$. ◀

Нехай в області $\Omega = \{(-\infty, +\infty) \times \mathbb{D}\}$ визначена нелінійна система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \tag{3.115}$$

що залежить від малого додатного параметра ε, де X – неперервна по t, ліпшицева по x і $\sup\limits_{(t,x)\in\Omega} \|X(t,x)\| \le M$.

Теорема 3.2 (Перша теорема Боголюбова). *Нехай*

1) *для кожного $x \in \mathbb{D}$ існує рівномірна по x границя*

$$Y(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_0^N X(t, x)dt \in C(\mathbb{D}); \tag{3.116}$$

2) *усереднене рівняння*

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon Y(y) \tag{3.117}$$

для $\forall x_0 \in \mathbb{D}$ має єдиний розв'язок $y = y(t, \varepsilon) \in \mathbb{D}$, $y(0, \varepsilon) = x_0$, визначений при $\varepsilon = 1$ на проміжку $[0, T_1]$.

Тоді $\forall \eta > 0$ $\exists \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$ *таке, що для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *довільний розв'язок* $x = x(t, \varepsilon)$ *рівняння (3.115) і довільний розв'язок* $y = y(t, \varepsilon)$ *усередненого рівняння (3.117) з однаковими початковими умовами* $x(0, \varepsilon) = y(0, \varepsilon) = x_0$ *задовольняють нерівність:*

$$\|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\| < \eta \quad \forall t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right], \quad 0 < T \le T_1. \qquad (3.118)$$

Зауваження. Очевидно, що якщо $X(\cdot, x)$ є T-періодичною, то виконується (3.116). Якщо $X(\cdot, x)$ є майже періодичною, то теж виконується (3.116).

$\triangleright$ Нехай x_0 – початкова точка, $x_0 \in \mathbb{D}$, тобто $\rho = \operatorname{dist}(x_0, \partial \mathbb{D}) > 0$. Тоді за теоремою Пікара розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$ системи (3.115) з початковою умовою $x(0, \varepsilon) = x_0$ буде визначеним на проміжку $\left[0, \frac{\rho}{\sqrt{n} M \varepsilon}\right]$ (тут $\frac{\rho}{\sqrt{n}}$ – довжина сторони n-мірного куба, вписаного в кулю радіуса ρ в $\mathbb{R}^n$). Покладемо

$$T = \min\left\{T_1, \frac{\rho}{M\sqrt{n}}\right\}.$$

Введемо "повільну змінну" $\tau = \varepsilon t$. Тоді

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \varepsilon X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon} = X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x\right) \equiv Y(\tau, x, \varepsilon) \qquad (3.119)$$

і

$$\frac{dy}{d\tau} = Y(y). \qquad (3.120)$$

Якщо покласти $Y(t, x, 0) = Y(x)$, то функція $Y(t, x, \varepsilon)$ буде інтегрально неперервною в Ω по ε в точці $\varepsilon = 0$. Дійсно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^t Y(\tau, x, \varepsilon) d\tau = \lim \int_0^t X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x\right) d\tau =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} X(\theta, x) d\theta = t \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\frac{t}{\varepsilon}} \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} X(\theta, x) d\theta =$$

$$= tY(x) = \int\limits_0^t Y(\tau, x, 0) d\tau.$$

Записуючи рівняння (3.119), (3.120) в інтегральній формі, одержимо

$$x(\tau, \varepsilon) = x_0 + \int\limits_0^\tau Y(\theta, x(\theta, \varepsilon), \varepsilon) d\theta, \qquad (3.121)$$

$$y(\tau) = x_0 + \int\limits_0^\tau Y(y(\theta)) d\theta.$$

Покладаючи $x(\tau, 0) \equiv y(\tau)$, маємо, що (3.121) виконується при $\varepsilon \geq 0$ і $\tau \in [0, T]$.

Розглянемо сімейство розв'язків $\{x(\tau, \varepsilon)\}$, де $0 \leq \tau \leq T$ і $\varepsilon > 0$. Це сімейство рівномірно обмежено на $[0, T]$, так як в силу (3.121) маємо:

$$\|x(\tau, \varepsilon)\| \leq \|x_0\| + \int\limits_0^\tau \|Y(\theta, x(\theta, \varepsilon), \varepsilon)\| d\theta \leq \|x_0\| + MT.$$

Враховуючи, що $\left\| \frac{dx(\tau,\varepsilon)}{d\tau} \right\| \leq M$, робимо висновок про рівностепеневу неперервність сімейства $\{x(\tau, \varepsilon)\}$.

Тоді, за теоремою Арцела, з кожної послідовності $x(\tau, \varepsilon_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, де $\varepsilon_k \to 0$, можна виділити рівномірно збіжну на $[0, T]$ підпослідовність

$$x(\tau, \varepsilon_{p_k}) \rightrightarrows \tilde{y}(\tau) \quad (\tau \in [0, T]) \quad \text{при} \quad \varepsilon_k \to 0. \qquad (3.122)$$

Звідки

$$x(\tau, \varepsilon_k) = x_0 + \int\limits_0^\tau Y(\theta, x(\theta, \varepsilon_k), \varepsilon_k) d\theta \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Переходячи до границі при $k \to \infty$ в цій рівності та використовуючи теорему Красносельського-Крейна, одержимо

$$\tilde{y}(\tau) = x_0 + \int_0^\tau Y(\theta, \tilde{y}(\theta), 0) d\theta =$$

$$= x_0 + \int_0^\tau Y(\tilde{y}(\theta)) d\theta, \quad \tau \in [0, T].$$

Звідки

$$\frac{dy}{d\tau} = Y(\tilde{y}(\tau))$$

і $\tilde{y}(0) = x_0$. Оскільки усереднене рівняння (3.117) в силу умов теореми при $0 \leq \tau \leq T$ має єдиний розв'язок $y(\tau)$, що задовольняє початковій умові $y(0) = x_0$, то

$$\tilde{y}(\theta) \equiv y(\theta) \quad \text{при} \quad 0 \leq \tau \leq T.$$

Тому з довільної послідовності $x(\tau, \varepsilon_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, де $\varepsilon_k \to 0$ можна вибрати підпослідовність $x(\tau, \varepsilon_{p_k})$ $(k = 1, 2, \ldots)$, яка рівномірно збігається на $[0, T]$ до однієї й тієї ж граничної вектор-функції $y(\tau)$. Звідси слідує, що сімейство розв'язків $x(\tau, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ рівномірно на $[0, T]$ збігається до розв'язку $y(\tau)$ усередненого рівняння (3.117), тобто

$$\|x(\tau, \varepsilon) - y(\tau)\| < \eta \quad \text{при} \quad \tau \in [0, T], \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0(\eta)) \, .$$

Повертаючись до старої змінної t, остаточно одержимо

$$\|x(\tau, \varepsilon) - y(t)\| < \eta \quad \text{при} \quad \tau \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right], \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0(\eta)) \, ,$$

що й потрібно було довести. ◀

Друга теорема М. М. Боголюбова встановлює відповідність між положенням рівноваги $y = y_0$ усередненого рівняння та обмеженим на всій дійсній осі $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ розв'язком точного рівняння (3.115).

Теорема 3.3 (Друга теорема Боголюбова). *Нехай виконуються наступні умови:*

1) *рівняння*

$$\frac{dy}{d\tau} = Y(y), \quad (\tau = \varepsilon t)$$

має сталий розв'язок $y = y_0$*;*

2) *дійсні частини всіх* n *власних чисел матриці*

$$H = \frac{\partial Y(y_0)}{\partial y}$$

відмінні від нуля;

3) *можна знайти такий* ρ*-окіл* D_ρ *точки* y_0*, що функція* $X(t, x)$ *і її частинні похідні першого порядку по* x_k *обмежені і рівномірно неперервні по* x *в області*

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in D_\rho;$$

4) *в кожній точці* D_ρ

$$\frac{1}{N}\int\limits_t^{t+N} X(t, x)dt \to Y(x)$$

рівномірно по t *в інтервалі* $(-\infty, \infty)$*.*

Тоді можна вказати такі додатні $\varepsilon_0, \sigma_0, \sigma_1$ *(причому* $\sigma_0 \le \sigma_1 < \rho$*), що для кожного додатного* $\varepsilon < \varepsilon_0$*, рівняння (3.115) має єдиний розв'язок* $x = x^*(t)$*, визначений на інтервалі* $(-\infty, \infty)$*, для якого*

$$|x^*(t) - y_0| < \sigma_0, \quad -\infty < t < \infty.$$

Цей розв'язок при довільному ε *такому, що* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*, має наступні властивості*

1) *Можна знайти таку функцію* $\delta(\varepsilon)$*, що прямує до до нуля разом із* ε*, що*

$$|x^*(t) - y_0| \le \delta(\varepsilon).$$

2) *Якщо* $\{\tau_m\}$ *— послідовність дійсних чисел, для якої*

$$X(t+\tau_m, x) - X(t, x) \to 0, \quad m \to \infty,$$

рівномірно по (t, x), $\{-\infty < t < \infty, x \in D_\rho\}$, *то рівномірно по* t

$$x^*(t+\tau_m) - x^*(t) \to 0, \quad m \to \infty.$$

3) *Нехай* $x = x(t)$ *— довільний розв'язок рівняння (3.115), який задовольняє при деякому* t_0 *нерівності*

$$|x(t_0) - y_0| < \sigma_0.$$

Тоді, якщо дійсні частини всіх власних чисел від'ємні, то відстань $|x(t) - x^*(t)|$ *експоненційно прямує до нуля при* $t \to +\infty$.

Якщо дійсні частини всіх власних чисел додатні, то можна знайти таке $t_1 > t_0$, *що*

$$|x(t_1) - y_0| > \sigma_1. \tag{3.123}$$

Якщо s *дійсних частин розглядуваних власних чисел від'ємні, а інші* $n-s$ *додатні, то в області* D_{σ_0} *існує* s*-мірний многовид* $\mathfrak{M}_{t_0}$ *такий, що із співвідношення* $x(t_0) \in \mathfrak{M}_{t_0}$ *випливає експоненційне прямування до нуля при* $t \to +\infty$ *відстані* $|x^*(t) - x(t)$, *а з співвідношення* $x(t_0) \notin \mathfrak{M}_{t_0}$ *випливає справедливість нерівності (3.123).*

Вказівки до вправ

Вправа 1.1. За означенням (можна спочатку намалювати графіки інтегральних кривих).

Вправа 1.2. За означенням (можна спочатку намалювати графіки інтегральних кривих)

Вправа 1.3. Знайти явний вигляд розв'язку задачі Коші (проінтегрувавши спочатку 2-е, потім 1-е рівняння системи) і провести дослідження за означенням.

Вправа 1.4. Використати теорему про стійкість за 1-им наближенням

Вправа 1.5. Використати 1-й інтеграл $\psi = y^2 + z^2$.

Вправа 1.6. Використати теорему Ляпунова про стійкість для функції $V(x, y) = A(x) + B(y)$.

Вправа 1.7. Використати 1-й інтеграл $\psi = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos x$.

Вправа 1.8. Показати, що функція $\Psi = \frac{y^2}{2} + \int\limits_0^x f(t)dt$ є знакосталим 1-им інтегралом системи.

Вправа 1.9. При $bc < 0$ використати 1-ий інтеграл лінеаризованої системи $V = by^2 - cx^2$.

Вправа 1.10. Звести до системи, скористатись теоремою про стійкість лінійної системи з майже сталою матрицею та симетричністю рівняння відносно заміни незалежної змінної t на $-t$.

Вправа 1.11. Звести до системи та скористатись теоремою про стійкість лінійної системи з майже сталою матрицею.

Вправа 1.12. Звести до однорідної системи та скористатись теоремою про асимптотичну стійкість лінійної системи з майже сталою матрицею.

Вправа 1.13. За допомогою часткового розв'язку

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t-\frac{1}{t}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

звести до однорідної системи та застосувати теорему про асимптотичну стійкість лінійної системи з майже сталою матрицею.

Вправа 1.14. Записати формулу розв'язку задачі Коші та використати доведення теореми про асимптотичну стійкість системи з майже сталою матрицею.

Вправа 1.15. Показати виконанння умов теореми Лаппо - Данилевського.

Вправа 1.16. Проаналізувати розв'язки задачі Коші.

Вправа 1.17. Система асимптотично еквівалентна системі

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

Вправа 1.18. Скористатись теоремою Левінсона.

Вправа 1.19. Скористатись теоремою Левінсона.

Вправа 1.20. За допомогою часткового розв'язку

$$x(t) = e^{-t}, \quad y(t) = \frac{2}{3}e^{-t}$$

звести до однорідної системи і скористатись теоремою Левінсона.

Вправа 1.21. Звести до канонічного вигляду, скористатись теоремою Кнезера та теоремою про асимптотичне інтегрування.

Вправа 1.22–1.24. Показати, що система є L-діагональною та скористатись теоремою.

Вправа 1.25. За допомогою часткового розв'язку

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

звести до лінійної однорідної системи, для якої дослідити слід матриці і застосувати відповідну теорему.

Вправа 1.26. Знайти загальний розв'язок та скористатись знакосталістю коефіцієнтів системи.

Вправа 1.27. Скористатись теоремою про експоненційну оцінку.

Вправа 2.1. а) Скористатись теоремою про нестійкість ЛОР 2-го порядку; б) Скористатись теоремою про середнє.

Вправа 2.2. Скористатись ознакою Ляпунова стійкості ЛОР 2-го порядку.

Вправа 2.3. Скористатись ознакою Ляпунова.

Вправа 2.4. Скористатись тим, що $(x(t), \xi(t)) \equiv const$.

Вправа 2.5. Існування і єдиність випливають з теореми, знаходження грунтується на формулі розв'язку задачі Коші.

Вправа 2.6. Скористатись формулою розв'язку задачі Коші.

Вправа 2.7. Вказівка: розглянути рівняння $y'' + y = \sin\sqrt{3}t$.

Вправа 2.8. Скористатись теоремою про періодичний розв'язок ЛНС, далі знайти загальний розв'язок.

Вправа 2.9. скористатись теоремою про метод малого параметру Пуанкаре. Для знаходження границі розв'язати породжуючу систему.

Вправа 2.11. Використати формулу (2.24).

Вправа 2.12. Використати формулу (2.24) і довести, що єдиний обмежений розв'язок є ω-періодичним.

Вправа 2.13. Скористатись попередньою вправою і формулою (2.24).

Вправа 2.14. Скористатись теоремою Боля.

Вправа 2.16. Скористатись попередньою вправою і теоремою Боля.

Вправа 2.17. Використати теорему Бохнера.

Вправа 2.18. Скористатись доведенням теореми Бора-Нейгебауера.

Вправа 2.19. Довести існування єдиного обмеженого розв'язку.

Вправа 2.20. Скористатись теоремою Бора-Нейгебауера.

Вправа 2.21. Скористатись теоремою Бірюк.

Вправа 3.2. В першому наближенні розв'язок рівняння (3.56) матиме вигляд $x = a\cos\psi$, де a і ψ визначаються із системи першого наближення

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda}{2}a,$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 - \frac{a^2}{16}\right).$$

Вправа 3.3. В даному рівнянні

$$p(x) = \frac{g}{l}\sin x$$

і розклад (3.72) матиме вигляд

$$p(a\cos\psi) = \frac{g}{l}2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(a)\cos{(2n+1)\psi},$$

де $J_k(a)$ — функція Бесселя.

Вправа 3.4. Розклад (3.72) матиме вигляд

$$p(a\cos\psi) = \left(\alpha a + \frac{3}{4}\gamma a^3\right)\cos\psi + \frac{\gamma a^3}{4}\cos 3\psi.$$

Далі використати формули (3.74) і (3.76).

Вправа 3.5. Обчислити інтеграл

$$\varepsilon\int_0^{2\pi} F(a\omega\cos\psi)\cos\psi d\psi,$$

враховуючи, що

$$\frac{\varepsilon}{m}F\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{A}{m}sign\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Далі записати систему типу (3.82) та проінтегрувати її.

Література

1. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
3. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
5. *Еругин Н.П., Штокало И.З., Бондаренко П.С.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — К.: Вища школа, 1974.
6. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М., Изд-во иностр. лит., 1958.
7. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. — Изд-во АН УССР, 1937.
8. *Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф.* Диференціальні рівняння. — К.: Вища школа, 1981.
9. *Митропольский Ю.А.* Нелинейная механика. Асимптотические методы. — К.:Институт математики, 1995.
10. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.:ГИТТЛ, 1949.
11. *Парасюк І.О.* Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь. — К.:ВПЦ "Київський університет 2005.
12. *Парасюк І.О., Перестюк М.О.* Локальний аналіз нелінійних диференціальних рівнянь. — К-П.:Аксіома, 2013.
13. *Перестюк М.О., Чернікова О.С.* Теорія стійкості. - К.: ВПЦ "Київський університет 2009.
14. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. - М.: Наука, 1964.
15. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1974.
16. *Самойленко А.М.* Н. Н. Боголюбов и нелинейная механика // Успехи математических наук. — 1994. — т. 49, вып. 5(299). — С. 103–146.
17. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. — М.: Наука, 1987.

18. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К.: Вища школа, 1987.
19. *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння. — К.: Либідь, 2003.
20. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О.* Диференціальні рівняння в задачах. — К.: Либідь, 2003.
21. *Самойленко А.М., Станжицький О.М.* Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями. — К.: Наукова думка, 2009.
22. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
23. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.

Покажчик