XXIII Всеукраїнська заочна математична олімпіада “5–12”

В олімпіаді може взяти участь кожен учень 5 – 12 класів. Наполегливо радимо потренуватися та випробувати свої здібності всім претендентам на участь в обласних та Всеукраїнській олімпіадах, а також відбіркових змаганнях на Міжнародну математичну олімпіаду.

Розв’язання задач слід надсилати до 25 лютого 2019 року (за поштовим штемпелем) на адресу

`01601 МСП, Київ,`
`Київський національний університет ім. Тараса Шевченка`
`механіко-математичний факультет`
`кафедра математичного аналізу`
`‘‘Олімпіада 5-12’’`

або у відсканованому вигляді на електронну адресу `olymp5-12@ukr.net`.

Підсумки олімпіади буде підведено наприкінці березня на сайтах

`http://www.mechmat.univ.kiev.ua` та `http://matholymp.com.ua` .

Умови задач

1. Петрик вирішив купити у кіоску літровий пакет яблучного соку, але у продажу були лише півлітрові пакети за ціною 15 грн та двохлітрові пакети за ціною 36 грн. Петрик вважає, що ціна пакета є сумою ціни упаковки та ціни напою, а ціна упаковки не залежить від об’єму. Якою на думку Петрика має бути ціна літрового пакета соку?

2. Прямокутник розміру 5×11 розрізали по лініях клітинок на дві однакові фігури, з яких можна скласти квадрат, та деяку кількість окремих клітинок. Яка найменша кількість окремих клітинок могла утворитися?

3. Чи існують такі натуральні числа a та b, що сума остач від ділення чисел a, a^2 та a^3 на b дорівнює 2019?

4. Двоє гравців по черзі заповнюють клітинки таблиці 3×3 різними числами від 1 до 9 (і числа, і клітинки можна обирати у довільному порядку). Коли таблиця заповнена, перший гравець отримує 1 бал за кожен рядок або стовпчик, у якому середнє число є більшим за обидва крайні, а другий гравець — за кожен рядок або стовпчик, у якому середнє число є меншим за обидва крайні. Виграє гравець, що отримав більшу кількість балів. При рівності балів оголошується нічия. Чи має хтось з гравців виграшну стратегію? Якщо має, то хто?

5. У п’яти вазонах квітнуть червоні та блакитні кручені паничі. Чи обов’язково знайдуться три вазони, у яких росте не менше половини від загальної кількості червоних квіток та не менше половини від загальної кількості блакитних квіток?

6. Нехай AD та AE — висота та медіана трикутника ABC, у якому $\angle B = 2\angle C$. Довести, що $AB = 2DE$.
7. На дошці записано 300 чисел: $71, 711, 7111, \ldots$ (у записі кожного наступного числа на одну одиницю більше, ніж у записі попереднього). Довести, що серед цих чисел не більше 50 простих.
8. Про числа $a, b, c > 0$ відомо, що $a \geq bc^2$, $b \geq ca^2$ та $c \geq ab^2$. Довести нерівність

$$abc(a - bc^2)(b - ca^2)(c - ab^2) \leq \frac{1}{64}.$$

9. Нехай ABC — гострокутний трикутник, у якому $AB < AC$. На стороні BC відмітили таку точку D, що $AD = AB$, а на стороні AB — таку точку E, що відрізок DE проходить через ортоцентр трикутника ABC. Довести, що центр описаного кола трикутника ADE належить прямій AC.
10. Знайти всі трійки дійсних чисел (x, y, z) такі, що $x + y + z = 1$ та

$$2017(x + yz) = 2018(y + xz) = 2019(z + xy).$$

11. Чи можна розташувати на площині 5 кіл радіуса 12 та 12 кіл радіуса 5 так, аби кожне маленьке коло дотикалося до одного маленького та двох великих кіл?
12. Андрій, Борис, Віктор, Гліб та Дмитро по черзі працювали над файлом на комп'ютері. Вони домовились, що кожен відредагує файл один раз. Відомо, що за час роботи розмір файла збільшився з 0 до 100 рядків. Ось що колеги розповіли про свою роботу:

Андрій: Я подвоїв кількість рядків, а потім додав ще 5 рядків.
Борис: Я потроїв кількість рядків, а потім додав ще 15 рядків.
Віктор: Я спочатку видалив 10 рядків, а потім потроїв кількість рядків.
Гліб: Я збільшив кількість рядків у чотири рази, а потім видалив 20 рядків.
Дмитро: Я дописав 35 рядків, а потім видалив половину рядків.

Згодом з'ясувалося, що один з них збрехав і взагалі нічого не робив, а решта сказали правду. Хто брехун? У якому порядку редагували файл?