КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

НАВЧАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

для студентів спеціальності "механіка"
механіко–математичного факультету

(II семестр другого курсу)

2014

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів спеціальності "механіка"механіко–математичного факультету (2 семестр другого курсу) / Упорядн. М. О. Назаренко, Т. О. Петрова, А. В. Чайковський, І. О. Шевчук. – Електронне видання.– 2014. – 100 с.

Рецензенти

А. С. Романюк, доктор фізико–математичних наук, професор

Ю. Ю. Трохимчук, доктор фізико–математичних наук, професор

Рекомендовано до друку Вченою Радою
механіко–математичного факультету
08 жовтня 2018 року

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У цьому методичному посібнику наведені теми практичних занять з математичного аналізу, умови задач, рекомендованих для розв'язання в аудиторії, а також задачі для домашньої роботи

Головна мета практичних занять — активне засвоєння студентами основних понять і положень курсу, набуття навичок їх застосування до розв'язання стандартних задач, опанування деяких спеціальних методів. Умовам задач в кожному занятті передують кілька контрольних запитань, відповіді на які студенти мають підготувати вдома.

У кожному занятті група задач А — задачі для аудиторної роботи, група Б — для домашнього завдання. Кількість і якість задач, що розв'язуються в аудиторії і задаються додому, залежить від рівня підготовки студентів. Ці задачі підбираються викладачем з набору задач, наведених в методичці.

Пропонуються також завдання підвищеної складності для студентів з високим рівнем підготовки за умови успішного виконання обов'язкової частини. Задачі підвищеної складності позначені літерою Д.

У другому семестрі, як правило, проводяться дві контрольні роботи, зразки умов та розв'язання яких наведено в тексті.

У посібнику також вміщено програму курсу "Математичний аналіз"для студентів спеціальності "механіка" I курс, II семестр".

При підборі задач використано такі збірники задач:

Дороговцев А.Я. Математический анализ. Сборник задач. - Киев, 1987.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1969.

Частина задач складена упорядниками. При підготовці цього учбового посібника автори суттєво використали методичні розробки:

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету, спеціальність механіка (1 семестр другого курсу) / Упорядн. Т. О. Петрова, Г. С. Смірнов, М. О. Денисьєвський. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2002.

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету, спеціальність механіка (2 семестр другого курсу) / Упорядн. Т. О. Петрова, Г. С. Смірнов, М. О. Денисьєвський. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2002.

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету (2 семестр другого курсу) // Упорядн. М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, А. В. Чайковський, О.Н. Нестеренко. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004.

ЗАНЯТТЯ 1
СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. РАДІУС ЗБІЖНОСТІ. ВЛАСТИВОСТІ СУМИ

Контрольні запитання

1. *Формули для радіуса збіжності степеневого ряду.*
2. *Теорема Коші-Адамара.*
3. *Теорема про рівномірну збіжність степеневого ряду.*

А1

1. Визначити радіус і множину збіжності наступних степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^p};$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2}(x-1)^n;$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(x+2)^n;$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n;$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{a^{\sqrt{n}}},\ a>0;$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})x^n;$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{[3+(-1)^n]^n}{n}(x+4)^n;$

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n^2}}{2^n};$

2. Знайти множини збіжності наступних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n};$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{-n^2}e^{-nx};$

3. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ має радіус збіжності r.

1) Довести, що радіус збіжності кожного з рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^n;$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+1)a_n x^n;$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+3}x^n;$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}a_n x^n,\ \alpha\in\mathbf{R}$ також дорівнює r.

2) Нехай $r\in(0;+\infty)$. Знайти радіус збіжності рядів: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}x^n;$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!}x^n.$

4. Визначити множину точок збіжності A і множину точок абсолютної збіжності B наступних рядів. Чи збігаються вони рівномірно на множині C?

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},\ C=[-1;0];$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{x+1}{x})^n,\ C=A.$

Д1. Визначити радіус і множину наступних степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}]^p(\frac{x-1}{2})^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{n}{e})^n x^n$.

Д2. Описати всі степеневі ряди, які ріномірно збіжні на $\mathbf{R}$.

Д3. Нехай $a_n \geq 0,\ n \geq 0$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a(x)$ збігається на інтервалі $(-r,r),\ r>0$, і існує границя $\lim\limits_{x\to r-} a(x)$. Довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$.

Д4. Навести приклад степеневого ряду, збіжного на $\mathbf{R}$, сума якого $f(x)$ задовольняє умови: 1) $\forall n \in \mathbf{N}\ :\ |x^{-n}f(x)| \to +\infty,\ |x| \to +\infty$; 2) $\forall \alpha > 0\ :\ e^{-\alpha x}f(x) \to 0,\ |x| \to +\infty$.

Б1

1. Визначити радіус і множину збіжності наступних степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4+2}(x+1)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n!+1}x^n$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{n^2}x^n\ (0<a<1)$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n},\ a>0, b>0$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$.

2. Знайти множину збіжності узагальнених степеневих рядів:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^2}{(3n)!}\operatorname{tg}^n x$.

3. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ має радіус збіжності $r,\ 0<r<+\infty$. Визначити радіус збіжності ряду: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_n x^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n a_n x^n$.

4. Визначити множину точок збіжності A і множину точок абсолютної збіжності B наступних рядів. Чи збігаються вони рівномірно на множині C?

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(3x-1)^n,\ C=\left[\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right)$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n(1-x)}}{n},\ C=A.$

ЗАНЯТТЯ 2
РЯД ТЕЙЛОРА

Контрольні запитання

1. *Теорема про розклад функції в ряд Тейлора.*
2. *Основні розклади в ряд Тейлора-Маклорена.*
3. *Теорема про розклад функції від кількох змінних в ряд Тейлора.*

А2

1. Користуючись основними розкладами, розкласти у ряд Тейлора-Маклорена відносно x наступні функції:

1) $\sin^2 2x$;
2) $\sin^3 x$;
3) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$;
4) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;
5) $\sqrt[3]{3x^2+4}$;
6) $\dfrac{x}{x^2-5x+6}$;
7) $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$;
8) $\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$, знайти похідну 1000-го порядку від цієї функції в точці 0;
9) $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

2. Розклавши попередньо похідні, шляхом почленного інтегрування отримати розклади у ряд Тейлора-Маклорена наступних функцій:

1) $f(x) = \arcsin x$;
2) $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$;
3) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}$;
4) $f(x) = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$;
5) $f(x) = \arccos(1-2x^2)$.

3. Функцію $f(x) = \ln(2+x+x^2)$ розкласти в ряд Тейлора в околі точки 1.

4. Функцію $f(x) = \ln x$ розкласти по цілих додатних степенях дробу $\frac{x-1}{x+1}$.

5. Функцію $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ розкласти в степеневий ряд по цілих додатних степенях дробу $\frac{x}{1+x}$.

6. Розкласти в ряд Маклорена функцію

$$f(x_1,x_2) = \sin x_1 \cdot \operatorname{sh} x_2, \quad (x_1,x_2)\in \mathbf{R}^2.$$

Вказівка. Скористатися формулою Ейлера, а потім переконатися, що отриманий ряд ї рядом Тейлора.

7. Розкласти функцію

$$f(x_1,x_2) = e^{x_1+x_2}, \quad (x_1,x_2)\in \mathbf{R}^2$$

в степеневий ряд по додатних степенях біномів (x_1-1) і (x_2+1).

Д1. Розкласти в ряд Тейлора відносно 0 функції $e^{e^x}, e^{\sin x}, e^{\cos x}, \ln(2+e^x)$.
Д2. Нехай функції f, g розкладаються в ряд Тейлора в деякому околі точки 0.
1) Довести, що функції $f+g, f-g, fg$ також розкладаються в ряд Тейлора в деякому околі точки 0.

2) Довести те ж саме для функції $f(g(x))$, якщо $g(0)=0$. Навести приклад, що показує, що умову $g(0)=0$, взагалі кажучи, не можна відкинути.

3) Довести те ж саме для функції f/g, якщо $\min\{k \mid a_k(f)\neq 0\} \geq \min\{k \mid b_k(f)\neq 0\}$.

Д3. Довести, що функція $f \in C^\infty((-\varepsilon,\varepsilon))$, $\varepsilon>0$, розкладається в ряд Тейлора в деякому околі точки 0 тоді і лише тоді, коли

$$\exists C>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in(-\delta,\delta)\ \forall k\geq 0\ :\ |f^{(k)}(x)| \leq C\frac{k!}{\delta^k}.$$

Д4. Чи можливо, що ряд Тейлора функції f відносно 0 розбігається всюди, крім самої точки 0, але функція розкладається в степеневий ряд в деякому околі точки 0?

Д5. Довести, що ряд Маклорена функції

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{x_1^2}-\dfrac{1}{x_2^2}\right), & x_1x_2\neq 0,\\[2ex] 0, & x_1x_2=0\end{cases}$$

збігається до деякої іншої функції на $\mathbf{R}^2$.

Б2

1. Користуючись основними розкладами, розкласти у ряд Тейлора-Маклорена наступні функції:

1) $\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}$;

2) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$;

3) $\dfrac{1+x}{(1-x^2)^2}$;

4) e^{-x^2};

5) $\cos^2 x$;

6) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$;

7) $\dfrac{1}{1-5x+6x^2}$.

2. Розклавши попередньо похідні, шляхом почленного інтегрування отримати розклади у ряд Тейлора-Маклорена наступних функцій:

1) $f(x)=\operatorname{arctg} x$, знайти суму ряду $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;

3) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

3. Розкласти в ряд Тейлора в околі точки 1 функцію:

1) $(x+1)e^x$; 2) $x(\ln x - 1)$.

4. Функцію $f(x) = \frac{1}{1-x}$ розкласти в степеневий ряд по цілих від'ємних степенях змінної x.

5. Розкласти в ряд Маклорена наступні функції:

1) $f(x_1, x_2) = \ln(1 + x_1 + x_2),\ x_1 + x_2 > -1$;
2) $f(x_1, x_2) = e^{x_1} \sin x_2$;
3) $f(x_1, x_2) = e^{x_1} \cos x_2$;
4) $f(x_1, x_2) = \cos x_1 \cdot \operatorname{ch} x_2$;
5) $f(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \operatorname{ch} x_2$;
6) $f(x_1, x_2) = \cos x_1 \cdot \operatorname{sh} x_2$;
7) $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + x_2^2)$;
8) $f(x_1, x_2) = \ln(1 + x_1) \cdot \ln(1 + x_2),\ x_i > -1,\ i = 1, 2$;
9) $f(x_1, x_2) = (1 - x_1 - x_2 + x_1 x_2)^{-1},\ |x_i| < \dfrac{1}{3},\ i = 1, 2$;
10) $f(x_1, x_2) = \cos(x_1^2 - x_2^2)$;

в пунктах 2)-7), 10) вважається, що $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

ЗАНЯТТЯ 3
ДІЇ ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ РЯДАМИ. РЯДИ В КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ

Контрольні запитання

1. *Теорема про почленне диференціювання степеневого ряду.*
2. *Теорема про почленне інтегрування степеневого ряду.*
3. *Означення збіжності ряду з комплексними членами.*
4. *Теорема Коші-Адамара для степеневих ряду в комплексній площині.*

А3

1. Виконуючи дії зі степеневими рядами, розкласти у степеневі ряди наступні функції:

1) $f(x) = \ln^2(1-x)$;

2) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$;

3) $f(x) = \displaystyle\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt$;

4) $f(x) = \displaystyle\int\limits_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)}$ (виписати чотири члена).

2. Застосовуючи почленне диференціювання, обчислити суми наступних рядів:

1) $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - ...$;

2) $1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + ...$;

3) $1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + ...$

Вказівка: похідну ряду домножити на $1 - x$.

3. Застосовуючи почленне інтегрування, обчислити суми наступних рядів:

1) $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + ...$;

2) $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 - 16x^4 + ...$.

4. За допомогою розкладу підінтегральних функцій в ряди обчислити з точністю до $0,001$ наступні інтеграли:

1) $\int\limits_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx$; 2) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

5. Визначити радіус і круг збіжності степеневих рядів в комплексній площині:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{n2^n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!z^n}{(1+i)(1+2i)...(1+ni)}$.

6. Використовуючи ряди в комплексній площині, отримати розклади в степеневий ряд відносно x наступних функцій:

1) $\frac{1}{1+x+x^2}$;

2) $\frac{x\sin a}{1-2x\cos a+x^2}$;

3) $e^{x\cos a}cos(x\sin a)$.

Д1. Нехай P – многочлен. Довести, що функція $\frac{1}{P(x)}$ розкладається в ряд Тейлора в крузі радіуса $R = \min\{|z| \mid P(z) = 0\}$.

Д2. Розкласти функцію $\frac{1}{1+z^2}$ в ряд Тейлора в комплексній площині: 1) в околі точки 0; 2) в околі точки $a > 0$; 3) в околі точки $-a$. Знайти відповідні радіуси збіжності.

Б3

1. Виконуючи дії зі степеневими рядами, розкласти у степеневі ряди відносно x наступні функції:

1) $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$;

2) $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^2$;

3) $f(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2}dt$;

4) $f(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$

2. Виконуючи дії зі степеневими рядами, розкласти у ряд Тейлора в околі точки 1 наступні функції:

1) $f(x) = \frac{\ln x}{x},\ x > 0$;

2) $f(x) = \int\limits_1^x \frac{e^t - e}{t-1}dt$.

3. Нехай $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Розкласти в ряд Тейлора-Маклорена функцію $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$.

4. Застосовуючи почленне диференціювання, обчислити суму ряду: $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$.

5. Застосовуючи почленне інтегрування, обчислити суму ряду: $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$.

6. За допомогою розкладу підінтегральних функцій в ряди обчислити з точністю до $0,001$ наступні інтеграли:

1) $\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$; 2) $\int\limits_0^1 \cos x^2 dx$.

7. Чи збігаються наступні ряди в комплексній площині:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (i-1)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ((\sqrt{2}-1)+(\pi-3)i)^n$?

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{2in}$;

8. Визначити радіус і круг збіжності степеневих рядів в комплексній площині:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3+i)^n}{\sqrt{n}}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(1-e^{i\alpha})^n}$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$;

ЗАНЯТТЯ 4
РЯДИ ФУР'Є

Контрольні запитання

1. *Коефіцієнти і ряд Фур'є за тригонометричною послідовністю.*
2. *Рівність Парсеваля.*
3. *Ознаки збіжності в точці ряду Фур'є.*

А4

1. Функцію f, періодичну з періодом 2π, розкласти в ряд Фур'є і визначити точки, в яких ряд збігається до відповідного значення функції f. Записати рівність Парсеваля.

1) $f(t) = \sin^2 t, t \in [0, 2\pi]$;

2) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} t, & t \in (-\pi, \pi), \\ 0, & t = \pi; \end{cases}$

3) $f(t) = t, t \in (-\pi, \pi]$;

4) $f(t) = \begin{cases} \frac{\pi - t}{2}, & t \in (0, 2\pi), \\ 0, & t = 0; \end{cases}$

5) $f(t) = \pi^2 - t^2, t \in [-\pi, \pi]$.

2. Розкласти функцію $f(t) = t^2$ в ряд вигляду:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos nt$ на $[0, \pi]$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nt$ на $[0, \pi]$;

3) $\frac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$ на $[0, 2\pi)$.

В яких точках ці ряди збігаються до відповідних значень функції f? Записати для них рівність Парсеваля.

Б4

1. Функцію f, періодичну з періодом 2π, розкласти в ряд Фур'є і визначити точки, в яких він збігається до відповідного значення функції f :

1) $f(t) = |t|, t \in [-\pi, \pi]$;

2) $f(t) = \operatorname{sign}(\cos t), t \in [0, 2\pi]$;

3) $f(t) = \operatorname{sign}(\sin t), t \in [0, 2\pi]$;

4) $f(t) = |\sin t|, t \in [0, 2\pi]$;

5) $f(t) = |\cos t|, t \in [0, 2\pi]$;

6) $f(t) = \cos(t\sqrt{2}), t \in [0, 2\pi)$;

7) $f(t) = \sin(t\sqrt{2}), t \in [0, 2\pi)$;

8) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-\pi, 0), \\ 3, & t \in [0, \pi); \end{cases}$

9) $f(t) = \arcsin(\sin t), t \in [0, 2\pi]$;

10) $f(t) = \arccos(\cos t), t \in [0, 2\pi]$;

11) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, 0), \\ t, & t \in [0, \pi); \end{cases}$

12) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in (-\pi, 0), \\ 0, & t \in [0, \pi]; \end{cases}$

13) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-\pi, 0), \\ t, & t \in [0, \pi). \end{cases}$

2. Розкласти функцію f в ряд вигляду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos nt, t \in [0, \pi], \alpha_n \in \mathbf{R}, n \geq 0$, і визначити точки, в яких цей ряд збігається до відповідного значення функції f :

1) $f(t) = \sin t, t \in [0, \pi]$;

2) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \pi - t, & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]; \end{cases}$

3) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ t - \frac{\pi}{2}, & t \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$

3. Розкласти функцію f в ряд вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nt, t \in [0, \pi], \beta_n \in \mathbf{R}, n \geq 1$, і визначити точки, в яких цей ряд збігається до відповідного значення функції f :

1) $f(t) = \cos t, t \in [0, \pi]$;

2) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \pi - t, & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]; \end{cases}$

3) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ t - \frac{\pi}{2}, & t \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$

4. Не виписуючи ряду Фур'є функції f, періодичної з періодом 2π такої, що $f(t) = \begin{cases} t/\pi, & t \in [0, \pi], \\ -1, & t \in (\pi, 2\pi), \end{cases}$ знайти значення суми цього ряду в точках $t_k = k\pi, 0 \leq k \leq 3$.

5. Знайти суми наведених тригонометричних рядів при $t \in \mathbf{R}$:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{2^n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{2^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nt}{3^n}, \alpha \in \mathbf{R}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nt}{2^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{e^{2n-1}}$;

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nt}{n!}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n!}$.

Вказівка. Розглянути тригонометричні ряди як дійсну частину і коефіцієнт уявної частини відповідно суми степеневого ряду в комплексній площині $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, де $z = e^{it}$.

ЗАНЯТТЯ 5
РЯДИ ФУР'Є (ПРОДОВЖЕННЯ)

Контрольні запитання

1. *Коефіцієнти і ряд Фур'є для функції з довільним періодом. Рівність Парсеваля.*
2. *Теорема про почленне інтегрування ряду Фур'є.*
3. *Теорема про почленне диференціювання ряду Фур'є.*

A5

1. Функцію f, періодичну з періодом $2l$, розкласти в ряд Фур'є і визначити точки, в яких ряд збігається до відповідного значення функції f. Записати рівність Парсеваля.

1) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, l), \\ 0, & t \in [l, 2l); \end{cases}$

2) $l = \dfrac{1}{2},\ f(t) = \{t\},\ t \in \mathbf{R}$ (дробова частина числа t).

2. Використовуючи розклад $t = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nt}{n},\ t \in (-\pi, \pi)$, почленним інтегруванням отримати розклад в ряд Фур'є функцій:

1) $f(t) = t^2,\ t \in (-\pi, \pi)$; 2) $f(t) = t^3,\ t \in (-\pi, \pi)$.

3. Нехай $\alpha \in [0, \pi)$. Записати рівність Парсеваля для функції f, періодичної з періодом 2π і такої, що $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \alpha, \\ 0, & \alpha \le |t| \le \pi. \end{cases}$ Використовуючи рівність Парсеваля, знайти суми рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.

4. Нехай $\alpha \in (-1, 1)$. Користуючись формулами $\cos t = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\sin t = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}),\ t \in \mathbf{R}$, де $z = e^{it}$, $\overline{z} = e^{-it}$, отримати розклад у ряд Фур'є функції $f(t) = \frac{\alpha \sin t}{1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2}$.

5. Нехай f – періодична функція з періодом 2π така, що

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2}, & |t| < \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\pi^2}{4} + \pi|t| - \dfrac{t^2}{2}, & \dfrac{\pi}{2} < |t| \le \pi. \end{cases}$$

Розкласти функцію f в ряд Фур'є і застосувати до нього теорему про почленне диференціювання ряду Фур'є.

6. Нехай $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4+1} \sin nt,\ t \in \mathbf{R}$. Довести, що $f \in C^{(\infty)}((0, 2\pi))$.

7. Нехай $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4+1} \sin nt \cos \frac{\pi n}{2},\ t \in \mathbf{R}$. Покращити збіжність цього ряду.

Б5

1. Функцію f, періодичну з періодом $2l$, розкласти в ряд Фур'є. Визначити точки, в яких ряд збігається до відповідного значення функції f, і записати рівність Парсеваля.

1) $l = 1,\ f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \le t < 0, \\ t, & 0 \le t \le 1. \end{cases}$

2) $l = 2,\ f(t) = \begin{cases} 0, & -2 \le t < 0, \\ 2, & 0 \le t < 2. \end{cases}$

3) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < l/2, \\ l - t, & l/2 \le t \le l, \end{cases}$ f – непарна функція;

4) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le l/2, \\ t - l/2, & l/2 \le t \le l, \end{cases}$ f – парна функція;

5) $f(t) = \begin{cases} l/2 - t, & 0 \le t \le l/2, \\ 0, & l/2 < t \le l, \end{cases}$ f – парна функція;

6) $l = 2,\ f(t) = \dfrac{t}{2},\ 0 \le t \le 2, f$ – парна функція.

2. Нехай $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nt}{n^3}, t \in \mathbf{R}$. Довести, що існує $f' \in C(\mathbf{R})$, значення якої можуть бути отримані почленним диференціюванням ряду. Довести, що для довільного $t \in \mathbf{R} \setminus \{2\pi n \mid n \in \mathbf{Z}\}\ :\ f''(t) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nt}{n}$. За допомогою формули для суми цього ряду визначити функцію f.

3. Нехай $\alpha \in (-1, 1)$. Користуючись формулами Ейлера $\cos t = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\sin t = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z}),\ t \in \mathbf{R}$, де $z = e^{it},\ \overline{z} = e^{-it}$, отримати розклад у ряд Фур'є функції $f(t) = \dfrac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos t + \alpha^2},\ |\alpha| < 1$.

4. Нехай $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^3 + 2} \cos nt \sin \dfrac{\pi n}{2},\ t \in \mathbf{R}$. Покращити збіжність цього ряду.

ЗАНЯТТЯ 6
ВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА

Контрольні запитання

1. *Теорема про неперервність власного інтеграла по параметру.*
2. *Теорема про диференційовність власного інтеграла по параметру.*
3. *Теорема про перехід до границі під знаком власного інтеграла.*
4. *Теорема про інтегрування власного інтеграла по параметру.*

А6

1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_0^2 x^2\cos\alpha x dx;$ 2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}.$

2. Дослідити на неперервність наступні функції:

1) $I(\alpha)=\int\limits_0^1 (x+1)^{\alpha x}dx, \quad \alpha\in\mathbf{R};$

2) $I(\alpha)=\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{\ln(1+\alpha^4 x+x^2)}, \quad \alpha\in\mathbf{R};$

3) $I(\alpha)=\int\limits_{-1}^1 \sqrt{x^2+\alpha^2}dx, \quad \alpha\in\mathbf{R}.$

3. Знайти похідну функції I:

1) $I(\alpha)=\int\limits_0^1 \dfrac{\sin(\alpha x^2)}{1+\alpha x}dx, \quad \alpha>0;$

2) $I(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \exp(\alpha\sqrt{1-x^2})dx, \quad \alpha\in\mathbf{R};$

3) $I(\alpha)=\int\limits_{\alpha}^{\alpha^2} \exp(-\alpha x^2)dx, \quad \alpha\in\mathbf{R};$

4) $I(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha} \dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x+1}dx, \quad \alpha>0;$

5) $I(\alpha)=\int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha} \dfrac{\sin\alpha x}{x}dx, \quad \alpha\geq 0,\ \{a,b\}\subset(0,+\infty).$

4. Чи можна за правилом Лейбніца обчислити похідну функції

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \ln\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$$

при $\alpha = 0$?

5. 1) Застосовуючи диференціювання по параметру, обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)dx, \quad ab \neq 0.$$

6. Застосувавши інтегрування під знаком інтеграла, обчислити інтеграл

$$1)\int\limits_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}dx, \quad \{a,b\} \subset (0,+\infty).$$

$$2)\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^a - x^b}{\ln x}dx, \quad \{a,b\} \subset (0,+\infty).$$

Вказівка. Функція під знаком інтеграла в точках і доозначається своїми границями.

7. Змінюючи порядок інтегрування, обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} I(a)da,$$

де

$$I(a) = \int\limits_2^3 \frac{2xdx}{x^2 - \sin^2 a}, \quad a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Звернути увагу на те, що безпосереднє обчислення $I(a)$ приводить до складного інтеграла.

8. Нехай $f \in C(R)$. Знайти похідну порядку n від функції

$$I(a) = \int\limits_0^a f(x)(a-x)^{n-1}dx, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Д1. 1) Чи можна здійснити граничний перехід під знаком інтеграла у ви-

разі
$$\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^1 \frac{x}{\alpha^2}\exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)dx?$$
2) Обчислити границю
$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n}.$$
Д2. Обчислити границю $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha\cdot\sin x}dx.$

Б6

1. Дослідити на неперервність наступні функції:

1) $$I(\alpha)=\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-x+\alpha},\quad \alpha>0;$$

2) $$I(\alpha)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\alpha x-\sin x+1},\quad \alpha>0;$$

3) $$I(\alpha)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\alpha^2-x^2)dx,\quad \alpha\in\mathbf{R};$$

4) $$I(\alpha)=\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arccos(\alpha x^2)dx,\quad |\alpha|\le 4;$$

5) $$I(\alpha)=\int\limits_0^{\frac{\pi^2}{16}} \mathrm{tg}(\alpha+\sqrt{x})dx,\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{4};$$

6) $I(\alpha) = \int\limits_1^2 (\alpha x)^{\frac{x}{\alpha}} dx, \quad \alpha > 0;$

7) $I(\alpha) = \int\limits_{\pi}^{2\pi} x^{\sin \alpha x} dx, \quad \alpha \in \mathbf{R};$

8) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \operatorname{sh}(\alpha x + \alpha^2 x^2) dx, \quad \alpha \in \mathbf{R};$

9) $I(\alpha) = \int\limits_2^3 \operatorname{ch}\left(\frac{x^3}{1+\alpha^4}\right) dx, \quad \alpha \in \mathbf{R};$

10) $I(\alpha) = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\arcsin(\alpha \cdot \sin x)} dx, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$

2. Дослідити на неперервність наступні функції:

1) $I(\alpha) = \int\limits_{\frac{\alpha}{2}}^{\alpha} \sqrt{\arcsin(\alpha^2 \cdot \sin x)} dx, \quad 0 \leq \alpha \leq 1;$

2) $I(\alpha) = \int\limits_{\alpha^2}^{\alpha^3} \operatorname{ch} \frac{x^2}{1+\alpha^4} dx, \quad \alpha \in \mathbf{R};$

3) $I(\alpha) = \int\limits_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} \operatorname{sh}(\alpha x + \alpha^3 x^3) dx, \quad \alpha \in \mathbf{R};$

4) $I(\alpha) = \int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\alpha} x^{\cos \alpha x} dx, \quad \alpha > 0;$

5) $I(\alpha) = \int\limits_{3-\alpha}^{3+\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha x} dx, \quad 0 < \alpha < 3;$

6) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha^2} \operatorname{tg}(\alpha + \sqrt[4]{x})dx, \quad 0 < \alpha < \frac{9}{16};$

7) $I(\alpha) = \int\limits_\alpha^{\frac{1}{2}} \arccos(\alpha x^2)dx, \quad |\alpha| < \frac{1}{2};$

8) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\ln(1+\alpha^2)} \cos(\alpha^4 - x^2)dx, \quad \alpha \in \mathbf{R};$

9) $I(\alpha) = \int\limits_{\frac{\alpha}{2}}^{2\alpha} \frac{dx}{x\sqrt{\alpha} - \sin x + 1}, \quad \alpha > 0;$

10) $I(\alpha) = \int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\alpha^2} \frac{dx}{e^x + x + \alpha}dx, \quad \alpha > 0.$

3. Знайти похідну функції I:

1) $I(\alpha) = \int\limits_0^{2\alpha} \frac{dx}{2^x + x + \alpha}, \quad \alpha > 0;$

2) $I(\alpha) = \int\limits_{\frac{\alpha}{3}}^{\alpha} \frac{dx}{x\sqrt{\alpha} + \cos x + 1}, \quad \alpha > 0;$

3) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\operatorname{tg}\alpha} \cos(\alpha^2 + x^2)dx, \quad |\alpha| < \frac{1}{2};$

4) $I(\alpha) = \int\limits_\alpha^{\frac{1}{2}} \arcsin(\alpha x^2)dx, \quad |\alpha| < \frac{1}{2};$

5) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha^2} \operatorname{ctg}(\alpha + \sqrt[4]{x})dx, \quad 0 < \alpha < \frac{9}{16};$

6) $\quad I(\alpha) = \int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\alpha} x^{\sin \alpha x} dx, \quad \alpha > 0;$

7) $\quad I(\alpha) = \int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha} (x+\alpha)^{\alpha x} dx, \quad 0 < \alpha < 1;$

8) $\quad I(\alpha) = \int\limits_{0}^{\cos\alpha} \operatorname{sh}(\alpha^2 x^2) dx, \quad \alpha \in \mathbf{R};$

9) $\quad I(\alpha) = \int\limits_{\alpha^2}^{\alpha^3} \frac{\operatorname{ch} x^2}{1+\alpha^2 x^2} dx, \quad \alpha \in \mathbf{R};$

10) $\quad I(\alpha) = \int\limits_{\frac{\alpha}{2}}^{\alpha} \sqrt{\arccos(\alpha \cdot \sin x)} dx, \quad 0 < \alpha < 1.$

4. Нехай $f \in C([0,1]),\ g \in C^{(1)}(R),\ h \in C^{(2)}(R)$. Довести, що наступні функції на множині визначення задовольняють відповідним рівнянням:

1) $\quad u(x,t) = \frac{1}{2}[h(x-at) + h(x+at)] + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} g(v)\, dv, \quad a \neq 0,$

– рівнянню коливання струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

і початковим умовам:

$$u(x,0) = h(x), \quad u_2'(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbf{R};$$

2) $\quad E(\alpha) = \int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi, \quad 0 < \alpha < 1;$

$$E''(\alpha) + \frac{1}{\alpha} E'(\alpha) + \frac{E(\alpha)}{1-\alpha^2} = 0;$$

3) $\quad J_n(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \cos(n\varphi - \sin\varphi)\, d\varphi, \quad n \in \mathbf{Z},\ \alpha \in \mathbf{R};$

$$\alpha^2 J_n''(\alpha) + \alpha J_n'(\alpha) + (\alpha^2 - n^2) J_n(\alpha) = 0;$$

4) $u(\alpha) = \int\limits_0^1 K(\alpha, x) f(x) dx, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$

де

$$K(\alpha, x) = \begin{cases} \alpha(1 - x), \ \alpha \leq x, \\ x(1 - \alpha), \ \alpha > x; \end{cases}$$

$$u''(\alpha) = -f(\alpha).$$

5. Використовуючи інтегрування під знаком інтеграла, обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^a - x^b}{\ln x} dx, \quad \{a, b\} \subset (0, +\infty).$$

6. Застосовуючи диференціювання по параметру, обчислити наступні інтеграли:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \cdot \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx, \quad a \in \mathbf{R};$

2) $\int\limits_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2) dx, \quad |a| < 1;$

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}, \quad |a| < 1.$

ЗАНЯТТЯ 7
РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Контрольні запитання

1. *Означення рівномірно збіжних невласних інтегралів по необмеженому проміжку та від необмеженої функції.*
2. *Ознаки Вейєрштрасса, Діріхле та Абеля рівномірної збіжності невласних інтегралів.*

A7

1. Дослідити рівномірну збіжність інтегралів на множині $M_i,\ i = 1, 2$:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad M_1 = [2, +\infty),\ M_2 = (1, +\infty);$

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad M_1 = (0, 1),\ M_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right).$

2. Нехай $0 < a < b$. Довести, що інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx$:

а) збігається рівномірно на відрізку $[a, b]$;
б) не збігається рівномірно на $[0, b]$.

3. Довести, що інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-|x-\alpha|}\, dx$:

а) збігається рівномірно на відрізку $[0, 1]$;
б) не збігається рівномірно на $[0, +\infty)$.

4. За допомогою ознак Вейєрштрасса, Діріхле чи Абеля довести рівномірну збіжність інтегралів на множині M :

1) $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha \exp(-x^\alpha)\, dx,\ M = \left[\frac{1}{2}, 2\right];$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1 + \alpha^2 + x^\alpha}\, dx,\ M = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right);$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha^2 x\, dx}{\alpha + x},\ M = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right);$

4) $\int\limits_0^1 x^{-\alpha} \sin \frac{1}{x}\, dx,\ M = (0, 1);$

5) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos \alpha^2 x}{\sqrt{x}} \cdot \operatorname{arctg} \alpha x\, dx,\ M = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right);$

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-\alpha x}\, dx,\ M = [0, +\infty).$

Д1. Сформулювати відповідне означення рівномірної збіжності невласного інтеграла зі змінною особливістю і перевірити, чи збігаються наведені інтеграли рівномірно на множині M :

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{|x-\alpha|^\alpha},\ M = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right];$ 2) $\int\limits_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\, dx,\quad M = [0, 1].$

Б7

1. Довести, що *інтеграл Діріхле* $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$:

а) збігається рівномірно на кожному відрізку, що не містить точки $\alpha = 0$;
б) збігається нерівномірно на кожному відрізку, що містить точку $\alpha = 0$.

2. Довести, що інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha+1}$ збігається нерівномірно на проміжку $(1, +\infty)$.

3. Довести рівномірну збіжність інтегралів на вказаній множині M :

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x\sqrt{x}},\ M = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right);$

2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \alpha^2 x\, dx,$ $M = \left[\frac{1}{100}, +\infty\right);$

3) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(2-x)^\alpha},\ M = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right);$

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\, dx,$ $M = [-n, n],\ n \in \mathbf{N};$

5) $\int\limits_0^1 \frac{e^{-\alpha x^2}\, dx}{(1-x^2)^\alpha},\ M = \left(0, \frac{2}{3}\right];$

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x^2}{1+x^2}\, dx,\ M = \mathbf{R};$

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+2},$ $M = [0, 1000];$

8) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^{5/4}}\, dx,\ M = [0, 50];$

9) $\int\limits_0^2 \frac{x^\alpha\, dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}},$ $M = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right);$

10) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha e^{-x}}{1+x},\ M = \left[-\frac{1}{2}, 2\right].$

4. Довести рівномірну збіжність інтегралів на вказаній множині M :

1) $\int\limits_0^{+\infty} \sin \alpha x^2\, dx,\ M = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty);$

2) $\int\limits_0^{+\infty} x\sin\alpha x^3\,dx,\ M=[2,+\infty);$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(e^x\alpha)\,dx,\ M=(-\infty,-1];$

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x^2}{1+x^\alpha}\,dx,\ M=[1,+\infty);$

5) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{\ln x},\ M=\{\alpha|\ |\alpha|\geq 3\};$

6) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\alpha x^2}{1+x}\cos\alpha x^3\,dx,$
$M=[2,+\infty);$

7) $\int\limits_0^{1} \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{(\sin x)^\alpha},$
$M=\left(-\infty,\frac{3}{2}\right);$

8) $\int\limits_0^{1} \sin\frac{1}{x-1}\cdot\frac{dx}{(1-x)^\alpha},$
$M=(-\infty,1);$

9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{x-\sqrt{x}+1}\,dx,\ M=[1,2];$

10) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^\alpha\,dx,\ M=\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right].$

5. Довести рівномірну збіжність інтегралів на вказаній множині M :

1) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\cdot\operatorname{arctg}\alpha x\,dx,\ M=\mathbf{R};$

2) $\int\limits_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\cdot\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx,\ M=[0,+\infty);$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1+\alpha x}{1+x}\,dx,\ M=\left[\frac{1}{2},2\right];$

4) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\,dx,\ M=[2,+\infty);$

5) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\cdot\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg}x)\,dx,\ M=\mathbf{R};$

6) $\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\sin x^2}{\ln(\alpha x)}\,dx,\ M=\left[\frac{1}{5},+\infty\right);$

7) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\cdot\frac{1+\sqrt{\alpha x}}{1+\sqrt{x}}\,dx,\ M=[0,3];$

8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\cdot\operatorname{arcctg}\frac{x}{\alpha}\,dx,\ M=[\sqrt{2},+\infty);$

9) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln(x+\alpha)}{\ln x}\,dx,\ M=\left[-\frac{3}{2},-1\right];$

10) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{x+\alpha\ln(1+x)}{x+1}\,dx,\ M=[1,2].$

ЗАНЯТТЯ 8
ВЛАСТИВОСТІ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ З ПАРАМЕТРОМ. ІНТЕГРАЛ ФУР'Є

Контрольні запитання

1. *Теореми про неперервність за параметром та про граничний перехід під знаком інтеграла для невласних інтегралів.*
2. *Теореми про диференційовність та інтегровність по відрізку за параметром для невласного інтеграла.*
3. *Теорема про інтегрування за параметром по півосі.*
4. *Інтеграл Фур'є та умови його збіжності.*

А8

1. Довести неперервність на множині M функцій:

1) $I(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin\sqrt{x}\, dx,\ \alpha \in M = (0, +\infty);$

2) $I(\alpha) := \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} e^{-\alpha x}\, dx,\ \alpha \in M = [0, +\infty).$

2. Довести, що функція

$$I(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + (x+\alpha)^2}\, dx,\ \alpha \in \mathbf{R},$$

диференційовна на $\mathbf{R}$.

3. Довести, що функція

$$I(\alpha) := \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} e^{-\alpha x}\, dx$$

неперервно диференційовна на $(0, +\infty)$.

4. Зобразити інтегралом Фур'є функцію f. При яких значеннях t інтеграл Фур'є збігається до відповідного значення функції f?

1) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} t, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1; \end{cases}$ 2) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \le \pi, \\ 0, & |t| > \pi. \end{cases}$

5. Чи можна перейти до границі під знаком інтеграла у виразі

$$\lim_{\alpha \to 0+} \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx?$$

6. Нехай

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} x^{-2}, & 0 < \alpha < x < 1, \\ -\alpha^{-2}, & 0 < x < \alpha < 1, \\ 0, & \text{у решті точок.} \end{cases}$$

Довести, що

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, \alpha)\, dx \right) d\alpha \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, \alpha)\, d\alpha \right) dx,$$

хоча всі інтеграли збігаються.

Д1. Дослідити неперервність функції

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\, dx$$

на інтервалі $(0, 1)$.

Д2. Нехай

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^3}{x^2} \exp\left(-\dfrac{\alpha^2}{x} \right), & x > 0,\ \alpha \in \mathbf{R}, \\ 0, & x = 0,\ \alpha \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Довести, що функція f має частинні похідні, неперервні за кожною змінною, однак у точці $\alpha = 0$

$$\frac{d}{d\alpha} \int_0^1 f(x, \alpha)\, dx \neq \int_0^1 f'_\alpha(x, \alpha)\, dx.$$

Б8

1. Довести неперервність функції I на множині M :

1) $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{1 + x^4}\, dx,$ $M = \mathbf{R};$

2) $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2}\, dx,$ $M = \mathbf{R};$

3) $I(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(x - \alpha)^2)\, dx,$ $M = \mathbf{R};$

4) $I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^2 \sin \alpha x}{1 + x^4}\, dx,$

$M = \mathbf{R};$

5) $I(\alpha) = \int\limits_{0}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 x^2}\, dx,$

$M = [0, +\infty);$

6) $I(\alpha) = \int\limits_{0}^{1} \dfrac{x + \alpha}{x^{1-\alpha}}\, dx,$

$M = [0, +\infty);$

7) $I(\alpha) = \int\limits_{0}^{1} \ln^{\alpha}(1 + x^2)\, dx,$

$M = \left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right);$

8) $I(\alpha) = \int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{x^3}{1 + x^{\alpha}}\, dx,$

$M = (4, +\infty).$

2. Довести неперервну диференційовність функції I на множині M :

1) $I(\alpha) = \int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{\cos \alpha x - \cos 2\alpha x}{x^2}\, dx,\ M = (0, +\infty);$

2) $I(\alpha) = \int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2 \alpha x}{x^2}\, dx,\ M = (0, +\infty);$

3) $I(\alpha) = \int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{1 - \cos \alpha x}{x^2}\, dx,\ M = (0, +\infty);$

4) $I(\alpha) = \int\limits_{0}^{1} x^{\alpha} \cdot \ln^n x\, dx,\ n \in \mathbf{N},\ M = (-1, +\infty);$

5) $I(\alpha) = \int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{1 - \exp(-\alpha x^2)}{x^2}\, dx,\ M = (0, +\infty);$

6) $I(\alpha) = \int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{1 - e^{-\alpha x}}{x} \cdot e^{-x}\, dx,\ M = (-1, +\infty);$

7) $I(\alpha) = \int\limits_{0}^{+\infty} x^n \exp(-\alpha x^n)\, dx,\ n \in \mathbf{N},\ M = (0, +\infty);$

8) $I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} \exp(-\alpha x^2)\, dx,\ M = (0, +\infty).$

3. Зобразити інтегралом Фур'є функцію f. При яких значеннях t інтеграл Фур'є збігається до відповідного значення функції f?

1) $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0; \end{cases}$

2) $f(t) = \begin{cases} 0, & |t| < 1, \\ t^{-2}, & |t| \ge 1; \end{cases}$

3) $f(t) = \begin{cases} \cos t, & |t| \le \pi, \\ 0, & |t| > \pi. \end{cases}$

ЗАНЯТТЯ 9
ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ З ПАРАМЕТРОМ. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Контрольні запитання

1. *Інтеграл Фруллані.*
2. *Значення інтегралів Діріхле та Ейлера – Пуассона.*
3. *Перетворення Фур'є.*

А9

1. Нехай $a > 0, b > 0$. Використовуючи рівність

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int\limits_a^b e^{-\alpha x}\, d\alpha, \ x > 0,$$

обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx \quad a > 0, \ b > 0.$$

2. Для $\{a, b\} \subset (0, +\infty)$ обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx.$$

3. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2}\, dx, \ \alpha \in \mathbf{R}$, двома способами: а) диференціюванням по параметру; б) частинами.

4. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2}\, dx, \ \alpha \in \mathbf{R}$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2}\, dx, \ \alpha > 0$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2x^2 + 10x + 3)\, dx$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\, dx$, $\alpha > 0, \ \beta > 0$.

5. Знайти перетворення Фур'є функцій:

1) $f(t) = \exp\left(-\dfrac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right),\ t \in \mathbf{R};$ $a \in \mathbf{R},\ \sigma > 0;$ 2) $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le a, \\ 0, & |t| > a; \end{cases}$ $a \ge 0.$

Д1. Використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{1+x^2} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)}\,dy,\ x \in \mathbf{R},$$

обчислити *інтеграл Лапласа*

$$L(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx,\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Д2. Використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy,\ x > 0,$$

обчислити *інтеграли Френеля*

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Д3. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}\,dx;$ 2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{x^2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}.$

Б9

1. Для довільних чисел $a > 0,\, b > 0$ обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\exp(-ax^2)-\exp(-bx^2)}{x}\,dx;$

2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx;$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax^2 - \operatorname{arctg} bx^2}{x}\,dx;$

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax^2 - \sin bx^2}{x}\,dx;$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg} ax - \operatorname{arcctg} bx}{x}\,dx;$

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin a\sqrt{x} - \sin b\sqrt{x}}{x}\,dx;$

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos a\sqrt{x} - \cos b\sqrt{x}}{x}\,dx;$

8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(ax+1)^{-3/2} - (bx+1)^{-3/2}}{x}\,dx;$

9) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{ax+1}} - \frac{1}{\sqrt{bx+1}}\right) \cdot \frac{dx}{x};$

10) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{arctg} ax)^2 - (\operatorname{arctg} bx)^2}{x}\,dx.$

2. Довести, що інтеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos \alpha x\,dx, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

задовольняє диференціальне рівняння

$$I'(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha I(\alpha), \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

і обчислити його.

3. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}\,dx,\ \alpha > \beta > 0;$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x} \cdot e^{-x}\,dx,\ \alpha > 0;$

3) $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x}\,dx,\ n \in \mathbf{N},\ \alpha > 0;$

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2}\,dx,\ n\in\mathbf{N},\ \alpha>0;$

5) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos x\,dx,\ \alpha>\beta>0;$

6) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{\alpha}\ln^n x\,dx,\ n\in\mathbf{N},\ \alpha>-1;$

7) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}\,dx,\ \alpha>0,\ \beta>0;$

8) $\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3 dx,\ \alpha>0.$

4. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)\right) dx,\ \alpha>0;$

2) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}\,dx,\ \alpha>\beta>0;$

3) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\,dx,\ \alpha>\beta>0;$

4) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^3\alpha x}{x}\,dx,\ \alpha>0;$

5) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}\,dx,\ \alpha>\beta>0;$

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-(x^2+x)}\,dx;$

7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-(x^2-x)}\,dx.$

5. Знайти перетворення Фур'є функцій:

1) $f(t)=\begin{cases} e^{-t}, & t\ge 0,\\ 0, & t<0;\end{cases}$

2) $f(t)=(1+t^2)^{-1},\ t\in\mathbf{R};$

3) $f(t)=e^{-a|t|},\ t\in\mathbf{R};\ a>0.$

ЗАНЯТТЯ 10
ЕЙЛЕРОВІ ІНТЕГРАЛИ

Контрольні запитання

1. *Означення* Γ- *і* B-*функцій Ейлера.*
2. *Елементарні властивості ейлерових інтегралів: значення* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $\Gamma(n)$, $n \in \mathbf{N}$; *функціональні рівняння для* Γ-*функції; зв'язок між* Γ- *і* B-*функціями.*
3. *Диференційовність* Γ- *і* B-*функцій Ейлера, формули для похідних.*
4. *Формула Вейєрштрасса для* Γ-*функції.*
5. *Розклад синуса у нескінченний добуток.*

A10

1. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\, dx, \quad n \in \mathbf{N}.$$

2. Нехай

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \exp(-x^\alpha)\, dx, \quad \alpha > 0.$$

1) Виразити функцію I через Γ-функцію Ейлера;
2) Знайти $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I(\alpha)$.

3. Звести інтеграли до Γ-функції та обчислити їх:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x\, dx$;
2) $\int\limits_0^{1} \sqrt{x - x^2}\, dx$;
3) $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{\sqrt[\alpha]{1 - x^\alpha}}$, $\alpha > 1$.

4. При фіксованому $\beta > 0$ знайти значення α, при яких збігаються інтеграли. Виразити інтеграли через ейлерові та обчислити їх.

1) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}}{1 + x^\beta}\, dx$;
2) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}}{(1 + x)^\beta}\, dx$.

5. Виразити інтеграли через Γ-функцію та її похідні, обчислити їх:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\ln x}{1+x}\,dx,$
$0<\alpha<1;$

2) $\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-ax}\ln x\,dx,$
$a>0,\ \alpha>-1.$

6. Довести рівність

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

7. Знайти інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{x^{\beta}}\,dx, \quad \alpha>0,\ 0<\beta<1,$$

використовуючи рівність

$$\frac{1}{x^{\beta}} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-xt}\,dx, \quad x>0,\ \beta>0.$$

Д1. Обчислити інтеграли $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx, \quad \int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\cdot\sin\pi x\,dx.$

Д2. Для $a>0$ і $n\in\mathbf{N}$ знайти довжину дуги кривої

$$r^n = a^n\cos n\varphi, \quad |\varphi|\le\frac{\pi}{2n}.$$

Д3. Знайти площу, обмежену кривою

$$|x|^n+|y|^n=a^n, \quad n>0,\ a>0.$$

Д4. Використовуючи формулу Вейєрштрасса для Γ-функції, обчислити нескінченні добутки $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)}{(n+\beta_1)(n+\beta_2)}$ при таких значеннях параметрів:

1) $\alpha_1=\alpha_2=1,\ \beta_1=\frac{1}{2},\ \beta_2=\frac{3}{2};$
2) $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2},\ \beta_1=\frac{3}{4},\ \beta_2=\frac{1}{4};$
3) $\alpha_1=-\alpha_2=-\frac{1}{2},\ \beta_1=-\beta_2=-\frac{3}{4};$
4) $\alpha_1=3,\ \alpha_2=5,\ \beta_1=\frac{5}{2},\ \beta_2=\frac{11}{2};$
5) $\alpha_1=\frac{1}{2},\ \alpha_2=\frac{3}{2},\ \beta_1=\beta_2=1.$

Д5. Обчислити нескінченні добутки $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{\beta^2}{n^2}\right)$, якщо:

1) $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{6}$;

2) $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{3}$;

3) $\alpha = \frac{5}{4}$, $\beta = \frac{5}{6}$.

Б10

1. Визначити множину тих α, при яких збігаються інтеграли. Виразити інтеграли через Γ-функцію:

1) $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha \exp(-x^\beta)\,dx$, $\beta > 0$;

2) $\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^\alpha dx$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{dx}{x^\alpha}$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} 2^{-x}x^\alpha\,dx$;

5) $\int\limits_1^{+\infty} 3^{-x}(x-1)^\alpha\,dx$;

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha \exp(-x^4)\,dx$;

7) $\int\limits_1^{+\infty} x(x^2-1)^\alpha \exp(-x^2)\,dx$;

8) $\int\limits_1^{+\infty} (\ln x)^\alpha\cdot\frac{dx}{x^2}$;

9) $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

2. Довести рівність

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4}\,dx\cdot\int\limits_0^{+\infty} x^2e^{-x^4}\,dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

3. Визначити множину тих α, при яких збігаються інтеграли. Виразити інтеграли через Γ-функцію:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha\,dx}{(1+x^2)^2}$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{2+3x^\alpha}$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha(1-x)}{(x+1)^{\alpha+3}}\,dx$;

4) $\int\limits_1^2 \frac{(x-1)^\alpha(2-x)^2}{(x+2)^{\alpha+4}}\,dx$;

5) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a > 0$;

6) $\int\limits_0^1 (1-x^\alpha)^\beta\,dx$, $\beta > -1$;

7) $\int\limits_0^1 x^2(1-x^\alpha)^\beta\,dx$, $\beta > -1$;

8) $\int\limits_0^1 x^\alpha(1-x^3)\,dx$;

9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x(1+x))^{3/4}}$;

10) $\int\limits_{-1}^1 \frac{((1+x)^2(1-x)^2)^\alpha}{(1+x^2)^{2\alpha+1}}\,dx$.

4. Знайти площу фігури, обмеженої кривою

$$r^4 = \sin^3\varphi\cos\varphi, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right].$$

5. Визначити множину тих α, при яких збігаються інтеграли. Обчислити інтеграли через Γ-функцію:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha x\,dx$;

2) $\int\limits_0^{\pi} \sin^\alpha x\,dx$;

3) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}\,dx$ (заміна $\cos x = 1 - 2\sqrt{t}$);

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2}\,dx$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} x e^{-x^3}\,dx$;

6) $\int\limits_0^{+\infty} x^{-1/3} e^{-\sqrt[3]{x}}\,dx$;

7) $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2}\,dx,\ n \in \mathbf{N}$;

8) $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-(\sqrt{x})^3}\,dx$.

6. Виразити інтеграли через ейлерові та їх похідні:

1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\ln x\,dx$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\ln 2x}{1+x}\,dx$, $0 < \alpha < 1$;

3) $\int\limits_0^{1} \ln(-\ln x)\,dx$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\ln^2 x}{1+x}\,dx,\ \alpha > 0$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{1+x^3}\,dx$;

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx$;

7) $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\beta x}\ln^2 x\,dx$, $\alpha > -1,\ \beta > 0$;

8) $\int\limits_1^{+\infty} (\ln x)^\alpha \frac{\ln\ln x}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha > -1$;

9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} - x^{\beta-1}}{(1+x)\ln x}\,dx$ $0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1$;

10) $\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\ln^3 x\,dx$, $\alpha > 0$.

7. Знайти інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^\beta}\, dx, \quad \alpha \in \mathbf{R},\ 0 < \beta < 2,$$

використовуючи рівність

$$\tfrac{1}{x^\beta} = \tfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-xt}\, dx, \quad x > 0,\ \beta > 0.$$

8. Виразити інтеграли через ейлерові та їх похідні:

1) $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \ln x\, dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0;$

2) $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \ln(1-x)\, dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0;$

3) $\int\limits_0^\pi \sin^\alpha x \ln(\sin x)\, dx,\ \alpha > -1;$

4) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^{2\alpha} x (\ln(\sin x) + +2\ln(\cos x))\, dx,\ \alpha > -\dfrac{1}{2};$

5) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^\alpha x \ln(\cos x)\, dx,\ \alpha > -1;$

6) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{(1+x)^\beta}\, dx,\ \beta > \alpha > 0;$

7) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{(a^2+x^2)^\beta}\, dx,\ 2\beta > \alpha > 0,\ a > 0;$

8) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln^2 x}{(1+x^3)^\beta}\, dx,\ 3\beta > \alpha > 0;$

9) $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \ln x \times \ln(1-x)\, dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

9. Використовуючи розклад синуса у нескінченний добуток, розкласти у нескінченний добуток функції:

1) $\cos \pi\alpha,\ \alpha \in \mathbf{R};$ 2) $\operatorname{tg} \pi\alpha,\ \alpha \neq n - \dfrac{1}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$

ЗАНЯТТЯ 11
КОНТРОЛЬНА РОБОТА. РЯДИ. ІНТЕГРАЛИ З ПАРАМЕТРОМ

1. Визначити множину збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n}}{n^3 4^n}.$$

2. Розкласти в ряд Тейлора в околі т.0 функцію

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

3. Розкласти в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію

$$f(x) = |x-1|, \ x \in [0, 2\pi).$$

Визначити суму отриманого ряду. Записати рівність Парсеваля.
4. Дослідити на рівномірну збіжність інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(3\alpha x + 1)}{x^\alpha + 2} \operatorname{arctg}((\alpha - 2)x) dx$$

на множині $M = [1, 2]$.
5. Обчислити інтеграл

$$\int_0^\pi \sin^{10} x \cos^6 x dx.$$

РОЗВ'ЯЗОК

1. Нехай $b_n = \frac{1}{n^3 4^n}, y := (x-4)^2$. Тоді степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n y^n$ має радіус збіжності $r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4(\sqrt[n]{n})^3} = 4 \cdot 1^3 = 4$. Ряд збіжний абсолютно при $y \in (-4; 4)$ і розбігається при $|y| > 4$. В кінцевих точках $y = \pm 4$ маємо $|b_n y^n| = \frac{1}{n^3}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ збігається, як узагальнений гармонічний ряд з показником $\alpha = 3 > 1$. Тому степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n y^n$ збігається абсолютно при $y \in [-4; 4]$ і розбігається при $|y| > 4$. Отже, маємо, що при $(x-4)^2 \leq 4$, тобто при $x \in [2;6]$ заданий в умові ряд збігається абсолютно, а при $x \notin [2;6]$ – розбігається.

2. Користуючись розкладом в ряд Тейлора-Маклорена $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$, $x \in (-1;1]$, маємо: $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x) = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-x^n}{n} - \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(-1-(-1)^{n-1})\frac{x^n}{n} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x \in (-1;1)$.

3. Підрахуємо коефіцієнти Фур'є: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|x-1|dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1(1-x)dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_1^{2\pi}(x-1)dx = -\frac{(x-1)^2}{2\pi}\Big|_0^1 + \frac{(x-1)^2}{2\pi}\Big|_1^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} + \frac{(2\pi-1)^2}{2\pi} = 2\pi - 2 + \frac{1}{\pi}$;

$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|x-1|\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1(1-x)\cos nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int\limits_1^{2\pi}(1-x)\cos nx\,dx = \left|\begin{array}{cc} u=1-x & dv=\cos nx dx \\ v=\frac{1}{n}\sin nx & du=-dx \end{array}\right| = \frac{1}{n\pi}(1-x)\sin nx\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int\limits_0^1\sin nx\,dx - \frac{1}{n\pi}(1-x)\sin nx\Big|_1^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int\limits_1^{2\pi}\sin nx\,dx = -\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^1 + \frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_1^{2\pi} = \frac{2}{n^2\pi}(1-\cos n), n \geq 1$;

$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|x-1|\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1(1-x)\sin nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int\limits_1^{2\pi}(1-x)\sin nx\,dx = \left|\begin{array}{cc} u=1-x & dv=\sin nx dx \\ v=-\frac{1}{n}\cos nx & du=-dx \end{array}\right| = \frac{1}{n\pi}(x-1)\cos nx\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int\limits_0^1\cos nx\,dx + \frac{1}{n\pi}(1-x)\cos nx\Big|_1^{2\pi} + \frac{1}{n\pi}\int\limits_1^{2\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\sin nx\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}(1-2\pi) + \frac{1}{n^2\pi}\sin nx\Big|_1^{2\pi} = \frac{2}{n\pi}(1-\pi) - \frac{2}{n^2\pi}\sin n, n \geq 1.$

Ряд Фур'є має вигляд

$$\pi - 2 + \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi}(1-\cos n)\cos nx + \left(\frac{2}{n\pi}(1-\pi) - \frac{2}{n^2\pi}\sin n\right)\sin nx\right).$$

Намалювавши графік 2π-періодичної функції з умови, бачимо, що вона неперервна скрізь, окрім точок кратних 2π, і має в інших точках однобічні похідні. Отже, за наслідками з ознаки Ліпшиця $S(x) = f(x)$, $x \neq$

$2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$, і $S(2\pi k) = S(0) = \frac{1}{2}(f(0+) + f(0-)) = \frac{1}{2}(f(0+) + f(2\pi-)) = \frac{1}{2}(1+2\pi-1) = \pi,\ k\in \mathbf{Z}$.

Оскільки $\int\limits_0^{2\pi} |x-1|^2\,dx = \frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\big((2\pi-1)^3+1\big)$, то рівність Парсеваля має вигляд $\frac{1}{3\pi}\big((2\pi-1)^3+1\big) = 2(\pi-2+\frac{1}{2\pi})^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}((\frac{2}{n^2\pi}(1-\cos n))^2 + (\frac{2}{n\pi}(1-\pi) - \frac{2}{n^2\pi}\sin n)^2$.

4. Застосуємо ознаку Абеля. Покладемо $f(x,\alpha) = \frac{\sin(3\alpha x+1)}{x^\alpha+2},\ g(x,\alpha) = \operatorname{arctg}(\alpha-2)x$. Тоді при кожному $\alpha\in[1,2]$ функція g монотонна по x і обмежена за модулем сталою $\frac{\pi}{2}$.

Доведемо, що інтеграл $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(3\alpha x+1)}{x^\alpha+2}dx$ рівномірно збіжний на множині $M=[1,2]$ за ознакою Діріхле.

Покладемо $f_1(x,\alpha) = \sin(3\alpha x+1),\ g_1(x,\alpha) = (x^\alpha+2)^{-1}$. Тоді при кожному $\alpha\in[1,2]$ функція g_1 монотонно спадна по x і при $x\geq 1$: $\sup\limits_{\alpha\in[1,2]}|g_1(x,\alpha)| = (x+2)^{-1}\to 0,\ x\to+\infty$. Крім того, $\forall A>0\ \forall\alpha\in[1,2]$: $|\int_0^A \sin(3\alpha x+1)dx| = \frac{1}{\alpha}|\cos 1 - \cos(3\alpha A+1)| \leq \frac{2}{\alpha}\leq 2$.

5. $\int_0^\pi \sin^{10}x\cos^6 x dx = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{10}x\cos^6 x dx =$
$\left|\begin{matrix}\sin^2 x = t\\ dt = 2\sin x\cos x dx\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{9/2}(1-t)^{5/2}dt = \frac{1}{2}B(11/2,7/2) =$
$\frac{\Gamma(11/2)\Gamma(7/2)}{2\Gamma(8)} = \frac{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{2\cdot 7!} = \frac{9\cdot5\cdot3\cdot\pi}{2^9\cdot6\cdot4\cdot2} = \frac{45\pi}{2^{13}} = \frac{45\pi}{8192}$.

ЗАНЯТТЯ 12
ВИМІРНІ ЗА ЖОРДАНОМ МНОЖИНИ. ОЗНАЧЕННЯ КРАТНОГО ІНТЕГРАЛА

Контрольні запитання

1. *Означення вимірної за Жорданом множини. Критерій вимірності.*
2. *Означення інтегровної функції та кратного інтеграла.*
3. *Означення m-вимірного бруса, його діаметра та міри.*
4. *Зведення інтеграла по m-вимірному брусу до повторного інтегрування.*

A12

1. Нехай

$$A = \{(x_1, x_2) | x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

1) Для $n \geq 0$ визначити множини $A_{(n)}$, $A^{(n)}$, $\Delta A_{(n)}$ і обчислити їх міри Жордана.
2) Знайти внутрішню і зовнішню міри Жордана множини A, довести її вимірність і знайти міру.

2. Довести, що будь-яка обмежена підмножина прямої в $\mathbf{R}^2$ є вимірною за Жорданом і знайти її міру.
3. Знайти внутрішню і зовнішню міри Жордана множини

$$A = [0, 1] \cap \mathbf{Q}.$$

Чи вимірна ця множина?
4. Нехай $A = \{(x_1, x_2) |\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1\}$. Обчислити за означенням інтеграл

$$\int\limits_A x_1(1 - x_2)\, dx_1 dx_2.$$

5. Обчислити інтеграли
1) $\int\limits_{[-1,1]\times[0,2]} (x_1^2 x_2 + \sqrt{x_2})\, dx_1 dx_2;$
2) $\int\limits_{[0,1]^3} \sin(x_1 + x_2 + x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3;$
3) $\int\limits_{[-1,1]\times[0,1]} \left(|x_1| \cos \frac{\pi x_2}{2}\right)\, dx_1 dx_2;$

4) $\int\limits_{[0,1]\times[1,2]\times[1,3]} (x_1x_3^2 + e^{x_2})\, dx_1dx_2dx_3.$

Д1. Чи завжди об'єднання зліченної сім'ї вимірних за Жорданом множин є вимірною множиною?

Д2. Канторова множина. Нехай $\alpha \in (0,1)$. Означимо

$$A_1 := \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4}\right), \quad K_1 := [0,1] \setminus A_1,$$
$$A_2 := \left(\frac{1}{4} - \frac{3\alpha}{16}, \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{16}\right) \cup \left(\frac{3}{4} + \frac{\alpha}{16}, \frac{3}{4} + \frac{3\alpha}{16}\right), \quad K_2 := K_1 \setminus A_2,$$

і т.д. На n-му кроці з множини K_{n-1} викидається об'єднання 2^{n-1} інтервалів, кожний з яких має довжину $2^{1-2n}\alpha$ і середина якого збігається із серединою відповідного відрізка множини K_{n-1}. Покладемо $K := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Множина K називається *канторовою*. Довести, що канторова множина а) незліченна; б) компактна; в) не містить жодного інтервала; г) невимірна за Жорданом.

Д3. Обчислити нижній та верхній інтеграли по брусу $Q = [0,1] \times [0,1]$ від функцій

а) $f(x_1,x_2) = x_1x_2$; б) $g(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) + h(x_1+x_2)$, де

$$h(x_1,x_2) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Д4. Довести, що для функції $f \in C(Q)$ кожна нижня і кожна верхня суми Дарбу є інтегральними сумами.

Б12

1. Для множини $A \subset \mathbf{R}^2$ і $n \geq 0$ знайти $m(A_{(n)})$, $m(A^{(n)})$, $m(\Delta A_{(n)})$. Знайти внутрішню і зовнішню міри Жордана та довести вимірність множини A. Знайти $m(A)$.

1) $A = [0,1] \times [0,2]$; 2) $A = [-1,1]^2$;

3) $A = [-1,1] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$;

4) $A = \{(x_1,x_2) |\ 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1\}$;

5) $A = \{(x_1,x_2) |\ |x_1| + |x_2| \leq 1\}$;

6) $A=\{(x_1,x_2)|\ |x_1|\le x_2\le 1\}$;
7) $A=\{(x_1,x_2)|\ 1\le x_2\le x_1\le 2\}$;
8) $A=\{(x_1,x_2)|\ |x_1|\le |x_2|\le 1\}$;
9) $A=\{(x_1,x_2)|\ x_1\le 0,\ x_2\le 0,\ x_1+x_2\ge -2\}$;
10) $A=\{(x_1,x_2)|\ x_1=1,\ 0\le x_2\le 1\}$.

3. Нехай $Q=[0,1]\times[0,2]\times[0,3]$. Обчислити за означенням інтеграли від наступних функцій по Q :

1) $f(\vec{x})=x_1x_2-x_3$;
2) $f(\vec{x})=x_1+x_2x_3$;
3) $f(\vec{x})=x_1\ln(1+x_2)-x_3$;
4) $f(\vec{x})=x_3\sin\dfrac{\pi x_1}{2}\cos\dfrac{\pi x_2}{4}$;
5) $f(\vec{x})=(1+x_1)^{x_2-x_3}$;
6) $f(\vec{x})=\dfrac{x_1}{1+x_2x_3}$;
7) $f(\vec{x})=\left(\dfrac{x_1x_2}{2}\right)^{1+x_3}$;
8) $f(\vec{x})=\dfrac{x_1x_2}{1+x_3}$;
9) $f(\vec{x})=\dfrac{x_1+x_2}{1+x_3}$;
10) $f(\vec{x})=x_1-x_2-x_3$;

$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in Q$.

4. Обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\int\limits_{[0,1]\times[1,2]}(x_1+x_2^3)\,dx_1dx_2$;
2) $\displaystyle\int\limits_{[0,1]\times[2,3]}x_1\sin(\pi x_2)\,dx_1dx_2$;
3) $\displaystyle\int\limits_{[0,2\pi]\times[0,2]}x_2^2\sin^2x_1\,dx_1dx_2$;
4) $\displaystyle\int\limits_{[1,2]\times[3,4]}(x_1+x_2)^{-2}\,dx_1dx_2$;
5) $\displaystyle\int\limits_{[0,1]^2}(x_1\operatorname{sh}x_2+\operatorname{ch}x_1)\,dx_1dx_2$;
6) $\displaystyle\int\limits_{[-1,1]\times[-2,2]}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\,dx_1dx_2$, де $f\in C^{(2)}(\mathbf{R}^2)$;
7) $\displaystyle\int\limits_{[0,1]^3}x_1x_2^2x_3^3\,dx_1dx_2dx_3$;
8) $\displaystyle\int\limits_{[0,1]\times[0,2]\times[0,3]}(x_1+x_2+x_3)\,dx_1dx_2dx_3$;
9) $\displaystyle\int\limits_{[0,1]\times[1,2]\times[2,3]}(x_1\sqrt{x_3}\cos x_2+x_1x_2)\,dx_1dx_2dx_3$;
10) $\displaystyle\int\limits_{[0,1]^n}(x_1+x_2^3+x_3^7+\ldots+x_n^{2^n-1})\,dx_1dx_2\ldots dx_n$.

ЗАНЯТТЯ 13
ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА ПО ЦИЛІНДРИЧНІЙ МНОЖИНІ В $\mathbb{R}^2$

Контрольні запитання

1. *Означення циліндричної множини в* $\mathbf{R}^2$.
2. *Зведення інтеграла по циліндричній множині в* $\mathbf{R}^2$ *до повторного інтеграла.*

A13

1. Довести вимірність множин в $\mathbf{R}^2$

1) $A = \{(x_1, x_2)|\ 0 \le x_2 \le \sqrt{x_1},\ x_1 \in [1, 3]\}$;
2) $A = \{(x_1, x_2)|\ 0 \le x_2 \le \sin x_1,\ x_1 \in [0, \pi]\}$.

2. Нехай A – вимірна за Жорданом множина в $\mathbf{R}^2$, f – неперервна обмежена функція на A. Звести інтеграл $\int\limits_A f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$ до повторного всіма можливими способами.

1) $A = \{(x_1, x_2)|\ x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$;
2) $A = \{(x_1, x_2)|\ 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$;
3) A – трикутник з вершинами у точках $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$;
4) $A = \{(x_1, x_2)|\ x_1^2 \le x_2 \le 1,\ x_1 \in [0, 1]\}$.

3. Для функції $f \in C(\mathbf{R}^2)$ змінити порядок інтегрування у інтегралах

1) $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x_1^3}^{x_1^2} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1$; 2) $\int\limits_0^2 \left(\int\limits_{\sqrt{2x_1 - x_1^2}}^{\sqrt{2x_1}} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1$.

4. Знайти площі фігур, обмежених лініями

1) $x_1 x_2 = a^2,\ x_1 + x_2 = \dfrac{5a}{2}$, де $a > 0$;
2) $x_2^2 = 2x_1 + 1,\ x_2^2 = -4x_1 + 4$.

5. Нехай $A = \{(x_1, x_2)|\ 0 \le x_1 \le x_2 \le 1\}$, $f \in C([0, 1])$, $n \in \mathbf{N}$. Звести до інтеграла Рімана подвійний інтеграл

$$\int\limits_A f(x_1)(x_2 - x_1)^n\, dx_1 dx_2.$$

Д1. Нехай $A(t) = \{(x_1, x_2)|\ 0 \le x_2 \le (x_1 + t)^2,\ 0 \le x_1 \le 1\}$,

$$F(t) = \int\limits_{A(t)} x_1 e^{\sqrt{x_2}}\, dx_1 dx_2,\ t \ge 0.$$

Обчислити $F'(t)$ на $[0, +\infty)$.

Б13

1. Довести вимірність за Жорданом множин

1) $A=\{(x_1,x_2)|\ 0\le x_2\le \ln x_1,\ 1\le x_1\le 2\}$;
2) $A=\{(x_1,x_2)|\ |x_2|\le \operatorname{arctg} x_1,\ 0\le x_1\le 1\}$;
3) $A=\{(x_1,x_2)|\ 0\le x_2\le e^{x_1},\ 0\le x_1\le 1\}$;
4) $A=\{(x_1,x_2)|\ |x_2|\le \sqrt[3]{x_1},\ 1\le x_1\le 2\}$;
5) $A=\{(x_1,x_2)|\ 0\le x_2\le \sqrt[4]{x_1},\ 0\le x_1\le 1\}$;
6) $A=\{(x_1,x_2)|\ 0\le x_2\le \cos x_1,\ 0\le x_1\le \frac{\pi}{2}\}$;
7) $A=\{(x_1,x_2)|\ |x_2|\le x_1^2,\ -1\le x_1\le 1\}$;
8) $A=\{(x_1,x_2)|\ \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\le 1\}$;
9) $A=\{(x_1,x_2,x_3)|\, x_1\ge 0,\, x_2\ge 0,\, x_1+x_2\le 1,\, x_3\in[0,1]\}$;
10) $A=\{(x_1,x_2,x_3)|\ 0\le x_3\le \ln x_1,\ x_1,x_2)\in[1,2]\times[0,1]\}$.

2. Нехай A – вимірна за Жорданом множина в $\mathbf{R}^2$, f – неперервна обмежена функція на A. Звести інтеграл $\int\limits_A f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$ до повторного всіма можливими способами.

1) A – трикутник з вершинами у точках $(0,0)$, $(1,2)$, $(1,-2)$;
2) A – трапеція з вершинами у точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(0,1)$;
3) $A=\{(x_1,x_2)|\ x_1^2+x_2^2\le x_1\}$;
4) A обмежена кубічними параболами $x_2=x_1^3$, $x_1=x_2^3$;
5) A – паралелограм зі сторонами $x_2=x_1$, $x_2=x_1+3$, $x_2=-2x_1+1$, $x_2=-2x_1+5$;
6) A обмежена гіперболою $x_2^2-x_1^2=1$ і колом $x_1^2+x_2^2=4$;
7) A – трикутник зі сторонами $x_2=x_1$, $x_2=2x_1$, $x_1+x_2=6$;
8) $A=\{(x_1,x_2)|\ x_2\ge x_1^2,\ x_2\le 4-x_1^2\}$;
9) $A=\{(x_1,x_2)|\ x_2-2x_1\le 0,\ 2x_2-x_1\ge 0,\ x_1x_2\le 2\}$;
10) $A=\{(x_1,x_2)|\ x_1+x_2\le 1,\ x_1-x_2\le 1,\ x_1\ge 0\}$.

3. Для функції $f\in C(\mathbf{R}^2)$ змінити порядок інтегрування в інтегралах

1) $\int\limits_0^4\Big(\int\limits_{x_1}^{2x_1} f(x_1,x_2)\,dx_2\Big)dx_1$;
2) $\int\limits_{-6}^2\Big(\int\limits_{\frac{x_1}{4}-1}^{2-x_1} f(x_1,x_2)\,dx_2\Big)dx_1$;
3) $\int\limits_1^e\Big(\int\limits_0^{\ln x_1} f(x_1,x_2)\,dx_2\Big)dx_1$;
4) $\int\limits_{-1}^1\Big(\int\limits_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{1-x_1^2} f(x_1,x_2)\,dx_2\Big)dx_1$;

5) $\int\limits_{1}^{2}\Big(\int\limits_{2-x_1}^{\sqrt{2x_1-x_1^2}} f(x_1,x_2)\,dx_2\Big)dx_1$; 7) $\int\limits_{-2}^{2}\Big(\int\limits_{-\sqrt{2-x_1^2/2}}^{\sqrt{2-x_1^2/2}} f(x_1,x_2)\,dx_2\Big)dx_1$;

6) $\int\limits_{0}^{2\pi}\Big(\int\limits_{0}^{\sin x_1} f(x_1,x_2)\,dx_2\Big)dx_1$; 8) $\int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{x_2}^{\sqrt{x_2}} f(x_1,x_2)\,dx_1\Big)dx_2$;

9) $\int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{x_1^{2/3}} f(x_1,x_2)\,dx_2\Big)dx_1+\int\limits_{1}^{2}\Big(\int\limits_{0}^{1-\sqrt{4x_1-x_1^2-3}} f(x_1,x_2)\,dx_2\Big)dx_1$;

10) $\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2}\Big(\int\limits_{-1}^{\sin x_1} f(x_1,x_2)\,dx_2\Big)dx_1+\int\limits_{\pi/2}^{5\pi/2}\Big(\int\limits_{\sin x_1}^{1} f(x_1,x_2)\,dx_2\Big)dx_1$.

4. Знайти площі фігур, обмежених лініями

1) $(x_1-x_2)^2+x_1^2=1$;
2) $x_1=x_2,\ x_1=2x_2,\ x_1+x_2=4,\ x_1+3x_2=4$;
3) $x_1x_2=1,\ x_1x_2=4,\ x_2=3,\ x_2=5$;
4) $x_1=x_2,\ x_2=5x_1,\ x_1=1$;
5) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=1,\ x_1+x_2=1$;
6) $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=1,\ \{a,b\}\subset(0,+\infty)$;
7) $x_2^2=10x_1+25,\ x_2^2=-6x_1+9$;
8) $x_1^2x_2=4,\ x_1^2x_2=9,\ x_2=1,\ x_2=2$;
9) $\cos x_1-x_2+1=0,\ x_1=0,\ x_1=\pi,\ x_2=0$.

ЗАНЯТТЯ 14
ФОРМУЛА ЗАМІНИ ЗМІННИХ У ПОДВІЙНОМУ ІНТЕГРАЛІ

Контрольні запитання

1. *Формула переходу до полярних координат.*
2. *Формула переходу до узагальнених полярних координат.*
3. *Загальна формула заміни змінних у подвійному інтегралі.*

A14

1. Нехай $A \subset \mathbf{R}^2,\ f \in C(A)$. В інтегралі $\int\limits_A f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$ перейти до полярних координат, поклавши $x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi$. Звести одержаний інтеграл до повторного всіма можливими способами:

1) $A = \{(x_1, x_2) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$;

2) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 2x_1\}$.

2. Нехай $f \in C([0, +\infty))$. Перейти до полярних координат, поклавши $x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi$. Звести одержаний інтеграл до повторного всіма можливими способами:

1) $\int\limits_0^2 \left(\int\limits_{x_1}^{\sqrt{3}x_1} f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) dx_2 \right) dx_1$;

2) $\int\limits_{\{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \le 1\}} f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) dx_1 dx_2$.

3. Нехай $f \in C(\mathbf{R}^2),\ a \in (0, 2\pi)$. Змінити порядок інтегрування, вважаючи r та φ полярними координатами:

$$\int\limits_0^a \Big(\int\limits_0^{\varphi} f(r, \varphi)\, dr\Big) d\varphi.$$

4. Обчислити інтеграл, перейшовши до полярних координат:

$$\int\limits_A \sin\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) dx_1 dx_2, \text{ де } A = \{(x_1, x_2) \mid \pi^2 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\pi^2\}.$$

5. Перейшовши до полярних координат, обчислити площу фігури

$$A = \{(x_1, x_2) \mid (x_1^2 + x_2^2)^2 \le 2(x_1^2 - x_2^2),\ \ x_1^2 + x_2^2 \ge 1\}.$$

6. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_A \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{R^2} - \frac{x_2^2}{R^2}}\, dx_1 dx_2, \text{ де } A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le R^2\},\ R > 0.$$

7. Запровадити узагальнені полярні координати та обчислити якобіан переходу до цих координат. Обчислити площу фігур, обмежених лініями:

1) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = \dfrac{x_1}{c} + \dfrac{x_2}{d}, \quad \{a, b, c, d\} \subset (0, +\infty);$
2) $\sqrt[4]{\dfrac{x_1}{a}} + \sqrt[4]{\dfrac{x_2}{b}} = 1, \quad x_1 = 0,\ x_2 = 0;\ \{a, b\} \subset (0, +\infty).$

8. Обчислити площі фігур, що лежать у вказаній частині площини $\mathbf{R}^2$ і обмежені лініями:

1) $x_1 x_2 = 1,\ x_1 x_2 = 2,\ x_2 = x_1,\ x_2 = 2x_1,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0;$
2) $x_2^2 = 2x_1,\ x_2^2 = 4x_1,\ x_1^2 = 6x_2,\ x_1^2 = 8x_2.$

Б14

1. Нехай $A \subset \mathbf{R}^2$, $f \in C(A)$. В інтегралі $\int\limits_A f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$ перейти до полярних координат, поклавши $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Звести одержаний інтеграл до повторного всіма можливими способами.

1) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le \pi^2\};$
2) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_1 \le x_2\};$
3) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_1 x_2 \ge 0\};$
4) $A = \{(x_1, x_2) \mid 4 \le x_1^2 + x_2^2 \le 9,\ x_1 x_2 \le 0\};$
5) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 2x_1\};$
6) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 9,\ x_1 \le 2x_2\};$
7) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ |x_1| \le x_2\};$
8) $A = \{(x_1, x_2) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ |x_1| \le |x_2|\};$
9) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4x_2\};$
10) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 9,\ x_1 + x_2 \ge 0\}.$

2. Нехай $f \in C(\mathbf{R}^2)$. Змінити порядок інтегрування, вважаючи r та φ полярними координатами:

1) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\int\limits_{0}^{2\cos\varphi} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

2) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \Big(\int\limits_{0}^{\sqrt{\sin 2\varphi}} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

3) $\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \Big(\int\limits_{\frac{1}{\sin\varphi}}^{\sqrt{2}} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

4) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \Big(\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

5) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \Big(\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sin\varphi-\cos\varphi}} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

6) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \Big(\int\limits_{\frac{1}{\sin\varphi-\cos\varphi}}^{2} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

7) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \Big(\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

8) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \Big(\int\limits_{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{1} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

9) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \Big(\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin\varphi}}^{1} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

10) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \Big(\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2\sin(\pi/3+\varphi)}} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi.$

3. Нехай $f \in C(\mathbf{R})$. Перейти до полярних координат і замінити інтеграли однократними:

1) $\int\limits_A f(\sqrt{x_1^2+x_2^2})\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid |x_2| \le |x_1| \le 1\};$

2) $\int\limits_A f(x_2/x_1)\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \le x_1 - \frac{5}{36}\};$

3) $\int\limits_A f(\sqrt{x_1^2+x_2^2})\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid 1 \le x_1^2+x_2^2 \le 4\};$

4) $\int\limits_A f(\sqrt[3]{x_1^2+x_2^2})\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \le 4,\ x_1 \le x_2\};$

5) $\int\limits_A f(\sqrt[4]{x_1^2+x_2^2})\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \le x_2\}.$

4. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_A \ln(1+x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\};$

2) $\int\limits_A \cos(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0\};$

3) $\int\limits_A (1-2x_1-3x_2)\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \le 4\};$

4) $\int\limits_A \sqrt{4-x_1^2-x_2^2}\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \le 2x_1\};$

5) $\int\limits_A \operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1}\,dx_1dx_2,$
$A=\{(x_1,x_2)\mid 1\le x_1^2+x_2^2\le 9,\ \dfrac{x_1}{\sqrt{3}}\le x_2\le\sqrt{3}x_1\};$

6) $\int\limits_A \left(\operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\};$

7) $\int\limits_A \exp(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid 1\le x_1^2+x_2^2\le 4\};$

8) $\int\limits_A \sin(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 4,\ |x_1|\le |x_2|\};$

9) $\int\limits_A \sqrt[3]{x_1^2+x_2^2}\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1,\ x_1+x_2\ge 0\};$

10) $\int\limits_A \operatorname{sh}(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid 4\le x_1^2+x_2^2\le 9\}.$

5. Обчислити площу фігур, обмежених лініями:

1) $(x_1^2+x_2^2)^2=x_1^2x_2;$
2) $(x_1^2+x_2^2)^3=x_1x_2^4;$
3) $x_1^2+x_2^2=1,\ x_1^2+x_2^2=2x_1;$
4) $(x_1^2+x_2^2)^2=x_1^3-3x_1x_2^2;$
5) $x_1^2+x_2^2=4,\ \dfrac{x_2}{2}\le x_1\le 2x_2;$
6) $x_1^2+x_2^2=1,\ x_1^2+x_2^2=4,\ x_1\ge 1;$
7) $x_1^2+x_2^2=1,\ x_1^2+x_2^2=4,\ x_2\ge -1;$
8) $x_1^2+x_2^2=1,\ x_1+x_2\ge 1;$
9) $x_1^2+x_2^2=2\sqrt{2}x_1-1,\ x_1=x_2,\ x_1=-x_2;$
10) $x_1^2+x_2^2=4x_1-3,\ x_1=0,\ x_2=-1,\ x_2=1.$

6. Обчислити площі фігур, що лежать у вказаній частині площини $\mathbf{R}^2$ і обмежені лініями:

1) $x_1^3+\dfrac{x_2^3}{8}=x_1^2+4x_2^2,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0;$
2) $(x_1-x_2)^4=x_1^2+x_2^2,\ x_1\ge 0,\ x_2\le 0;$
3) $(x_1+2x_2)^4=x_1^2+4x_2^2,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0;$
4) $(2x_1+3x_2)^4=4x_1^2-x_2^2,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0;$
5) $\left(\dfrac{x_1}{2}+\dfrac{x_2}{3}\right)^5=x_1^2x_2^2;$
6) $(x_1-x_2)^5=4x_1^2x_2^2;$
7) $\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^{12}=x_1x_2;$
8) $\left(2\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^{12}=2x_1x_2;$
9) $\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^{10}=x_1x_2;$
10) $x_1^3+x_2^3=9x_1^2+x_2^2.$

7. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

1) $x_1+x_2=1,\ x_1+x_2=2,\ x_2=2x_1,\ x_2=3x_1;$
2) $x_1^2=x_2,\ x_1^2=2x_2,\ x_1^3=x_2^2,\ x_1^3=2x_2^2;$
3) $x_2=x_1^5,\ x_2=2x_1^5,\ x_2=x_1^6,\ x_2=2x_1^6;$
4) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=1,\ \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=2,\ x_1=x_2,\ 4x_1=x_2;$
5) $\sqrt[3]{x_1^2}+\sqrt[3]{x_2^2}=1,\ \sqrt[3]{x_1^2}+\sqrt[3]{x_2^2}=4,\ x_1=x_2,\ 8x_1=x_2;$
6) $x_2=\sqrt{x_1},\ x_2=2\sqrt{x_1},\ x_1+x_2=1,\ x_1+x_2=2;$
7) $x_2=x_1^3,\ x_2=5x_1^3,\ x_2=x_1^2,\ x_2=2x_1^2;$
8) $x_2=x_1\sqrt{x_1},\ x_2=2x_1\sqrt{x_1},\ x_2=2x_1,\ x_2=\frac{1}{2}x_1;$
9) $x_2=7x_1^7,\ x_2=9x_1^7,\ x_2=7x_1^9,\ x_2=9x_1^9;$
10) $x_1x_2=4,\ x_1x_2=8,\ x_1=2x_2,\ x_1=\frac{1}{2}x_2.$

8. Обчислити площі фігур, обмежених лініями, через подвійний інтеграл по брусу у відповідній системі координат:

1) $x_1+x_2=2,\ x_1+x_2=3,\ x_1-2x_2=0,\ x_1-2x_2=1;$
2) $x_1-x_2=3,\ x_1-x_2=4,\ x_1+2x_2=1,\ x_1+2x_2=2;$
3) $6x_1+7x_2=3,\ 6x_1+8x_2=2,\ 5x_1+7x_2=4,\ 6x_1+8x_2=1;$
4) $x_1-3x_2=5,\ x_2-3x_1=6,\ x_1-3x_2=6,\ x_2-3x_1=5;$
5) $x_1+\pi x_2=3,\ \pi x_1+x_2=4,\ x_1+\pi x_2=5,\ \pi x_1+x_2=6;$
6) $6x_1+7x_2=4,\ 7x_1+8x_2=5,\ 6x_1+7x_2=6,\ 7x_1+8x_2=6;$
7) $2x_1+3x_2=1,\ 2x_1+3x_2=2,\ x_1=2x_2,\ x_2=2x_1;$
8) $x_1+2x_2=1,\ x_1+2x_2=3,\ x_1=3x_2,\ x_2=3x_1;$
9) $x_1+x_2=1,\ x_1+x_2=-1,\ x_1=2x_2,\ x_2=2x_1;$
10) $5x_1+x_2=2,\ 5x_1+x_2=3,\ x_1+5x_2=1,\ x_1+5x_2=2.$

ЗАНЯТТЯ 15
ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА ПО ЦИЛІНДРИЧНІЙ МНОЖИНІ В $\mathbf{R}^3$

Контрольне запитання

1. *Зведення інтеграла по циліндричній множині в $\mathbf{R}^3$ до повторного інтеграла.*

A15

1. Зобразити одне з можливих тіл, об'єм якого дорівнює наведеному інтегралу. Виразити цей об'єм через потрійний інтеграл.

1) $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x_1} (x_1^2 + x_2^2)\, dx_2 \right) dx_1;$

2) $\int\limits_A \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{9}}\, dx_1 dx_2$, де $A = \left\{ (x_1, x_2) \mid \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \le 1 \right\}$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2, \quad x_2 = x_1^2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0.$$

3. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_C \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{(2 + x_1 + x_2 + x_3)^3}$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1 + x_2 + x_3 = 2,\ x_i = 0,\ i = 1, 2, 3;$

2) $\int\limits_C x_1 x_2^2 x_3^3\, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3 = x_1 x_2,\ x_2 = x_1,\ x_1 = 1,\ x_3 = 0,\ x_1 \ge x_2,\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3;$

3) $\int\limits_C x_1 x_2 x_3\, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_i = 0,\ i = 1, 2, 3,\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3;$

4) $\int\limits_C x_1\, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_2 = 1,\ x_1 + x_3 = 2,\ x_i = 0,\ i = 1, 2, 3;$

5) $\int\limits_C (1 + 3x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_3^2) e^{x_1 x_2 x_3}\, dx_1 dx_2 dx_3$, де $C = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

4. Нехай $f \in C(\mathbf{R}^3)$. Різними можливими способами розставити межі інтегрування в інтегралах:

1) $\int\limits_{-1}^{1} \Big(\int\limits_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \Big(\int\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{1} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 \Big) dx_2 \Big) dx_1;$

2) $\int\limits_{0}^{1} \Big(\int\limits_{0}^{1-x_1} \Big(\int\limits_{0}^{x_1+x_2} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 \Big) dx_2 \Big) dx_1.$

5. Нехай $f \in C([0,1])$. Замінити інтеграл однократним

$$\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^{x_1} \Big(\int\limits_0^{x_2} f(x_3)\, dx_3 \Big) dx_2 \Big) dx_1.$$

6. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x_3 = x_1^2 + x_2^2$, $x_3 = 2(x_1^2 + x_2^2)$, $x_1 = x_2$, $x_2 = x_1^2$;

2) $6x_3 = x_1^2 + x_2^2$, $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Д1. Обчислити m-кратні інтеграли:

1) $\int\limits_{[0,1]^m} (x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^2\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

2) $\int\limits_A dx_1 dx_2 \ldots dx_m$, де A – m-вимірний симплекс, $A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_m \le a,\ x_k \ge 0,\ k = 1, 2, \ldots, m\};$

3) $\int\limits_A \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$, де A – m-вимірний симплекс, $A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_m \le a,\ x_k \ge 0,\ k = 1, 2, \ldots, m\};$

Д2. Обчислити m-кратні інтеграли:

1) $\int\limits_{[0,1]^m} (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

2) $\int\limits_{[0,1]\times[0,1]\times[0,2]^{m-2}} (x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_m^3)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

3) $\int\limits_{[0,\pi]^m} \sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

4) $\int\limits_{[-\pi,\pi]^m} \cos^2(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

5) $\int\limits_{[0,1]\times[0,2]^{m-1}} (x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \ldots + x_m^m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

6) $\int\limits_{[0,1]\times[0,2]\times[0,1]^{m-2}} (x_1 - x_2 + x_3 - \ldots + (-1)^{m+1} x_m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

7) $\int\limits_{[0,1]^m} (e^{x_1 - x_2} + e^{x_2 - x_3} + \ldots + e^{x_{m-1} - x_m} + e^{x_m - x_1})\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

8) $\int\limits_{[0,\pi]^m} (\sin x_1 + \sin 2x_2 + \ldots + \sin m x_m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

9) $\int\limits_{[-\pi,\pi]^m} \left(\cos x_1 + \cos \frac{x_2}{2} + \ldots + \cos \frac{x_m}{m}\right)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

10) $\int\limits_{A} x_1 x_2 \ldots x_m \, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$, де $A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_1 + x_2 + \ldots + +x_m \le 1,\ x_k \ge 0,\ k = 1, 2, \ldots, m\}$.

Д3. Для функції $f \in C([0, +\infty))$ довести рівність

$$\int\limits_0^t \Big(\int\limits_0^{x_1} \Big(\int\limits_0^{x_2} \Big(\ldots \Big(\int\limits_0^{x_{m-1}} f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_m)\, dx_m\Big) \ldots\Big) dx_3\Big) dx_2\Big) dx_1 = \\ = \frac{1}{m!} \left(\int\limits_0^t f(x)\, dx\right)^m, \quad t \ge 0.$$

Вказівка. Показати, що обидві частини рівності є розв'язком тієї самої задачі Коші.

Б15

1. Зобразити одне з можливих тіл, об'єм якого дорівнює наведеному інтегралу. Виразити цей об'єм через потрійний інтеграл.

1) $\int\limits_A (x_1 + x_2)\, dx_1 dx_2,$
$A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 + x_2 \le 2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\};$

2) $\int\limits_A \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le x_2\};$

3) $\int\limits_A (x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \le 2\};$

4) $\int\limits_A \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4\};$

5) $\int\limits_A 2\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\};$

6) $\int\limits_A (1 - x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\};$

7) $\int\limits_A (1-\sqrt{x_1^2+x_2^2})\,dx_1dx_2$,
$A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1,\ x_1\ge 0,\ x_2\le 0\}$;

8) $\int\limits_A (1-x_1-x_3)\,dx_1dx_3$,
$A=\{(x_1,x_3)\mid 0\le x_1+x_3\le 1,\ x_1\ge 0,\ x_3\ge 0\}$;

9) $\int\limits_A \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,dx_1dx_2$,
$A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1,\ 0\le x_1\le x_2\}$;

10) $\int\limits_A \sin\left(\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\,dx_1dx_2$,
$A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1\}$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x_3=1+x_1+x_2,\ x_3=0,\ x_1+x_2=1,\ x_1=0,\ x_2=0$;
2) $x_1+x_2+x_3=2,\ x_1^2+x_2^2=1,\ x_i=0,\ i=1,2,3$;
3) $x_3=\cos x_1\cos x_2,\ x_3=0,\ |x_1+x_2|\le\frac{\pi}{2},\ |x_1-x_2|\le\frac{\pi}{2}$;
4) $x_3=x_1x_2,\ x_1+x_2+x_3=1,\ x_3=0$;
5) $x_3=x_1^2+x_2^2+1,\ x_1=4,\ x_2=4,\ x_i=0,\ i=1,2,3$;
6) $3x_1+x_2=6,\ 3x_1+2x_2=12,\ x_1+x_2+x_3=6,$
$x_2=0,\ x_3=0$;
7) $x_3=x_1^2+x_2^2,\ x_1+x_2=1,\ x_i=0,\ i=1,2,3$;
8) $x_3=x_1^2+x_2^2,\ x_3=0,\ x_2=1,\ x_2=2x_1,\ x_2=6-x_1$;
9) $x_2=\sqrt{x_1},\ x_2=2\sqrt{x_1},\ x_1+x_3=6,\ x_3=0$;
10) $x_3=9-x_2^2,\ 3x_1+4x_2=12,\ x_i=0,\ i=1,2,3$.

3. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_C x_1x_2x_3\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями
$x_1^2+x_2^2=1,\ x_3=0,\ x_3=1$;

2) $\int\limits_C x_3\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями
$|x_1|+|x_2|=1,\ x_3=0,\ x_3=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$;

3) $\int\limits_C x_1x_2\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями
$|x_1|+|x_2|=1,\ x_3=0,\ x_3=x_1^2+x_2^2$;

4) $\int\limits_C (x_1+x_2)\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями
$x_1+x_3=1,\ x_1+x_3=2,\ x_1+x_2+x_3=1,\ x_i=0,\ i=1,2,3$;

5) $\int\limits_C x_1x_3\,dx_1dx_2dx_3$, де $C = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2+x_2^2 \le 1,\ 0 \le x_1 \le x_2,\ 0 \le x_3 \le \sqrt{x_1^2+x_2^2}\}$;

6) $\int\limits_C (1+x_1)^{-1}\,dx_1dx_2dx_3$, де $C = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2+x_2^2 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ 0 \le x_3 \le x_1x_2,\}$;

7) $\int\limits_C (x_2+x_3)\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=1,\ x_1=x_2,\ x_3=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\ x_1=0,\ x_3=0$;

8) $\int\limits_C (x_1x_3)^3\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3=\sqrt[4]{x_1x_2},\ x_1=x_2,\ x_1=1,\ x_i=0,\ i=1,2,3$;

9) $\int\limits_C (x_1-x_3)\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3=2\sqrt{x_1x_2},\ x_1=x_2,\ x_1=1,\ x_i=0,\ i=1,2,3$;

10) $\int\limits_C (1+x_1+x_2+x_3)^{-2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1+x_2+x_3=1,\ x_i=0,\ i=1,2,3$.

4. Нехай $f \in C(\mathbf{R}^3)$. Різними можливими способами розставити межі інтегрування в інтегралах:

1) $\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^{x_1^2+x_2^2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;

2) $\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^{1-x_1}\Big(\int\limits_0^{x_2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;

3) $\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^{x_1}\Big(\int\limits_0^{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;

4) $\int\limits_{-2}^2\Big(\int\limits_0^{\sqrt{4-x_1^2}}\Big(\int\limits_1^2 f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;

5) $\int\limits_0^1\Big(\int\limits_{-\sqrt{1-x_1^2}}^0\Big(\int\limits_0^{1-\sqrt{x_1^2+x_2^2}} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;

6) $\int\limits_{-1}^1\Big(\int\limits_0^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;

7) $\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^{x_1+x_2+1} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 \Big) dx_2 \Big) dx_1;$

8) $\int\limits_{-1}^1 \Big(\int\limits_{-1}^1 \Big(\int\limits_0^{x_1+x_2+2} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 \Big) dx_2 \Big) dx_1;$

9) $\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^{x_1} \Big(\int\limits_0^{x_1^2+x_2^2} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 \Big) dx_2 \Big) dx_1;$

10) $\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{x_1}^1 \Big(\int\limits_0^{x_1+x_2} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 \Big) dx_2 \Big) dx_1.$

5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x_3 = x_1 + x_2,\ x_3 = x_1 x_2,\ x_1 + x_2 = 1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0;$
2) $x_1^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 + x_2 = \pm 1,\ x_1 - x_2 = \pm 1;$
3) $x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2,\ x_3 = 1 - x_1 - x_2,\ x_i = 0,\ i = 1, 2, 3;$
4) $x_3 = 6 - x_1^2 - x_2^2,\ x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$
5) $x_3 = 4 - x_2^2,\ x_3 = x_2^2 + 2,\ x_1 = -1,\ x_1 = 2;$
6) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = x_1^2 + 2x_2^2,\ x_2 = x_1,\ x_2 = 2x_1,\ x_1 = 1;$
7) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = 2(x_1^2 + x_2^2),\ x_2 = x_1^2,\ x_2 = x_1^3;$
8) $x_3 = \ln(x_1 + 2),\ x_3 = \ln(6 - x_1),\ x_1 = 0,\ x_1 + x_2 = 2,\ x_1 - x_2 = 2;$
9) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$
10) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = 2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$

ЗАНЯТТЯ 16
ФОРМУЛА ЗАМІНИ ЗМІННИХ У ПОТРІЙНОМУ ІНТЕГРАЛІ

Контрольні запитання

1. *Формули переходу до циліндричних та сферичних координат.*
2. *Загальна формула заміни змінних у потрійному інтегралі.*

А16

1. Обчислити інтеграли, перейшовши до сферичних координат:

1) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнею $x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_3$;

2) $\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{\sqrt{2-x_1^2-x_2^2}} x_3^2\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1.$

2. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_C (x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2dx_3,$$

де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=2x_3$ та $x_3=2$, перейшовши до циліндричних координат.

3. Перейшовши до циліндричних координат, обчислити об'єм тіла, що лежить у області $\big\{(x_1,x_2,x_3)\,|\; x_1^2+x_2^2\le x_3^2\big\}$ і обмежене поверхнею $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2x_3$.

4. Зробивши відповідну заміну змінних, обчислити об'єм тіла, що обмежене поверхнями $x_3=x_1^2+x_2^2$, $x_3=2(x_1^2+x_2^2)$, $x_1x_2=1$, $x_1x_2=2$, $x_1=2x_2$, $2x_1=x_2$; $\;x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$.

5. Обчислити об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $x_3=x_1^2+x_2^2,\ x_1^2+x_2^2=x_1,\ x_1^2+x_2^2=2x_1,\ x_3=0;$

2) $x_3^2=x_1x_2,\ x_1^2+x_2^2=4;$

3) $x_3=x_1^2+x_2^2,\ x_1x_2=1,\ x_1x_2=2,\ x_2=\frac{x_1}{2},\ x_2=2x_1,\ x_3=0.$

6. Знайти координати центра ваги однорідного тіла, обмеженого поверхнями $4x_1^2+4x_2^2=x_3^2$, $x_3=2$.

Б16

1. Обчислити інтеграли, перейшовши до сферичних координат:

1) $\int\limits_C (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}\, dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнею $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_3=0$;

2) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\, dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $x_1=2x_2$, $x_2=2x_1$;

3) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\, dx_1dx_2dx_3$, де $C=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 4,\ x_i\ge 0,\ i=1,2,3\}$;

4) $\int\limits_C \exp((x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2})\, dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$;

5) $$\int\limits_{-1}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int\limits_{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{4-x_1^2-x_2^2}} x_1x_3\, dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$$

6) $$\int\limits_{1}^{1/\sqrt{2}}\Big(\int\limits_{x_1}^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{\sqrt{4-x_1^2-x_2^2}} x_3^3\, dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$$

7) $$\int\limits_{-1}^{0}\Big(\int\limits_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{0}\Big(\int\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{3\sqrt{x_1^2+x_2^2}} x_1x_2x_3\, dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$$

8) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\, dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3=x_1^2+x_2^2$, $x_1=x_2$, $x_2=1$, $x_1=0$, $x_3=0$;

9) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\, dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3=x_1^2+x_2^2$, $x_3=2(x_1^2+x_2^2)$, $x_1=\pm x_2$, $x_1^2+x_2^2=1$; $x_1\ge 0$;

10) $\int\limits_C \sin(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}\, dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$; $\ x_i\ge 0,\ i=1,2,3.$

2. Обчислити інтеграли, перейшовши до циліндричних координат:

1) $\int\limits_C (x_1^2 + x_2^2)^2\, dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2 + x_2^2 = x_3$, $x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$, $x_1^2 + x_2^2 = 1$;

2) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2 + x_2^2 = x_3$, $x_3 = 3$, $|x_1| \le |x_2|$;

3) $\int\limits_C dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 4$, $(x_1^2 + x_2^2)^2 = 4(x_1^2 - x_2^2)$;

4) $\int\limits_C dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2 + x_2^2 = x_3$, $x_1 + x_3 = 2$;

5) $\int\limits_C dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$;

6) $\int\limits_C dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 2x_3$, $x_1^2 + x_2^2 = x_3$;

7) $\int\limits_0^2 \Big(\int\limits_0^{\sqrt{2x_1 - x_1^2}} \Big(\int\limits_0^3 x_3\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_3\Big) dx_2\Big) dx_1$;

8) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1$, $x_3 = x_1^2 + x_2^2$, $x_3 = 0$;

9) $\int\limits_C x_3\, dx_1dx_2dx_3$, де тіло C є перетин куль $\overline{B}((0,0,0),1)$ і $\overline{B}((0,0,1),1)$ у евклідовій метриці;

10) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1dx_2dx_3$, де тіло C є перетин куль $\overline{B}((0,0,0),2)$ і $\overline{B}((0,0,-2),2)$ у евклідовій метриці.

3. Зробити заміну змінних та обчислити об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9}\right)^2 = x_1$;

2) $(x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2)^2 = x_1^2 + 4x_2^2$;

3) $(x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2)^2 =$

$$= x_1^2 + 4x_2^2 - 9x_3^2;$$

4) $\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{9}+x_3^2=1,\ \frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{9}=x_3;$
5) $x_1^2+x_2^2+x_3^4=1;$
6) $(x_1^2+x_2^2)^2+x_3^4=1;$
7) $(x_1+x_2+x_3)^2=x_1+x_2;\ x_i\geq 0,\ i=1,2,3;$
8) $(x_1+x_2+x_3)^2=x_1-x_2;\ x_i\geq 0,\ i=1,2,3;$
9) $x_1^2+x_3^2=1,\ x_1^2+x_3^2=4,\ x_1^2-x_2^2-x_3^2=0;\ x_1>0;$
10) $x_1-x_2+x_3=\pm 1,$
$x_1+x_2-x_3=\pm 1,$
$-x_1+x_2+x_3=\pm 1.$

4. Обчислити об'єми тіл, обмежених поверхнями:
1) $x_3=x_1+x_2,\ (x_1^2+x_2^3)^2=2x_1x_2,\ x_3=0;\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0;$
2) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ x_1^2+x_2^2\geq |x_1|;$
3) $x_1^2+x_2^2-x_3=0,\ (x_1^2+x_2^3)^2=x_1^2-x_2^2,\ x_3=0;$
4) $x_3=\exp(-x_1^2-x_2^2),\ x_3=0,\ x_1^2+x_2^2=4;$
5) $x_3=\cos\dfrac{\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{2},\ x_3=0,\ x_2=\dfrac{x_1}{\sqrt{3}},\ x_2=\sqrt{3}x_1;$
6) $x_3=x_1^2+x_2^2,\ x_3=x_1+x_2;$
7) $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}-\dfrac{x_3^2}{c^2}=-1,\ \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=1;\ \{a,b,c\}\subset(0,+\infty);$
8) $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=x_3,\ \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=\dfrac{x_1}{a}+\dfrac{x_2}{b};\ \{a,b\}\subset(0,+\infty);$
9) $(x_1^2+x_2^2)^2+x_3=1,\ x_3=0;$
10) $x_3=x_1x_2,\ x_1^2=x_2,\ x_1^2=2x_2,\ x_2^2=x_1,\ x_2^2=2x_1,\ x_3=0.$

5. Знайти координати центрів ваги тіл, обмежених поверхнями:
1) $x_3^2=x_1^2+x_2^2,\ x_3=0,\ x_1^2+x_2^2=1;$
2) $x_3=x_1^2+x_2^2,\ x_3=1;\quad x_1\geq 0,\ x_2\geq 0;$
3) $x_3=x_1^2+9x_2^2,\ x_3=4;\quad x_1\geq 0;$
4) $x_3^2=1-x_1^2-x_2^2,\ x_3=0;$
5) $x_3=x_1^2+x_2^2,\ x_3=1;\quad x_1\leq x_2\leq 2x_1;$
6) $x_1^2+x_2^2=1,\ x_3=\pm 1;\quad x_1\geq 0,\ x_2\geq 0;$
7) $x_1^2+x_2^2=1,\ x_3=\pm 1;\quad 0\leq x_1\leq x_2;$
8) $x_1^2+x_2^2=1,\ x_3=0,\ x_3=2;\quad x_1/2\leq x_2\leq 2x_1;$
9) $x_3^2=x_1^2+x_2^2,\ x_3^2=2(x_1^2+x_2^2),\ x_1^2+x_2^2=1;$
10) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1;\quad x_3\geq 0.$

ЗАНЯТТЯ 17
НЕВЛАСНІ КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Контрольні запитання

1. *Означення невласного кратного інтеграла від необмеженої функції.*
2. *Означення невласного кратного інтеграла по необмеженій множині.*

А17

1. Дослідити, при яких $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{R}$ збігається невласний інтеграл

$$\int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{dx_1 dx_2}{(1+|x_1|^\alpha)(1+|x_2|^\beta)}.$$

2. Дослідити, при яких $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{R}$ збігається невласний інтеграл

$$\int\limits_A \frac{dx_1 dx_2}{x_1^\alpha x_2^\beta}, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 1\},$$

і обчислити його.

3. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{\mathbf{R}^2} \exp(-x_1^2 - x_2^2) \cos(x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2.$$

4. Нехай $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, $f \in C(A)$ і $f(x_1, x_2) \neq 0$, $(x_1, x_2) \in A$. При яких $\alpha \in \mathbf{R}$ збігається невласний інтеграл

$$\int\limits_A \frac{f(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)^\alpha}\, dx_1 dx_2\,?$$

5. Дослідити на збіжність невласний інтеграл

$$\int\limits_A \frac{dx_1 dx_2}{x_1^2 + x_2^2},\ \text{де } A = \{(x_1, x_2) \mid |x_2| \leq x_1^2 \leq 1\}.$$

6. Довести співвідношення:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\{(x_1,x_2)\mid\ |x_1|\le n,\ |x_2|\le n\}} \sin(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2 = \pi;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\{(x_1,x_2)\mid\ x_1^2+x_2^2\le 2\pi n\}} \sin(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2 = 0.$

Чи збігається інтеграл

$$\int\limits_{\mathbf{R}^2} \sin(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2\ ?$$

Д1. Довести, що інтеграл

$$\int\limits_{\{(x_1,x_2)\mid\ x_1\ge 1,\ x_2\ge 1\}} \frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\,dx_1dx_2$$

розбігається, хоча обидва повторні інтеграли

$$\int\limits_1^{+\infty}\Big(\int\limits_1^{+\infty} \frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\,dx_1\Big)dx_2 \quad \text{і} \quad \int\limits_1^{+\infty}\Big(\int\limits_1^{+\infty} \frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\,dx_2\Big)dx_1$$

збігаються.

Д2. Дати означення невласного інтеграла та дослідити його збіжність

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{dx_1dx_2}{|x_1-x_2|^\alpha}, \quad \alpha\in\mathbf{R}.$$

Обчислити цей інтеграл. (Зверніть увагу на те, що при $\alpha>0$ в околі кожної точки прямої $x_1=x_2$ підінтегральна функція необмежена.)

Б17

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів збігаються інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_A \frac{dx_1dx_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^\alpha}, \quad A=\{(x_1,x_2)\mid 0\le x_2\le 1\},\ \alpha\in\mathbf{R};$

2) $\displaystyle\int\limits_A \frac{dx_1dx_2}{|x_1|^\alpha+|x_2|^\beta},$
$A=\{(x_1,x_2)\mid |x_1|+|x_2|\ge 1\},\ \alpha>0,\ \beta>0;$

3) $\displaystyle\int\limits_A \frac{\sin x_1 \sin x_2}{(x_1+x_2)^\alpha}\,dx_1dx_2,$

$A = \{(x_1,x_2) \mid x_1 + x_2 \ge 1\},\ \alpha \in \mathbf{R};$

4) $\displaystyle\int\limits_A \frac{\sin(x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^\alpha}\,dx_1dx_2,$

$A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \ge 4\},\ \alpha \in \mathbf{R};$

5) $\displaystyle\int\limits_A \frac{\cos(x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^\alpha}\,dx_1dx_2,$

$A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \ge 1,\ x_1 \le x_2\},\ \alpha \in \mathbf{R};$

6) $\int\limits_{\mathbf{R}^2} \exp(-(x_1^4+x_2^4)^\alpha)\,dx_1dx_2,\ \alpha \in \mathbf{R};$

7) $\int\limits_A \exp(-(x_1+x_2)^\alpha)\,dx_1dx_2,$

$A = \{(x_1,x_2) \mid 0 \le x_1 \le x_2\},\ \alpha \in \mathbf{R};$

8) $\int\limits_A (x_1^2+x_2^2-1)^\alpha\,dx_1dx_2,$

$A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \ge 4\},\ \alpha \in \mathbf{R};$

9) $\int\limits_{\mathbf{R}^2} \sin((x_1^2+x_2^2)^\alpha)\,dx_1dx_2,\ \alpha \in \mathbf{R};$

10) $\displaystyle\int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{dx_1dx_2}{(1+|x_1|+|x_2|)^\alpha},\ \alpha \in \mathbf{R}.$

2. Обчислити інтеграли чи виразити їх через значення Γ-функції:

1) $\displaystyle\int\limits_A \frac{dx_1dx_2}{(x_1+x_2)^2},\quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_1 + x_2 \ge 1,\ 0 \le x_1 \le 1\};$

2) $\displaystyle\int\limits_A \frac{dx_1dx_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}},\quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\};$

3) $\displaystyle\int\limits_A \frac{dx_1dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^2},\quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \ge 1\};$

4) $\displaystyle\int\limits_A \frac{dx_1dx_2}{x_1^2+x_2^2},\quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_2 \ge x_1^2 + 1\};$

5) $\int\limits_A \exp(-(x_1+x_2))\,dx_1dx_2,\quad A = \{(x_1,x_2) \mid 0 \le x_1 \le x_2\};$

6) $\int\limits_A e^{-x_1} x_2^\alpha \, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_2 \le x_1\}, \ \alpha > 0;$

7) $\int\limits_{\mathbf{R}^2} \exp(-(x_1^2 + x_2^2)^\alpha) \, dx_1 dx_2, \ \alpha > 0;$

8) $\int\limits_A (1 - x_1)^\alpha x_2^\beta \, dx_1 dx_2,$
$A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_2 \le x_1 \le 1\}, \ \alpha > -1, \ \beta > -1;$

9) $\int\limits_A x_1^\alpha x_2^\beta \, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_2 \le 1 - x_1, \ x_1 \ge 0\},$
$\alpha > -1, \ \beta > -1;$

10) $\int\limits_A (x_1^2 + x_2^2)^\alpha (1 - x_1^2 - x_2^2)^\beta \, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le$
$1, \ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0\}, \ \alpha > -1, \ \beta > -1.$

3. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_A \exp(-x_1^2 - x_2^2) \, dx_1 dx_2, \ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\};$

2) $\int\limits_{\mathbf{R}^2} x_1 x_2 \exp(-x_1^2 - x_2^2) \, dx_1 dx_2;$

3) $\int\limits_{\mathbf{R}^2} \exp(-(x_1^2 + x_1 + x_2^2 - x_2)) \, dx_1 dx_2;$

4) $\int\limits_{\mathbf{R}^2} x_1 \exp(-x_1^2 + x_1 - x_2^2) \, dx_1 dx_2;$

5) $\int\limits_{\mathbf{R}^2} x_1^3 x_2^3 \exp(-x_1^4 - x_2^4) \, dx_1 dx_2;$

6) $\int\limits_{\mathbf{R}^2} (x_1 + x_2) \exp(-(x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 + x_2)) \, dx_1 dx_2;$

7) $\int\limits_{\mathbf{R}^2} (1 + x_1 x_2) \exp(-(x_1^2 - x_1 + x_2^2)) \, dx_1 dx_2;$

8) $\int\limits_{\mathbf{R}^2} (x_1^2 + x_2^2) \exp(-x_1^2 - x_2^2) \, dx_1 dx_2;$

9) $\int\limits_{\mathbf{R}^2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \exp(-x_1^2 - x_2^2) \, dx_1 dx_2;$

10) $\int\limits_{\mathbf{R}^2} \exp(-(2x_1^2 + 3x_1 + 5x_2^2 + 4x_2 + 1)) \, dx_1 dx_2.$

4. Дослідити, при яких значеннях параметрів збігаються інтеграли:

1) $\int\limits_A \frac{dx_1 dx_2}{|x_1|^\alpha + |x_2|^\beta}, \ A = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \le 1\},$
$\alpha > 0, \ \beta > 0;$

2) $\int\limits_A |\ln(x_1^2+x_2^2)|^\alpha \, dx_1 dx_2,$

$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\},\ \alpha > 0;$

3) $\int\limits_A (x_1^2+x_2^2)^\alpha \, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le x_1\},\ \alpha \in \mathbf{R};$

4) $\int\limits_{[0,1]^3} \dfrac{dx_1 dx_2 dx_3}{x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma},\ \{\alpha, \beta, \gamma\} \in \mathbf{R};$

5) $\int\limits_A \exp(-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^\alpha) \, dx_1 dx_2 dx_3,$

$A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1\},\ \ \alpha \in \mathbf{R};$

6) $\int\limits_A (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^\alpha \, dx_1 dx_2 dx_3,$

$A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 2x_1\},\ \ \alpha \in \mathbf{R};$

7) $\int\limits_A (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^\alpha \, dx_1 dx_2 dx_3,$

$A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le x_2\},\ \ \alpha \in \mathbf{R};$

8) $\int\limits_A (|x_1|+|x_2|+|x_3|)^\alpha \, dx_1 dx_2 dx_3,$

$A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \le 1\},\ \ \alpha \in \mathbf{R};$

9) $\int\limits_A (x_1^4+x_2^4+x_3^4)^\alpha) \, dx_1 dx_2 dx_3,$

$A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \le 1\},\ \ \alpha \in \mathbf{R};$

10) $\int\limits_A (|x_1|^\alpha+|x_2|^\alpha+|x_3|^\alpha)^{\alpha-6} \, dx_1 dx_2 dx_3,$

$A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha + |x_3|^\alpha \le 1\},\ \alpha > 0.$

ЗАНЯТТЯ 18
ДОВЖИНА ДУГИ. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО РОДУ

Контрольні запитання

1. *Формула для обчислення довжини дуги.*
2. *Формула для обчислення криволінійного інтеграла I роду.*
3. *Формули для обчислення маси та центру ваги дуги кривої.*

A18

1. Обчислити довжину кривої Γ.

1) Γ – дуга кривої $\left\{(3t, 3t^2, 2t^3) \mid t \in \mathbf{R}\right\}$ від точки $(0,0,0)$ до точки $(3,3,2)$;
2) $\Gamma = \{(t\cos t, t\sin t, t) \mid 0 \le t \le \pi\}$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_\Gamma f dl$.

1) $\Gamma = \{(a\cos t, a\sin t, bt) \mid 0 \le t \le 2\pi\}, a > 0, b > 0;$
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;$
2) Γ – дуга кривої $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2, x_2^2 = x_1$ від точки $(0,0,0)$ до точки $(1, 1, \sqrt{2})$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_3, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.

3. Знайти масу кривої $\Gamma = \left\{(x_1, x_2) \mid x_2^2 = 4x_1, 0 \le x_1 \le 1\right\}$, якщо лінійна щільність цієї кривої в точці $(x_1, x_2) \in \Gamma$ рівна $|x_2|$.

4. Визначити центр ваги однорідної кривої Γ :

1) $\Gamma = \{(t - \sin t, 1 - \cos t) \mid 0 \le t \le \pi\}$;
2) $\Gamma = \left\{(e^t\cos t, e^t \sin t, e^t) \mid -1 \le t \le 0\right\}$;

5. Обчислити довжину і центр мас однорідної кривої
$\left\{(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}) \mid 0 \le t < +\infty\right\}$.

Б18

1. Обчислити довжину кривої Γ.

1) $\Gamma = \left\{(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}) \mid 0 \le t \le 1\right\}$.
2) Γ – дуга кривої $\left\{(x_1, \arcsin x_1, \frac{1}{4}\ln\frac{1-x_1}{1+x_1}) \mid -1 < x_1 < 1\right\}$ від точки $(0,0,0)$ до точки (x_1^0, x_2^0, x_3^0);
3) $\Gamma = \left\{(t, \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}, \frac{t^2}{2}) \mid 0 \le t \le 1\right\}$.

4) $\Gamma = \left\{ (\frac{\sqrt{2}}{2}t^2, \frac{t^3}{3}, t) \mid 0 \le t \le 4 \right\}$.
5) $\Gamma = \left\{ (\frac{t^2}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{5}t^{5/2}, \frac{t^3}{3}) \mid 4 \le t \le 9 \right\}$.
6) $\Gamma = \left\{ (t, \frac{4\sqrt{2}}{5}t^{5/4}, \frac{2}{3}t^{3/2}) \mid 0 \le t \le 1 \right\}$.
7) $\Gamma = \left\{ (\frac{t^4}{4}, t, \frac{2\sqrt{2}}{5}t^{5/2}) \mid 1 \le t \le 2 \right\}$.
8) $\Gamma = \left\{ (\frac{t^2}{2}, \sqrt{2}t, \ln t) \mid e^{-1} \le t \le e \right\}$.
9) $\Gamma = \left\{ (\frac{2}{3}t^{3/2}, t\sqrt{2}, 2t^{1/2}) \mid 1 \le t \le 4 \right\}$.
10) $\Gamma = \left\{ (t, 2\sqrt{2}e^{t/2}, e^t) \mid \ln 2 \le t \le \ln 3 \right\}$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_\Gamma f dl$.

1) Γ – межа фігури, обмеженої кривими $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 = x_2, x_1 \ge x_2; f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;
2) $\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| = 1\}; f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;
3) Γ – межа трикутника з вершинами $(0,0), (2,1), (1,2); f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;
4) Γ – межа сектора круга $x_1^2 + x_2^2 \le 1, x_1 \ge |x_2|; f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;
5) Γ – межа трикутника з вершинами $(0,0), (1,0), (0,1)$; $f(x_1, x_2) = x_1 x_2, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;
6) $\Gamma = \{(t - \sin t, 1 - \cos t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}; f(x_1, x_2) = x_1^2, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;
7) $\Gamma = \{(\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$; $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;
8) $\Gamma = \{(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \mid 0 \le t \le t_0\}, t_0 > 0; f(x_1, x_2) = x_1 x_2, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;
9) $\Gamma = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 1 \right\}; f(x_1, x_2) = x_1^{4/3} + x_2^{4/3}, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;
10) Γ – границя сектора $\left\{ (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1, 0 \le x_2 \le x_1 \right\}; f(x_1, x_2) = \exp(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}), (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;
11) Γ – границя трикутника з вершинами $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^2 + x_3^3, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;
12) Γ – границя прямокутника з вершинами $(1,0,0), (1,1,0), (0,1,1), (0,0,1)$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^3, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;
13) Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(1,0,0), (0,1,0), (1,0,1)$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;

14) Γ – границя трикутника з вершинами $(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_2,(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$;
15) Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(0,0,0),(1,1,1),(3,2,1)$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_1-x_2,(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$;
16) Γ – коло $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_1+x_2+x_3=0$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2,(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$;
17) $\Gamma=\{(t\cos t,t\sin t,t)\mid 0\le t\le t_0\}, t_0>0$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_3,(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$;
18) Γ – чверть кола $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_1=x_2$, що лежить в першому октанті; $f(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2,(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$;
19) Γ – чверть кола $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4, x_1^2+x_2^2=1, x_3\ge 0$, що лежить в першому октанті; $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3,(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$;
20) Γ – коло $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_2=x_3; f(x_1,x_2,x_3)=x_2-x_3,(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$.

3. Знайти масу кривої Γ з лінійною щільністю ρ:
1) $\Gamma=\{(x_1,\ln x_1)\mid 1\le x_1\le e\}, \rho(x_1,x_2)=x_1^2,(x_1,x_2)\in\Gamma$.
2) $\Gamma=\left\{(a\cos t,b\sin t)\mid 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right\}, a>0,b>0; \rho(x_1,x_2)=x_2,(x_1,x_2)\in\Gamma$.
3) $\Gamma=\left\{(t,\frac{t^2}{2},\frac{t^3}{3})\mid 0\le t\le 1\right\}, \rho(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{2x_2},(x_1,x_2,x_3)\in\Gamma$.
4) $\Gamma=\left\{(x_1,\frac{x_1^2}{2})\mid 1\le x_1\le 2\right\}, \rho(x_1,x_2)=\frac{x_2}{x_1},(x_1,x_2)\in\Gamma$.
5) $\Gamma=\left\{(\ln(1+t^2),2\operatorname{arctg} t-t)\mid 0\le t\le 1\right\}, \rho(x_1,x_2)=x_2e^{-x_1}$, $(x_1,x_2)\in\Gamma$.

4. Визначити центр ваги однорідної кривої Γ :
1) $\Gamma=\left\{(x_1,x_2)\mid \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=1\right\}$;
2) $\Gamma=\left\{(x_1,x_2)\mid x_2^2=x_1^3-x_1^4\right\}$;
3) $\Gamma=\{(x_1,\operatorname{ch} x_1)\mid -1\le x_1\le 1\}$;
4) Γ – дуга кола радіуса a при центральному куті $2\varphi, 0<\varphi<\pi$.
5) $\Gamma=\left\{(x_1,x_2)\mid x_1^{2/3}+x_2^{2/3}=1, x_2\ge 0\right\}$.

ЗАНЯТТЯ 19
ПЛОЩА ПОВЕРХНІ. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО РОДУ

Контрольні запитання

1. *Формула для обчислення площі поверхні.*
2. *Формула для обчислення поверхневого інтеграла I роду.*

А19

1. Обчислити площу поверхні (випадок явного задання поверхні).

1) $x_3 = x_1 x_2, x_1^2 + x_2^2 \leq 1;$
2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2, \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1; 0 < b < a.$

2. Обчислити площу поверхні (випадок параметричного задання поверхні).

1) $x_1 = (b+a\cos\psi)\cos\varphi, x_2 = (b+a\cos\psi)\sin\varphi, x_3 = a\sin\psi;$ $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \psi_1 \leq \psi \leq \psi_2; 0 < a \leq b, 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi, 0 \leq \psi_2 < \psi_2 \leq 2\pi$. Чому дорівнює поверхня всього тора $(\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi, \psi_1 = 0, \psi_2 = 2\pi)$?
2) $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi, x_3 = \varphi; 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

3. Обчислити поверхневий інтеграл I роду $\int\limits_S f d\sigma$:

1) S – поверхня $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = a^2, x_3 \geq 0, a > 0; f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;$
2) S – поверхня тетраедра $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 3;$ $f(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_1 + x_2)^{-2}, (x_1, x_2, x_3) \in S;$
3) S – частина поверхні конуса $x_1 = r\cos\varphi\sin\alpha, x_2 = r\sin\varphi\sin\alpha,$ $x_3 = r\cos\alpha; 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi; a, \alpha$ – сталі, $a > 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};\ f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3.$

4. Знайти масу параболічної оболонки
$S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = (x_1^2 + x_2^2)/2, 0 \leq x_3 \leq 1\right\}$ з щільністю $\rho(x_1, x_2, x_3) = x_3, (x_1, x_2, x_3) \in S.$

Б19

1. Обчислити площу поверхні (випадок явного задання поверхні).

1) $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1^2 + x_3^2 = 1;$
2) $\frac{1}{2}x_3^2 = x_1 x_2, \frac{1}{2} \leq x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$

3) $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_1^2 + x_2^2 \le 2x_2;$
4) $x_3 = x_1 - x_2, |x_1 - x_2| \le 1, |x_1 + x_2| \le 1;$
5) $x_1^2 + x_2^2 = 1, -x_1 \le x_3 \le x_1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$
6) $(x_1^2 + x_2^2)^{3/2} + x_3 = 8, x_3 \ge 0;$
7) $(x_1 + 2x_2)^2 + x_3 = 1, 0 \le x_2 \le \frac{1}{2}, x_3 \ge 0;$
8) $x_3 = x_1^2 - 2x_2^2, x_1^2 + 4x_2^2 \le 1, x_3 \ge 0;$
9) $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_1^2 + x_2^2 \le 1, x_2^2 \le x_1^2;$
10) $(x_1^2 + x_2^2)x_3 = x_1 + x_2, 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2. Обчислити площу поверхні (випадок параметричного задання поверхні).

1) $x_1 = R\cos\varphi\sin\psi, x_2 = R\sin\varphi\sin\psi, x_3 = R\cos\psi; 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \psi \le \pi; R > 0.$
2) $x_1 = R\cos\varphi\cos\psi, x_2 = R\sin\varphi\cos\psi, x_3 = R\sin\psi; \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \psi_1 \le \psi \le \psi_2; R > 0, 0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi, 0 \le \psi_2 < \psi_2 \le \frac{\pi}{2}.$
3) $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi, x_3 = r\sqrt{\cos 2\varphi}; -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, 0 \le r \le \sqrt{\cos 2\varphi}.$
4) $x_1 = \cos\varphi\cos\psi, x_2 = \sin\varphi\cos\psi, x_3 = \sin\psi; 0 \le \varphi \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}, |\cos\psi| \ge |\cos\varphi|.$
5) $x_1 = \cos\varphi\sin\psi, x_2 = \sin\varphi\sin\psi, x_3 = \cos\psi; 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \psi \le \pi, |\sin\psi| \le |\sin\varphi|.$
6) $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi, x_3 = \frac{r^2}{2}; r \ge 0, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, r^2 \le \sin 2\varphi.$
7) $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi, x_3 = r^2\cos 2\varphi/2; 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi.$
8) $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi, x_3 = \frac{r^2}{2}; 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi.$
9) $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi, x_3 = r; 0 \le r \le 2\sin\varphi, 0 \le \varphi \le \pi.$
10) $x_1 = 2r\cos\varphi, x_2 = 3r\sin\varphi, x_3 = r^2(\cos^2\varphi - \frac{3\sin^2\varphi}{2}); 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi, |\cos 2\varphi| \ge \frac{\sqrt{3}|\sin\varphi|}{2}.$

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S f d\sigma$:

1) $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 4, 0 \le x_3 \le x_2 + 3\right\};$
$f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;$
2) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_i \ge 0, 1 \le i \le 3\};$
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;$

3) $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3^2 = x_1^2 + x_2^2, 1 \le x_3 \le 2\right\}$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;
4) S – частина циліндра $x_1^2 + x_2^2 = 1$, що вирізана площинами $x_3 = 0, x_3 = x_1 + 2$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;
5) $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_3 = x_1^2, x_2 \ge 0, x_1 \le 2, x_1 \ge x_2\right\}$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;
6) $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;
7) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| + |x_2| = 1, 0 \le x_3 \le 1\}$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;
8) S – поверхня призми з вершинами $(0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (0,1,0), (1,1,0), (1,1,1)$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;
9) S – поверхня куба $[0,1]^3$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.

4. Нехай $f \in C(\mathbf{R}), a, b, c \in \mathbf{R}$. Довести формулу Пуассона $\int\limits_S f(ax_1 + bx_2 + cx_3)d\sigma = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} f(x\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})dx$, де S – поверхня сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

5. Знайти масу:
1) півсфери $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \ge 0\right\}$ зі щільністю $\rho(x_1, x_2, x_3) = x_3, (x_1, x_2, x_3) \in S$;
2) сфери $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$ зі щільністю $\rho(x_1, x_2, x_3) = x_3^2, (x_1, x_2, x_3) \in S$.

6. Знайти центр ваги однорідної поверхні:
1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_i \ge 0, 1 \le i \le 3$;
2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, a \le x_3 \le 1, a \in [-1, 1)$;
3) $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi, x_3 = \varphi; 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \pi$;
4) $3x_3 = 2(x_1\sqrt{x_1} + x_2\sqrt{x_2}), x_1 + x_2 \le 1$;
5) $x_1^2 = 2 - 2x_3, 0 \le x_2 \le x_1, x_3 \ge 0$;
6) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_1^2 + x_2^2 \le x_1, x_3 \ge 0$;
7) $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_1^2 + x_2^2 \le x_1$;
8) $x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_1 + x_2 \le 1$.

ЗАНЯТТЯ 20
КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ДРУГОГО РОДУ

Контрольні запитання

1. *Означення криволінійного інтеграла другого роду та формула для його обчислення.*
2. *Фізична інтерпретація криволінійного інтеграла другого роду.*
3. *Формула для обчислення криволінійного інтеграла від диференціала.*
4. *Умова незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.*
5. *Зовнішній диференціал диференціальної форми.*

А20

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)$ вздовж кривої Γ з початком у точці $(0,0)$ і кінцем у точці $(1,2)$, якщо:

1) Γ – відрізок прямої;
2) Γ – парабола, вісь якої – вісь ординат Ox_2;
3) Γ – ламана, що складається з відрізка OB осі Ox_1 і відрізка BA, паралельного осі Ox_2.

2. Обчислити криволінійні інтеграли:

1) $\int\limits_{\Gamma}\left[(x_1^2 - 2x_1x_2)\,dx_1 + (x_2^2 - 2x_1x_2)\,dx_2\right]$, де Γ – відрізок параболи
$x_2 = x_1^2,\ x_1 \in [-1,1]$, що пробігається відповідно зростанню x_1;
2) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{(x_1+x_2)\ dx_1 - (x_1-x_2)\ dx_2}{x_1^2+x_2^2}$, де Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 = 1$, що пробігається проти руху годинникової стрілки;
3) $\int\limits_{\Gamma}(x_2\ dx_1 + x_3\ dx_2 + x_1\ dx_3)$, де Γ – виток гвинтової лінії $x_1 = \cos t,\ x_2 = \sin t,\ x_3 = 2t,\ 0 \le t \le 2\pi$, рух по Γ відповідає зростанню t;
4) $\int\limits_{\Gamma}\big((x_2^2 - x_3^2)\ dx_1 + (x_3^2 - x_1^2)\ dx_2 + (x_1^2 - x_2^2)\ dx_3\big)$, де Γ – контур, який обмежує частину сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_i \ge 0,\ i = 1,2,3$, і пробігається так, що зовнішній бік цієї поверхні залишається зліва.

3. Сила $\vec{F}(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$. Знайти роботу сили, яка витрачається на переміщення матеріальної точки по дузі параболи $x_2^2 = 8x_1$ від точки $(2, 4)$ до точки $(4, 4\sqrt{2})$.
4. Знайти роботу, що виконує сила земного тяжіння по переміщенню матеріальної точки маси m з точки (x_1, x_2, x_3) у точку (y_1, y_2, y_3). Вважати вісь аплікат Ox_3 направленою вертикально вгору.

5. Перевірити, що форма ω є повним диференціалом, і обчислити $\int\limits_A^B \omega$.

1) $\omega = (x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2)x_1^{-2}, A = (2, 1), B = (1, 2)$, шлях інтегрування не перетинає вісь Ox_2;
2) $\omega = (x_1^4 + 4x_1x_2^3)\,dx_1 + (6x_1^2x_2^2 - 5x_2^4)\,dx_2, A = (-2, -1), B = (3, 0)$;
3) $\omega = e^{x_1}(\cos x_2\,dx_1 - \sin x_2\,dx_2), A = (0, 0), B = (2, 3)$;
4) $\omega = x_2x_3\,dx_1 + x_3x_1\,dx_2 + x_1x_2\,dx_3, A = (1, 2, 3), B = (6, 1, 1)$.

6. Визначити функцію $z : A \to \mathbf{R}$, що має наступний диференціал в A :
1) $dz = (x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2)\,dx_1 + (x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2)\,dx_2, (x_1, x_2) \in A = \mathbf{R}^2$;
2) $dz = (x_1\,dx_2 - 2x_2\,dx_1)x_1^{-3}, (x_1, x_2) \in A = [1, +\infty) \times \mathbf{R}$;
3) $dz = \cos x_2\,dx_1 - x_1 \sin x_2\,dx_2, (x_1, x_2) \in A = \mathbf{R}^2$;
4) $dz = (x_1^2 - 2x_2x_3)\,dx_1 + (x_2^2 - 2x_1x_3)\,dx_2 + (x_3^2 - 2x_1x_2)\,dx_3, (x_1, x_2, x_3) \in A = \mathbf{R}^3$.

7. Знайти роботу сили $\vec{F}(x_1, x_2) = (0, -mg), (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, g > 0$, по переміщенню матеріальної точки маси m з положення (x_1^0, x_2^0) в положення (y_1^0, y_2^0).
8. Нехай $f \in C(\mathbf{R})$, Γ – кусково-гладка замкнена крива в $\mathbf{R}^3$. Довести, що $\int\limits_\Gamma f(x_1^2 + x_2^2)(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2) = 0$.
Д1. Нехай $R > 0$. Довести, що множина $A = \left\{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1^2 + x_2^2 < R^2\right\}$ не є однозв'язною. *Вказівка.* Розглянути диференціальну форму $\omega = (x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2)/(x_1^2 + x_2^2), (x_1, x_2) \in A$.

Б20

1. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_\Gamma \omega$:

1) Γ – границя трикутника з вершинами $(0,0),(2,1),(1,2)$, що пробігається у напрямку $(0,0)\to(2,1)\to(1,2)\to(0,0)$; $\omega = x_1^2x_2\,dx_1 + x_1x_2^2\,dx_2$;
2) $\Gamma = \{(x_1,x_2)\,|\,|x_1|+|x_2|=1\}$ пробігається за рухом годинникової стрілки; $\omega = x_1\,dx_1 - x_1x_2\,dx_2$;
3) Γ – замкнений контур, що складається з відрізків ліній $x_2 = x_1^2,\ x_2 = x_1+2$ і пробігається проти руху годинникової стрілки; $\omega = x_1x_2\,dx_1 + x_2^2\,dx_2$;
4) Γ – крива, що складається з відрізка прямої від точки $(-1,0)$ до точки $(0,1)$ і розташованої у першому квадранті дуги кола з центром у точці $(0,0)$, що пробігається від точки $(0,1)$ до точки $(1,0)$; $\omega = x_1\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2$;
5) Γ – межа квадрата з вершинами $(1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1)$ що пробігається проти годинникової стрілки; $\omega = -x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-1}\,dx_1 + x_1(x_1^2+x_2^2)^{-1}\,dx_2$;
6) Γ – крива $x_2 = 1-|1-x_1|,\ 0\le x_1\le 2$, що пробігається у напрямку зростання x_1; $\omega = (x_1^2+x_2^2)\,dx_1 + (x_1^2-x_2^2)\,dx_2$;
7) Γ – еліпс $\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{9}=1$, що пробігається проти годинникової стрілки; $\omega = (x_1+x_2)\,dx_1 + (x_1-x_2)\,dx_2$;
8) Γ – арка циклоїди $x_1 = t-\sin t,\ x_2 = 1-\cos t,\ 0\le t\le 2\pi$, що пробігається у напрямку зростання t; $\omega = (2-x_2)\,dx_1 + x_1\,dx_2$;
9) Γ – відрізок прямої від точки $(0,\pi)$ до точки $(\pi,0)$; $\omega = \sin x_2\,dx_1 + \sin x_1\,dx_2$;
10) Γ – межа фігури, обмеженої кривими $x_2 = x_1^2, x_2 = x_1$, що пробігається проти годинникової стрілки; $\omega = x_1^2x_2\,dx_1 + 2x_1x_2^2\,dx_2$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_\Gamma \omega$:

1) Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(1,0,0),(1,0,2),(0,1,0)$; $\omega = -x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 - x_3\,dx_3$;
2) Γ – відрізок прямої від точки $(0,0,0)$ до точки $(1,2,3)$; $\omega = -x_1\,dx_1 + x_2x_3\,dx_2 - x_1x_2\,dx_3$;
3) Γ – межа трикутника з вершинами $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, що пробігається у напрямку $(1,0,0)\to(0,1,0)\to(0,0,1)\to(1,0,0)$; $\omega = x_1x_3\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2 + x_1x_3\,dx_3$;

4) Γ – межа прямокутника, що пробігається у напрямку $(1,0,0) \to$ $\to (1,1,0) \to (0,1,1) \to (0,0,1) \to (1,0,0)$; $\omega = x_1x_2\,dx_1 - x_2\,dx_2 + x_1x_3\,dx_3$;
5) $\Gamma = \left\{(x_1,x_2,x_3) \mid |x_2| = 4 - x_1^2, x_3 = 0\right\}$, що пробігається у напрямку від точки $(2,0,0)$ до точки $(0,4,0)$ проти годинникової стрілки, якщо дивитися з точки $(0,0,1)$; $\omega = x_1x_2\,dx_1 + x_2^2\,dx_2 + x_1x_2\,dx_3$;
6) Γ – відрізок прямої від точки $(1,1,1)$ до точки $(2,3,4)$; $\omega = x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + (x_1+x_2-1)\,dx_3$;
7) Γ – дуга гвинтової лінії $x_1 = 2\cos t, x_2 = 2\sin t, x_3 = \frac{t}{2\pi}, t \in \mathbf{R}$, від точки перетину з площиною $x_3 = 0$ до точки перетину з площиною $x_3 = 1$; $\omega = x_2x_3\,dx_1 + x_3x_1\,dx_2 + x_1x_2\,dx_3$;
8) Γ – відрізок прямої від точки $(1,1,1)$ до точки $(4,4,4)$; $\omega = \dfrac{x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2 - x_1 - x_2 + 2x_3}}$;
9) Γ – межа прямокутника, що пробігається у напрямку $(1,0,0) \to$ $\to (1,1,0) \to (0,1,1) \to (0,0,1) \to (1,0,0)$; $\omega = x_1x_2\,dx_1 - dx_2$;
10) Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(1,0,0), (0,1,0), (1,0,1)$; $\omega = \sin x_1\,dx_1 + \sin x_2\,dx_2 + \sin x_3\,dx_3$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_\Gamma \omega$:

1) Γ – коло $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1, x_2 = x_1$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = (x_2 - x_3)\,dx_1 + (x_3 - x_1)\,dx_2 + (x_1 - x_2)\,dx_3$;
2) Γ – частина кривої Вівіані $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1, x_1^2+x_2^2 = x_1, x_3 \geq 0$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі $Ox_1 (x_1 > 1)$; $\omega = x_2^2\,dx_1 + x_3^2\,dx_2 + x_1^2\,dx_3$;
3) Γ – лінія перетину сфери $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 4$ і циліндра $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1$, що лежить в області $x_3 \geq 0$ і пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат; $\omega = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(dx_1+dx_2+dx_3)$;
4) Γ – замкнена ламана лінія, що з'єднує точки $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ і пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат; $\omega = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1+x_2+x_3}}\,dx_1 + \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1+x_2+x_3}}\,dx_2 + \dfrac{x_3}{\sqrt{x_1+x_2+x_3}}\,dx_3$;

5) Γ – перетин поверхні куба $|x_i| \le 1,\ i = 1,2,3,$ і площини $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$; напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = x_1\,dx_1 - x_3\,dx_2 + x_2\,dx_3$;
6) Γ – перетин циліндра $x_1^2+x_2^2=1$ і площини $x_1+x_2+x_3=0$; напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3; $\omega = x_3\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_1\,dx_3$;
7) Γ – перетин циліндра $|x_1| + |x_2| = 1$ і площини $x_1 = x_3$; напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3; $\omega = x_1^2 x_2\,dx_1 + dx_2 + x_1\,dx_3$; $-\frac{1}{3}$;
8) Γ – перетин циліндра $\max\{|x_1|,|x_2|\} = 1$ і площини $x_2 = x_3$; напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3; $\omega = x_1x_2(\,dx_1 + \,dx_2 + \,dx_3)$;
9) Γ – коло $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_2 = x_1\sqrt{3}$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_1;
$\omega = (x_1+x_2)(\,dx_1 + \,dx_2 + \,dx_3)$;
10) Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4, x_2 = -x_1$, що пробігається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися зі сторони додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = (x_1 - x_2)(\,dx_1 + \,dx_2 + \,dx_3)$.

4. Нехай $\vec{F}(x_1,x_2), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$ – силове поле. Знайти роботу поля, що витрачається на пересування матеріальної точки з точки A в точку B вздовж орієнтованої кривої Γ, для наведених $\vec{F}$, A, B і Γ.

1) Сила $\vec{F}$ має постійну величину F і направлена вздовж додатної півосі Ox_1; $A = (1,0),\ B = (0,1)$; Γ – чверть кола $x_1^2+x_2^2 = 1$, що лежить у першому квадранті.
2) Сила $\vec{F}$ направлена в початок координат і по модулю дорівнює відстані від точки докладання до початку координат; $A = (0,0), B = (1,1)$; Γ – відрізок прямої.
3) Задача 2) для частини параболи $x_2 = x_1^2$, $0 \le x_1 \le 1$.
4) Напрямок сили $\vec{F}$ повернутий на кут $\frac{\pi}{2}$ за годинниковою стрілкою відносно радіус-вектора $\vec{r}$ точки її докладання, $|\vec{F}| = \frac{1}{|\vec{r}|}$; $A = (2,0),\ B = (0,2)$; Γ – чверть кола $x_1^2 + x_2^2 = 4$, що лежить у першому квадранті.

5) $\vec{F}(x_1, x_2) = \left(x_1 x_2 + \dfrac{x_2^2 \sin x_1}{2}, \dfrac{x_1^2 - 2x_2 \cos x_1}{2} \right), (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;$
$A = B = (1, 0);$ Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 = 1$, що пробігається за годинниковою стрілкою.

6) $\vec{F}(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_1 + x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$; $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, Γ – відрізок прямої.

7) Задача 6), де Γ – дуга параболи $x_2 = x_1^2$.

8) $\vec{F}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1)$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$; $A = B = (0, 1)$; Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 = 1$, що пробігається проти годинникової стрілки.

9) $\vec{F}(x_1, x_2) = (2x_1 x_2, x_1^2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$; $A = (1, 0)$, $B = (0, 3)$; Γ – відрізок прямої.

10) Сила $\vec{F}$ направлена в початок координат і по модулю дорівнює відстані від точки докладання до початку координат; $A = (1, 0)$, $B = (0, 2)$; Γ – чверть еліпса $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} = 1$, що лежить у першому квадранті.

5. Перевірити, що форма ω є повним диференціалом, і обчислити $\int_A^B \omega$.

1) $\omega = x_1\, dx_2 + x_2\, dx_1, A = (1, -2), B = (2, -1);$
2) $\omega = x_1^2\, dx_1 + x_2^2\, dx_2, A = (1, 0), B = (-3, 2);$
3) $\omega = (x_1 + x_2)\, dx_1 + (x_1 - x_2)\, dx_2, A = (2, 2), B = (0, 1);$
4) $\omega = (x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2)(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}, A = (3, 4), B = (0, 1),$ шлях інтегрування не містить точки $(0, 0)$;
5) $\omega = (x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1)(x_1 - x_2)^{-2}, A = (-1, 0), B = (0, 1),$ шлях інтегрування не перетинає пряму $x_1 = x_2$;
6) $\omega = \cos(x_1 x_2)(x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2), A = (0, \pi), B = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi});$
7) $\omega = e^{x_2}(\, dx_1 + x_1\, dx_2), A = (1, 0), B = (2, 1);$
8) $\omega = (\, dx_1 + 2\, dx_2)(x_1 + 2x_2)^{-1}, A = (e, 2e), B = (0, e),$ шлях інтегрування не перетинає пряму $x_1 + 2x_2 = 0$;
9) $\omega = (4x_1^3 + x_2)\, dx_1 + x_1\, dx_2, A = (1, 1), B = (-1, 2);$
10) $\omega = f(x_1 + x_2)(\, dx_1 + \, dx_2), f \in C(\mathbf{R}), A = (0, 0), B = (5, 2);$
11) $\omega = x_1^2\, dx_1 - x_2\, dx_2 + x_3^3\, dx_3, A = (1, 1, 1), B = (2, 0, 2);$
12) $\omega = (x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}, A = (1, 0, 0), B = (0, 3, 4),$ шлях інтегрування не містить точки $(0, 0, 0)$;

13) $\omega = \sin(x_1+x_2+x_3)(\,dx_1+\,dx_2+\,dx_3), A = (\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}), B = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$;
14) $\omega = \sin(x_2x_3)\,dx_1+x_1x_3\cos(x_2x_3)\,dx_2+x_1x_2\cos(x_2x_3)\,dx_3, A = (1,1,\pi), B = (2, \frac{\pi}{2}, 3)$;
15) $\omega = 4x_1^3x_2\,dx_1+(x_1^4+2x_2x_3)\,dx_2+x_2^2\,dx_3, A = (1,-1,1), B = (-1,1,-1)$;
16) $\omega = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(x_1\,dx_1+x_2\,dx_2+x_3\,dx_3), A = (3,4,0), B = (0,0,5)$;
17) $\omega = e^{x_1x_2}(x_2x_3\,dx_1 + x_1x_3\,dx_2 + \,dx_3), A = (1,1,e), B = (0,2,1)$;
18) $\omega = (2x_1x_2x_3+x_2^2x_3)\,dx_1+(x_1^2x_3+2x_1x_2x_3)\,dx_2+(x_1^2x_2+x_1x_2^2)\,dx_3, A = (1,3,1), B = (3,1,3)$;
19) $\omega = (x_2x_3\,dx_1+x_3x_1\,dx_2-x_1x_2\,dx_3)x_3^{-2}, A = (1,1,1), B = (2,2,4)$, шлях інтегрування не перетинає вісь Ox_3;
20) $\omega = \operatorname{sh} x_1\,dx_1 + \operatorname{ch} x_2\,dx_2 + e^{x_3}\,dx_3, A = (0,0,0), B = (1,-1,1)$.

6. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ по переміщенню матеріальної точки маси m з положення A в положення B.

1) $\vec{F}(x_1,x_2) = (-x_1,-x_2), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2, A = (0,1), B = (2,0)$;
2) $\vec{F}(x_1,x_2) = (-\frac{mx_1}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}}, -\frac{mx_2}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}}), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $A = (1,0), B = (3,4)$, шлях точки не містить точки $(0,0)$;
3) $\vec{F}(x_1,x_2) = (-mx_1(x_1^2+x_2^2-1), -mx_2(x_1^2+x_2^2-1)), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$, $A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), B = (2,1)$;
4) $\vec{F}(x_1,x_2) = (x_1x_2 + \frac{x_2^2\sin x_1}{2}, \frac{x_1^2-2x_2\cos x_1}{2}), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$, $A = (0,0), B = (\pi,1)$;
5) $\vec{F}(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_1), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2, A = B = (1,1)$;
6) $\vec{F}(x_1,x_2) = (2x_1x_2, x_1^2), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2, A = (2,0), B = (0,1)$;
7) $\vec{F}(x_1,x_2) = (-m,-m), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2, A = (1,2), B = (2,1)$;
8) $\vec{F}(x_1,x_2) = (m,2m), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2, A = (1,3), B = (3,2)$;
9) $\vec{F}(x_1,x_2) = (m,-3m), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2, A = (5,5), B = (4,6)$;
10) $\vec{F}(x_1,x_2) = (m,0), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2, A = (2,1), B = (-5,-6)$.

ЗАНЯТТЯ 21
ФОРМУЛА ГРІНА

Контрольні запитання

1. *Формула Гріна.*
2. *Формула для обчислення площі за допомогою криволінійного інтеграла.*
3. *Зовнішній диференціал диференціальної форми.*

А21

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega$:

1) Γ – контур трикутника ABC з вершинами $A(1,1), B(0,0), C(0,2)$, що пробігається в додатному напрямку; $\omega = (x_1 + x_2)^2\,dx_1 - (x_1^2 + x_2^2)\,dx_2$;
2) Γ – еліпс $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$, що пробігається в додатному напрямку; $\omega = (x_1 + x_2)\,dx_1 - (x_1 - x_2)\,dx_2$;
3) Γ – крива, що обмежує множину $\{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < \sin x_1\}$ та пробігається в додатному напрямку; $\omega = e^{x_1}[(1-\cos x_2)\,dx_1 - (x_2 - \sin x_2)\,dx_2]$;
4) Γ – верхнє півколо $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1$, що пробігається від точки $A(2,0)$ до точки $O(0,0)$; $\omega = (e^{x_1}\sin x_2 - x_2)\,dx_1 + (e^{x_1}\cos x_2 - 1)\,dx_2$; *Вказівка.* Доповнити криву Γ до замкненої кривої прямолінійним відрізком OA осі Ox_1.
5) Γ – проста замкнена крива, що не проходить через початок координат і пробігається в додатному напрямку; $\omega = \frac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{x_1^2 + x_2^2}$;
Вказівка. Розглянути два випадки: 1) початок координат перебуває поза множиною, обмеженою кривою Γ; 2) крива Γ оточує початок координат.

2. Обчислити площі фігур, обмежених заданими кривими:

1) еліпсом $\{(a\cos t, b\sin t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}, a > 0, b > 0$;
2) параболою $(x_1 + x_2)^2 = x_1$ і віссю Ox_1;
3) кривою $(\frac{x_1}{a})^n + (\frac{x_2}{b})^n = 1; \{a, b, n\} \subset (0, +\infty)$, і осями координат. *Вказівка.* Покласти $x_1 = a(\cos\varphi)^{\frac{2}{n}}, x_2 = a(\sin\varphi)^{\frac{2}{n}}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega$, доповнивши криву Γ до замкненої кривої і скориставшись формулою Гріна:

1) Γ – верхнє півколо $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 \geq 0$, що пробігається від точки $A(1,0)$ до точки $B(-1,0)$; $\omega = x_1 x_2^2\,dx_2 - x_1^2 x_2\,dx_1$;
2) Γ – дуга кола $x_1^2 + x_2^2 = 4, x_1 \geq 0$, що пробігається від точки $A(0,-2)$ до точки $B(0,2)$; $\omega = e^{-(x_1^2 - x_2^2)}(\cos(2x_1x_2)\,dx_1 + \sin(2x_1x_2)\,dx_2)$;

4. Визначити зовнішній диференціал форми ω :
1) $\omega = x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2$;
2) $\omega = x_3\,dx_1 \wedge dx_2 - x_1x_2\,dx_3 \wedge dx_2$;
3) $\omega = P(x_1,x_2)\,dx_1 + Q(x_1,x_2)\,dx_2$, де $\{P,Q\} \subset C^{(1)}(\mathbf{R}^2)$;
4) $\omega = P(x_1,x_2,x_3)\,dx_1 + Q(x_1,x_2,x_3)\,dx_2 + R(x_1,x_2,x_3)\,dx_3$, де $\{P,Q,R\} \subset C^{(1)}(\mathbf{R}^3)$;
5) $\omega = P(x_1,x_2,x_3)\,dx_2 \wedge dx_3 + Q(x_1,x_2,x_3)\,dx_3 \wedge dx_1 + R(x_1,x_2,x_3)\,dx_1 \wedge dx_2$, де $\{P,Q,R\} \subset C^{(1)}(\mathbf{R}^3)$.

Б21

1. Використовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_\Gamma \omega$, де Γ – границя заданої множини F, що пробігається в додатному напрямку:
1) $F = \left\{(x_1,x_2) \mid (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 1\right\}$;
$\omega = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,dx_1 + x_2[x_1x_2 + \ln(x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2})]\,dx_2$;
2) $F = \{(x_1,x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 1 + x_1\}$; $\omega = (x_1 + 2x_2)\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2$;
3) $F = \{(x_1,x_2) \mid |x_1| + |x_2| \leq 1\}$; $\omega = x_1x_2^2\,dx_1 + x_1^3\,dx_2$;
4) F – множина точок квадрата $[0,1]^2$, що лежать поза кругом $(x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$; $\omega = x_1^2\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2$;
5) $F = \left\{(x_1,x_2) \mid x_1 \geq x_2^2 - 2, x_1 \leq 2\right\}$; $\omega = (x_1 + 2x_2)\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2$;
6) $F = \left\{(x_1,x_2) \mid x_1 \geq x_1^2 - 2, x_1 \leq |x_2|\right\}$; $\omega = x_1x_2\,dx_1 + (x_1 + 3x_2)\,dx_2$;
7) $F = \left\{(x_1,x_2) \mid (x_1-1)^2 + x_2^2 \leq 1\right\}$; $\omega = x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_\Gamma \omega$, доповнивши криву Γ до замкненої кривої і скориставшись формулою Гріна:

1) Γ – дуга еліпса $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} = 1, x_2 \geq 0$, що пробігається від точки $A(1,0)$ до точки $B(-1,0)$; $\omega = (x_1x_2 + x_1 + x_2)\,dx_1 + (x_1x_2 + x_1 - x_2)\,dx_2$;
2) Γ – нижнє півколо $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1, x_2 \leq 0$, що пробігається від точки $O(0,0)$ до точки $A(2,0)$; $\omega = (x_1x_2 + x_1 + x_2)\,dx_1 + (x_1x_2 + x_1 - x_2)\,dx_2$;
3) Γ – чверть кола $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, що пробігається від точки $A(1,0)$ до точки $B(0,1)$; $\omega = (x_2 - x_1^2)\,dx_1 + (x_1 + x_2^2)\,dx_2$;
4) Γ – дуга кола $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 \leq x_2$, що пробігається від точки $A(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ до точки $B(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$; $\omega = x_1x_2^2\,dx_1 - x_1^3\,dx_2$;
5) Γ – дуга косинусоїди $x_2 = \cos x_1, -\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}$, що пробігається в напрямку зростання x_1; $\omega = (2x_1 + 3x_2)\,dx_1 + 5x_2\,dx_2$.

3. Використовуючи формулу Гріна, обчислити площі фігур, обмежених заданими кривими:

1) астроїдою $\left\{(\cos^3 t, \sin^3 t) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\right\}$;
2) кривою $x_1^3 + x_2^3 = x_1^2 + x_2^2$ і осями координат;
3) кривою $(x_1 + x_2)^3 = x_1x_2$;
4) кривою $x_1^4 + x_2^4 = x_1^3 = x_2^3$ і осями координат;
5) кардіоїдою $\{(2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$;
6) параболою $(x_1 - x_2)^2 = x_1$ і віссю Ox_1;
7) гіпоциклоїдою $\{(2\cos t + \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$;
8) петлею декартового листа $x_1^3 + x_2^3 = 3x_1x_2$; Вказівка: покласти $x_2 = x_1 t$.
9) лемніскатою $(x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^2 - x_2^2$;
10) дугою гіперболи $x_1 = \operatorname{ch} t, x_2 = 2\operatorname{sh} t$ від точки $M(x_1^0, x_2^0)$ до точки перетину з віссю Ox_1, відрізком цієї осі та відрізком прямої OM.

ЗАНЯТТЯ 22
ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ДРУГОГО РОДУ

Контрольні запитання

1. *Означення поверхневого інтеграла другого роду та формули для його обчислення.*
2. *Поняття потоку поля крізь поверхню.*

А22

1. Обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S \omega$:

1) S – зовнішня сторона сфери $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1;\ \omega=x_1\,dx_2\wedge dx_3+x_2\,dx_3\wedge\,dx_1+x_3\,dx_1\wedge\,dx_2;$
2) S – зовнішня сторона поверхні симплекса $\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_2+x_3\le 1, x_i\ge 0, 1\le i\le 3\}\,;$ $\omega=x_1x_2\,dx_1\wedge\,dx_2+x_3\,dx_1\wedge\,dx_3;$
3) S – зовнішня сторона конічної поверхні $x_1^2+x_2^2=x_3^2,\ 0\le x_3\le 1;\ \omega=(x_2-x_3)\,dx_2\wedge\,dx_3+(x_3-x_1)\,dx_3\wedge\,dx_1+(x_1-x_2)\,dx_1\wedge\,dx_2;$
4) S – зовнішня сторона поверхні циліндра $x_1^2+x_3^2=1,\ |x_2|\le 2;\ \omega=x_1\,dx_2\wedge\,dx_3+x_1x_2\,dx_3\wedge\,dx_1+x_1x_2x_3\,dx_1\wedge\,dx_2;$
5) S – верхня сторона поверхні $x_1^2+x_2^2=x_3^2,\ 1\le x_3\le 2;\ \omega=x_1^2\,dx_2\wedge\,dx_3+x_2^2\,dx_3\wedge\,dx_1+x_3^2\,dx_1\wedge\,dx_2.$

2. Обчислити похідну $\dfrac{d}{dt}\int\limits_{S(t)}(x_1\,dx_1\wedge\,dx_2+x_1x_2\,dx_1\wedge\,dx_3),\ t>0$, де $S(t)$ – зовнішня сторона сфери $x_1^2+x_2^2+x_3^2=t^2,\ t>0.$

Б22

1. Обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S \omega$:

1) S – верхня сторона трикутника з вершинами $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1);$ $\omega=(x_1+1)\,dx_2\wedge\,dx_3-(2x_2+1)\,dx_3\wedge\,dx_1;$
2) S – нижня сторона поверхні $2x_3=x_1^2+x_2^2,\ (x_1-1)^2+x_2^2\le 1;$ $\omega=x_1\,dx_2\wedge\,dx_3+x_2\,dx_3\wedge\,dx_1+x_3\,dx_1\wedge\,dx_2;$
3) S – зовнішня сторона бічної поверхні циліндра $x_1^2+x_2^2=1,$ $|x_3|\le 1;\quad \omega=\,dx_1\wedge\,dx_3+2x_1\,dx_1\wedge\,dx_2;$

4) S – зовнішня сторона еліпсоїда $x_1^2+4x_2^2+9x_3^2=1$; $\omega = dx_2\wedge dx_3+dx_3\wedge dx_1+dx_1\wedge dx_2$;
5) S – зовнішня сторона сфери $x_1^2+(x_2-1)^2+(x_3+1)^2=1$; $\omega = x_1^2\,dx_2\wedge dx_3+x_2^2\,dx_3\wedge dx_1+x_3^2\,dx_1\wedge dx_2$;
6) S – зовнішня сторона нижньої половини сфери $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$; $\omega = x_1^2x_2^2x_3\,dx_1\wedge dx_2$;
7) S – зовнішня сторона еліпсоїда $\dfrac{x_1^2}{9}+\dfrac{x_2^2}{4}+x_3^2=1$; $\omega = x_3\,dx_1\wedge dx_2$;
8) S – та сторона поверхні $x_2^2=1-x_1,\ 0\le x_3\le x_1$, яку видно з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = x_2^2\,dx_2\wedge dx_3+x_3\,dx_3\wedge dx_1-x_1\,dx_1\wedge dx_2$;
9) S – та сторона поверхні $x_3^2=x_1, x_2^2\le 1-x_1, x_2\ge 0$, яку видно з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = 2x_1\,dx_2\wedge dx_3-x_2\,dx_3\wedge dx_1+3x_3\,dx_1\wedge dx_2$;
10) S – внутрішня сторона верхньої половини сфери $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$; $\omega = x_1x_2\,dx_2\wedge dx_3$;
11) S – зовнішня сторона поверхні призми з вершинами $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$; $\omega = x_1\,dx_2\wedge dx_3+x_1x_2\,dx_3\wedge dx_1+(x_1+x_3)\,dx_1\wedge dx_2$;
12) S – зовнішня сторона поверхні призми з вершинами $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$; $\omega = x_1^2\,dx_2\wedge dx_3-3x_1\,dx_3\wedge dx_1+(x_1^2-x_2^2)\,dx_1\wedge dx_2$;
13) S – внутрішня сторона поверхні симплекса $\{(x_1,x_2,x_3)\,|\ x_1+x_2+x_3\le 1,\ x_i\ge 0;\ i=1,2,3\}$; $\omega = 2x_1\,dx_2\wedge dx_3+x_2\,dx_3\wedge dx_1$;
14) S – зовнішня сторона поверхні куба $[0,1]^3$; $\omega = x_1x_2\,dx_2\wedge dx_3+3x_1x_2x_3\,dx_1\wedge dx_2$;
15) S – зовнішня сторона поверхні циліндра $|x_1|+|x_2|=1$, $0\le x_3\le 2$; $\omega = x_1^2x_2^2\,dx_2\wedge dx_3-(x_1^2+x_3^2)\,dx_3\wedge dx_1$;
16) S – зовнішня сторона куба, утвореного площинами $x_i=0,\ i=1,2,3; x_i=1,\ i=1,2,3$; $\omega = x_1\,dx_2\wedge dx_3+x_2\,dx_3\wedge dx_1+x_3\,dx_1\wedge dx_2$;
17) S – зовнішня сторона поверхні паралелепіпеда $0\le x_1\le 1$, $0\le x_2\le 2$, $0\le x_3\le 3$; $\omega = e^{x_1}\,dx_2\wedge dx_3+e^{x_2}\,dx_3\wedge dx_1+e^{x_3}\,dx_1\wedge dx_2$;
18) S – зовнішня сторона поверхні, розташованої у першому октанті і складеної з поверхні циліндра $x_1^2+x_2^2=4$ і площин $x_3=3$, $x_i=0, i=1,2,3$; $\omega = x_2x_3\,dx_1\wedge dx_2+x_1x_3\,dx_2\wedge dx_3+x_1x_2\,dx_1\wedge dx_3$;

19) S – зовнішня сторона поверхні, розташованої у першому октанті і складеної з поверхонь параболоїда обертання $x_3 = x_1^2 + x_2^2$, циліндра $x_1^2 + x_2^2 = 1$ і координатних площин; $\omega = x_1^2 x_3\, dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_3\, dx_2 \wedge dx_3 + x_1^2 x_2\, dx_1 \wedge dx_3$;

20) S – зовнішня сторона поверхні тіла $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ 0 \le x_3 \le 2,\ x_1 \ge 0\}$; $\omega = x_3 x_1\, dx_1 \wedge dx_2$;

21) S – зовнішня сторона поверхні тіла $\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \le x_3 \le 1 - x_1^2 - x_2^2\right\}$; $\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3$;

22) S – зовнішня сторона поверхні тіла $\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \le x_3 \le 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right\}$; $\omega = x_2^2\, dx_1 \wedge dx_3$;

23) S – внутрішня сторона поверхні піраміди з вершинами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, -1, 0)$; $\omega = x_1 x_2\, dx_1 \wedge dx_3$;

24) S – внутрішня сторона поверхні тіла $\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3^2 \ge x_1^2 + x_2^2, 1 \le x_3 \le 2\right\}$; $\omega = (x_1 + x_2)\, dx_2 \wedge dx_3$;

25) S – зовнішня сторона поверхні куба $[-1, 1]^3$; $\omega = dx_2 \wedge dx_1$;

26) S – внутрішня сторона поверхні тіла $\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \le 1\right\}$; $\omega = x_1^2 x_2^2\, dx_2 \wedge dx_3$;

27) S – зовнішня сторона поверхні тіла $\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 4\right\}$; $\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 + x_2\, dx_3 \wedge dx_1$;

28) S – зовнішня сторона поверхні тіла $\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1, x_i \ge 0, 1 \le i \le 3\right\}$; $\omega = x_3\, dx_1 \wedge dx_2$;

29) S – внутрішня сторона поверхні тіла $\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 \le 1, x_i \ge 0, 1 \le i \le 3\right\}$; $\omega = (x_1 - x_3)\, dx_2 \wedge dx_3$;

30) S – зовнішня сторона поверхні тіла $\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 4, x_1 \le x_2\right\}$; $\omega = (x_1 + x_2 + x_3)\, dx_1 \wedge dx_2$.

ЗАНЯТТЯ 23
ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО–ГАУССА І ФОРМУЛА СТОКСА

Контрольні запитання

1. *Формула Остроградського – Гаусса.*
2. *Формула Стокса.*

А23

1. Обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S \omega$, де S – гладка поверхня, що обмежує тіло скінченного об'єму V, симетричне відносно координатних площин:

1) $\omega = x_2x_3\,dx_2 \wedge dx_3 + x_3x_1\,dx_3 \wedge dx_1 + x_1x_2\,dx_1 \wedge dx_2$;
2) $\omega = (\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3})\,dx_2 \wedge dx_3 + (\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1})\,dx_3 \wedge dx_1 + (\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2})\,dx_1 \wedge dx_2$;
3) $\omega = x_1^4\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2^4\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3^4\,dx_1 \wedge dx_2$;
4) $\omega = x_1^3\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2^3\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3^3\,dx_1 \wedge dx_2$, де S – зовнішній бік сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$;

2. Обчислити об'єм тіла, обмеженого тором $x_1 = (b+a\cos\psi)\cos\varphi, x_2 = (b + a\cos\psi)\sin\varphi, x_3 = a\sin\psi; \{\varphi,\psi\} \subset [0, 2\pi]; 0 < a \le b.$

3. Обчислити інтеграл $\int\limits_\Gamma (x_2\,dx_1 + x_3\,dx_2 + x_1\,dx_3)$, де Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_1 + x_2 + x_3 = 0$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1.

4. Обчислити інтеграл $\int\limits_\Gamma [(x_2 - x_1)\,dx_1 + (x_3 - x_1)\,dx_2 + (x_1 - x_2)\,dx_3]$, де Γ – еліпс $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 + 2x_3 = 1$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1.

Б23

1. Використовуючи формулу Остроградського-Гаусса, обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S \omega$, де S – задана орієнтована поверхня, ω – задана диференціальна форма:

1) S – зовнішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1, |x_3| \le 1\right\}$, $\omega = (x_1 + 2x_2)\,dx_2 \wedge dx_3$;

2) S – внутрішній бік поверхні тіла $[0,1]^3$, $\omega = x_1x_3\,dx_2\wedge dx_3 + (x_1^2+x_3^2)\,dx_1\wedge dx_2$;
3) S – зовнішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le 1\right\}$, $\omega = x_1\,dx_2\wedge dx_3 + 2x_2\,dx_3\wedge dx_1$;
4) S – внутрішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_2^2 \le 2-x_1, 0\le x_3\le x_1\right\}$, $\omega = x_1^2\,dx_2\wedge dx_3 + x_3^2\,dx_1\wedge dx_2$;
5) S – зовнішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le 1\right\}$, $\omega = x_1^3\,dx_2\wedge dx_3 + x_2^3\,dx_3\wedge dx_1 + x_3^3\,dx_1\wedge dx_2$;
6) S – зовнішній бік поверхні $|x_1-x_2+x_3|+|x_2-x_3+x_1|+|x_3-x_1+x_2|=1$, $\omega = (x_1-x_2+x_3)\,dx_2\wedge dx_3 + (x_2-x_3+x_1)\,dx_3\wedge dx_1 + (x_3-x_1+x_2)\,dx_1\wedge dx_2$;
7) S – зовнішній бік конічної поверхні $x_1^2+x_2^2=x_3^2, 0\le x_3\le 1$; $\omega = x_1^2\,dx_2\wedge dx_3 + x_2^2\,dx_3\wedge dx_1 + x_3^2\,dx_1\wedge dx_2$; *Вказівка.* Приєднати частину площини $x_3=1, x_1^2+x_2^2\le 1$.
8) S – зовнішній бік поверхні призми $\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1+x_2\le 1, x_3\le 1, x_i\ge 0, 1\le i\le 3\}$ без нижньої основи, $\omega = x_1x_3\,dx_1\wedge dx_2 + x_3\,dx_2\wedge dx_3 + x_1x_2x_3\,dx_3\wedge dx_1$;
9) S – зовнішній бік поверхні призми $\{(x_1,x_2,x_3) \mid |x_1|+|x_2|\le 1, 0\le x_3\le 1\}$ без верхньої основи, $\omega = x_1^2x_2\,dx_2\wedge dx_3 + \,dx_1\wedge dx_2$;
10) S – зовнішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2+x_2^2\le 1, x_3\le x_1^2+x_2^2, x_i\ge 0, 1\le i\le 3\right\}$ без нижньої основи $\left\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2+x_2^2\le 1, x_3=0, x_i\ge 0, 1\le i\le 2\right\}$, $\omega = x_2^2x_3\,dx_1\wedge dx_2 + x_1^2x_3\,dx_2\wedge dx_3$.

2. Використовуючи формулу Остроградського – Гаусса, обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2, r>0$;
2) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2x_2$;
3) поверхнею $x_1=\cos(\varphi-\psi), x_2=\sin(\varphi-\psi), x_3=\sin\psi, \{\varphi,\psi\}\subset[0,2\pi]$, і площинами $x_3=\pm 1$.
4) поверхнею $x_1=t_1\cos t_2, x_2=t_1\sin t_2, x_3=-t_1+\cos t_2; t_1\ge 0, t_2\in[0,2\pi]$, і площиною $x_3=0$.
5) поверхнею $x_1^2+x_2^2=x_3^2$, і площиною $x_3=h, h>0$.

6) поверхнею $x_1^2 + x_2^2 = r^2$, і площинами $x_3 = 0, x_3 = h, h > 0, r > 0$.
7) поверхнею $x_3 = x_1^2 + x_2^2$, і площиною $x_3 = h, h > 0$.
8) поверхнею $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$, і площиною $x_3 = h, r > h > 0, x_3 \geq h$.
9) $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1, a, b, c > 0$;
10) поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$ і $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+x_3^2 = 1$.

3. Використовуючи формулу Стокса, обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_\Gamma \omega$, де Γ – задана орієнтована просторова крива, ω – задана диференціальна форма:

1) Γ – перетин поверхні $x_1^2+x_2^2 = 1$ і площини $x_1+x_2+x_3 = 1$; обхід за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_3; $\omega = (x_3-x_2)\,dx_1+(x_1-x_3)\,dx_2+(x_2-x_1)\,dx_3$;
2) Γ – перетин поверхонь $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2Rx_1, x_1^2 + x_2^2 = 2rx_1, x_3 > 0, 0 < r < R$, що пробігається так, що менша область, обмежена нею на поверхні сфери, залишається зліва; $\omega = (x_2^2 + x_3^2)\,dx_1 + (x_1^2 + x_3^2)\,dx_2 + (x_1^2 + x_2^2)\,dx_3$;
3) Γ – переріз поверхні куба $[0, 1]^3$ площиною $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3}{2}$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = (x_2^2 - x_3^2)\,dx_1 + (x_3^2 - x_1^2)\,dx_2 + (x_1^2 - x_2^2)\,dx_3$;
4) Γ – переріз сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ площиною $x_3 = \frac{1}{2}$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку оі Ox_3; $\omega = (x_1+x_2)\,dx_2+(x_1-x_3)\,dx_3$;
5) Γ – переріз сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ площиною $x_2 = 1$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_2; $\omega = (x_1 + x_2)\,dx_2 + (x_1 - x_3)\,dx_3$;
6) Γ – переріз сфери $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$ площиною $x_1+x_2-x_3 = 0$, що пробігається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = (x_1^2+x_2^2)\,dx_1+(x_1^2 - x_3^2)\,dx_3$;
7) Γ – переріз сфери $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$ площиною $x_1+x_2+x_3 = 1$, що пробігається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = x_1^2\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2 + x_1x_3\,dx_3$;

8) Γ – переріз еліпсоїда $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 1$ площиною $x_3 = \frac{1}{2}$, що пробігається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_3; $\omega = (x_2 - x_3)\,dx_1 + (x_3 - x_1)\,dx_2 + (x_1 - x_2)\,dx_3$;
9) Γ – переріз циліндричної поверхні $x_1^2 + x_2^2 = 1$ площиною $x_1 = x_3$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = (x_1 + x_2)\,dx_1 + x_1x_2\,dx_3$;
10) Γ – переріз конічної поверхні $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ площиною $x_1 + 2x_3 = 1$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат; $\omega = (x_1 - x_2 + x_3)\,dx_1 + x_2x_3\,dx_2$;
11) Γ – еліпс $\left\{(\sin^2 t, \sin 2t, \cos^2 t) \mid 0 \le t \le \pi\right\}$, що пробігається в напрямку зростання параметра t; $\omega = (x_2 + x_3)\,dx_1 + (x_3 + x_1)\,dx_2 + (x_1 + x_2)\,dx_3$;
12) Γ – крива $\{(\cos t, \cos 2t, \cos 3t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$, що пробігається в напрямку зростання параметра t; $\omega = x_2^2x_3^2\,dx_1 + x_1^2x_3^2\,dx_2 + x_1^2x_2^2\,dx_3$;
13) Γ – крива $\{(\sin t, \sin 5t, \sin 3t) \mid 0 \le t \le \pi\}$, що пробігається в напрямку зростання параметра t; $\omega = x_1^2x_3\,dx_1 + x_1^2x_3\,dx_2 + x_1x_2^2\,dx_3$;
14) Γ – виток гвинтової лінії $\{(\cos t, \sin t, t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$, що пробігається в напрямку зростання параметра t; *Вказівка.* Доповнити криву Γ прямолінійним відрізком. $\omega = (x_1^2 - x_2x_3)\,dx_1 + (x_2^2 - x_3x_1)\,dx_2 + (x_3^2 - x_1x_2)\,dx_3$.

ЗАНЯТТЯ 24
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Контрольні запитання

1. *Визначення градієнта скалярного поля.*
2. *Визначення дивергенції, ротора, циркуляції і потоку векторного поля.*
3. *Векторне формулювання формул Гаусса-Остроградського і Стокса.*

A24

1. Знайти градієнт поля $u(x_1,x_2,x_3) = x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+x_1x_2+3x_1-2x_2-6x_3, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$, в точці $(2,0,1)$. В якій точці градієнт поля є нульовим вектором?

2. Нехай $\vec{a} \in C(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$ – векторне поле в $\mathbf{R}^3, M \in \mathbf{R}^3, S$ – гладка замкнена поверхня, що оточує точку M і обмежує тіло об'єму V, $\vec{n}(\vec{x}), \vec{x} \in S$ – зовнішня нормаль до поверхні $S, d(S) = \max\{||\vec{x}-\vec{y}|| \mid \vec{x},\vec{y} \in S\} < +\infty$ – діаметр поверхні S. Довести, що $\mathrm{d}iv\vec{a}(M) = \lim\limits_{d(S)\to 0} \frac{1}{V} \int\limits_S (\vec{a},\vec{n})d\sigma$.

3. Знайти величину і напрямок $\mathrm{r}ot\vec{a}$ в точці $(1,2,-2)$ для векторного поля $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_2}{x_3}\vec{i} + \frac{x_3}{x_1}\vec{j} + \frac{x_1}{x_2}\vec{k}, x_1x_2x_3 \neq 0.$

4. Знайти потік радіус-вектора $\vec{r}$:

1) через зовнішній бік бічної поверхні конуса $x_1^2+x_2^2 \leq x_3^2, 0 \leq x_3 \leq 1;$
2) через зовнішній бік основи цього конуса.

5. Знайти роботу радіус-вектора $\vec{r}$ вздовж відрізка гвинтової лінії $\{(a\cos t, a\sin t, bt) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}\,; a > 0, b > 0$ – фіксовані сталі; крива пробігається в напрямку зростання параметра.

6. Знайти роботу поля $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = e^{x_2-x_3}\vec{i} + e^{x_3-x_1}\vec{j} + e^{x_1-x_2}\vec{k}$, $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$, вздовж прямолінійного відрізка від точки $(0,0,0)$ до точки $(1,3,5)$.

7. Довести, що поле $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = x_2x_3(2x_1+x_2+x_3)\vec{i} + x_3x_1(x_1+2x_2+x_3)\vec{j} + x_1x_2(x_1+x_2+2x_3)\vec{k}, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$, є потенціальним, і знайти потенціал цього поля.

8. Знайти потенціал гравітаційного поля $\vec{a} = -\frac{m}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}), (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, що створюється масою m, розташованою в початку координат.

9. Знайти потік векторного поля з попередньої задачі через зовнішній бік гладкої замкненої поверхні, що оточує початок координат.

10. Нехай $\{e_i, 1 \le i \le n\} \subset \mathbf{R}, \{\vec{r_i}, 1 \le i \le n\} \subset \mathbf{R}^3$, ρ – евклідова метрика в $\mathbf{R}^3$. Знайти потік вектора $\vec{a}(\vec{r}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi\rho(\vec{r},\vec{r_i})}\right)$, $\vec{r} \in \mathbf{R}^3 \backslash \{\vec{r_i}, 1 \le i \le n\}$, через зовнішній бік замкненої поверхні S, що оточує точки $\vec{r_i}, 1 \le i \le n$.

Б24

1. Знайти градієнт скалярного поля u в точці $\vec{r}_0$:

1) $u(x_1,x_2,x_3) = x_1x_3 - x_2^2, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,-3,4)$;
2) $u(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1x_2x_3, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,-1,1)$;
3) $u(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3-1)^2}, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (2,1,3)$;
4) $u(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$, $\vec{r}_0 = (2,1,1)$;
5) $u(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$, $\vec{r}_0 = (1,2,2)$;
6) $u(x_1,x_2,x_3) = e^{x_2x_3} \sin x_1, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (\pi,2,-1)$;
7) $u(x_1,x_2,x_3) = \arcsin \frac{x_1}{x_1+x_2+x_3}, x_i > 0, 1 \le i \le 3$; $\vec{r}_0 = (1,1,2)$;
8) $u(x_1,x_2,x_3) = x_1^{x_2-x_3}, x_1 > 0$; $\vec{r}_0 = (2,3,4)$;
9) $u(x_1,x_2,x_3) = x_1 \operatorname{arctg}(x_1x_2x_3), (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,3,\frac{1}{\sqrt{3}})$;
10) $u(x_1,x_2,x_3) = \cos(x_1x_2) \cdot \sin(x_1x_3), (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \sqrt{\pi})$.

2. Знайти дивергенцію векторного поля $\vec{a}$ в точці $\vec{r}_0$:

1) $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r}$, $\vec{r} \in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (2,2,1)$;
2) $\vec{a}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \vec{r} \in \mathbf{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$, $\vec{r}_0 = (3,1,1)$;
3) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1\vec{i} - x_2\vec{j} + x_3\vec{k}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, (x_1,x_2) \ne (0,0)$, $\vec{r}_0 = (3,4,5)$;
4) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2\vec{i} + x_2x_3\vec{j} + x_3x_1\vec{k}, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,-3,\pi)$;

5) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}(\vec{i}+\vec{j})+\ln(1+x_1^2)\vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,-1,1)$;

6) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = x_1^{x_2}\vec{i} + x_2^{x_3}\vec{j} + x_3^{x_1}\vec{k}, x_i > 0, 1 \le i \le 3;\ \vec{r}_0 = (2,3,1)$;

7) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2+x_2^2}\vec{i}+\sqrt{x_2^2-x_3^2}\vec{j}+\sqrt{x_1^2-x_3^2}\vec{k}, |x_1| \ge |x_2| \ge |x_3|,\ \vec{r}_0 = (4,3,2)$;

8) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \sin(x_1+x_2)\vec{i} + \cos(x_2-x_3)\vec{j} + \mathrm{tg}(x_1-x_3)\vec{k}, |x_1-x_3| < \frac{\pi}{2},\ \vec{r}_0 = (\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$;

9) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1}{(1+x_1+x_2+x_3)^2}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}), x_1+x_2+x_3 \ne -1,\ \vec{r}_0 = (1,2,-2)$;

10) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1-x_2}{1+x_3^2}(\vec{i}+\vec{j})+e^{x_1x_2}\vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3,\ \vec{r}_0 = (1,2,-3)$.

3. Знайти ротор векторного поля $\vec{a}$ в точці $\vec{r}_0$:

1) $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r}, \vec{r}\in \mathbf{R}^3, \vec{r}_0 = (2,1,2)$;

2) $\vec{a}(\vec{r}) = \exp(||\vec{r}||^2)\vec{r}, \vec{r}\in \mathbf{R}^3, \vec{r}_0 = (1,-2,-2)$;

3) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_2}{x_1}\vec{i}+\frac{x_3}{x_2}\vec{j}+\frac{x_1}{x_3}\vec{k}, x_1x_2x_3 \ne 0, \vec{r}_0 = (1,1,-1)$.

4) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}), (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (5,2,3)$.

5) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_2-x_3)\vec{i}+(x_2+x_3)\vec{j}-x_2\vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,2,-1)$.

6) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2+x_2^2)\vec{i}-x_2x_3\vec{j}+x_1x_2x_3\vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (3,2,1)$.

7) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1^3+x_1)\vec{i} - x_1\vec{j} + x_3\vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,1,1)$.

8) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1+2x_2)\vec{i} + 2x_2^3\vec{j} + \vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (2,-1,2)$.

9) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2+x_3^2)\vec{i} + |x_2|\vec{j} + |x_3|\vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,-1,2)$.

10) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = |x_1-x_2|\vec{i}+|x_2-x_3|\vec{j}+|x_3-x_1|\vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,2,3)$.

4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через зовнішній бік поверхні S :

1) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = x_2x_3\vec{i} + x_3x_1\vec{j} + x_1x_2\vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3, S$ – бічна поверхня циліндра $x_1^2+x_2^2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1$;

2) $\vec{a}$ з п.1), S – повна поверхня циліндра $x_1^2+x_2^2 \le 4, 0 \le x_3 \le 2$;

3) $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r}, \vec{r} \in \mathbf{R}^3, S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3 \ge 0\right\}$.

4) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_2\vec{i} + x_3\vec{j} + x_1\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3, S$ – піраміда, обмежена площинами $x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_i = 0, 1 \le i \le 3$;

5) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2\vec{i} + x_2^2\vec{j} + x_3^2\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3, S$ – бічна поверхня конуса $x_1^2 + x_2^2 \le 4x_3^2, 0 \le x_3 \le 1$;

6) $\vec{a}$ з п.5), S – повна поверхня конуса $x_1^2 + x_2^2 \le x_3^2, 0 \le x_3 \le 1$;

7) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_1^3\vec{i} + x_2^3\vec{j} + x_3^3\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3, S$ – повна поверхня циліндра $x_1^2 + x_2^2 \le 1, -1 \le x_3 \le 1$;

8) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}), (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3, S$ – поверхня куба $[0, 1]^3$;

9) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)\vec{i} + (x_2 - x_3)\vec{j} + (x_3 - x_1)\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, S – поверхня піраміди, обмеженої площинами $x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_i = 0, 1 \le i \le 3$;

10) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1\}$.

5. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ вздовж гладкої замкненої кривої Γ :

1) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = -x_2\vec{i} + x_1\vec{j} + 2\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\Gamma = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\right\}$, напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3;

2) $\vec{a}$ з п.1), $\Gamma = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1 - 2)^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\right\}$, напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3;

3) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = (-x_2\vec{i} + x_1\vec{j})(x_1^2 + x_2^2)^{-1}, (x_1, x_2) \ne (0, 0)$, $\Gamma \subset \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 > 0\}$;

4) $\vec{a}$ з п.3); $\Gamma = \left\{(\sin t, \cos t, t(2\pi - t)) \mid 0 \le t \le 2\pi\right\}$, крива пробігається в напрямку зростання t;

5) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_2}\vec{i} + \frac{1}{x_3}\vec{j} + \frac{1}{x_1}\vec{k}, x_1x_2x_3 \ne 0, \Gamma$ – прямолінійний відрізок від точки $(1, 1, 1)$ до точки $(2, 4, 8)$;

6) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3)\vec{i} + (2 + x_1)\vec{j} + (x_1 + x_2)\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, Γ – менша дуга великого кола сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 25$, від точки $A(3, 4, 0)$ до точки $B(0, 0, 5)$;

7) $\vec{a}(\vec{r}) = \sin||\vec{r}||\cdot\vec{r}, \vec{r}\in \mathbf{R}^3, \Gamma$ – крива з початком у точці $(0,0,0)$ і з кінцем у точці $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \pi)$;

8) $\vec{a}(\vec{r}) = -\frac{m}{||\vec{r}||^3}\vec{r}, \vec{r}\in \mathbf{R}^3\backslash\{\vec{0}\}, m > 0; \Gamma$ – крива з початком в точці $(1,2,2)$ і кінцем в точці $(0,0,1)$, що не проходить через точку $(0,0,0)$;

9) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = x_2x_3(2x_1+x_2+x_3)\vec{i}+x_1x_3(x_1+2x_2+x_3)\vec{j}+x_1x_2(x_1+x_2+2x_3)\vec{k}, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3, \Gamma$ – крива з початком в точці $(3,5,-4)$ і кінцем в точці $(0,1,2)$.

6. Переконатися в потенціальності поля $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \frac{2}{(x_2+x_3)^{1/2}}\vec{i} - \frac{x_1}{(x_2+x_3)^{3/2}}\vec{j} - \frac{x_1}{(x_2+x_3)^{3/2}}\vec{k}, x_i > 0, 1 \le i \le 3$, і знайти роботу поля вздовж шляху, що лежить в першому октанті і веде від точки $A(1,1,3)$ до точки $B(2,4,5)$.

ЗАНЯТТЯ 25
КОНТРОЛЬНА РОБОТА. КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

1. Змінити порядок інтегрування в інтегралі $\int_0^1 \int_{x_1^4}^{2x_1} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1$.

2. Обчислити інтеграли:
а) $\int_A x_1 x_2 dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1, x_1^2 + x_2^2 \le 4x_1\}$;
б) $\int_A \sqrt{x_1^2 + x_2^2} dx_1 dx_2 dx_3$, множина A обмежена поверхнями $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4,\ x_1^2 + x_2^2 \le 1$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int_\Gamma x_2^2 dx_1 + x_1 x_2 dx_2$, де Γ задана параметрично: $x_1 = \sin^2 t,\ x_2 = \sin t + \cos t,\ t \in [0, \pi]$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $x_1 = \sin 2t,\ x_2 = 3t + 1,\ x_3 = \cos 2t, \in [0, 1]$.

5. Обчислити площу поверхні $x_3 = 4x_1 x_2,\ 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4$.

6. Обчислити потік поля $(x_1, 2x_2, 3x_3)$ через зовнішній бік поверхні сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$.

7. Довести, що поле $(x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3 - 4)$ є потенціальним. Знайти його потенціал, дивергенцію, ротор.

РОЗВ'ЯЗОК

1. Множину $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^4 \le x_2 \le 2x_1,\ x_1 \in [0, 1]\}$ для розстановки меж зручно розбити на дві множини, циліндричні вздовж Ox_1: $A_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_2/2 \le x_1 \le \sqrt[4]{x_2},\ x_2 \in [0, 1]\}$ та $A_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_2/2 \le x_1 \le 1,\ x_2 \in [1, 2]\}$. Відповідь: $\int_0^1 \int_{x_2/2}^{\sqrt[4]{x_2}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$.

2. а) Введемо полярні координати. Тоді обмеження в означенні множини матимуть вигляд $r \le 1,\ r \le 4\cos\varphi$. З цих нерівностей видно, що на φ не накладається ніяких обмежень, а для r верхня межа різна для різних φ. Тому маємо

$$\int_{-\arccos(1/4)}^{\arccos(1/4)} \int_0^1 r^3 \cos\varphi \sin\varphi dr d\varphi +$$

$$+ \int_{\arccos(1/4)}^{2\pi - \arccos(1/4)} \int_0^{4\cos\varphi} r^3 \cos\varphi \sin\varphi dr d\varphi = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\cos^2\varphi}{2} \Big|_{-\arccos(1/4)}^{\arccos(1/4)} +$$

$$+ \int_{\arccos(1/4)}^{2\pi - \arccos(1/4)} \frac{1}{4} \cos^5\varphi \sin\varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{\cos^2\varphi}{8} \Big|_{-\arccos(1/4)}^{\arccos(1/4)} - \frac{\cos^5\varphi}{20} \Big|_{\arccos(1/4)}^{2\pi - \arccos(1/4)} = 0.$$

б) Введемо циліндричні координати. Тоді поверхні матимуть рівняння $h^2 + r^2 = 4,\ r \le 1$. Маємо:

$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r^2 dh dr d\varphi = 2\pi \int_0^1 2\sqrt{4-r^2} r^2 dr =$

$= |r = 2\sin t| = 4\pi \int_0^{\pi/6} 2\cos t \cdot 4\sin^2 t \cdot 2\cos t dt =$

$= 8\pi \int_0^{\pi/6} (1 - \cos 4t) dt = (8t - 2\sin 4t)|_0^{\pi/6} = 4\pi/3 - \sqrt{3}$.

3. $\int_\Gamma x_2^2 dx_1 + x_1 x_2 dx_2 =$

$= \int_0^{2\pi} ((\sin t + \cos t)^2 \cdot \sin 2t + \sin^2 t(\sin t + \cos t)(\cos t - \sin t)) dt =$

$= \int_0^{2\pi} (\sin 2t + \sin^2 2t + \frac{\cos 2t - \cos^2 2t}{2}) dt =$

$= \int_0^{2\pi} (\sin 2t + \frac{2\cos 2t - 3\cos 4t + 1}{4}) dt = \pi/2$.

4. $l = \int_\Gamma dl = \int_0^1 \sqrt{(2\cos 2t)^2 + 3^2 + (-2\sin 2t)^2} dt =$

$= \int_0^1 \sqrt{13} dt = \sqrt{13}$.

5. Нехай $A := \{(x_1, x_2) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$. Тоді

$S = \int_A \sqrt{1 + (\frac{\partial x_3}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial x_3}{\partial x_1})^2} dx_1 dx_2 = \int_A \sqrt{1 + 16x_2^2 + 16x_1^2} dx_1 dx_2$.

Перейдемо до полярних координат. Маємо

$S = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{1 + 16r^2} r dr d\varphi = 2\pi \frac{(1+16r^2)^{3/2}}{48}|_1^2 = \frac{\pi}{24}(\sqrt{65} - \sqrt{17})$.

6. Нехай T – куля, обмежена поверхнею. За формулою Остроградського-Гаусса

$\Pi = \int_T (\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_T (1 + 2 + 3) dx_1 dx_2 dx_3 =$

$= 6V(T) = 6 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = 64\pi$.

7. Повинні виконуватися рівності $\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_1 + x_2, \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 - x_2, \frac{\partial F}{\partial x_3} = x_3 - 4$. З першої з них маємо $F(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 + G(x_2, x_3)$. Підставимо цю функцію в друге рівняння. Отримаємо: $x_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} = x_1 - x_2$, звідси $G(x_2, x_3) = -\frac{x_2^2}{2} + H(x_3)$. Отже, $F(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 - \frac{x_2^2}{2} + H(x_3)$. Підставимо цю функцію в третє рівняння. Отримаємо: $H' = x_3 - 4$. Отже, $H(x_3) = \frac{x_3^2}{2} - 4x_3 + C$, і $F(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{2} - 4x_3 + C$, де C – довільна стала. Оскільки систему вдалося розв'язати, то поле потенціальне, F – його потенціал. Для потенціального поля $\vec{rot} F = \vec{0}$. Крім того, $div F = 1 + (-1) + 1 = 1$.

ПРОГРАМА КУРСУ "МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ" ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ "МЕХАНІКА". І КУРС, ІІ СЕМЕСТР

Лекцій – 51 година
Практичних занять – 51 година

СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. РЯДИ ФУР'Є

Степеневі ряди. Приклади рядів з різними множинами збіжності. Теорема Коші - Адамара. Рівномірна збіжність. Неперервність суми. Почленне інтегрування і диференціювання. Визначення коефіцієнтів через суму. Теорема про єдиність. Ряд Тейлора. Достатня умова розкладу в ряд Тейлора. Ряди Тейлора для елементарних функцій. Степеневі ряди з комплексними членами. Множина збіжності. Показникова функція в комплексній площині. Формули Ейлера. Означення коефіцієнтів Фур'є та ряду Фур'є. Властивості коефіцієнтів Фур'є. Лема Рімана. Задача про найкраще середньоквадратичне наближення. Ознака Діні. Ознака Ліпшиця. Наслідки. Теорема про почленне інтегрування ряду Фур'є. Означення та збіжності за Чезаро. Теорема Фейєра. Теорема про рівномірну збіжність ряду Фур'є. Теорема про почленне диференціювання ряду Фур'є. Ряд Фур'є для функцій з довільним періодом. Оцінка швидкості збіжності ряду Фур'є. Метод покращення збіжності ряду Фур'є.

ІНТЕГРАЛИ З ПАРАМЕТРОМ

Теореми про неперервність, інтегровність та диференційовність власного інтеграла з параметром. Означення рівномірної збіжності невласного інтеграла. Ознаки Вейєрштрасса, Діріхле та Абеля рівномірної збіжності невласних інтегралів. Теореми про неперервність, диференційовність, інтегровність для невласних інтегралів з параметром. Означення гамма-функції та її основні властивості. Основна теорема теорії гамма-функції. Формула Ейлера, зображення Вейєрштрасса. Функціональне рівняння Ейлера для гамма-функції. Розклад синуса в нескінченний добуток. Формула Стірлінга. Означення та основні властивості бета-функції. Теореми про інтеграли Діріхле, Ейлера-Пуассона та Фруллані. Означення коефіцієнтів Фур'є та інтеграла Фур'є. Властивості коефіцієнтів Фур'є. Ознаки Діні та Ліпшиця. Наслідок з ознаки Ліпшиця. Означення перетворення Фур'є. Теорема про обернення та властивості перетворення Фур'є.

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Означення інтегральних сум. Означення кратного інтеграла. Властивості кратного інтеграла. Теорема про інтегровність неперервної функції. Означення розбиття простору, множин $A_n, A^n, \triangle A_n$. Означення зовнішньої та внутнрішньої міри, міри Жордана та вимірної множини. Критерій вимірності. Теорема про клас вимірних множин. Властивості міри Жордана. Означення циліндричної множини. Теорема про вимірність циліндричної множини. Теорема про формулу для кратного інтеграла по циліндричній множині. Зауваження для потрійного інтеграла. Теорема про заміну змінної в кратному інтегралі. Означення вичерпної послідовності та кратного інтеграла по необмеженій множині та від необмеженої функції. Теорема про збіжність невласного кратного інтеграла від невід'ємної функції.

КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Означення диференціальної форми першого порядку та криволінійного інтегралу другого роду. Фізична інтерпретація. Означення криволінійного інтеграла першого роду. Маса та довжина кривої. Центр мас кривої. Означення диференціальної форми другого порядку та поверхневого інтеграла другого роду. Фізична інтерпретація. Поверхневий інтеграл першого роду. Маса та площа поверхні. Центр мас поверхні. Теорема про формулу Ньютона-Лейбніца. Теорема про формулу Гріна. Наслідок. Теорема про формулу Остроградського-Гаусса. Означення скалярного та векторного поля, градієнта. Теорема про формулу Стокса. Означення циркуляції та ротора. Їх зв'язок. Означення потоку та дивергенції. Їх зв'язок. Означення потенціального поля. Означення соленоїдального поля.