КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

НАВЧАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

для студентів спеціальності "механіка"
механіко–математичного факультету

(I семестр другого курсу)

2014

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів спеціальності "механіка"механіко–математичного факультету (1 семестр другого курсу) / Упорядн. М. О. Назаренко, Т. О. Петрова, А. В. Чайковський. – Електронне видання.– 2014. – 88 с.

Рецензенти

А. С. Романюк, доктор фізико–математичних наук, професор

Ю. Ю. Трохимчук, доктор фізико–математичних наук, професор

Рекомендовано до друку Вченою Радою
механіко–математичного факультету
08 жовтня 2018 року

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У цьому методичному посібнику наведені теми практичних занять з математичного аналізу, умови задач, рекомендованих для розв'язання в аудиторії, а також задачі для домашньої роботи

Головна мета практичних занять — активне засвоєння студентами основних понять і положень курсу, набуття навичок їх застосування до розв'язання стандартних задач, опанування деяких спеціальних методів. Умовам задач в кожному занятті передують кілька контрольних запитань, відповіді на які студенти мають підготувати вдома.

У кожному занятті група задач А — задачі для аудиторної роботи, група Б — для домашнього завдання. Кількість і якість задач, що розв'язуються в аудиторії і задаються додому, залежить від рівня підготовки студентів. Ці задачі підбираються викладачем з набору задач, наведених в методичці.

Пропонуються також завдання підвищеної складності для студентів з високим рівнем підготовки за умови успішного виконання обов'язкової частини. Задачі підвищеної складності позначені літерою Д.

У першому семестрі, як правило, проводяться дві контрольні роботи, зразки умов та розв'язання яких наведено в тексті.

У посібнику також вміщено програму курсу "Математичний аналіз"для студентів спеціальності "механіка" II курс, I семестр".

При підборі задач використано такі збірники задач:

Дороговцев А.Я. Математический анализ. Сборник задач. -- Киев, 1987.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1969.

Частина задач складена упорядниками. При підготовці цього учбового посібника автори суттєво використали методичні розробки:

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету (2 семестр першого курсу) // Упорядн. М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, А. В. Чайковський, О.Н. Нестеренко. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004.

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету, спеціальність механіка (1 семестр другого курсу) / Упорядн. Т. О. Петрова, Г. С. Смірнов, М. О. Денисьєвський. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2002.

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету, спеціальність механіка (2 семестр другого курсу) / Упорядн. Т. О. Петрова, Г. С. Смірнов, М. О. Денисьєвський. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2002.

ЗАНЯТТЯ 1
МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ. ЗБІЖНІСТЬ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Контрольні запитання

1. *Означення метрики та метричного простору.*
2. *Простір $\mathbf{R}^m$ з евклідовою метрикою.*
3. *Простір $C([a,b])$ з рівномірною метрикою.*
4. *Означення збіжності послідовності в метричному просторі.*
5. *Характеризація збіжності в просторах $(\mathbf{R}^m,\rho)$ і $(C([a,b]),\rho)$.*

A1

1. 1) Довести, що функція $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + 2|y_1-y_2|$ визначає метрику на $\mathbf{R}^2$. Зобразити на координатній площині множини з простору $(\mathbf{R}^2, d_1)$: $\overline{B}((0,0),2), B((2,3),2), S((0,0),1)$.
2) Довести, що функція $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$ визначає метрику на $\mathbf{R}^2$. Зобразити на координатній площині множини з простору $(\mathbf{R}^2, d_2)$: $\overline{B}((0,0),2), B((2,3),2), S((0,0),1)$.
3) Довести, що функція $d_3((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1-x_2)^2 + |y_1-y_2|$ не визначає метрику на $\mathbf{R}^2$.

2. Які з наведених функцій визначають метрику на $C([0,1])$?

1) $d(f,g) = \max\limits_{t\in[0,1/2]} |f(t)-g(t)|$;
2) $d(f,g) = \int\limits_0^1 |f(t)-g(t)|dt$;
3) $d(f,g) = \max\limits_{t\in[0,1]} (e^{-t}|f(t)-g(t)|)$.

3. В просторі $(C([0,1]),\rho)$ задані елементи $f_1(t)=t, f_2(t)=\frac{t}{2}, f_3(t)=\frac{1}{2}, f_4(t)=\sin\pi t,\ t\in[0,1]$. Які з наведених включень правильні?

1) $f_2 \in \overline{B}(f_1, 1/3)$;
2) $f_4 \in \overline{B}(f_3, 1/2)$;
3) $f_4 \in \overline{B}(f_3, 1)$;
4) $f_1 \in \overline{B}(f_2, 1/2)$;
5) $f_4 \in S(f_3, 1/2)$.

4. Чи збігаються у відповідних просторах наведені послідовності? Для збіжних послідовностей знайти їх границі.

1) $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{2n+1}{n}\right) : n\ge 1\right\}$ в $(\mathbf{R}^2,\rho)$;
2) $\left\{\left(\frac{\cos n\pi}{2}, \frac{n+1}{n^2}\right) : n\ge 1\right\}$ в $(\mathbf{R}^2,\rho)$;

3) $\left\{\left(\dfrac{\sin n}{n}, (-1)^n, \dfrac{1}{n^2}\right) \;:\; n \geq 1\right\}$ в $(\mathbf{R}^3, \rho)$;

4) $\left\{\left(\cos\dfrac{1}{n}, \dfrac{2n-1}{n}, \dfrac{2}{n}\right) \;:\; n \geq 1\right\}$ в $(\mathbf{R}^3, \rho)$;

5) $\left\{t^{n+3} - t^n, t \in [0,1] \;:\; n \geq 1\right\}$ в $(C([0,1]), \rho)$;

6) $\left\{t^2 + \dfrac{t}{n}, t \in [1,2] \;:\; n \geq 1\right\}$ в $(C([1,2]), \rho)$.

5. Нехай $X = (0,1)$, $\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$. Показати, що послідовність $\left\{\dfrac{n}{2n+1} \;:\; n \geq 1\right\}$ збігається в (X, ρ), а послідовність $\left\{1 - \dfrac{1}{n} \;:\; n \geq 1\right\}$ не має границі в (X, ρ).

Д1. Довести, що така функція визначає метрику на $C([0,1])$: $d(f,g) = \left(\int\limits_0^1 (f(t) - g(t))^2\right)^{1/2}$.

Б1

1. Чи визначає функція $d(x_1, x_2) = |\sin(x_1 - x_2)|$ метрику на множині $\mathbf{R}$?

2. Довести, що функція $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2|$ визначає метрику на $\mathbf{R}^2$. Зобразити на координатній площині множини з простору $(\mathbf{R}^2, d)$: $\overline{B}((0,0),1), S((1,1),2)$.

3. Перевірити, що наведені функції визначають метрики на $\mathbf{R}^3$:

1) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$;
2) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2| + 3|z_1 - z_2|$;
3) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$;
4) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, 2|y_1 - y_2|, 3|z_1 - z_2|\}$;
5) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{|x_1 - x_2|} + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$;
6) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + |z_1 - z_2|$;
7) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4(y_1 - y_2)^2 + 9(z_1 - z_2)^2}$;
8) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = |x_1 - x_2| + \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

4. Чи визначають наведені функції метрики на $\mathbf{R}^2$?

1) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|$;
2) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 3|x_1 - x_2|$;
3) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - y_1| - |x_2 - y_2|$;
4) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + \sqrt{|y_1 - y_2|}$;
5) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2|^3 + |y_1 - y_2|$;
6) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + \sqrt[3]{y_1 - y_2}$;
7) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2|$.

5. Чи збігаються в просторі $(\mathbf{R}^3, \rho)$ такі послідовності:

1) $\left\{\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2n + n^2}{3n^2 - 1}, \dfrac{\ln(2n) - n}{n + 1}\right) \,:\, n \geq 1\right\}$;
2) $\{(n, n+1, n+2) \,:\, n \geq 1\}$;
3) $\left\{\left(\dfrac{\ln(1+n)}{n}, (-1)^{2n}, \dfrac{1}{2^n}\right) \,:\, n \geq 1\right\}$;
4) $\left\{\left(\sin\dfrac{\pi n}{2}, \dfrac{3n+1}{n}, \dfrac{4}{n}\right) \,:\, n \geq 1\right\}$?

6. Чи збігаються в просторі $(C([0, 1]), \rho)$ такі послідовності:

1) $\{t^n(1 - t), t \in [0, 1] \,:\, n \geq 1\}$;
2) $\{(1 - t)^n, t \in [0, 1] \,:\, n \geq 1\}$;
3) $\{t^n(1 - t^n), t \in [0, 1] \,:\, n \geq 1\}$;
4) $\left\{\cos^{2n} \pi t, t \in [0, 1] \,:\, n \geq 1\right\}$;
5) $\left\{n \sin\dfrac{t}{n}, t \in [0, 1] \,:\, n \geq 1\right\}$;
6) $\left\{n \ln\left(1 + \dfrac{t}{n}\right), t \in [0, 1] \,:\, n \geq 1\right\}$;
7) $\left\{e^{-nt}, t \in [0, 1] \,:\, n \geq 1\right\}$?

ЗАНЯТТЯ 2
ВНУТРІШНІ, ГРАНИЧНІ, ІЗОЛЬОВАНІ ТОЧКИ. ВІДКРИТІ ТА ЗАМКНЕНІ МНОЖИНИ

Контрольні запитання

1. *Означення внутрішньої, граничної та ізольованої точок множини.*
2. *Теорема про характеризацію граничної точки множини.*
3. *Означення відкритої та замкненої множин.*
4. *Властивості відкритих та замкнених множин.*
5. *Теорема про зв'язок між замкненими та відкритими множинами.*

А2

1. Визначити в просторі $(\mathbf{R}, \rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A = [0, 1]$; 3) $A = (0, 1)$; 5) $A = \mathbf{N}$;
2) $A = [0, 1)$; 4) $A = \left\{\frac{1}{n} \,:\, n \geq 1\right\}$; 6) $A = \mathbf{Q}$.

2. Визначити в просторі $(\mathbf{R}^2, \rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\right\}$; 5) $A = \{(x, y) \mid x = y\}$;
2) $A = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 2\right\}$; 6) $A = \left\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \mid n \geq 1\right\}$;
3) $A = \left\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 9\right\}$;
4) $A = \{(x, y) \mid x < y\}$; 7) $A = \{((-1)^n, e^{-n}) \mid n \geq 1\}$.

3. Визначити в просторі $(\mathbf{R}^3, \rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 4\right\}$;
2) $A = \{(x, y) \mid x + y = 2, 1 < z \leq 2\}$.

4. Визначити в просторі $(C([0, 1]), \rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A = \{f \mid 1 < f(0) < 2\}$; 4) $A = \{f \mid f(0)f(1) < 0\}$;
2) $A = \{f \mid f(0) = 1\}$;
3) $A = \{f \mid f(0) \geq 1\}$; 5) $A = \{f \mid f(0) = 1, f(1) = 0\}$.

Д1. Визначити в просторі $(\mathbf{R}, \rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A = \left\{\frac{m}{|m|+n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\right\}$; 3) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [2n, 2n + 1]$.
2) $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$;

Д2. Визначити в просторі $(C([0,1]),\rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A=\left\{f \mid \min\limits_{t\in[0,1]} f(t)>0\right\}$;
2) $A=\left\{f \mid \max\limits_{t\in[0,1]} f(t)\geq 3\right\}$;
3) $A=\left\{f \mid t^2<f(t)<t, t\in[0,1]\right\}$;
4) $A=C^1([0,1])$;
5) $A=\left\{f \mid \int\limits_0^1 x(t)dt>0\right\}$.

Б2

1. Визначити в просторі $(\mathbf{R},\rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A=[0,+\infty)$;
2) $A=[-1,1)$;
3) $A=[-3,-2]$;
4) $A=\left\{\dfrac{n}{n+1} \;:\; n\geq 1\right\}\cup\{1\}$;
5) $A=\mathbf{Z}$;
6) $A=\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$.

2. Визначити в просторі $(\mathbf{R}^2,\rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A=\{(x,y) \mid x>0\}$;
2) $A=\{(x,y) \mid |x|+|y|\leq 1\}$;
3) $A=\{(x,y) \mid y\leq 2^x\}$;
4) $A=\{(x,y) \mid |x|-y=3\}$;
5) $A=\{(x,y) \mid 1\leq x+y<2\}$;
6) $A=\left\{\left(\dfrac{2}{n},\dfrac{3}{2n}\right) \mid n\geq 1\right\}$;
7) $A=\left\{((-1)^n,\cos\frac{1}{n}) \mid n\geq 1\right\}$.

3. Визначити в просторі $(\mathbf{R}^3,\rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A=\left\{(x,y,z) \mid y^2+z^2<1\right\}$;
2) $A=\{(x,y) \mid x=3, y+z\leq 4\}$.

4. Визначити в просторі $(C([0,1]),\rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A=\left\{f \mid f(\frac{1}{2})>0\right\}$;
2) $A=\left\{f \mid 2\geq f(1)\geq 1\right\}$;
3) $A=\{f \mid f(0)f(1)\geq 0\}$;
4) $A=\left\{f \mid f(t)=0, t\in[0,\frac{1}{2}]\right\}$;
5) $A=\{f \mid f(0)=1, f(1)>1\}$.

ЗАНЯТТЯ 3
СЕПАРАБЕЛЬНІ ТА ПОВНІ МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ. ТЕОРЕМА БАНАХА

Контрольні запитання

1. *Означення скрізь щільної множини.*
2. *Означення сепарабельного метричного простору.*
3. *Означення фундаментальної послідовності в метричному просторі.*
4. *Означення повного метричного простору.*
5. *Теорема Банаха про нерухому точку. Наслідки з неї.*

А3

1. Які з наведених множин скрізь щільні в $(\mathbf{R}^2, \rho)$?

1) $\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$; 2) $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$; 3) $\mathbf{Q} \times (\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q})$.

2. Довести, що наведені множини скрізь щільні в $(\mathbf{R}, \rho)$:

1) $\left\{\frac{r}{\sqrt{3}} \mid r \in \mathbf{Q}\right\}$; 3) $\{n + \sin r \mid n \in \mathbf{Z}, r \in \mathbf{Q}\}$;

2) $\{n \cos r \mid n \in \mathbf{Z}, r \in \mathbf{Q}\}$; 4) $\left\{\frac{m}{\sqrt{n}} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\right\}$.

3. Послідовність елементів метричного простору (X, ρ) задовольняє умову $\forall n \geq 1 \ : \ \rho(x_n, x_{n+1}) \leq 2^{-n}$. Довести, що $\{x_n : n \geq 1\}$ – фундаментальна в (X, ρ).

4. Встановити сепарабельність та повноту простору $\mathbf{R}^2$ з метрикою $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

5. В просторі $\mathbf{R}$ з дискретною метрикою $d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$ описати всі збіжні та всі фундаментальні послідовності. Чи є цей простір повним? сепарабельним?

6. Які з цих просторів з метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$ є повними?

1) $X = (0, 1)$; 3) $X = (0, +\infty)$;

2) $X = [0, 1]$; 4) $X = (-\infty, 1]$.

7. Довести, що рівняння $x = \frac{1}{2}\sin(x + 1)$ має єдиний розв'язок $x \in \mathbf{R}$.

8. Довести, що рівняння $x^2 + \operatorname{arctg}(xy) + y = 0,\ x \geq 0$, має для кожного $x \geq 0$ єдиний розв'язок $y(x)$.

Д1. Чи є скрізь щільними в $(\mathbf{R}^2, \rho)$ множини:

1) $\{(x, y) \mid y = rx, r \in \mathbf{Q}\}$;

2) $\left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2, r \in \mathbf{Q}\right\}$.

Д2. Які з наведених підмножин простору $C([0,1])$ з метрикою $d(f,g) = \left(\int_0^1 (f(t)-g(t))^2\right)^{1/2}$, скрізь щільні в ньому:

1) множина всіх многочленів, які розглядаються на $[0,1]$;
2) множина усіх диференційовних функцій на $[0,1]$?

Д3. Чи може послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ елементів метричного простору (X,ρ), що задовольняє умову $\forall n \geq 1 \;\;:\;\; \rho(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{n}$, бути фундаментальною в (X,ρ)? не фундаментальною в (X,ρ)?

Б3

1. Довести, що наведені множини скрізь щільні в $(\mathbf{R},\rho)$:

1) $\left\{r\sqrt{2} \mid r \in \mathbf{Q}\right\}$;
2) $\{n \sin r \mid n \in \mathbf{Z}, r \in \mathbf{Q}\}$;
3) $\{n + \cos r \mid n \in \mathbf{Z}, r \in \mathbf{Q}\}$;
4) $\{\operatorname{tg} x \mid x \in \mathbf{Q} \cap (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$;
5) $\{\ln m - \ln n \mid m, n \in \mathbf{N}\}$;
6) $\left\{\frac{m}{n^2} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\right\}$.

2. Які з наведених множин скрізь щільні в $(\mathbf{R}^2,\rho)$?

1) $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$;
2) $(\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}) \times (\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q})$;
3) $\mathbf{N} \times (\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q})$;
4) $\left\{\left(\frac{m}{n}, \frac{n}{m}\right) \mid m, n \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}\right\}$;
5) $\{(r_1 + r_2, r_1 - r_2) \mid r_1, r_2 \in \mathbf{Q}\}$;
6) $\left\{(r_1\sqrt{2}, r_2\sqrt{3}) \mid r_1, r_2 \in \mathbf{Q}\right\}$.

3. Послідовність елементів метричного простору (X,ρ) задовольняє умову $\forall n \geq 1 \;\;:\;\; \rho(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Довести, що $\{x_n : n \geq 1\}$ – фундаментальна в (X,ρ).

4. Які з цих просторів з метрикою $\rho(x,y) = |x-y|$ є повними?

1) $X = \mathbf{Z}$;
2) $X = \mathbf{Q}$;
3) $X = \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$;
4) $X = \mathbf{R}\backslash[0,1]$;
5) $X = (-\infty, 2] \cap [3,4]$;
6) $X = (-\infty, 1] \cap \{2\}$.

5. Довести повноту простору $(\mathbf{R}^3, d)$:

1) $d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = |x_1-x_2| + 2|y_1-y_2| + 3|z_1-z_2|$;
2) $d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) =$
   $\max\{|x_1-x_2|, 2|y_1-y_2|, 3|z_1-z_2|\}$;
3) $d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = \sqrt{|x_1-x_2|} + |y_1-y_2| + |z_1-z_2|$;
4) $d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} + |z_1-z_2|$;
5) $d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) =$
   $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + 4(y_1-y_2)^2 + 9(z_1-z_2)^2}$;
6) $d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = |x_1-x_2| + \sqrt{(y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$.

6. Довести, що рівняння $5x = \cos(3x+1)$ має єдиний розв'язок $x \in \mathbf{R}$.

7. Довести, що рівняння $x^3 + \sin(x+y) + 2y = 0, \;\; x \in \mathbf{R}$, має для кожного $x \in \mathbf{R}$ єдиний розв'язок $y(x)$.

ЗАНЯТТЯ 4
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ. ПОВТОРНІ ГРАНИЦІ

Контрольні запитання

1. *Означення границі в точці числової функції багатьох змінних.*
2. *Властивості границь числових функцій.*
3. *Означення повторних границь.*
4. *Означення границі в точці числової функції, визначеної на метричному просторі.*

А4

1. Знайти повторні та подвійні границі, якщо вони існують:

1) $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2},\ x \to 0,\ y \to 0;$

2) $f(x,y) = \dfrac{x+e^y}{e^x+y},\ x \to 0,\ y \to 0;$

3) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x+y)},\ x \to +\infty,\ y \to +\infty;$

4) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^4+y^4},\ x \to +\infty,\ y \to +\infty;$

5) $f(x,y) = \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2},\ x \to +\infty,\ y \to +\infty;$

6) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2},\ x \to 0,\ y \to 0;$

7) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}},\ x \to 0,\ y \to 0;$

8) $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x},\ x \to 0,\ y \to 1;$

9) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2},\ x \to 0,\ y \to 0;$

10) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y},\ x \to 0,\ y \to 0, x \neq y;$

11) $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y},\ x \to 0,\ y \to 0, y \neq 0;$

12) $f(x,y) = \sin\dfrac{\pi x}{2x+y},\ x \to +\infty,\ y \to +\infty,\ y \neq -2x.$

2. Знайти повторні та потрійні границі, якщо вони існують:

1) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{|x|+|y|+|z|},\ x \to 0,\ y \to 0,\ z \to 0;$

2) $f(x,y,z) = \dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2},\ x \to 0,\ y \to 0,\ z \to 0.$

3. Нехай $x_0 \in C([0,1])$. Знайти границі дійсних функцій, визначених на метричному просторі $(C([0,1]),\rho)$:

1) $f(x) = \int\limits_0^1 |x(t)|dt,\ x \to x_0;$ 2) $f(x) = \int\limits_0^1 tx^2(t)dt,\ x \to x_0.$

Б4

1. Дати означення таких границь:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} f(x,y);$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to -\infty}} f(x,y);$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} f(x,y);$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to -\infty\\ y\to -\infty}} f(x,y);$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -\infty}} f(x,y);$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 0}} f(x,y).$

2. Знайти повторні та подвійні границі, якщо вони існують:

1) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2},\ x \to +\infty,\ y \to +\infty;$

2) $f(x,y) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}^{2}.x+y},\ x \to +\infty,\ y \to 1;$

3) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^4y^2)}{(x^2+y^2)^2},\ x \to 0,\ y \to 0;$

4) $f(x,y) = \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{x^4+y^4}\right)}{x^4+y^4},\ x \to 0,\ y \to 0;$

5) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy},\ x \to 0,\ y \to +\infty;$

6) $f(x,y) = \log_x(x+y),\ x \to 1,\ y \to 0,\ x > 0,\ x \neq 1,\ y > -x;$

7) $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{(x^2+y^4)^2},\ x \to +\infty,\ y \to +\infty;$

8) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2},\ x \to +\infty,\ y \to +\infty;$

9) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2(x^2+y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)},\ x \to 0,\ y \to 0;$

10) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ x \to -\infty,\ y \to -\infty;$

11) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2},\ x \to -\infty,\ y \to -\infty;$

12) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4},\ x \to 0,\ y \to 0.$

3. З'ясувати, чи існують границі:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to -\infty}} xy;$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} (x+y);$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0}} x^y;$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to +\infty}} x^y;$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to -\infty}} x^y;$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 0}} x^y;$

7) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to -\infty}} \dfrac{x}{y};$

8) $\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0}} \dfrac{x}{y};$

9) $\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to -\infty}} \dfrac{x}{y}.$

4. Знайти повторні та потрійні границі, якщо вони існують:

1) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2},\ x \to 0,\ y \to 0,\ z \to 0;$

2) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2+z^2},\ x \to 0,\ y \to 0,\ z \to 0.$

5. Нехай $x_0(t) = t,\ t \in [0,1]$. Знайти границі дійсних функцій, визначених на метричному просторі $(C([0,1]),\rho)$:

1) $f(x) = x(1) - 2x(0),\ x \to x_0;$

2) $f(x) = \int\limits_0^1 (t+x(t))^2 dt + x(0),\ x \to x_0.$

ЗАНЯТТЯ 5
НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ

Контрольні запитання

1. *Означення неперервної функції багатьох змінних.*
2. *Властивості неперервних функцій.*
3. *Теорема про характеризацію неперервності.*

А5

1. Знайти точки розриву наведених функцій:

1) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ (x,y)\in \mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\};$

2) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y > x, \\ 0, & y \le x; \end{cases}$

3) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4+1};$

4) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^3+y^3}, & x \ne -y, \\ \dfrac{1}{x^2-xy+y^2}, & x=-y,\ x\ne 0, \\ 1, & x=y=0. \end{cases}$

2. Довести, що функція

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-xy-x^4-y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0), \\ 1, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

неперервна в будь-якій точці за будь-якою змінною при фіксованому значенні іншої змінної, але як функція двох змінних розривна в точці $(0,0)$.

3. Довизначити функцію $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2},\ (x,y)\in \mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, в точці $(0,0)$ таким чином, щоб вона стала неперервною в цій точці.

4. Нехай (X,ρ) – метричний простір, $f\in C(X,\mathbf{R})$. Довести, що:
1) множини $\{x\in X \mid f(x)=0\}$, $\{x\in X \mid f(x)\ge 1\}$ замкнені;
2) множина $\{x\in X \mid 1<f(x)<2\}$ відкрита.

5. Довести, що наведені множини відкриті в $(\mathbf{R}^3, \rho)$:

1) $\left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\right\}$; 2) $\{(x, y, z) \mid 1 < x + y < 4\}$.

6. Довести, що наведені множини замкнені в $(\mathbf{R}^2, \rho)$:

1) $\left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$; 2) $\{(x, y) \mid 10 \le e^x + e^y \le 100\}$.

Чи є вони обмеженими?

Д1. Довести, що наведені дійсні функції неперервні на $(C([0, 4]), \rho)$:

1) $f(x) = x(0)$;

2) $f(x) = \int\limits_0^4 \sin x(t) dt$;

3) $f(x) = \int\limits_0^2 x(t^2) \sin t dt.$

Б5

1. Знайти точки розриву наведених функцій:

1) $f(x, y) = \begin{cases} 16 - x^2 - y^2, & x^2 + y^2 \le 16, \\ 0, & x^2 + y^2 > 16; \end{cases}$

2) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - y}{x + y}, & x + y \ne 0, \\ 1, & x + y = 0; \end{cases}$

3) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x - 3}{x^2 + y^2 - 4}, & x^2 + y^2 \ne 4, \\ 0, & x^2 + y^2 = 4; \end{cases}$

4) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - y^2}{x + y^2}, & x + y^2 \ne 0, \\ 0, & x + y^2 = 0; \end{cases}$

5) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - y}{x^3 - y^3}, & x \ne y, \\ 3, & x = y; \end{cases}$

6) $f(x, y) = \begin{cases} \ln(10 - x^2 - y^2), & x^2 + y^2 < 9, \\ 0, & x^2 + y^2 \ge 9; \end{cases}$

7) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \ne (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

8) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}, & |x|\neq|y|,\\ 1, & |x|=|y|;\end{cases}$

9) $f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x+y}, & x+y\neq 0,\\ 0, & x+y=0;\end{cases}$

10) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{xy}, & xy\neq 0,\\ 1, & xy=0.\end{cases}$

2. Довести неперервність наведених функцій в $(\mathbf{R}^3,\rho)$:

1) $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)$;
2) $f(x,y,z)=\ln(1+x^2+y^2+z^2)$;
3) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^4+z^6}$;
4) $f(x,y,z)=e^{x+2y+3z}$.

3. Довизначити функцію f за неперервністю на $\mathbf{R}^2$:

1) $f(x,y)=\dfrac{(x-1)^2+2(x-2)^2+(x-1)^2(x-2)^2}{(x-1)^2+2(x-2)^2}$, $(x,y)\neq(1,2)$;

2) $f(x,y)=\dfrac{(x^2+y^2-1)^4}{(x-1)^2+y^2}$, $(x,y)\neq(1,0)$;

3) $f(x,y)=\dfrac{(x-2)(y-3)^2}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}}$, $(x,y)\neq(2,3)$;

4) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$;

5) $f(x,y)=\dfrac{\ln(1+|xy|)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y)\neq(0,0)$;

6) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^4y^2)}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$;

7) $f(x,y)=\dfrac{e^{x^2+y^2}-1-\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$;

8) $f(x,y)=\dfrac{1-\cos(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$;

9) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1},\ (x,y) \neq (0,0);$

10) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^6+y^6}\exp\left(-\dfrac{1}{x^6+y^6}\right),\ (x,y) \neq (0,0).$

4. З'ясувати, які з наведених множин замкнені, відкриті в $(\mathbf{R}^3,\rho)$:

1) $\big\{(x,y,z) \mid x^2+4y^2+9z^2=1\big\}$;
2) $\Big\{(x,y,z) \mid \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|} \leq 1\Big\}$;
3) $\big\{(x,y,z) \mid x^3+y^3+z^3>100\big\}$;
4) $\{(x,y,z) \mid x+2y+3z<10\}$;
5) $\{(x,y,z) \mid 1 \leq xyz \leq 3\}$;
6) $\big\{(x,y,z) \mid xy^2z^3>5\big\}$;
7) $\big\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 25, x+y+z \leq 20, x=3\big\}$;
8) $\{(x,y,z) \mid e^{x+y}+e^{x+z}+e^{y+z}>1\}$;
9) $\big\{(x,y,z) \mid x^3+y^3+z^3=2, x+y \geq 1\big\}$;
10) $\{(x,y,z) \mid 1<x+y+z<4, z>0\}$.

ЗАНЯТТЯ 6
РІВНОМІРНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ. КОМПАКТНІ МНОЖИНИ

Контрольні запитання

1. *Означення рівномірно неперервної функції багатьох змінних.*
2. *Означення компактної множини.*
3. *Критерії компактності в* $(\mathbf{R}^m, \rho)$ *і в* $(C([a,b]), \rho)$.
4. *Властивості неперервних функцій на компакті.*
5. *Теорема Кантора про рівномірну неперервність.*

А6

1. Довести, що такі дійсні функції рівномірно неперервні в $(\mathbf{R}^3, \rho)$:

1) $f(x,y,z) = 2 + 3x + 4y + 5z;$
2) $f(x,y,z) = \sin(x+y+z);$
3) $f(x,y,z) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z.$

2. Довести, що функція $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ неперервна, але не є рівномірно неперервною на $\mathbf{R}^3$.

3. Які з наведених множин компактні в $(\mathbf{R}^2, \rho)$?

1) $\left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\right\};$
2) $\{(x,y) \mid xy \le 1\};$
3) $\left\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 \le 4\right\};$
4) $\{(x,y) \mid |x| + |y| \le 4, xy \le 1\}.$

4. Довести, що множина
$\{x \in C([0,1]) \mid |x(0)| \le 1,\ \forall t_1, t_2 \in [0,1] \ :\ |x(t_1) - x(t_2)| \le 3|t_1 - t_2|\}$
компактна в $(C([0,1]), \rho)$.

5. Нехай A, B – компактні множини в просторі (X, ρ). Чи можуть множини $A \cap B,\ A \cup B,\ A \backslash B,\ A \triangle B$ бути компактними? не компактними?

6. Довести, що наведені функції на відповідних множинах досягають свого найбільшого та найменшого значення:

1) $f(x,y,z) = |x+y| - \operatorname{arctg}(y+z),$
   $A = \{(x,y,z) \mid 1 \le x \le 2, 2 \le y \le 3, 3 \le z \le 4\};$
2) $f(x,y,z) = e^{x-y} + e^{y-z} + e^{z-x},$
   $A = \{(x,y,z) \mid 1 \le |x| + |y| + |z| \le 2, xyz \ge 0\}.$

7. Довести, що наведені функції рівномірно неперервні на відповідних множинах в просторі $(\mathbf{R}^2, \rho)$:

1) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2},\ A = \left\{(x,y) \mid 1 \le y \le x^2\right\};$

2) $f(x,y) = \sin\dfrac{x}{y},\ A = [1,2] \times [3,4]$.

Д1. Довести, що сума рівномірно неперервних функцій є рівномірно неперервною функцією.

Д2. Довести, що добуток обмежених рівномірно неперервних функцій є рівномірно неперервною функцією.

Д3. Нехай $A_n,\ n \geq 1,$ – компактні множини в просторі (X,ρ). Чи можуть множини $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n,\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n,\ X \backslash A_1$ бути компактними? не компактними?

Б6

1. Які з наведених множин компактні в $(\mathbf{R}^2,\rho)$?

1) $\big\{(x,y) \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\big\}$;
2) $\big\{(x,y) \,|\, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\big\}$;
3) $\{(x,y) \,|\, \sqrt{x} + |y| < 1\}$;
4) $\left\{(x,y) \,|\, \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1\right\}$;
5) $\big\{(x,y) \,|\, xy^2 \leq 1\big\}$;
6) $\{(x,y) \,|\, e^x + e^y \geq 1\}$;
7) $\{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq y \leq 1\}$;
8) $\left\{(x,y) \,|\ \sin(x^2 + y^2) \leq \dfrac{1}{2}\right\}$;
9) $\big\{(x,y) \,|\, (x-1)^2 + (y-2)^2 < 4\big\}$;
10) $\{(x,y) \,|\, -1 \leq x \leq 1, -2 < y < 2\}$.

2. Довести, що наведені функції рівномірно неперервні на відповідних множинах в просторі $(\mathbf{R}^2,\rho)$:

1) $f(x,y) = \sin(x - |y|),\ A = \big\{(x,y) \,|\, x^4 + y^4 \leq 100\big\}$;
2) $f(x,y) = \cos xy,\ A = \big\{(x,y) \,|\, 16 \leq x^2 + y^2 \leq 25\big\}$;
3) $f(x,y) = \ln(1 + |x| + y^2),\ A = [1,2] \times [2,3]$;
4) $f(x,y) = \int\limits_x^y e^{t^2}\,dt,\ A = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq y \leq 1|\}$;
5) $f(x,y) = \operatorname{arctg}^2(xy),\ A = \{(x,y) \,|\ \max\{|x|,|y|\} \leq 3\}$;
6) $f(x,y) = \arcsin(\dfrac{xy}{1+|xy|}),\ A = \{(x,y) \,|\, |x| + |y| \leq 1\}$;
7) $f(x,y) = e^{x^2+y^2},\ A = \big\{(x,y) \,|\, (x-y)^2 + (x+y)^2 \leq 1\big\}$;
8) $f(x,y) = xe^y + ye^x,\ A = \big\{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1, x^4 - y \leq 1\big\}$;
9) $f(x,y) = x^2 + y \operatorname{arctg} x,\ A = \left\{(x,y) \,|\, \sqrt{|x|} + y^2 \leq 2\right\}$;
10) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2},\ A = \{(x,y) \,|\, x = y, 0 \leq x \leq 1\}$.

ЗАНЯТТЯ 7
ЧАСТИННІ ПОХІДНІ. ПОХІДНІ ЗА НАПРЯМКОМ. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІ ФУНКЦІЇ. ДИФЕРЕНЦІАЛ

Контрольні запитання

1. *Частинні похідні та їх властивості.*
2. *Похідна за напрямком та її властивості.*
3. *Градієнт функції в точці.*
4. *Означення диференційовної в точці функції багатьох змінних.*
5. *Означення диференціала першого порядку.*

А7

1. Знайти частинні похідні першого порядку таких функцій:

1) $f(x,y) = x^4 + 2y^4 - 4x^2y^2 + \ln(x+y^2) + x\sin(x+y),\ x > -y^2;$

2) $f(x,y) = xy + \dfrac{x}{y} + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{x}{y}\right)^y, xy > 0;$

3) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^y + \arcsin\dfrac{1}{1+x^2y^2},\ x > 0.$

2. Знайти вказані частинні похідні таких функцій:

1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z},\ f(x,y,z) = x^3\sin(yz) + (x^2+y^2)e^{x+z};$

2) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \dfrac{\partial^6 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^3},\ f(x,y,z) = x\ln(yz) + xyze^{x+y+z}, x,y,z > 0.$

3. Розглянемо оператор Лапласа вигляду $\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Знайти $\triangle u$ для функцій:

1) $u(x,y) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y,\ x, y \in \mathbf{R};$

2) $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y) \neq (0,0).$

4. 1) Знайти похідну функції $f(x,y) = x^2 - y^5$ в точці $\vec{x}^\circ = (1,1)$ за напрямком $\vec{a} = (2,3)$. Знайти вектор-градієнт в цій точці.

2) Знайти похідну функції $f(x,y,z) = xy^2z^3$ в точці $\vec{x}^\circ = (3,2,1)$ за напрямком $\vec{a} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Дати геометричну інтерпретацію цього напрямку, якщо $|\vec{a}| = 1$. Знайти вектор-градієнт в цій точці та обчислити його довжину.

5. Дослідити диференційовність у відповідних точках таких функцій:

1) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3},\ (x,y)\in\mathbf{R}^2,\ \vec{x}^\circ = (0,0);$

2) $f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases} \quad \vec{x}^\circ = (0,0);$

3) $f(x,y) = |x-1|+|y-2|,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2,\ \vec{x}^\circ = (1,2);$

4) $f(x,y) = \operatorname{tg}\dfrac{x^2}{y},\ y\neq 0, \left|\dfrac{x^2}{y}\right| < \dfrac{\pi}{2},\ \vec{x}^\circ = \left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right).$

6. Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити значення добутку:

1) $1,002\cdot 2,003^2\cdot 3,004^3;$ 2) $\sin 31^\circ\cdot\cos 62^\circ.$

Порівняти отримані значення з точними $108,9756...$ і $0,241796...$ $\left(\dfrac{\sqrt{3}\pi}{72} = 0,07557...\right).$

Б7

1. Знайти частинні похідні першого порядку таких функцій:

1) $f(x,y,z) = x^{y/z},\ x>0, z\neq 0;$

2) $f(x,y,z) = x^{\arcsin(y/z)},\ x>0, z\neq 0,\ \left|\dfrac{y}{z}\right| < 1;$

3) $f(x,y,z) = \left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\right)^z,\ xy>0;$

4) $f(x,y,z) = \left(\sin\dfrac{x}{y}\right)^z,\ y\neq 0, 0<\dfrac{x}{y}<\pi;$

5) $f(x,y,z) = (\operatorname{tg}x)^{y/z},\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}, z\neq 0;$

6) $f(x,y,z) = e^{x(x^2+y^2+z^2)};$

7) $f(x,y,z) = \ln(x+\ln y+\ln\ln z),\ x>0, y>1, z>e;$

8) $f(x,y,z) = \ln\dfrac{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, x^2+y^2+z^2<1;$

9) $f(x,y,z) = \sqrt{\cos^x+\sin^y+\operatorname{ctg}^2 z},\ 0<z<\dfrac{\pi}{2};$

10) $f(x,y,z) = \dfrac{xy-z}{1+e^x+\sin y}.$

2. Знайти в точці $\vec{x}^\circ$ градієнт та похідну за напрямком $\vec{a}$ функції $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$:

1) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \vec{x}^\circ=(1,1,1),\ \vec{a}=(1,2,3);$
2) $f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2},\ \vec{x}^\circ=(1,0,0),\ \vec{a}=(0,1,1);$
3) $f(x,y,z)=\ln(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}),\ \vec{x}^\circ=(1,-1,1),\ \vec{a}=(1,1,1);$
4) $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \vec{x}^\circ=(1,2,0),\ \vec{a}=(1,2,3);$
5) $f(x,y,z)=\sin\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \vec{x}^\circ=(1,0,1),\ \vec{a}=(3,2,1);$
6) $f(x,y,z)=\cos^2 x+\cos^2 y^2+\cos^2 z^3,\ \vec{x}^\circ=(0,0,0),\ \vec{a}=(1,2,3);$
7) $f(x,y,z)=\arcsin\dfrac{x^2+y^2+z^2}{1+x^2+y^2+z^2},\ \vec{x}^\circ=(1,1,0),\ \vec{a}=(0,1,2).$

3. Довести, що наведені функції задовольняють відповідним диференціальним рівнянням:

1) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y},\ x\neq y,\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x-y}{x^2+y^2};$
2) $f(x,y)=x^3\exp\left(\dfrac{y}{x^2}\right),\ x\neq 0,\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}+2y\dfrac{\partial f}{\partial y}=3f;$
3) $f(x,y)=y\ln(1+(x^2-y^2)^2),\quad y^2\dfrac{\partial f}{\partial x}+xy\dfrac{\partial f}{\partial y}=xf;$
4) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y},\ x\neq y,\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0;$
5) $f(x,y)=\cos(x+\sin y),\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2};$
6) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{3x}+x^4y^4,\ x\neq 0,\quad x^2\dfrac{\partial f}{\partial x}-xy\dfrac{\partial f}{\partial y}+y^2=0;$
7) $f(x,y)=xe^{x+y}-y\ln(1+(x+y)^2),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0;$
8) $f(x,y,z)=x^5\sin\dfrac{y^2+z^2}{x^2},\ x\neq 0,\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=5f.$

4. 1) Довести, що при довільних $a,b\in\mathbf{R}$ функція

$$f(x,y)=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},\ (x,y)\neq(a,b),$$

задовольняє *рівняння Лапласа*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\ (x,y)\neq(a,b).$$

2) Довести, що при довільних $a \in \mathbf{R},\ \sigma > 0$ функція

$$f(t,x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{4\sigma^2 t}\right),\ t > 0,\ x \in \mathbf{R},$$

задовольняє *рівняння теплопровідності*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ t > 0,\ x \in \mathbf{R}.$$

5. Дослідити диференційовність у відповідних точках таких функцій:

1) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy},\ (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ \vec{x}^{\circ} = (0,0);$

2) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3},\ x > y,\ \vec{x}^{\circ} = (2,1);$

3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}\ \vec{x}^{\circ} = (0,0);$

4) $f(x,y) = \ln(x + y^2),\ x > -y^2,\ \vec{x}^{\circ} = (e,0);$

5) $f(x,y) = (3^y - 1)\sqrt[5]{x},\ (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ \vec{x}^{\circ} = (0,0);$

6) $f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x > -y, \\ 0, & x \leq -y, \end{cases}\ \vec{x}^{\circ} = (0,0);$

7) $f(x,y) = y^{\cos x},\ y > 0,\ \vec{x}^{\circ} = \left(2, \dfrac{\pi}{3}\right);$

8) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(x^2+y^2)}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}\ \vec{x}^{\circ} = (0,0).$

6. Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити значення добутку:

1) $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3};$

2) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1);$

3) $\sin 29^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 46^{\circ};$

4) $(2,003)^2 \cdot (3,998)^3 \cdot (1,002)^2;$

5) $0,97^{1,05};$

6) $\sqrt{3,98^2 + 3,01^2};$

7) $\dfrac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98\sqrt[4]{1,05^3}}};$

8) $1,04^{2,02};$

9) $\cos 61^{\circ} \cdot \operatorname{ctg} 44^{\circ};$

10) $\operatorname{arctg} \dfrac{1,02 + 1,01}{1 + 1,02 \cdot 1,01}.$

ЗАНЯТТЯ 8
ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СКЛАДНИХ ФУНКЦІЙ

Контрольні запитання

1. *Формула для обчислення частинних похідних складної функції.*
2. *Властивість інваріантності форми диференціала першого порядку.*

А8

1. Нехай функція $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ диференційовна на $\mathbf{R}^2$. Довести, що наведені функції задовольняють відповідним рівнянням:

1) $f(x, y, z) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3(y+z)}{6} + \dfrac{x^2yz}{2} + g(y - x, z - x)$,
$\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} = xyz$;

2) $f(x, y, z) = \dfrac{xy}{z} \ln x + xg\Big(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\Big),\ x > 0,\ z \neq 0$,
$x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = f + \dfrac{xy}{z}$.

2. Нехай функції $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ двічі диференційовні на області визначення. Знайти частинні похідні першого та другого порядку функцій:

1) $f(x, y, z) = g\Big(xy, \dfrac{y}{z}\Big), z \neq 0$;
2) $f(x, y, z) = h\big(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xz\big)$.

3. Знайти частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ складних функцій $z = z(u(x, y), v(x, y))$:

1) $z = \mathrm{arctg}(u^2v - v^2u),\ u = x^2\cos(e^y),\ v = x^2\sin(e^y)$;
2) $z = u^2 \ln v,\ u = e^{x/y},\ v = \arcsin(3x - 2y)$.

4. Користуючись властивістю інваріантності форми першого диференціала, знайти диференціал складної функції $f(x, y) = u\sin v + v\sin u,\ u = \dfrac{x}{y},\ v = xy,\ y \neq 0$.

Б8

1. Нехай функції $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ двічі диференційовні на області визначення. Знайти частинні похідні першого та другого порядку функцій:

1) $f(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + 2y^2}), (x, y) \neq (0, 0);$
2) $f(x, y, z) = \varphi(xyz);$
3) $f(x, y, z) = \varphi(x^2 - y^2 + z);$
4) $f(x, y) = g(x + y, x - y);$
5) $f(x, y) = g\left(x^2 y, \dfrac{x}{y^2}\right),\ y \neq 0;$
6) $f(x, y, z) = g(x - y, z);$
7) $f(x) = h(x, x^2, x^3);$
8) $f(x, y) = h\left(\dfrac{x}{y}, x - y, x + y\right);$
9) $f(x, y, z) = h(2x, 3y, 5z);$
10) $f(x, y) = h(xy, \sin y, x + z).$

2. Знайти частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ складних функцій:

1) $z = \arcsin(u^v),\ u = x^2 - y^2,\ v = e^{xy};$
2) $z = \operatorname{arctg}(\dfrac{u}{v}),\ u = x \sin \dfrac{u}{v},\ v = x \cos y.x;$
3) $z = \arcsin(u),\ u = xy + \dfrac{y}{x};$
4) $z = u^v + v^u,\ u = x^2 + y^2,\ v = x^2 - y^2,\ |x| > |y|;$
5) $z = e^{u^2+v^2+w^2},\ u = \sin(xy),\ v = e^{xy},\ w = tg(x^2 + y^2);$
6) $z = \sin \dfrac{uv}{w},\ u = x^y + y^z,\ v = x^z + z^y,\ w = e^{xyz};$
7) $z = (u^3 + v^3)^2 + w,\ u = e^{xy/z},\ v = e^{zy/x},\ w = e^{xz/y};$
8) $z = u^v,\ u = \ln(x^2 + y^2),\ v = e^{x/y};$
9) $z = x \sin u \cos v,\ u = \ln(x^2 + y^2),\ v = -\sqrt{1 - x^2};$
10) $z = u^2 - v^2,\ u = xy,\ v = \dfrac{x}{y}.$

3. Користуючись властивістю інваріантності форми першого диференціала, знайти диференціали таких складних функцій:

1) $f(x) = uv \operatorname{arctg}(uv),\ u = x^2 + 1,\ v = x^3;$
2) $f(x, y) = u^v + v^u,\ u = x^2 + y^2,\ v = x^2 - y^2,\ |x| > |y|;$
3) $f(x, y) = u^2 v^3 w, u = \arcsin \frac{x}{y}, v = \sqrt{y^2 - x^2}, w = \ln y, 0 < x < y;$
4) $f(x, y, z) = \ln(1 + u^2 v),\ u = x + y + z,\ v = x^2 + y^2 + z^2;$
5) $f(x, y) = uv + \sin u \cos v,\ u = x \sin y,\ v = y^2.$

ЗАНЯТТЯ 9
ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ НЕЯВНИХ ФУНКЦІЙ

Контрольні запитання

1. *Поняття про неявну функцію.*
2. *Метод обчислення частинних похідних неявної функції.*

А9

1. Розглянемо рівняння $x^2 + y^2 = 1,\ x \in [-1, 1]$.

1) Знайти всі функції $y = y(x),\ x \in [-1, 1]$, що задовольняють це рівняння. Скільки їх?

2) Скільки серед знайдених функцій неперервних?

3) Які зі знайдених неперервних функцій задовольняють додатково крайову умову а) $y(1) = 0$; б) $y(0) = 1$?

2. Нехай функція $z : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ при фіксованому $a \in \mathbf{R}$ задовольняє рівняння $z^3 - 3xyz = a^3,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2$. Знайти частинні похідні першого порядку функції z в тих точках, де вони існують.

3. Нехай функція $z(x, y)$ в околі точки $(1, -2)$ задовольняє рівняння $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$, причому $z(1, -2) = 1$. Знайти частинні похідні другого порядку функції y в точці $(1, -2)$.

4. Обчислити перші та другі похідні функцій f, g, визначених системою рівнянь: $\begin{cases} f(x) + g(x) + x = 0, \\ f^2(x) + g^2(x) + x^2 = 1. \end{cases}$

5. Нехай функція $z = z(x, y)$ задана системою рівнянь: $z = u^3 + v^3, x = u + v, y = u^2 + v^2,\ u, v \in \mathbf{R}$.

1) Знайти явний вираз для функції z та область визначення цієї функції.

2) Знайти похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, не використовуючи явний вираз для z.

6. Нехай функції f, g задані системою рівнянь: $\begin{cases} f(x, y) + g(x, y) = x + y, \\ y \sin f(x, y) = x \sin g(x, y). \end{cases}$

Знайти диференціали df, dg.

Б9

1. Знайти частинні похідні першого та другого порядків функції $y = y(x)$, визначеної рівнянням:

1) $x^2 + 2xy - y^2 = a^2 (a \in \mathbf{R})$;
2) $y - \varepsilon \sin y = x (\varepsilon \in (0, 1))$;

3) $x^3y - y^3x = a^4 (a \in \mathbf{R})$;
4) $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4 (a \in \mathbf{R})$;
5) $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0 (a \neq 0)$;
6) $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$;
7) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, x \neq 0$;
8) $x^y = y^{2x}, x > 0, y > 0$;
9) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$;
10) $y = 2x \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, \dfrac{y}{x} > 0$.

2. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z = z(x, y)$, визначеної рівнянням:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a \in \mathbf{R})$;
2) $z^3 - 3xyz = a^3 (a \in \mathbf{R})$;
3) $x + y + z = e^y$;
4) $z = \sqrt{x^2 - y^2} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}},\ x > y, 0 < \dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} < \dfrac{\pi}{2}$;
5) $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$;
6) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$;
7) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2y = 5$;
8) $x \cos y + y \cos z + z \cos x = a (a \in \mathbf{R})$;
9) $xy + xz + yz^2 = 1$;
10) $\dfrac{x}{z} = \ln\left(\dfrac{z}{y}\right) + 1,\ yz > 0$.

3. Нехай функції $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ двічі диференційовні на своїх множинах визначення. Довести, що функція $z = z(x, y)$, визначена наведеним співвідношенням, задовольняє відповідному диференціальному рівнянню:

1) $z = xyf(z), \quad x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$;
2) $z = x + yf(z), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f(z)\frac{\partial z}{\partial x}$;
3) $g(cx - az, cy - bz) = 0, (a, b) \neq (0, 0), \quad a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$;
4) $x - y + z = f(x^2 + y^2 + z^2), \quad (y + z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} + x + y = 0$;
5) $x - az = f(y - bz) = 0, (a, b) \neq (0, 0), \quad a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$;
6) $x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\dfrac{z}{y}\right), \quad (x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$;

7) $g(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x})=0, \quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$

4. Для функцій f, g, визначених наведеною системою рівнянь, обчислити похідні $f''(x_0), g''(x_0)$ при заданих $x_0, f(x_0), g(x_0)$:

1) $8x^2-g^3(x)-3f^4(x)=0, x^3-g^2(x)+5f(x)=-3,$
$x_0=1, f(x_0)=0,\ g(x_0)=2;$
2) $x+f(x)+g(x)=0, x^3+f^3(x)-g^3(x)=10,$
$x_0=1, f(x_0)=1,\ g(x_0)=-2;$
3) $g(x)=x^2+f^2(x), x^2-xf(x)+f^2(x)=1,$
$x_0=1, f(x_0)=1,\ g(x_0)=2;$
4) $f(x)=y^2+y^{-2}, g(x)=y^3+y^{-3}, x=y+y^{-1},$
$x_0=2, f(x_0)=2,\ g(x_0)=2;$
5) $f^2(x)+g^2(x)=2x^2, f^2(x)+2g^2(x)+x^2=4,$
$x_0=1, f(x_0)=1,\ g(x_0)=-1;$
6) $x^2+f^2(x)-g^2(x)=0, x^2+2f^2(x)+3g^2(x)=1,$
$x_0=1, f(x_0)=\frac{1}{\sqrt{5}},\ g(x_0)=-\frac{1}{\sqrt{5}};$
7) $x^2-f^2(x)+g^2(x)=1, f^2(x)-2x+g(x)=0,$
$x_0=1, f(x_0)=1,\ g(x_0)=1.$

5. Нехай функція $z=z(x,y)$ задана системою рівнянь. 1) Знайти явний вираз для функції z та область визначення цієї функції. 2) Знайти похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, не використовуючи явний вираз для z.

1) $z=uv, x=u+v, y=u-v;$
2) $z=2v, x=u\cos v, y=u\sin v,\ v\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2});$
3) $z=\cos v, x=\sin v\cos u, y=\sin v\sin u, v\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}];$
4) $z=u^{-2}+v^{-2}, x=u+v, y=uv;$
5) $z=\dfrac{u^2-v^2}{2u+v}, x=\dfrac{u}{v}, y=u-v;$
6) $z=u^3-v^3, x=u-v, y=uv.$

ЗАНЯТТЯ 10
ЗАМІНА ЗМІННИХ У ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВИРАЗАХ
А10

1. Перетворити наступні звичайні диференціальні рівняння, ввівши вказані нові змінні, та розв'язати їх:

1) $x^2y'' + xy' + y = 0, \quad x = e^t;$
2) $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0, \quad x = \sin t;$
3) $(x + x^3)y'' = (1 - x^2)y', \quad t = \ln(1 + x^2);$
4) $y'' = (y')^2(y - x),$

в останньому пункті в якості незалежної змінної взяти y.

2. 1) Рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$$

перетворити до полярних координат, поклавши

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi.$$

2) Систему рівнянь

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + kx_1(x_1^2 + x_2^2), \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + kx_2(x_1^2 + x_2^2),$$

де $k \in \mathbf{R}$ – деяка стала, перетворити до полярних координат, поклавши $x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi.$

3. Нехай $\{p, q\} \subset C(\mathbf{R})$. Перетворити рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

ввівши нову незалежну змінну u, пов'язану зі змінною y співвідношенням

$$y = u \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right), \quad x_0 \in \mathbf{R}.$$

4. Розв'язати наступні рівняння, ввівши нові незалежні змінні y_1 і y_2 замість x_1 і x_2:

1) $\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_2}; \quad y_1 = x_1 + x_2,\ y_2 = x_1 - x_2;$

Д1. Нехай $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – чотири рази диференційовна на $\mathbf{R}$ функція. Кожній точці (x, y) кривої $y = f(x),\ x \in \mathbf{R}$ поставимо у відповідність точку (x_1, y_1) згідно з перетворенням Лежандра:

$$x_1 = f'(x), \quad y_1 = xf'(x) - y.$$

Знайти $\dfrac{d^i y_1}{dx_1^i}$, $i=1,2,3.$

Д2. Нехай $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ – двічі диференційовна на $\mathbf{R}$ функція. Виразити кривину кривої $\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},\ y=f(x)\}$ в площині

$$\frac{|f''(x)|}{\{1+[f'(x)]^2\}^{3/2}},\quad x\in\mathbf{R},$$

в полярних координатах r і φ : $\quad x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$

Б10

1. Перетворити наступні звичайні диференціальні рівняння, ввівши вказані нові змінні:

1) $(1-x^2)y''-xy'+a^2y=0,\ a\in\mathbf{R};\quad x=\cos t;$
2) $(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+y=0,\quad x=\operatorname{tg}t;$
3) $(x-x^3)y''+(1-3x^2)y'-xy=0,\quad x=\sqrt{1-t^2};$
4) $x^4y''+2x^3y'+y=0,\quad x=t^{-1};$
5) $y''+y'\cdot\operatorname{th}x+\dfrac{m^2}{\operatorname{ch}^2x}y=0,\ m\in\mathbf{R};\quad x=\ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2};$
6) $x^2y''-4xy'+y=0,\quad x=e^t;$
7) $y''-x(y')^3+e^y(y')^3=0;$
8) $\dfrac{y''}{(y')^3}+y=0;$
9) $(y')^2y''-10y'y''+15(y'')^3=0,$

в останніх трьох пунктах в якості незалежної змінної взяти y.

2. Перетворити наступні рівняння до полярних координат, поклавши $x=r(\varphi)\cos\varphi,\ y=r(\varphi)\sin\varphi$:

1) $(xy'-y)^2=2xy(1+(y')^2);$
2) $(x^2+y^2)^2=(x+yy')^3;$
3) $\dfrac{x+yy'}{xy'-y}=0;$
4) $[1+(y')^2]^{3/2}=y'';$
5) $xy'-y=\sqrt{1+(y')^2}.$

6) Перетворити вираз:

$$W=x_1\frac{d^2x_2}{dt^2}-x_2\frac{d^2x_1}{dt^2}$$

до полярних координат, поклавши $x_1=r\cos\varphi,\ x_2=r\sin\varphi.$

3. Розв'язати наступні рівняння, ввівши відповідні нові змінні:

1) $a\frac{\partial z}{\partial x_1}+b\frac{\partial z}{\partial x_2}=1,\ \{a,b\}\subset\mathbf{R},\ a\neq 0;\ y_1=x_1,\ y_2=x_2-bz;$

2) $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}=z;\quad y_1=x_1,\ y_2=\dfrac{x_2}{x_1}.$

Перетворити наступні вирази, ввівши нові незалежні змінні y_1 і y_2 замість x_1 і x_2:

3) $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+\sqrt{1+x_2^2}\frac{\partial z}{\partial x_2}=x_1x_2; y_1=\ln x_1,\ y_2=\ln(x_2+\sqrt{1+x_2^2});$

4) $(x_1+x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1}-(x_1-x_2)\frac{\partial z}{\partial x_2}=0; y_1=\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2},\ y_2=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right);$

5) $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}=z+\sqrt{x_1^2+x_2^2+z^2}; y_1=\dfrac{x_2}{x_1},\ y_2=z+\sqrt{x_1^2+x_2^2+z^2};$

6) $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}=\dfrac{x_1}{z};\quad y_1=2x_1-z^2,\ y_2=\dfrac{x_2}{z};$

7) $(x_1+z)\frac{\partial z}{\partial x_1}+(x_2+z)\frac{\partial z}{\partial x_2}=x_1+x_2+z; y_1=x_1+z,\ y_2=x_2+z;$

8) $(z+e^{x_1})\frac{\partial z}{\partial x_1}+(z+e^{x_2})\frac{\partial z}{\partial x_2}-(z^2-e^{x_1+x_2})=0; y_1=x_2+ze^{-x_1},\ y_2=x_1+ze^{-x_2};$

9) $\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2=0;\quad x_1=y_1y_2,\ x_2=\dfrac{1}{2}(y_1^2-y_2^2);$

10) $(x_1+mz)\frac{\partial z}{\partial x_1}+(x_2+nz)\frac{\partial z}{\partial x_2}=0,\ \{m,n\}\in\mathbf{R}; y_1=x_1,\ y_2=\dfrac{x_2+nz}{x_1+mz}.$

4. Перетворити наступні рівняння, ввівши нові незалежні змінні y_1,y_2,y_3 замість x_1,x_2,x_3:

1) $\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial z}{\partial x_2}+\frac{\partial z}{\partial x_3}=0;\ \ y_1=x_1,\ y_2=x_2-x_1,\ y_3=x_3-x_1;$

2) $(x_2+x_3+z)\frac{\partial z}{\partial x_1}+(x_1+x_3+z)\frac{\partial z}{\partial x_2}+(x_1+x_2+z)\frac{\partial z}{\partial x_3}==x_1+x_2+x_3;\quad e^{y_i}=x_i-z,1\le i\le 3;$

3) $\sum_{1\le i\le j\le 3}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\partial x_j}=0;\quad y_i=x_1+x_2+x_3-2x_i,\ 1\le i\le 3;$

4) $\sum_{i=1}^{3}x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}=0;\quad y_1=\dfrac{x_2}{x_1},\ y_2=\dfrac{x_3}{x_1},\ y_3=x_2-x_3.$

ЗАНЯТТЯ 11
ЗАМІНА ЗМІННИХ У ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВИРАЗАХ (ПРОДОВЖЕННЯ)
А11

1. Перетворити наступні вирази до полярних координат, поклавши $x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi$:

1) $W = x_1\frac{\partial z}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial z}{\partial x_1}$; 2) $W = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}$.

2. Розв'язати рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \quad a \in \mathbf{R},\ a \neq 0$, ввівши нові незалежні змінні $y_1 = x_1 - ax_2,\ y_2 = x_1 + ax_2$.

3. Перетворити рівняння
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0,$$
взявши $y_1 = x_1 + x_2,\ y_2 = x_1 - x_2$ в якості нових змінних і $w = x_1x_2 - z$ в якості нової функції.

4. В рівнянні
$$z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2$$
ввести нову функцію w, поклавши $w = z^2$.

Д1. Показати, що о п е р а т о р Л а п л а с а
$$\triangle z = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}$$
в сферичних координатах r, φ, θ замість x_1, x_2, x_3 зображується у вигляді
$$\triangle z = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right].$$
Вказівка. Покласти $x_1 = r\sin\theta\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi,\ x_3 = r\cos\theta.$ Заміну змінних подати у вигляді суперпозиції наступних двох замін:
$$x_1 = R\cos\psi, \quad x_2 = R\sin\psi, \quad x_3 = h;$$
$$R = r\sin\theta, \quad h = r\cos\theta, \quad \psi = \varphi.$$

Б11

1. Перетворити до полярних координат наступні вирази, поклавши $x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi$:

1) $W = x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}$;

2) $W = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2$;

3) $W = x_1^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2x_1 x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + x_2^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}$;

4) $W = x_2^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - 2x_1 x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + x_1^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} - \left(x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)$;

5) $W = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + kz,\ k \in \mathbf{R}$,

в останньому пункті вважати, що $z(x_1, x_2) = f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}),\ (x_1, x_2) \neq (0,0)$, де $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – двічі диференційовна на $\mathbf{R}$ функція.

2. Перетворити наступні рівняння, беручи y_1 і y_2 в якості нових незалежних змінних замість x_1 і x_2:

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^3; \quad y_1 = x_1,\ y_2 = x_2 + z$;

2) $2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0; y_1 = x_1 + 2x_2 + 2,\ y_2 = x_1 - x_2 - 1$;

3) $x_1^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2x_1 x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + x_2^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0; y_1 = \ln x_1,\ y_2 = \ln x_2$;

4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x_2},\ x_2 > 0; y_1 = x_1 - 2\sqrt{x_2},\ y_2 = x_1 + 2\sqrt{x_2}$;

5) $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0; \quad y_1 = x_1 + z,\ y_2 = x_2 + z$;

6) $x_1^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - x_2^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0; \quad y_1 = x_1 x_2,\ y_2 = \frac{x_1}{x_2}$;

7) $x_1^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - (x_1^2 + x_2^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + x_2^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0; y_1 = x_1 + x_2,\ y_2 = x_1^{-1} + x_2^{-1}$.

3. Нехай $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ – базис в $\mathbf{R}^2$, $\quad z : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ – диференційовна на $\mathbf{R}^2$ функція. Перетворити наступні вирази, поклавши в них $x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi$:

1) $\overrightarrow{\mathrm{grad}} z = \frac{\partial z}{\partial x_1}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\vec{j}$;

2) $\|\overrightarrow{\mathrm{grad}} z\| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2}$.

Перетворити вираз для похідної $z'_{\vec{l}}$ за наступними напрямками $\vec{l}$, поклавши $x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi$:

3) $\vec{l} = (1,2)$; $\quad$ 4) $\vec{l} = (-1,1)$; $\quad$ 5) $\vec{l} = (1,0)$;

6) $\vec{l}$ – вектор одиничної довжини, що лежить у першому квадранті і утворює кут $\alpha = 60^0$ з віссю Ox;

7) $\vec{l}$ – вектор одиничної довжини, що лежить у четвертому квадранті і утворює кут $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ з віссю Ox;

Нехай $\vec{f} = (f_1, f_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ – відображення з диференційовними компонентами $f_i : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2$. Перетворити наступні вирази, поклавши $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$:

8) $\mathrm{div}\vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$;

9) $W = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$.

4. Розглянувши y_1 і y_2 як нові незалежні змінні і $w = w(y_1, y_2)$ як нову функцію, перетворити наступні рівняння:

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0; y_1 = x_1 + x_2,\ y_2 = \dfrac{x_2}{x_1},\ w = \dfrac{z}{x_1}$;

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0; y_1 = x_1 + x_2,\ y_2 = x_2 - x_1,\ w = x_1 x_2 - z$;

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial x_1} = z; y_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2},\ y_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{2},\ w = ze^{x_2}$;

4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(1 + \dfrac{x_2}{x_1}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0; y_1 = x_1,\ y_2 = x_1 + x_2,\ w = x_1 + x_2 + z$;

5) $(1-x_1^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + (1-x_2^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}; x_1 = \sin y_1,\ x_2 = \sin y_2,\ z = e^w$;

6) $(1 - x_1^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} - 2x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} - \dfrac{1}{4} = 0,\ |x_1| < 1; y_1 = \dfrac{1}{2}(x_2 + \arccos x_1),\ y_2 = \dfrac{1}{2}(x_2 - \arccos x_1),\ w = z\sqrt[4]{1 - x_1^2}$;

7) $\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0; y_1 = x_2,\ y_2 = z,\ w = x_1$;

Довести, що наступні рівняння не змінюють свого вигляду при переході до нових незалежних змінних y_1, y_2 і нової функції $w = w(y_1, y_2)$:

8) $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = \frac{\partial z}{\partial x_1},\ x_2 > 0; \quad y_1 = \dfrac{x_1}{x_2},\ y_2 = -\dfrac{1}{x_2},\ z = \dfrac{w}{\sqrt{x_2}} e^{-\dfrac{x_1^2}{4x_2}}$;

9) $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 0; \quad y_1 = x_1,\ y_2 = z,\ w = x_2$.

ЗАНЯТТЯ 12
КОНТРОЛЬНА РОБОТА. МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1. Перевірити, чи є метрикою функція
$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{|x_1-x_2|} + |y_1-y_2|,\ (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbf{R}^2.$

2. Чи збігається послідовність $\left\{t^{2n} - t^n + t, t \in [0,1] \,:\, n \geq 1\right\}$ в $(C([0,1]),\rho)$? Якщо так, яка її границя?

3. Визначити, чи є відкритою чи замкненою множина

а) $\{x \in C([0,1]) \mid x(1) < -1\}$ в просторі $(C([0,1]),\rho)$;

б) $\left\{(x,y) \mid 1 < x^2 - 2y \leq 2\right\}$ в просторі $(\mathbf{R}^2,\rho)$;

в) $\{(x,y,z) \mid x+y \leq 2, x+z = 5\}$ в просторі $(\mathbf{R}^3,\rho)$.

4. Чи існують повторні та подвійна границі, які їх значення для функції $f(x,y) = \dfrac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$ при $x,y \to +\infty$?

5. Чи є компактною множина: а) $\left\{(x,y) \mid x^2 + 2y^2 \leq 2\right\}$;
б) $\left\{(x,y) \mid x^2 + 2y \leq 2\right\}$ в просторі $(\mathbf{R}^2,\rho)$?

6. Обчислити похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $\sin(2z - x) = x + y^2 - z^3$.

7. Зробити в рівнянні $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xy$ заміну $2x - y = u, 2x + y = v$, і розв'язати його.

РОЗВ'ЯЗОК

1. Перевіримо аксіоми метрики.

1) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \geq 0$, як сума двох невід'ємних чисел. Крім того, така сума рівна нулю тоді і лише тоді, коли обидва доданки нульові, тобто $\sqrt{|x_1-x_2|} = 0, |y_1-y_2| = 0$. А це еквівалентно тому, що $x_1 = x_2, y_1 = y_2$, тобто $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$.

2) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d((x_2,y_2),(x_1,y_1))$, що випливає з формули $|a-b| = |b-a|$, яка правильна для всіх $a,b \in \mathbf{R}$.

3) З нерівності трикутника для чисел $|a-b| \leq |a-c| + |b-c|, a,b,c \in \mathbf{R}$, а також нерівності $\sqrt{|a-b|} \leq \sqrt{|a-c|} + \sqrt{|b-c|}, a,b,c \in \mathbf{R}$, яка перевіряється піднесенням до квадрату, випливає, що $\sqrt{|x_1-x_2|} \leq \sqrt{|x_1-x_3|} + \sqrt{|x_2-x_3|}$ і $|y_1-y_2| \leq |y_1-y_3| + |y_2-y_3|$. Додавши ці дві нерівності, отримаємо нерівність трикутника для d.

Отже, це метрика.

2. Знаходимо поточкову границю: $t^{2n} - t^n + t \to t,\ t \in [0,1]$. Отже, єдиною функцією, яка може бути шуканою границею є функція $x(t) = t,\ t \in [0,1]$. Ця функція є неперервною, тому варто перевіряти збіжність за означенням. $\rho(x_n, x) = \max\limits_{t\in[0,1]} |t^{2n} - t^n + t - t|$. Для знаходження цього максимума досліджуємо на екстремум функцію $g(t) = t^{2n} - t^n$ на $[0,1]$. Отримаємо $g'(t) = 2nt^{2n-1} - nt^{n-1} = 0$ при $t = 0; t = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. Крім того, підозрілою на екстремум є точка $t = 1$, як кінець відрізка. Маємо $g(0) = g(1) = 0,\ g(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{4}$. Тому $\rho(x_n, x) = \frac{1}{4} \not\to 0,\ n \to \infty$, отже послідовність розбіжна.

3. а) Нехай $A = \{x \in C([0,1]) \mid x(1) < -1\}$. Покладемо $f(x) = x(1)$, $x \in C([0,1])$. Ця функція неперервна, бо $|f(x) - f(y)| = |x(1) - y(1)| \le \rho(x,y)$. Тому за теоремою про характеризацію неперервності множина $A = f^{-1}((-\infty, -1))$ відкрита, як прообраз інтервала при неперервному відображенні. Вона не є замкненою, бо відмінна від порожньої чи всього простору.

б) Нехай $A = \{(x,y) \mid 1 < x^2 - 2y \le 2\}$. Тоді A не відкрита, бо точка $(0,-1)$ не є внутрішньою ($(-\frac{1}{n}, -1) \notin A,\ (-\frac{1}{n}, -1) \to (0,-1),\ n \to \infty$). Також ця множина не є замкненою, бо точка $(1,0)$ є граничною ($(1, -\frac{1}{n}) \in A,\ (1, -\frac{1}{n}) \to (1,0),\ n \to \infty$).

в) Нехай $A = \{(x,y,z) \mid x + y \le 2, x + z = 5\}$. Покладемо $f(x,y,z) = x + y, g(x,y,z) = x + z$. Ці функції неперервні на $\mathbf{R}^3$, як многочлени. Тому за теоремою про характеризацію неперервності множини $f^{-1}((-\infty, 2])$,
$g^{-1}(\{5\})$ замкнені, як прообрази замкнених множин при неперервному відображенні, тому множина A замкнена, як їх перетин. Вона не є відкритою, бо відмінна від порожньої чи всього простору.

4. Обчислимо повторні границі:

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to+\infty}\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} = \lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to+\infty}\frac{(\frac{x}{y}-1)^2}{(\frac{x}{y}+1)^2} = \lim_{x\to+\infty}(-1) = -1;$$

$$\lim_{y\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} = \lim_{y\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{x}{y}-1)^2}{(\frac{x}{y}+1)^2} = \lim_{y\to+\infty}(-1) = -1.$$

Оскільки вони існують та різні, подвійна границя не існує.

5. а) Застосуємо критерій компактності в $(\mathbf{R}^2, \rho)$. Оскільки
$A = \{(x,y) \mid x^2 + 2y^2 \le 2\} = f^{-1}((-\infty, 2]), f(x,y) = x^2 + 2y^2$, то A замкнена за теоремою про характеризацію неперервності. Крім того $(x,y) \in A \Rightarrow x^2 \le 2,\ 2y^2 \le 2 \Rightarrow x^2 + y^2 \le 3$, тобто $A \subset \overline{B}((0,0), \sqrt{3})$, отже A – обмежена.

За критерієм компактності A – компактна.

б) Множина $A = \{(x,y) \mid x^2 + 2y \le 2\}$ не є обмеженою, бо $(0, -n) \in$

$A,\ n\in\mathbf{N},\ \rho((0,0),(0,-n))\ \to\ \infty,\ n\ \to\ \infty$. Тому ця множина не є компактною.

6. Диференціюємо рівняння по $x:\ \cos(2z-x)\big(2\frac{\partial z}{\partial x}-1\big)=1-3z^2\frac{\partial z}{\partial x}$.

Звідси знаходимо похідну: $\frac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1+\cos(2z-x)}{2\cos(2z-x)+3z^2}$.

Диференціюємо рівняння по $y:\ \cos(2z-x)\cdot 2\frac{\partial z}{\partial y}=2y-3z^2\frac{\partial z}{\partial y}$.

Звідси знаходимо похідну: $\frac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{2\cos(2z-x)+3z^2}$.

7. Виражаємо похідні по старих змінних через похідні по нових:

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2\frac{\partial z}{\partial u}+2\frac{\partial z}{\partial v}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+8\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+4\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

Крім того, $x=\frac{1}{4}(u+v), y=\frac{1}{2}(v-u)$.

Підставляючи в рівняння, отримаємо $16\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{8}(v^2-u^2)$.

Звідси $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{64}\int(v^2-u^2)dv=\frac{1}{64}(\frac{v^3}{3}-u^2v+C(u))$,

$z=\frac{1}{64}\int(\frac{v^3}{3}-u^2v+C(u))du=\frac{1}{64}(\frac{uv^3}{3}-\frac{u^3v}{3}+C_1(u)+C_2(v))$,

де C_1, C_2 – довільні диференційовні функції. Повертаючись до старих змінних, отримаємо:

$$z=\frac{1}{64}\left(\frac{8xy(4x^2-y^2)}{3}+C_1(2x-y)+C_2(2x+y)\right).$$

ЗАНЯТТЯ 13
ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА.
ЗНАХОДЖЕННЯ ТОЧОК ЛОКАЛЬНОГО ЕКСТРЕМУМА

Контрольні запитання

1. *Загальний вигляд формули Тейлора для функції від двох змінних.*
2. *Означення критичної точки і точок локального екстремума функції від кількох змінних.*
3. *Необхідна умова локального екстремума.*
4. *Достатня умова локального екстремума.*
5. *Критерій Сільвестра додатної і від'ємної визначеності матриці.*

А13

1. 1) Розкласти функцію

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$$

по формулі Тейлора в околі точки $A(1, 1, 1)$.

2) В розкладі функції

$$f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}, \ x_1 > 0$$

в околі точки виписати члени до другого порядку включно і написати наближену формулу для значення $x_1^{x_2}$ при x_1, x_2, близьких до 1.

2. Нехай $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ – чотири рази диференційовна на $\mathbf{R}^2$ функція; $(x_1^\circ, x_2^\circ) \in \mathbf{R}^2$ - фіксована. Розкласти по степенях h з точністю до h^2 включно функцію

$$g(h) = f(x_1^0 + h, x_2^0 + h) - f(x_1^0 - h, x_2^0 + h) -$$
$$-f(x_1^0 + h, x_2^0 - h) + f(x_1^0 - h, x_2^0 - h), \quad h \in \mathbf{R}.$$

3. Нехай $z = z(x_1, x_2)$ – неявна функція, що задається рівнянням

$$z^3 - x_1z - 3x_2 + x_1 = 1.$$

Записати розклад функції z по степенях біномів $(x_1 - 1)$ і $(x_2 - 2)$ до другого порядку включно у випадку $z(1, 2) = 2$.

4. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;$

2) $f(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}(x_1^2 + x_2^2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$

5. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;$

2) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 + 1)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;$

3) $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$

6. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

1) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_2}{4x_1} + \dfrac{x_1}{x_2};$

2) $f(x_1, x_2) = x_1x_2 \ln(x_1^2 + x_2^2), \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0).$

Д1. Довести, що функція

$$f(x_1, x_2) = x_2^5 - (x_1 - x_2)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

не має локального мінімума в точці $(0, 1)$, хоча при довільних дійсних a і b, $(a, b) \neq (0, 0)$ функція

$$g(x) = f(ax, bx), \quad x \in \mathbf{R}$$

має строгий локальний мінімум в точці $x = 0$.

Д2. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 4 \sin x_1 \cdot \sin x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Д3. Довести, що функція

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + x_1^4 + x_2^4, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

має строгий локальний мінімум в точці $(0, 0)$, хоча $d^2 f(0, 0)$ є вироджена квадратична форма. Чи має екстремум в цій точці функція

$$g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \frac{x_1 x_2^2}{10^7}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2?$$

Д4. Довести, що функція

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}\right), & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

має строгий локальний мінімум в точці $(0, 0)$ незважаючи на те, що $\forall n \in \mathbf{N}$: $d^n f(0, 0) = 0$.

2) Довести, що функція

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^3 \sin x_1^{-1} + x_2^2, & x_1 \neq 0, \\ x_2^2, & x_1 = 0 \end{cases}$$

має строгий локальний мінімум в точці $(0, 1)$, хоча похідна $f''_{11}(0, 0)$ не існує.

Б13

1. Написати розклад наступних функцій за формулою Тейлора в околі точки $M(x_1^\circ, x_2^\circ)$ до другого порядку включно:

1) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1}{1+x_2^2},\quad x_1^0=x_2^0=0;$

2) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1}{x_2},\ x_2\neq 0;\quad x_1^0=x_2^0=1;$

3) $f(x_1,x_2)=\sin x_1\cdot\sin x_2,\quad (x_1^\circ,x_2^\circ)=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3}\right);$

4) $f(x_1,x_2)=\dfrac{1}{x_1-x_2},\ x-1\neq x_2;\quad (x_1^\circ,x_2^\circ)=(1,2);$

5) $f(x_1,x_2)=\sqrt{x_1+x_2},\ x_1>-x_2;\quad (x_1^\circ,x_2^\circ)=(2,-1);$

6) $f(x_1,x_2)=\ln(x_1-2x_2),\ x_1>2x_2;\quad (x_1^\circ,x_2^\circ)=(3e,e);$

7) $f(x_1,x_2)=\arccos\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right), x_2\neq 0, |x_1|<|x_2|;\quad (x_1^\circ,x_2^\circ)=(1,2);$

8) $f(x_1,x_2)=\mathrm{tg}(x_1+x_2^2),\ |x_1+x_2^2|<\dfrac{\pi}{2};\quad (x_1^\circ,x_2^\circ)=\left(\dfrac{\pi}{4},0\right);$

9) $f(x_1,x_2)=x_1\cos(x_1-x_2),\quad (x_1^\circ,x_2^\circ)=(\pi,2\pi);$

10) $f(x_1,x_2)=\dfrac{1}{1+x_1^2-x_2},\ x_1^2\neq x_2-1;\quad (x_1^\circ,x_2^\circ)=(3,2).$

2. Нехай $z=z(x_1,x_2)$ – неявна функція, що задається наступним рівнянням. Записати розклад функції z по степенях біномів (x_1-1) і (x_2-1) до другого порядку включно у випадку $z(1,1)=z_0$:

1) $z^3+x_2z-x_1x_2^2-x_1^3=0,\quad z_0=1;$

2) $z^3-2x_1z+x_2=0,\quad z_0=1;$

3) $z^3-x_1z+x_1-x_2=0,\quad z_0=-1;$

4) $z^3+x_1z-2x_2=0,\quad z_0=1;$

5) $z^3+2x_2z-4x_1^2+x_2=0,\quad z_0=1;$

6) $z^3+x_1z+x_1+x_2=0,\quad z_0=-1;$

7) $z^3+z-x_1^2x_2-x_1x_2^2=0,\quad z_0=1;$

8) $z^3-z-\cos\dfrac{\pi x_1x_2}{2}=0,\quad z_0=-1;$

9) $z^3+x_2z-x_1x_2-x_1^2=0,\quad z_0=1;$

10) $z^3+x_1z-2x_1x_2^2=0,\quad z_0=1.$

3. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

1) $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-x_1-2x_2;$
2) $f(x_1,x_2)=-2x_1^2+x_2^2+3x_1-2x_2;$
3) $f(x_1,x_2)=-2x_1^2-3x_2^2-2x_1-3x_2;$
4) $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-14x_1x_2+1;$
5) $f(x_1,x_2)=-x_1^2-5x_2^2+15x_1x_2-x_1+4,$

визначені при всіх $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$.

4. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

1) $f(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^4-x_1^2-2x_1x_2-x_2^2;$
2) $f(x_1,x_2)=x_1^2x_2^3(6-x_1-x_2);$
3) $f(x_1,x_2)=2x_1^4+x_2^4-x_1^2-2x_2^2;$
4) $f(x_1,x_2)=x_1x_2(1-x_1-x_2);$
5) $f(x_1,x_2)=x_1^3+x_2^3-9x_1x_2+27;$
6) $f(x_1,x_2)=x_1^3+x_1x_2^2+3ax_1x_2, \quad a\in\mathbf{R};$
7) $f(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^4+2x_1^2x_2^2-8x_1+8x_2,$

визначені при всіх $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$.

5. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

1) $f(x_1,x_2)=x_1x_2+\dfrac{50}{x_1}+\dfrac{20}{x_2}, \quad x_i>0,\ i=1,2;$
2) $f(x_1,x_2)=x_1x_2\sqrt{1-\dfrac{x_1^2}{4}-\dfrac{x_2^2}{9}}, \quad \dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{x_2^2}{9}\le 1;$
3) $f(x_1,x_2)=1-\sqrt{x_1^2+x_2^2}, \quad (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2;$
4) $f(x_1,x_2)=(x_1^2+x_2^2)e^{-(x_1^2+x_2^2)}, \quad (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2;$
5) $f(x_1,x_2)=\sin x_1+\cos x_2+\cos(x_1-x_2),$
$$0\le x_i\le\frac{\pi}{2},\ i=1,2;$$
6) $f(x_1,x_2)=\sin x_1\cdot\sin x_2\cdot\sin(x_1+x_2),$
$$0\le x_i\le\pi,\ i=1,2;$$
7) $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2-4\ln x_1-10\ln x_2,$
$$x_i>0,\ i=1,2;$$
8) $f(x_1,x_2)=e^{-2x_1+3x_2}(8x_1^2+6x_1x_2+3x_2^2), \quad (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2;$
9) $f(x_1,x_2)=x_2\sqrt{1+x_1}+x_1\sqrt{1+x_2}, \quad x_i\ge -1, i=1,2;$
10) $f(x_1,x_2)=e^{2x_1}(x_1+x_2^2+2x_2), \quad (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2.$

ЗАНЯТТЯ 14
ЗНАХОДЖЕННЯ ТОЧОК ЛОКАЛЬНОГО ЕКСТРЕМУМА (ПРОДОВЖЕННЯ)
А14

1. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \dfrac{x_2^2}{4x_1} + \dfrac{x_3^2}{x_2} + \dfrac{2}{x_3}, \quad x_i > 0,\ 1 \le i \le 3;$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \ln(x_2^2 + x_3^2 + \frac{1}{2}).$

2. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \exp\left(-x_1 - x_2 - x_3\right), \quad x_i > 0,\ 1 \le i \le 3.$$

3. Число $a > 0$ розбити на три додатних доданки $x_i > 0, 1 \le i \le 3$ так, щоб добуток $x_1^m x_2^n x_3^p,\ \{m, n, p\} \subset \mathbf{N}$, мав найбільше значення.

4. Дослідити на локальний екстремум функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_4^2$ при різних значеннях параметрів $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

5. Нехай функція $z = z(x_1, x_2)$ задана рівнянням

$$(x_1^2 + x_2^2 + z^2)^2 = a^2(x_1^2 + x_2^2 - z^2), \quad a > 0.$$

Дослідити її на локальний екстремум і дати геометричну інтерпретацію.

6. Нехай функція $z = z(x_1, x_2)$ задана рівнянням

$$\tfrac{1}{3}x_1^3 + 2x_2^2 - z^2 x_1 + z = 0.$$

Дослідити її на локальний екстремум.

7. Змінні величини x і y задовольняють лінійне рівняння

$$y(x) = ax + b,\ x \in \mathbf{R};\ \{a, b\} \subset \mathbf{R},$$

коефіцієнти якого треба визначити. В результаті ряду вимірювань для величин x і y отримані значення $y(x_i),\ 1 \le i \le n$, що містять помилки. Користуючись методом найменших квадратів, оцінити значення a і b.

Вказівка. Метод найменших квадратів полягає в тому, що в якості наближених значень параметрів беруть ті значення a і b, при яких сума

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

мінімальна.

Д1. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

1) $\quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \displaystyle\prod_{i=1}^{4} x_i^i \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{4} i x_i\right);$

2) $\quad f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}+\dfrac{x_4}{x_3}+\dfrac{2}{x_4};$

3) $\quad f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\exp(-x_1x_2x_3x_4)\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4);$

4) $\quad f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^4x_2^3x_3^2x_4(1-x_1-2x_2-3x_3-4x_4);$

5) $\quad f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2^2x_3^3x_4^4(1-4x_1-3x_2-2x_3-x_4).$

Д2. Довести, що функція

$$f(x_1,x_2)=(x_2-x_1^2)(x_2-2x_1^2),\quad (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$$

не має локального мінімума в точці $(0,0)$, хоча при довільних дійсних a і $b,\ (a,b)\neq(0,0)$ функція

$$g(x)=f(ax,bx),\quad x\in\mathbf{R}$$

має строгий локальний мінімум в точці $x=0$. Дати геометричну трактовку.

Д3. 1) На площині дано систему n точок $\{M_i(x_1(i),x_2(i))\ :1\le i\le n\}$. При якому положенні прямої $x_1\cos\alpha+x_2\sin\alpha-p=0,\quad \alpha\in[0,2\pi),\ p\in\mathbf{R}$ сума квадратів відхилень даних точок від цієї прямої буде найменшою?

2) Функцію $f(x)=x^2,\quad x\in(1,3)$ наближено замінити лінійною функцією $g(x)=ax+b,\quad x\in(1,3)$ з деякими сталими $\{a,b\}\subset\mathbf{R}$ так, щоб абсолютне відхилення

$$\triangle=\sup_{x\in(1,3)}|x^2-(ax+b)|$$

було мінімальним.

Б14

1. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

1) $\quad f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1+4x-2-6x_3,$
$$(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3;$$

2) $\quad f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^2+x_3^2+12x_1x_2+2x_3,$
$$(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3;$$

3) $\quad f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2^2x_3^3(a-x_1-2x_2-3x_3),\ a>0,$
$$(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3;$$

4) $\quad f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{x_1^2}{x_2}+\dfrac{x_2^2}{x_3}+x_3^2,$
$$x_i\neq0,\ 1\le i\le3;$$

5) $\quad f(x_1,x_2,x_3)=\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3-\sin(x_1+x_2+x_3),$

$$0 < x_i < \pi,\ 1 \le i \le 3;$$

6) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 (4a - x_1 - x_2 - x_3),\ a > 0,$
$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;$$

7) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 + 2x_3 + x_1,$
$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;$$

8) $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1 x_2 x_3}, \quad x_i > 0,\ 1 \le i \le 3;$

9) $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1}{x_2 + x_3} + \dfrac{x_2}{x_1 + x_3} + \dfrac{x_3}{x_1 + x_2},$
$$x_i > 0,\ 1 \le i \le 3;$$

10) $f(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + bx_2 + cx_3) e^{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2},$
$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3.$$

2. 1) Нехай $x_i \ge 0, 1 \le i \le 3$. Довести, що добуток $x_1 x_2 x_3$ при умові $x_1 + x_2 + x_3 = a,\ a \ge 0$ буде найбільшим тоді і лише тоді, коли $x_1 = x_2 = x_3$.

2) Нехай $x_i > 0, 1 \le i \le 3$. Довести, що сума $x_1 + x_2 + x_3$ при умові $x_1 x_2 x_3 = a,\ a > 0$ буде найменшою тоді і лише тоді, коли $x_1 = x_2 = x_3$.

3) При яких розмірах прямокутної відкритої скрині з заданим об'ємом $V = 32a^3$ його поверхня буде найменшою?

4) В кулю радіуса $r > 0$ вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єма.

5) Визначити зовнішні розміри казана циліндричної форми з заданою товщиною стінок $d > 0$ і ємністю $V > 0$ так, щоб на його виготовлення пішло якнайменше матеріалу.

6) На площині $3x_1 - 2x_3 = 0$ знайти точку, сума квадратів відстаней до якої від точок $A(1,1,1)$ і $B(2,3,4)$ найменша.

7) Знайти найбільший об‘єм паралелепіпеда при заданій сумі його ребер $12a,\ a > 0.$

8) Через точку $A(1,2,3)$ провести площину, що утворює з площинами координат тетраедр найменшого об'єму.

3. Дослідити на локальний екстремум функцію
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \exp\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i, \quad x_i > 0,\ 1 \le i \le m.$$

4. Дослідити на локальний екстремум функцію $z = z(x_1, x_2)$, задану наступним рівнянням:

1) $x_1^2+x_2^2+z^2-2x_1+2x_2-4z-10=0;$
2) $x_1^2+x_2^2+z^2-x_1z-x_2z+2x_1+2x_2+2z-2=0;$
3) $2x_1^2+2x_2^2+z^2+8x_1z-z+8=0;$
4) $5x_1^2+5x_2^2+5z^2-2x_1x_2-2x_1z-2x_2z-72=0;$
5) $x_1^2+x_2^2+4x_1z+4+\dfrac{1}{2}(z^2+z)=0;$
6) $z^2+x_1x_2z-x_1x_2^2-x_1^3=0;$
7) $2x_1^2+6x_2^2+2z^2+8x_1z-4x_1-8x_2+3=0;$
8) $6x_1^2+6x_2^2+6z^2+4x_1-8x_2-8z+5=0;$
9) $x_1^2+2x_1+x_2^2-2x_2+z^2+2z+1=0;$
10) $x_1^4+x_2^4+z^4=2a^2(x_1^2+x_2^2+z^2), \quad a>0.$

5. 1) На площині дано n матеріальних точок $\{M_i(x_1(i),x_2(i)) \ : \ 1\le i\le n\}$ з масами, відповідно рівними $m_i,\ 1\le i\le n$. При якому положенні точки $M(x_1,x_2)$ момент інерції системи відносно цієї точки

$$I=\sum_{i=1}^{n} m_i\rho^2(M_i,M)$$

буде найменшим? Тут ρ – евклідова метрика.

2)* На площині дано n точок $\{M_i(x_1(i),x_2(i)) \ : \ 1\le i\le n\}$ з попарно різними абсцисами і попарно різними ординатами. Нехай

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=|\,x_1-y_1\,|+|\,x_2-y_2\,|,$$
$$(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2,\ (y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2.$$

При якому положенні точки $M(x_1,x_2)$ сума відстаней

$$S=\sum_{i=1}^{n} d(M_i,M)$$

буде найменшою? Розглянути випадки парного і непарного n.

ЗАНЯТТЯ 15
ВІДОБРАЖЕННЯ. ЯКОБІАНИ

Контрольні запитання

1. *Означення векторного відображення. Критерій неперервності відображення.*
2. *Означення диференційовного відображення. Якобіан.*
3. *Достатня умова диференційовності.*
4. *Якобіан суперпозиції відображень.*
5. *Означення оберненого відображення. Теорема про існування неперервного оберненого відображення.*
6. *Теорема про неявну функцію (відображення).*

А15

1. Для наступних відображень $\vec{f}$ знайти образ $\vec{f}(A)$ множини A:

1) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in A = [0,1] \times [-1,1];$

2) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in A,\ A = [0,1] \times [0,1];$

2) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in A,\ A = [0,1] \times [0,1];$

2) $\vec{f}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad (r, \varphi) \in A,$

$$a)\ A = [1,2] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \qquad b)\ A = [1,2] \times [0, 2\pi].$$

Які з цих відображень взаємно-однозначні на A? Які з них неперервні на A?

2. Для наступних відображень $\vec{f}$ знайти похідну $\vec{f}\,'(x_1^\circ, x_2^\circ)$ і головну лінійну частину відображення в точці (x_1°, x_2°):

1) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,\ (x_1^\circ, x_2^\circ) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$

2) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1\cos x_2 \\ x_1\sin x_2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi),$

$$a)\ (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right), \qquad b)\ (x_1, x_2) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right).$$

3. Обчислити якобіани відображень з номера 1 і знайти точки, в яких ці якобіани вироджуються.

4. Для наступних відображень:

$$\vec{f}(r,\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \qquad (r,\varphi,\psi) \in \mathbf{R}^3;$$

$$\vec{g}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos x_3 \\ x_2\cos x_3 \\ \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\sin x_3 \end{pmatrix}, \qquad (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3;$$

$$\vec{h}(r,\varphi,\psi) = \vec{g}\big(\vec{f}(r,\varphi,\psi)\big), \qquad (r,\varphi,\psi) \in \mathbf{R}^3$$

обчислити похідні $\vec{f}\,'$, $\vec{g}\,'$, $\vec{f}\,'$ і якобіани

$$\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(r,\varphi,\psi)}, \quad \frac{\partial(g_1,g_2,g_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}, \quad \frac{\partial(h_1,h_2,h_3)}{\partial(r,\varphi,\psi)}.$$

5. Для наступних відображень $\vec{f}$ знайти $\vec{f}(A)$, а також точки, в яких $\det\vec{f'} = 0$. Якщо $\vec{f}$ є взаємно-однозначним відображенням, то знайти обернене відображення $\vec{g}$:

1) $\quad \vec{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix}, \quad (x_1,x_2) \in A = \mathbf{R}^2;$

2) $\quad \vec{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2-x_1-2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}, \quad (x_1,x_2) \in A = [-1,2]\times\mathbf{R}.$

6. Нехай

$$\vec{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1\cos x_2 \\ x_1\sin x_2 \end{pmatrix}, \quad (x_1,x_2) \in A = [0,+\infty)\times\mathbf{R}.$$

1) Знайти $\vec{f}(A)$.

2) Для кожної точки (x_1°, x_2°), $x_1^0 > 0$, застосувати теорему про існування оберненого відображення.

3) Довести, що відображення $\vec{f}$ не є взаємно-однозначним на множині $\{(x_1,x_2) \mid x_1 > 0\}$.

4) Довести, що на множині $\{(x_1,x_2) \mid x_1 > 0,\ 0 \le x_2 < 2\pi\}$ відображення $\vec{f}$ є взаємно-однозначним, і знайти обернене відображення $\vec{g}$.

5) Знайти $\vec{f}\,'$, $(\vec{f}\,')^{-1}$, $\vec{g}\,'$ у випадку пункта 4.

7. Нехай
$$F(x_1,x_2,y)=x_1^2+x_2^2+y^2-2x_1y-4,\quad (x_1,x_2,y)\in\mathbf{R}^3.$$
До яких точок (x_1^0,x_2^0,y^0) застосовна теорема про неявну функцію? У випадку існування неявної функції $y=y(x_1,x_2)$ знайти y_1' і y_2'.

Д1. Для відображення
$$\vec f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1^2-x_2^2\\ 2x_1x_2\end{pmatrix},\quad (x_1,x_2)\in A=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$$
знайти $\vec f(A)$, а також точки, в яких $\det\vec f'=0$. Довести, що $\vec f$ є взаємно-однозначним відображенням і знайти обернене відображення $\vec g$.

Д2. Довести, що якобіан J відображення $\vec f$ рівний наведеному нижче виразу:

1) $$\vec f(r,\varphi)=\begin{pmatrix}ar\cos^\alpha\varphi\\ br\sin^\alpha\varphi\end{pmatrix},\quad r\ge 0,\ 0<\varphi<\frac{\pi}{2};$$
$$\{a,b\}\subset(0,+\infty),\ \alpha\in\mathbf{R};\qquad J=\alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\cdot\sin^{\alpha-1}\varphi;$$

2) $$\vec f(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix}ar\cos^\alpha\varphi\cdot\cos^\beta\psi\\ br\sin^\alpha\varphi\cdot\cos^\beta\psi\\ cr\sin^\beta\psi\end{pmatrix},\quad r\ge 0,\ \{\varphi,\psi\}\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right);$$
$$\{a,b,c\}\subset(0,+\infty),\ \{\alpha,\beta\}\in\mathbf{R};$$
$$J=\alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\cdot\sin^{\alpha-1}\varphi\cdot\cos^{2\beta-1}\psi\cdot\sin^{\beta-1}\psi.$$

Д3. Довести, що якобіан відображення
$$\vec f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1^2+x_2^2+x_3^2\\ x_1+x_2+x_3\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\end{pmatrix},(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$$
тотожно дорівнює нулю. Знайти залежність між функціями $f_i,\ 1\le i\le 3$.

Б15

1. Для наступних відображень $\vec f$ знайти образ $\vec f(A)$ множини A:

1) $$\vec f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\dfrac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\\ \dfrac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\end{pmatrix},\quad (x_1,x_2)\ne(0,0);$$
$$A=\{(x_1,x_2)\,|\,1\le x_1\le 4, x_2=0\};$$

2) $$\vec f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1^2+x_2^2\\ x_1^2-x_2^2\end{pmatrix},\quad (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2;$$

$$A = \{(x, x^{-1} \,|\, 1 \le x \le 2\};$$

3) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;$

$$A = \{(x, x^2) \,|\, 0 \le x \le 4\};$$

4) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ \dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix},$

$$(x_1, x_2) \neq (0, 0); \quad A = [1, 2] \times [0, 2];$$

5) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; \quad A = [0, 1] \times [0, 1];$

6) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_1} \\ \ln(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \quad x_1 \neq 0;$

$$A = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 > 0, \ x_1^2 + x_2^2 < 16\};$$

7) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;$

$$A = [0, 1] \times [0, 2];$$

8) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \sqrt{x_2} \end{pmatrix}, \quad x_2 \ge 0; \quad A = [-1, 1] \times [4, 9];$

9) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}, \ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; \ A = [0, 1] \times [0, 1];$

10) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} x_1 \\ \cos x_2 \end{pmatrix}, \quad |x_1| < \dfrac{\pi}{2};$

$$A = \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[0, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Які з цих відображень взаємно-однозначні на A? Які з них неперервні на A?

2. Обчислити якобіани наступних відображень і знайти точки, в яких ці якобіани вироджуються:

1) $\vec{f}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos^3\varphi \\ 2r\sin^3\varphi \end{pmatrix}, \quad r \ge 0, \ \varphi \in \mathbf{R};$

2) $\vec{f}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 2r\cos^4\varphi \\ r\sin^4\varphi \end{pmatrix}, \quad r \ge 0, \ \varphi \in \mathbf{R};$

3) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi\cdot\cos^2\psi \\ 2r\sin\varphi\cdot\cos^2\psi \\ r\sin^2\psi \end{pmatrix},\ r\geq 0,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi,\ |\psi|\leq\dfrac{\pi}{2};$

4) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} 2r\cos^2\varphi\cdot\cos\psi \\ 2r\sin^2\varphi\cdot\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix},\ r\geq 0,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi,\ |\psi|\leq\dfrac{\pi}{2};$

5) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} r\sqrt{\cos\varphi\cdot\cos\psi} \\ 2r\sqrt{\sin\varphi\cdot\cos\psi} \\ r\sqrt{\sin\psi} \end{pmatrix},\quad r\geq 0,\{\varphi,\psi\}\subset\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right);$

6) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \psi^2 \end{pmatrix},\quad (r,\varphi,\psi)\in\mathbf{R}^3;$

7) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \sqrt[3]{\psi} \end{pmatrix},\quad (r,\varphi,\psi)\in\mathbf{R}^3,\ \psi\neq 0;$

8) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} 3r\sqrt[3]{\cos\varphi}\cdot\cos\psi \\ 2r\sqrt[3]{\sin\varphi}\cdot\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix},\ r\geq 0,\ 0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2},\ |\psi|\leq\dfrac{\pi}{2};$

9) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi\cdot\sqrt[3]{\cos\psi} \\ 2r\sin\varphi\cdot\sqrt[3]{\cos\psi} \\ r\sqrt[3]{\sin\psi} \end{pmatrix},$

$$r\geq 0,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi,\ 0\leq\psi\leq\frac{\pi}{2};$$

10) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} \sqrt{r}\cos\varphi\cdot\cos\psi \\ \sqrt{r}\sin\varphi\cdot\cos\psi \\ \sqrt{r}\sin\psi \end{pmatrix},\quad r>0,\ \{\varphi,\psi\}\subset[0,2\pi].$

3. Для наступних відображень $\vec{f}$ знайти похідну $\vec{f}\,'(x_1^\circ,x_2^\circ)$ і головну лінійну частину відображення в точці (x_1°,x_2°):

1) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} \ln x_1\cdot\cos x_2 \\ \ln x_1\cdot\sin x_2 \end{pmatrix},\ x_1>0,\ x_2\in\mathbf{R};$

$$(x_1^\circ,x_2^\circ)=(1,\pi);$$

2) $\quad \vec{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ \dfrac{x_2}{x_1} \end{pmatrix},\ x_1 \neq 0; \quad (x_1^\circ, x_2^\circ) = (1,2);$

3) $\quad \vec{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{10x_1}{x_1^2+x_2^2} \\ \dfrac{10x_2}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix},\ (x_1,x_2) \neq (0,0);\ (x_1^\circ, x_2^\circ) = (1,1);$

4) $\quad \vec{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2 \\ x_1^2-x_2^2 \end{pmatrix},\ (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2, \quad (x_1^\circ, x_2^\circ) = (1,1);$

5) $\quad \vec{f}(x_1,x_2)\begin{pmatrix} (x_1+x_2)^2 \\ (x_1-x_2)^2 \end{pmatrix},\ (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2; \quad (x_1^\circ, x_2^\circ) = (3,4).$

4. Для наступних відображень $\vec{f}$ знайти похідну $\vec{f}\,'(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ)$ і головну лінійну частину відображення в точці $(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ)$:

1) $\quad \vec{f}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^2 \\ -x_3 \end{pmatrix},\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3;$

$$(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ) = (1,2,3);$$

2) $\quad \vec{f}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \sqrt{x_2} \\ x_3+1 \end{pmatrix},\ x_2 > 0;$

$$(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ) = (1,1,1);$$

3) $\quad \vec{f}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \sin x_1 \\ x_2-1 \\ -x_3 \end{pmatrix},\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3;$

$$(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ) = (\pi,1,1);$$

4) $\quad \vec{f}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2^{x_1} \\ \operatorname{tg} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ |x_2| < \pi;$

$$(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ) = (1, \frac{\pi}{4}, -1);$$

5) $\quad \vec{f}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \arcsin x_1 \\ x_2^2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ |x_1| < 1;$

$$(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ) = (\frac{1}{2}, 1, 2).$$

5. Написати відображення, оберенені до наступних відображень на множині A:

1) $\vec{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1}\cos x_2 \\ e^{x_1}\sin x_2 \end{pmatrix}, \ (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2; \quad A = \mathbf{R} \times [0, 2\pi);$

2) $\vec{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ (x_1 - x_2)^2 \end{pmatrix}, \ (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2;$

$$A = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \geq x_2\};$$

3) $\vec{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ \dfrac{x_2}{x_1} \end{pmatrix}, \ x_1 \neq 0; \quad A = (-\infty, 0) \times (-\infty, 0).$

Чи є ці відображення взаємно-однозначними на множині визначення?

6. До наступних відображень $\vec{f}$ застосувати теорему про існування оберненого відображення в кожній точці $(x_1^\circ, x_2^\circ) \in A$; довести, що відображення $\vec{f}$ взаємно-однозначне на множині B; на множині C знайти обернене відображення $\vec{g}$ і обчислити $\vec{f}\,'$, $(\vec{f}\,')^{-1}$, $\vec{g}\,'$:

1) $\vec{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \ (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2,$

$$A = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \neq x_2\}, \ B = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \geq x_2\},$$
$$C = \{(x_1,x_2) \mid x_1 > x_2\};$$

2) $\vec{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}, \ (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2,$

$$A = \{(x_1,x_2) \mid x_2 \neq 0\}, \ B = \{(x_1,x_2) \mid x_2 \leq 0\},$$
$$C = \{(x_1,x_2) \mid x_2 < 0\};$$

3) $\vec{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2,$

$$A = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \neq 0\}, \ B = \mathbf{R}^2, \ C = \{(x_1,x_2) \mid x_1 > 0\};$$

4) $\vec{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2)^3 \\ (x_1 - x_2)^2 \end{pmatrix}, \ (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2,$

$$A = \{(x_1,x_2) \mid |x_1| \neq |x_2|\}, \ B = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \geq x_2\},$$
$$C = \{(x_1,x_2) \mid 0 < x_2 < x_1\};$$

5) $\vec{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}, \ (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2,$

$$A=\left\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\right\},$$
$$B=\left\{(x_1,x_2)\mid -\frac{\pi}{2}\leq x_1+x_2\leq\frac{\pi}{2}\right\},$$
$$C=\left\{(x_1,x_2)\mid -\frac{\pi}{2}\leq x_1+x_2\leq\pi.2\right\};$$

6) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\operatorname{tg}(x_1+x_2)\\ x_2\end{pmatrix},\ x_1+x_2\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z},$

$$A=\left\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\right\},$$
$$B=C=\left\{(x_1,x_2)\mid -\frac{\pi}{2}\leq x_1+x_2\leq\pi.2\right\};$$

7) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1\\ e^{x_1x_2}\end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2,$

$$A=B=\{(x_1,x_2)\mid x_1\neq 0\},\ C=\{(x_1,x_2)\mid x_1>0\};$$

8) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\ln(x_1x_2)\\ x_2\end{pmatrix},\ x_1x_2>0,$

$$A=B=\{(x_1,x_2)\mid x_1x_2>0\},\ C=(0,+\infty)\times(0,+\infty);$$

9) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1^2\\ \operatorname{arctg}(x_1+x_2)\end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2,$

$$A=\{(x_1,x_2)\mid x_1\neq 0\},\ B=[0,+\infty)\times\mathbf{R},\ C=(0,+\infty)\times\mathbf{R};$$

10) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1^2\\ x_1^2+x_2^2\end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2,$

$$A=\{(x_1,x_2)\mid x_1x_2\neq 0\},$$
$$B=[0,+\infty)\times[0,+\infty),\ C=(0,+\infty)\times(0,+\infty).$$

7. Знайти якобіани відображення $\vec{f}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}x_1x_2x_3\\ x_1x_2-x_1x_2x_3\\ x_2-x_1x_2\end{pmatrix}$ і оберненого до нього відображення $\vec{g}$ в точці $\vec{x}^0=(1,2,3)$.

ЗАНЯТТЯ 16
УМОВНИЙ (ВІДНОСНИЙ) ЕКСТРЕМУМ

Контрольні запитання

1. *Означення точок локального мінімума і максимума.*
2. *Необхідна і достатня умови локального умовного мінімума і максимума.*

А16

1. Дослідити задані функції на умовний екстремум при наступних рівняннях зв'язку:

1) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2,\ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1;$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3,\ x_i > 0,\ 1 \le i \le 3,$
$$x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_2 + x_3 = 2.$$

2. Дослідити задані функції на умовний екстремум при наступних рівняннях зв'язку:

1) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2,\ x \in \mathbf{R}^2; \quad x_1 - 2x_2 = 1;$

2) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,\ x \in \mathbf{R}^2; \quad \dfrac{x_1}{a} + \dfrac{x_2}{b} = 1,\ ab \ne 0;$

3) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 12x_1x_2 + 2x_2^2,\ x \in \mathbf{R}^2 \quad 4x_1^2 + x_2^2 = 25.$

3. Нехай $a > 0,\ a_i > 0,\ 1 \le i \le m$ – фіксовані сталі. Знайти найменше значення функції
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2,\ (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$$
при умові $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m = a$. Використовуючи отриманий результат, довести нерівність Коші-Буняковського
$$\left(\sum_{i=1}^m x_i a_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^m a_i^2,$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m,\ (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^m.$$
За яких умов можливий знак рівності?

4. Нехай $a > 0$ – фіксована стала. Знайти найбільше значення функції
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \prod_{i=1}^m x_i, \quad x_i \ge 0,\ 1 \le i \le m$$
за умови $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = a,$. Використовуючи отриманий результат, довести нерівність
$$\sqrt[m]{x_1 x_2 \ldots x_m} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}, \quad x_i \ge 0,\ 1 \le i \le m.$$

За якої умови можливий знак рівності?

Д1. Знайти найменше значення функції

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1^p + x_2^p + \cdots + x_m^p,\ p > 1,\ x_i \geq 0, 1 \leq i \leq m$$

за умови $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = a$. Використовуючи отриманий результат, довести при $p > 1,\ x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq m$ нерівність

$$\frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_m^p}{m} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\right)^p.$$

Д2. Знайти найменше значення функції

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^k\right)^{1/k},\ k > 1,\ x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq m$$

за умови $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = A,\ a_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq m, A \geq 0$. Використовуючи отриманий результат, довести нерівність

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^q\right)^{1/q},$$

$$p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ a_i \geq 0,\ x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq m.$$

В яких випадках в останній нерівності справджується рівність?

Б16

1. Нехай $a > 0,\ bc \neq 0$ – фіксовані сталі.Дослідити задані функції на умовний екстремум при наступних рівняннях зв'язку:

1) $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2},\ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \quad x_1 + x_2 = 1;$

2) $f(x_1, x_2) = x_1^{-1} + x_2^{-1},\ x_1 x_2 \neq 0; \quad x_1 + x_2 = 2a;$

3) $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2,\ x_i \in [0, \pi/2), i = 1, 2; \quad \operatorname{tg} x_1 = 3 \operatorname{tg} x_2;$

4) $f(x_1, x_2) = \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2,\ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \quad x_1 - x_2 = \pi/4;$

5) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{b} + \dfrac{x_2}{c},\ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; \quad x_1^2 + x_2^2 = 1;$

6) $f(x_1, x_2) = 2\cos^2 x_1 + 3\cos^2 x_2,\ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;\ x_1 - x_2 = \pi/4.$

2. Нехай $a > b > c > 0,\ \{m, n, p\} \subset \mathbf{N}$ – фіксовані сталі. Дослідити задані функції на умовний екстремум при наступних рівняннях зв'язку:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^3 x_3^4,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3,$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0;$$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,\ x_i > 0,\ 1 \leq i \leq 3;$
$$\tfrac{a}{x_1} + \tfrac{b}{x_2} + \tfrac{c}{x_3} = 1;$$

3) $f(x_1,x_2,x_3) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \cdot \cos x_3,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3,$
$$x_1 + x_2 + x_3 = \pi;$$
4) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 - 2x_2 + 2x_3,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3,$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1;$$
5) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^m x_2^n x_3^p,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3;$
$$x_1 + x_2 + x_3 = a;$$
6) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3;$
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1;$$
7) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_2^2 x_3^3,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3,$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a;$$
8) $f(x_1,x_2,x_3) = \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \sin x_3,\ x_i > 0,\ 1 \le i \le 3;$
$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{\pi}{2};$$
9) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_2 x_3,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3,$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3.$$

3. Нехай $a \in \mathbf{R}$ – фіксована стала. Знайти найменше значення функції
$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2,\ (x_1,x_2,\ldots,x_m) \in \mathbf{R}^m$$
за умови $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = a$. Використовуючи отриманий результат, довести нерівність
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^2 \le m(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2), \quad x_i \in \mathbf{R},\ 1 \le i \le m.$$

4. Нехай $a > b > c > 0$ – фіксовані сталі. Дослідити задані функції на умовний екстремум при наступних рівняннях зв'язку:

1) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_2 x_3,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3;$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0;$$
2) $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} + \dfrac{x_3^2}{c^2},\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3;$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1;$$
3) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3;$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0;$$
4) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_2 x_3,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3;$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5,\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 8;$$
5) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3;$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0,\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0.$$

ЗАНЯТТЯ 17
АБСОЛЮТНИЙ (ГЛОБАЛЬНИЙ) ЕКСТРЕМУМ

А17

1. Визначити найбільше і найменше значення наступних функцій:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 + 16x_2,$
$$(x_1, x_2) \in \left\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 25\right\};$$

2) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2,$
$$(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \le 1\}.$$

2. Визначити найбільше і найменше значення наступних функцій:

1) $f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2 - 3,$
$$(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_i \le 1,\ i = 1, 2;\ x_1 + x_2 \le 1\};$$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$
$$(x_1, x_2, x_3) \in \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \le x_3 \le 1\right\}.$$

3. Визначити найбільше і найменше значення функції:
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)e^{-(x_1 + 2x_2 + \cdots + mx_m)},$$
$$0 \le x_i \le 2,\ 1 \le i \le m.$$

4. При яких розмірах прямокутна ванна заданого об'єму V має найменшу площу поверхні?

5. При яких розмірах відкрита циліндрична ванна з півкруглим поперечним перерізом, площа поверхні якої рівна S, має найбільший об'єм?

Б17

1. Нехай $a > b > 0$ – фіксовані сталі. Знайти найбільше і найменше значення наступних функцій:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_1 + 18x_2 - 4,$
$$(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1];$$

2) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_1 + 18x_2 - 4,$
$$(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 \le x_2 \le 4\};$$

3) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,$
$$(x_1, x_2) \in \left\{(x_1, x_2) \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1\right\};$$

4) $f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2}(2x_1^2 + 3x_2^2),$
$$(x_1, x_2) \in \left\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4\right\};$$

5) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{2} - \dfrac{x_1^2 x_2}{6} - \dfrac{x_1 x_2^2}{8}$,
$(x_1, x_2) \in \left\{(x_1, x_2) \mid x_i \geq 0,\ i = 1, 2;\ \dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_2}{4} \leq 1\right\}$;

6) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - 1)^{2/3}$,
$(x_1, x_2) \in \left\{(x_1, x_2) \mid x_2^2 \leq x_1 \leq 2\right\}$;

7) $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$,
$(x_1, x_2) \in \left\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\}$;

8) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2, \quad (x_1, x_2) \in \left\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 4\right\}$;

9) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 x_2 - 4x_1 + 8x_2$,
$(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 2]$;

10) $f(x_1, x_2) x_1^2 x_2 (4 - x_1 - x_2)$,
$(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \mid x_i \geq 0,\ i = 1, 2;\ x_1 + x_2 \leq 6\}$.

2. 1) В заданий прямий круговий конус вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.

2) З усіх трикутників з однаковою основою і одним і тим же кутом при вершині знайти найбільший за площею.

3) При заданій повній поверхні шатра визначити його виміри так, щоб об'єм був найбільшим. Шатер має форму циліндра, завершеного зверху прямим круговим конусом.

4) При заданому об'ємі шатра визначити його виміри так, щоб його повна поверхня була найменшою. (Про форму шатра див. пункт 3.)

5) Треба збудувати конічний шатер найбільшого об'єму з заданої кількості матеріалу загальною площею S. Які повинні бути його розміри?

6) На площині, заданій рівнянням $3x_1 - 2x_3 = 0$ знайти точку, сума квадратів відстаней якої до точок $A(1, -1, 1)$ і $B(2, -3, 4)$ найменша.

7) З усіх еліпсів, у яких сума осей постійна і рівна $2L$ знайти найбільший за площею.

8) Знайти найкоротшу відстань від точки $A(-1, 0)$ до еліпса, заданого рівнянням $4x_1^2 + 9x_2^2 = 36$.

9) Площа трикутної ділянки землі зменшена загородками при вершинах; кожна загородка є круговою і має центр у відповідній вершині. Знайти, як можна зберегти найбільшу площу ділянки при заданій загальній довжині трьох загородок.

10) На еліпсі, що має рівняння $x_1^2 + 4x_2^2 = 4$, дано дві точки $A(-\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ і $B(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Знайти на цьому ж еліпсі третю точку $C(x_1^\circ, x_2^\circ)$ таку, щоб площа трикутника $\triangle ABC$, яку можна обчислити за формулою

$$S = \pm \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & x_1^0 & x_2^0 \end{vmatrix}$$

була найбільшою. Знак перед визначником обирається так, щоб площа була невід'ємна.

3. 1) Знайти довжини півосей еліпса, що описується рівнянням $36x_1^2 + 24x_1x_2 + 29x_2^2 = 180$ і має центр в точці $(0, 0)$, досліджуючи екстремуми відстані довільної точки еліпса до його центра.

2) Серед всіх трикутників, вписаних в круг радіуса R, знайти трикутник з найбільшою площею.

3) Серед усіх трикутників з заданим периметром $2p$ знайти трикутник з найбільшою площею.

4) Серед усіх пірамід, основою яких є заданий трикутник зі сторонами a, b, c, а висота рівна h, знайти піраміду з найменшою площею бічної поверхні.

5) Знайти точку площини, сума квадратів відстаней від якої до трьох заданих точок $A_i(x_1(i), x_2(i)), 1 \le i \le 3$ є найменшою.

6) Серед усіх чотирикутників, вписаних в задане коло, знайти чотирикутник з найбільшою площею.

7) Знайти найбільшу відстань від точок поверхні, заданої рівнянням $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 = 6$, до площини з рівнянням $x_3 = 0$.

8) На параболі $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 = 0$, рівняння якої є знайти точку, найближчу до прямої з рівнянням $9x_1 - 7x_2 + 16 = 0$.

9) На еліпсі, заданому рівнянням $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1$, знайти точки, найбільше і найменше віддалені від прямої з рівнянням $3x_1 + x_2 - 9 = 0$.

10) На еліпсоїді обертання, рівняння якого є $\frac{x_1^2}{96} + x_2^2 + x_3^2 = 1$ знайти точки, найбільше і найменше віддалені від площини з рівнянням $3x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 288$.

ЗАНЯТТЯ 18
ЧИСЛОВІ РЯДИ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Контрольні запитання

1. *Означення числового ряду, його часткової суми.*
2. *Означення збіжного числового ряду, його суми і залишка.*
3. *Необхідні умови збіжності числового ряду.*
4. *Критерій збіжності ряду з невід'ємними доданками.*
5. *Геометричний та гармонічний ряди.*
6. *Ознаки порівняння для рядів з невід'ємними членами.*

A18

1. Знайти часткові суми, дослідити збіжність, знайти суми та залишки наступних рядів:

1) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots;$

2) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}\right) + \ldots;$

3) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \ldots;$

4) $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots;$

5) $\left(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1\right) + \left(\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) + \ldots +$
$+ \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) + \ldots.$

2. Нехай ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ збігаються. Довести збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|;$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2;$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n|}{n}.$

3. Дослідити збіжність рядів:

1) $0,001 + \sqrt{0,001} + \sqrt[3]{0,001} + \ldots;$

2) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} + \ldots;$

3) $\dfrac{1}{1001} + \dfrac{1}{2001} + \dfrac{1}{3001} + \ldots + \dfrac{1}{1000n+1} + \ldots;$

4) $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}+\ldots;$

5) $1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}+\ldots;$

6) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\ldots+\dfrac{n}{n+1}+\ldots.$

4. З допомогою ознак порівняння дослідити збіжність наступних рядів:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2};$ 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}};$ 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2};$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n(2^n-1)};$ 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{1+n^2}{n^2};$ 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}.$

Д1. Знайти часткові суми, дослідити збіжність, знайти суму та залишок ряду

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots.$$

Д2. Нехай ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ з невід'ємними доданками збігається. Довести збіжність ряду $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$. Навести приклад, який показує, що зворотне твердження невірне.

Д3. Нехай ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається. Чи випливає звідси збіжність ряду $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$? Навести відповідні приклади.

Д4. Нехай ряди з невід'ємними доданками $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ розбігаються. Що можна стверджувати про збіжність рядів

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\};$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\max\{a_n,b_n\}$?

Б18

1. Знайти часткові суми, дослідити збіжність, знайти суми та залишки наступних рядів:

1) $\dfrac{9}{4}+\dfrac{27}{16}+\ldots+\dfrac{3^{n+1}}{4^n}+\ldots;$

2) $\ln\dfrac{3}{2}+\ln\dfrac{4}{3}+\ldots+\ln\dfrac{n+2}{n+1}+\ldots;$

3) $\ln\dfrac{3\cdot 1}{2^2}+\ln\dfrac{4\cdot 2}{3^2}+\ldots+\ln\dfrac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2}+\ldots;$

4) $\dfrac{3}{1^2\cdot 2^2}+\dfrac{5}{2^2\cdot 3^2}+\ldots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots;$

5) $\dfrac{2}{1^2\cdot 3^2}+\dfrac{3}{2^2\cdot 4^2}+\ldots+\dfrac{n+1}{n^2(n+2)^2}+\ldots;$

6) $\dfrac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{2}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}+\ldots;$

7) $\dfrac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\dfrac{1}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+3)(n+6)}+\ldots.$

2. Використовуючи необхідну умову збіжності ряду, довести розбіжність рядів:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n};$ 2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}.$

3. Оцінюючи часткові суми, довести розбіжність рядів:

1) $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\ldots;$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}+\ldots.$

4. З допомогою ознак порівняння дослідити збіжність наступних рядів:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1};$ 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 4n}{n^3};$ 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n};$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}};$ 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^{n-1}};$ 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{4n-2}.$

ЗАНЯТТЯ 19
ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ З ДОДАТНИМИ ЧЛЕНАМИ

Контрольні запитання

1. *Ознаки Даламбера і Коші.*
2. *Логарифмічна ознака і ознака Раабе.*
3. *Інтегральна ознака Маклорена - Коші.*

А19

1. Використовуючи ознаки Даламбера або Коші дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

2. Використовуючи інтегральну ознаку Маклорена-Коші, дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ в залежності від параметра p.

3. Використовуючи ознаки Раабе та логарифмічну, дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n}$.

4. Використовуючи різні ознаки, дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \ln n + n + \sqrt{n}}{1 + n^2 \ln^3 n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^2 + n + 1}{4^{n+1} + n^2 + 3}$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n! + n}{(2n)! + n^2}$;

Д1. Довести, що для будь-якого збіжного ряду з невід'ємними доданками і залишками $\{r_n \,:\, n \ge 1\}$ існує збіжний ряд з невід'ємними доданками і залишками $\{r'_n \,:\, n \ge 1\}$, що задовольняють умові $r_n = o(r'_n),\ n \to \infty$.

Д2. Нехай послідовність невід'ємних чисел $\{a_n \,:\, n \ge 1\}$ монотонно не зростає. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається тоді й лише тоді, коли збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Б19

1. Використовуючи ознаки Коші або Даламбера дослідити збіжність рядів:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^4}}{3^n}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$; 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$; 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$; 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$;

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4\left(\sqrt{5}+(-1)^n\right)^n}{4^n}$; 10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\ldots(4n-3)}$; 11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$;

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}{(2n-1)!!}$; 12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

2. Використовуючи інтегральну ознаку Маклорена-Коші дослідити збіжність рядів:

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p(\ln n)^q}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; 4) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$.

3.Використовуючи ознаки Раабе або логарифмічну, дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}.$$

4. Використовуючи різні ознаки, дослідити збіжність рядів:

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)!+n+\sqrt{n}}{(n+3)!+n^2}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+n}{n5^{n+2}-1}$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7\ln^2 n+n+1}{(n+2)^8\ln^4 n+n^2+1}$.

ЗАНЯТТЯ 20
АБСОЛЮТНО І УМОВНО ЗБІЖНІ РЯДИ

Контрольні запитання

1. *Означення абсолютно і умовно збіжних рядів.*
2. *Ознаки Лейбніца, Діріхле, Абеля.*

A20

1. Дослідити абсолютну та умовну збіжність наступних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n}$;
3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$;
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{arctg} n}$;
4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

2. Довести умовну збіжність наступних рядів на інтервалі $(0, \pi)$:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$;
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$.

3. Для рядів

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$;
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$;

де $x \in (0, \pi)$, знайти множини параметрів (x, p), для яких вони збігаються **а)** абсолютно; **б)** умовно.

4. Дослідити абсолютну та умовну збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)}{n}$;
4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n}$;
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;
5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.
3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n^2+1}$;
6) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$.

5. Довести, що для кожного $p > 0$ сума ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ лежить на інтервалі $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

6. Оцінити залишок ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$ і вказати скільки доданків треба взяти, щоб обчислити його суму з точністю до $\varepsilon = 10^{-8}$.

7. Довести збіжність ряду

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\dots$$

і знайти його суму.

Д1. Дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n}+(-1)^{n-1})^p}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\dfrac{n\pi}{4}}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{12}}{\ln n+(-1)^n}$;

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2 n}\cos\dfrac{\pi n^2}{n+1}$.

Д2. Дослідити абсолютну та умовну збіжність наступних рядів:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^n\sin^{2n}x}{n}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(2n+1)!!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

Д3. Дослідити збіжність рядів:

1) $\dfrac{1}{1^p}-\dfrac{1}{2^q}+\dfrac{1}{3^p}-\dfrac{1}{4^q}+\dfrac{1}{5^p}-\dfrac{1}{6^q}+\dots$;

2) $1+\dfrac{1}{3^p}-\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{5^p}+\dfrac{1}{7^p}-\dfrac{1}{4^p}+\dots$.

Б20

1. Встановити, які з наступних знакозмінних рядів збігаються абсолютно, умовно або розбігаються:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{n}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$;

6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos\frac{\pi}{n}}{n}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}}{n}$.

2. Переконатися в тому, що доданки ряду

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\ldots$$

не задовольняють умовам ознаки Лейбніца. Чи збігається цей ряд?

3. Нехай заданий ряд умовно збігається. Чи збережеться його збіжність, якщо для деякого числа N переставити перші N доданків? Чи збережеться при цьому його сума?

4. Дослідити абсолютну та умовну збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n}+1)^p}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{\sqrt[3]{n}+1}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{12}}{\ln n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\operatorname{arctg} n}{n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(4n+1)}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos\pi(n+1)}{\ln^2 n}$.

ЗАНЯТТЯ 21
ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ РЯДІВ. ДОБУТОК РЯДІВ. НЕСКІНЧЕННІ ДОБУТКИ

Контрольні запитання

1. *Теорема про арифметичні дії зі збіжними рядами.*
2. *Перестановка доданків абсолютно та умовно збіжних рядів.*
3. *Добуток рядів за Коші. Теореми про достатні умови збіжності добутку рядів.*
4. *Означення нескінченного числового добутку, його часткового добутку. Означення збіжного числового добутку.*
5. *Необхідна та достатні умови збіжності нескінченних добутків. Зв'язок зі збіжністю числових рядів.*
6. *Абсолютна збіжність нескінченних добутків.*

А21

1. Знайти суми наступних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{n^3}\right)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right)$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$.

2. Знайти суму ряду: $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$.

3. Використовуючи множення рядів за Коші, обчислити добуток

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n}{n!}.$$

4. Використовуючи множення рядів за Коші, довести рівність

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,q^n,\ \text{де } |q|<1.$$

5. Знайти часткові добутки і довести наступні рівності:

1) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$;

3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$;

2) $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)=\frac{1}{1-x},\ |x|<1$;

4) $\prod\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}=\frac{1}{4}$.

6. Дослідити збіжність наступних нескінченних добутків:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$;

2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^p}\right)$;

3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{x^n}{2^n}\right)$;

4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$;

5) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1-x^n)$.

7. Дослідити абсолютну і умовну збіжність наступних добутків:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)$;

2) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Д1. Переставити доданки збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ таким чином, щоб одержаний ряд: а) був розбіжним; б) був розбіжним до $+\infty$.

Д2. Довести, що доданки умовно збіжного ряду можна не змінюючи їх порядку згрупувати таким чином, що одержаний ряд буде абсолютно збіжним.

Д3. Довести, що квадрат в розумінні Коші збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ є розбіжний ряд.

Д4. Чи випливає зі збіжності добутків $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ і $\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ збіжність добутків:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (p_n+q_n)$;   2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n q_n$;   3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{p_n}{q_n}$?

Д5. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ збігається. Довести, що тоді збігається нескінченний добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos a_n$.

Б21

1. Що можна стверджувати про суму двох рядів, з яких
1) один ряд збігається, а інший розбігається;
2) обидва ряди розбігаються ?

2. Знайти суму ряду: $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots$.

3. Довести, що

1) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$;

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$;

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

4. Знайти часткові добутки і довести наступні рівності:

1) $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}$;

2) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}$;

3) $\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = 2$;

4) $\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}$;

5) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) = 2$.

5. Дослідити збіжність наступних нескінченних добутків:

1) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$;

2) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$;

3) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

4) $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$;

5) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) e^{\frac{x}{n}}$, де $c > 0$;

6) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$.

6. Дослідити абсолютну і умовну збіжність наступних добутків:

1) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$;

2) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$;

3) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\ln n}\right)$;

4) $\prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$;

5) $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

ЗАНЯТТЯ 22

ПОТОЧКОВА І РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ ПОСЛІДОВНОСТІ ФУНКЦІЙ. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ

Контрольні запитання

1. *Означення поточкової збіжності послідовності функцій.*
2. *Означення рівномірної збіжності послідовності функцій.*
3. *Теорема про зв'язок поточкової та рівномірної збіжності.*
4. *Критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності.*

А22

1. Для послідовності $\{f_n(x) = x^n,\ 0 < x < 1 : n \geq 1\}$ і фіксованого $x \in (0,1)$ визначити найменший номер $N = N(\varepsilon, x)$, починаючи з якого відхилення членів послідовності в точці x від граничної функції не перевищує 0.001, якщо 1) $x = \frac{1}{10}$; 2) $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$; 3) $x = \frac{1}{\sqrt[m]{10}}$, $m \in \mathbf{N}$. Чи збігається ця послідовність функцій рівномірно на інтервалі $(0,1)$?

3. Дослідити послідовність функцій $\{f_n(x),\ x \in X : n \geq 1\}$ на поточкову і рівномірну збіжність на заданій множині A, якщо:

1) $f_n(x) = \sin^n x;\ A = [0; \pi]$;
2) $f_n(x) = x^n - x^{n+1};\ A = [0; 1]$;
3) $f_n(x) = x^n - x^{2n};\ A = [0; 1]$.

4. Дослідити послідовність функцій $\{f_n(x),\ x \in X : n \geq 1\}$ на поточкову і рівномірну збіжність на кожній із заданих множин A_i, якщо:

1) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n};\ A_1 = [0; 1 - \varepsilon];\ A_2 = [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon];$
$A_3 = [1 + \varepsilon, +\infty)$, де $\varepsilon \in (0; 1)$;
2) $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^2x^2};\ A_1 = [0; 1];\ A_2 = (1, +\infty)$.

5. Дослідити послідовність функцій $\{f_n(x),\ x \in \mathbf{R} : n \geq 1\}$ на поточкову і рівномірну збіжність на множині $A = \mathbf{R}$, якщо:

1) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$;
2) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$;
3) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$;
4) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$;
5) $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$.

Д1. Дослідити послідовність функцій $\{f_n(x),\ x \in \mathbf{R} : n \geq 1\}$ на поточкову і рівномірну збіжність на заданих множинах $A_i,\ i = 1, 2$, якщо:

1) $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$; $A_1 = (-l; l)$, $l > 0$; $A_2 = \mathbf{R}$.
2) $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$; $A_1 = (a; b)$; $A_2 = \mathbf{R}$.

Д2. Чи збігається послідовність $\{\sin^n x \cos x,\ x \in \mathbf{R}\ :\ n \geq 1\}$ рівномірно на $\mathbf{R}$?
Д3. Знайти поточкову на $\mathbf{R}$ границю послідовності функцій $\left\{f_n(x) = n \sin \sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2},\ x \in \mathbf{R}\ :\ n \geq 1\right\}$. Чи збігається ця послідовність рівномірно на $[0; a]$, $a > 0$? на $\mathbf{R}$?
Д4. Довести, що рівномірна на осі границя послідовності многочленів є многочленом.
Д5. Чи випливає з того, що $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$ те, що $xf_n(x) \rightrightarrows xf(x)$ на $[a, b]$? Чи вірне обернене твердження?

Б22

1. 1) Довести, що послідовність функцій $\{f_n(x) = xe^{-nx},\ x \in [0, +\infty)\ :\ n \geq 1\}$ на промені $[0, +\infty)$ рівномірно збігається до нуля.

2) При яких значеннях параметра α послідовність функцій $\{f_n(x) = n^\alpha xe^{-nx},\ x \in [0, +\infty)\ :\ n \geq 1\}$ на промені $[0, +\infty)$ рівномірно збігається до нуля?
2. Показати, що наступні послідовності $\{f_n(x),\ x \in [0, \pi]\ :\ n \geq 1\}$ збігаються на відрізку $[0; \pi]$ поточково, але не рівномірно:

1) $f_n(x) = \sqrt[n]{\sin x}$;
2) $f_n(x) = \sqrt[n]{x \sin x}$;
3) $f_n(x) = (g(x))^n$;
4) $f_n(x) = \sqrt[n]{g(x)}$,

де $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0; \pi], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

3. Дослідити послідовність функцій $\{f_n(x),\ x \in X\ :\ n \geq 1\}$ на поточкову і рівномірну збіжність на заданій множині A, якщо:
1) $f_n(x) = \frac{1}{n+x}$, $A = (0, +\infty)$;
2) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$, $A = [0, 1]$;
3) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$, $A = (0, +\infty)$;
4) $f_n(x) = e^{n(x-1)}$, $A = (0, 1)$;
5) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}$, $A = [0; 2]$.

ЗАНЯТТЯ 23
ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ. ОБЛАСТЬ ЗБІЖНОСТІ. РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РЯДУ

Контрольні запитання

1. *Означення абсолютної та умовної збіжності функціонального ряду.*
2. *Означення множини збіжності функціонального ряду.*
3. *Означення рівномірної збіжності функціонального ряду.*
4. *Критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду.*
5. *Ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду.*

A23

1. Визначити множини збіжності (абсолютної та умовної) наступних функціональних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{n^x+n^2}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{n^{2x}+1}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n e^{x^{2n+1}}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+x^n)$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n},\ y \geq 0.$

2. Дослідити на рівномірну та поточкову збіжність наступні функціональні ряди на заданих множинах A :

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2},\ A = [-1;1]$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ A = (0;+\infty)$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n,\ A = [0;1]$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)},\ A = (0,+\infty).$

3. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x),\ x \in A$, збігається рівномірно на множині A. Довести, що:

1) $\sup\limits_{x\in A} |a_n(x)| \to 0,\ n \to \infty;$

2) $\sup\limits_{x\in A} \left|\sum\limits_{k=n+1}^{2n} a_k(x)\right| \to 0,\ n \to \infty.$

4. Дослідити ряд на рівномірну збіжність на множині A :

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x},\ A = (0, +\infty);$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+x^2},\ A = \mathbf{R};$

3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\frac{n^2+x^2}{n^2},\ A = [-c; c],\ c > 0;$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3},\ A = [0; c];$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sqrt[3]{n}}{1+n^3x^2},\ A = \mathbf{R};$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3},\ A = \mathbf{R}.$

Д1. Визначити множини збіжності (абсолютної та умовної) наступних функціональних рядів:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi x^n);$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}};$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)...(1+x^n)};$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q},\ q > 0;\ 0 < x < \pi;$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}.$

Д2. Дослідити на рівномірну та поточкову збіжність наступні функціональні ряди на заданих множинах A :

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{(1+x)(1+2x)...(1+nx)},\ A=[0,\varepsilon],\ \varepsilon>0;$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{(1+x)(1+2x)...(1+nx)},\ A=[\varepsilon,+\infty),\ \varepsilon>0.$

Д3. Дослідити ряди на рівномірну збіжність на множині $(0;1)$:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{nx}^{(n+1)x} \frac{dt}{1+t^{2004}};$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{nx-\frac{1}{n}}^{(n+1)x+\frac{1}{n}} e^{-t^2}dt.$

Д4. Знайти множину поточкової збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n+2^n}{n^x+x^{2n}}$. Чи збігається ряд рівномірно на цій множині?

Б23

1. Визначити множини збіжності (абсолютної та умовної) наступних функціональних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{x^n};$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x(x+n)}{n}\right)^n;$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}};$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^x+1}{n^{3x}+1};$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{-x}+1}{n^{-x}+n^x};$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(x+n)^p};$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n y^n}{x^n+y^n},\ x>0,\ y>0;$

2. Визначити при $x\in(0;1]$ суму і залишок функціонального ряду $x+x(1-x)+x(1-x)^2+...+x(1-x)^{n-1}+...$ і показати, що він збігається рівномірно на відрізку $[\frac{1}{2},1]$. При якому значенні n залишок даного ряду задовольняє нерівність $|r_n(x)|<0.01$ одночасно для всіх x на цьому відрізку?

3. Показати, що функціональний ряд

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+5)}+...+\frac{1}{(x+2n-1)(x+2n+1)}+...$$

рівномірно збігається до функції $\dfrac{1}{2(x+1)}$ на множині $[0,+\infty)$. При якому значенні n залишок даного ряду задовольняє нерівність $|r_n(x)| < 0,01$ при всіх $x \geq 0$?

4. Дослідити на рівномірну та поточкову збіжність наступні функціональні ряди на заданих множинах A :

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n,\ A=(-q;q),\, q<1;$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n,\ A=(-1;1);$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right),\ A=[-1;1];$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)},\ A=(0,+\infty).$

5. Дослідити ряд на рівномірну збіжність на множині A :

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2},\ A=[0,+\infty);$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n},\ A=[-1;1];$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}(x^n-x^{-n}),\ A=\left[\frac{1}{2};1\right];$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx},\ A=[0,+\infty);$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1},\ A=[a,b],\ 0<a<b;$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2},\ A=\mathbf{R};$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n},\ A=(-2;+\infty);$

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}),\ A=\left[\frac{1}{2};2\right].$

ЗАНЯТТЯ 24
ВЛАСТИВОСТІ РІВНОМІРНО ЗБІЖНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ

Контрольні запитання

1. *Ознаки Діріхле та Абеля рівномірної збіжності функціонального ряду.*
2. *Теорема про неперервність суми функціонального ряду.*
3. *Теорема про почленне диференціювання функціонального ряду.*
4. *Теорема про почленне інтегрування функціонального ряду.*

А24

1. Дослідити ряд на рівномірну збіжність на множині A

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx^2}{n-\sqrt{n}+1},\ A=[0,+\infty);$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{x+n}},\ A=[0,+\infty);$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)\operatorname{arctg}(nx)}{n+x^2},\ A=[1,2].$

2. (*Ознака Лейбніца* рівномірної збіжності функціонального ряду). Нехай послідовність функцій $\{a_n(x),\ x\in A\ :\ n\ge 1\}$ задовольняє наступні умови:

1) $\forall x\in A\ \forall n\ge 1\ :\ a_n(x)\ge 0;$
2) $\forall x\in A\ \forall n\ge 1\ :\ a_n(x)\ge a_{n+1}(x);$
3) $\sup\limits_{x\in A}|a_n(x)|\to 0,\ n\to\infty.$

Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n(x)$ збігається рівномірно на A.

3. Дослідити ряд на рівномірну збіжність на множині A

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n+x^2},\ A=\mathbf{R};$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n+x^2}},\ A=[0,+\infty);$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},\ A=[0,1];$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2},\ A=\mathbf{R}.$

4. Дослідити на неперервність задані функції на вказаних множинах, якщо:

1) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n(n+1)},\ x \in \mathbf{R};$ 3) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n n^x},\ A = \mathbf{R}.$

2) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n,\ A = (-1;1);$

5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$. Чи можна для цього перейти до границі під знаком суми?

6. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}]$ збігається нерівномірно на відрізку $[0;1]$, однак його сума є функція, неперервна на цьому відрізку.

7. Дослідити на диференційовність задані функції на вказаних множинах, якщо:

1) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3},\ A = \mathbf{R};$ 2) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x},\ A = \mathbf{R}.$

8. Довести, що *тета-функція* $\theta(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ визначена і нескінченно диференційовна при $x > 0$.

9. За допомогою теореми про почленне інтегрування функціонального ряду довести рівності:

1) $\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n,\ x \in (-1;1);$

2) $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n,\ x \in (-1;1).$

Д1. Довести, що якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то *ряд Діріхле* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^x}$ збігається рівномірно на $x \in [0;+\infty)$.

Д2. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається абсолютно і рівномірно на $[a,b]$. Чи обов'язково ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ збігається рівномірно на $[a,b]$?

Д3. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, члени якого є монотонними функціями на відрізку $[a,b]$, збігається абсолютно в кінцевих точках відрізка. Довести, що цей ряд збігається абсолютно і рівномірно на $[a,b]$.

Д4. Послідовності функцій $\{a_n(x), x \in A : n \geq 1\}$ і $\{b_n(x), x \in A : n \geq 1\}$ такі, що: 1) $\forall n \geq 1\ \forall x \in A\ :\ |a_n(x)| \leq b_n(x)$; 2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ збігається рівномірно на A.

Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ збігається рівномірно на A.

Д5. Чи можна почленно інтегрувати ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}})$ на відрізку $[0;1]$?

Б24

1. Довести, що ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+\sqrt{n}}$ збігається рівномірно на промені $[0,+\infty)$. Скільки членів ряду треба взяти, щоб його залишок на всьому промені $[0,+\infty)$ не перевищував $0,01$?

2. Довести, що ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ рівномірно збіжний на всій числовій прямій, а ряд з модулів його членів $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ хоча і збіжний на $\mathbf{R}$, але нерівномірно.

3. Дослідити на рівномірну збіжність ряд на множині A:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\cos x},\ A = \mathbf{R}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x},\ A = [0,2\pi]$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}},\ A = [-10,10]$;

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}},\ A = \mathbf{R}$.

4. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ рівномірно збігається на множині $[0,+\infty)$.

5. Визначити область існування функцій і дослідити їх на неперервність:

1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x+n^{-1}}{x^2+n^2}$; 3) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$;

2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$; 4) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^x}$.

6. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-(x-n)^2}$ рівномірно збігається на відрізку $[0;1]$ і його сума нескінченно диференційовна.

7. Виходячи з рівності $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2^{n-1}})=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}$, визначити суму $s_n(x)=\frac{x}{1+x}+\frac{2x^2}{1+x^2}+\frac{4x^4}{1+x^4}+...+\frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}$. Тоді знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}$.

8. Переконатися, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^n\pi x}{2^n}$ рівномірно збіжний на $\mathbf{R}$. Показати, що цей ряд не можна почленно диференціювати на жодному проміжку.

9. Нехай $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, $x\geq 0$. Довести, що $f\in C([0,+\infty))$, $f\in C^{\infty}((0,+\infty))$ і що $f'(0)$ не існує.

10. Показати, що послідовність $f_n(x)=\frac{1}{n}\operatorname{arctg} x^n$, $n\geq 1$, збігається рівномірно на інтервалі $(-\infty,+\infty)$, але $[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)]'_{x=1}\neq \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(1)$.

11. Показати, що послідовність $x^2+\frac{1}{n}\sin(x+\frac{\pi}{2})$, збігається рівномірно на інтервалі $(-\infty,+\infty)$, але $[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)]'\neq \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$.

12. Показати, що послідовність $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ збігається на відрізку $[0,1]$, але $\int\limits_0^1[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)]dx\neq \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx$.

13. Чи можна перейти до границі під знаком інтеграла у виразі $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}dx$?

ЗАНЯТТЯ 25
КОНТРОЛЬНА РОБОТА. ЕКСТРЕМУМИ. ЧИСЛОВІ І ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

1. Дослідити на локальний екстремум такі функції:
1) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_1x_2 + 4x_2^2 - 3x_2x_3 + 9x_3^2 - 4 + 2x_2$;
2) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2)e^{x_1^2 - 8x_1 + x_2^2}$.

2. Знайти найменше та найбільше значення функції $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$ на множині $\left\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_2 \le 1\right\}$.

3. Дослідити збіжність рядів: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n!)^2}{n^{2n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \sin \frac{1}{n}$.

4. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{n}$.

5. Дослідити рівномірну збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^4 e^{-nx^2}$ на $\mathbf{R}$.

РОЗВ'ЯЗОК

1. 1) Знайдемо частинні похідні першого порядку: $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 - x_2$; $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 2$; $\frac{\partial f}{\partial x_3} = -3x_2 + 18x_3$. Для визначення точок, підозрілих на екстремум, маємо систему: $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0; \\ -x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 2 = 0; \\ -3x_2 + 18x_3 = 0. \end{cases}$ Розв'язуючи її, отримаємо: $x_1 = -\frac{2}{29}$, $x_2 = -\frac{8}{29}$, $x_3 = -\frac{4}{87}$. Для перевірки, чи є ця точка екстремумом, знаходимо другі похідні: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -1$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 8$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = -3$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 18$.

Склавши матрицю з других похідних: $f'' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 18 \end{pmatrix}$, знаходимо $\triangle_1 = 4$; $\triangle_2 = 31$ $\triangle_3 = 522$. Оскільки $\triangle_1 > 0, \triangle_2 > 0, \triangle_3 > 0$, то точка $\left(-\frac{2}{29}, -\frac{8}{29}, -\frac{4}{87}\right)$ є точкою локального мінімума.

2) Знайдемо частинні похідні першого порядку:
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (2x_1 + (2x_1 - 8)(x_1^2 - x_2^2))e^{x_1^2 - 8x_1 + x_2^2}$;
$\frac{\partial f}{\partial x_2} = (-2x_2 + 2x_2(x_1^2 - x_2^2))e^{x_1^2 - 8x_1 + x_2^2}$.

Для визначення точок, підозрілих на екстремум, маємо систему:
$\begin{cases} 2x_1 + (2x_1 - 8)(x_1^2 - x_2^2) = 0; \\ -2x_2 + 2x_2(x_1^2 - x_2^2) = 0. \end{cases}$ Розв'язуючи її, розглянемо випадки:

1. $x_2 \neq 0$. Тоді $x_1^2 - x_2^2 = 1$, звідки $4x_1 - 8 = 0$. Отримаємо $x_1 = 2, x_2^2 = 3$. Отримаємо підозрілі на екстремум точки $(2, \sqrt{3}), (2, -\sqrt{3})$.

2. $x_2 = 0$. Тоді $2x_1 + 2x_1^3 - 8x_1^2 = 0$, звідки $x_1 = 2 \pm \sqrt{3}, x_1 = 0$. Отримаємо підозрілі на екстремум точки $(0, 2 + \sqrt{3}), (0, 2 - \sqrt{3}), (0, 0)$.

Для перевірки, чи є ця точка екстремумом, знаходимо другі похідні: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = (2x_1(2x_1 - 8) + (2x_1 - 8)^2(x_1^2 - x_2^2) + 2 + 2(x_1^2 - x_2^2) + 2x_1(2x_1 - 8))e^{x_1^2 - 8x_1 + x_2^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 2x_2(2x_1 - 8)(x_1^2 - x_2^2)e^{x_1^2 - 8x_1 + x_2^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = (-4x_2^2 + 4x_2^2(x_1^2 - x_2^2) - 2 + 2(x_1^2 - x_2^2) - 4x_2^2)e^{x_1^2 - 8x_1 + x_2^2}$. Складемо матрицю з других похідних для кожної точки, підозрілої на екстремум:

1. $f''(2, \pm\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} -12e^{-9} & \mp 8\sqrt{2}e^{-9} \\ \mp 8\sqrt{2}e^{-9} & -12e^{-9} \end{pmatrix}$, знаходимо $\triangle_1 < 0$; $\triangle_2 = 16e^{-18} > 0$. Точки $(2, \pm\sqrt{3})$ є точками локального максимума.

2. $f''(0, 2\pm\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} (-460 \mp 264\sqrt{3})e^{7\pm4\sqrt{3}} & (416 \pm 240\sqrt{3})e^{7\pm4\sqrt{3}} \\ (416 \pm 240\sqrt{3})e^{7\pm4\sqrt{3}} & (-390 \mp 224\sqrt{3})e^{7\pm4\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, знаходимо $\triangle_1 < 0$; $\triangle_2 > 0$. Точки $(0, 2 \pm \sqrt{3})$ є точками локального максимума.

3. $f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, знаходимо $\triangle_2 < 0$. Точка $(0, 0)$ не є точкою локального екстремума.

2. Для знаходження підозрілих на екстремум внутрішніх точок множини прирівнюємо до нуля частинні похідні функції f першого порядку: $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1^3 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2^3 = 0$. Отримали підозрілу точку $(0, 0)$ (перевіряємо, що вона належить множині!)

Далі розглядаємо частини границі заданої множини.

1. При $x_1^2 + x_2^2 = 1$ дослідимо функцію на умовний екстремум. Функція Лагранжа $L = x_1^4 + x_2^4 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 4)$. Розв'язуємо систему $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1^3 - 2\lambda x_1 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2^3 - 2\lambda x_2 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 = 4. \end{cases}$ Маємо $(0, \pm 2), (\pm 2, 0)$ при $\lambda = 8$, та

$(\pm\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\pm\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ при $\lambda = 4$. З цих точок належать потрібній множині $(\pm 2, 0), (\pm\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

2. При $x_2 = 1$ маємо $f(x_1, x_2) = 1 + x_1^4$, ця функція однієї змінної має локальний екстремум при $x_1 = 0$. Точка $(0, 1)$ належить множині.

Перевіряємо значення функції у всіх знайдених підозрілих на екстремум точках, а також у кутових точках $(\pm\sqrt{3}, 1)$.

$f(0,0) = 0,\ f(\pm 2, 0) = 16,\ f(\pm\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 8,\ f(0,1) = 1,$ $f(\pm\sqrt{3}, 1) = 10$.

Отже, найбільше значення 16, найменше 0.

3. а) Ряд знакосталий, бо $a_n = \ln\frac{n^2+1}{n^2} > 0,\ n \geq 1$. Застосуємо ознаку порівняння в формі еквівалентності. Оскільки $\ln(1+x) \sim x,\ x \to 0$, і $\frac{1}{n^2} \to 0,\ n \to \infty$, то $a_n = \ln\frac{n^2+1}{n^2} = \ln(1 + \frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n^2} = b_n,\ n \to \infty$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний, як узагальнений гармонічний ряд з показником $\alpha = 2 > 1$. Отже, за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний.

б) Ряд знакосталий, бо $a_n = \frac{6^n (n!)^2}{n^{2n}} > 0,\ n \geq 1$. Оскільки у виразі для a_n присутній факторіал, зручно застосувати ознаку Д'Аламбера. Маємо: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6^{n+1}((n+1)!)^2 n^{2n}}{6^n (n!)^2 (n+1)^{2(n+1)}} = 6(n+1)^2 \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2(n+1)}} = 6(\frac{n}{n+1})^{2n} = 6((1 + \frac{1}{n})^n)^{-2} \to 6e^{-2} = r,\ n \to \infty$. Значення $r = 6e^{-2} < 1$. Тому за ознакою Д'Аламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний.

в) Ряд знакосталий, бо $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)} \sin\frac{1}{n} > 0,\ n \geq 1$. Застосуємо спочатку ознаку порівняння в формі еквівалентності. Оскільки $\sin x \sim x,\ x \to 0,\ \frac{1}{n} \to 0,\ n \to \infty$, і $n \sim (n+1),\ n \to \infty$, то $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)} \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = b_n$. Збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ еквівалентна збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Цей ряд зручно дослідити за інтегральною ознакою Коші. Введемо функцію $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)},\ x \in [1, +\infty)$. Тоді $b_n = f(n),\ n \geq 1$, а функція f монотонно спадає на $[1, +\infty)$. Інтеграл $\int\limits_1^A f(x)dx = \int\limits_1^A \frac{1}{\ln(x+1)} d(\ln(x+1)) = \ln(\ln(x+1))|_{x=1}^{x=A} = \ln\ln(A+1) - \ln\ln 2 \to +\infty,\ A \to +\infty$. Тому за інтегральною ознакою ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ розбіжний. За ознакою порівняння є розбіжним також ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

4. Ряд знакозмінний: $a_n = \frac{(-1)^n \ln^2 n}{n} < 0$ при непарних n і $a_n > 0$ при парних n. Застосуємо ознаку Лейбніца. $a_n = (-1)^n c_n$ і $c_n = \frac{\ln^2 n}{n} = \left(\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \to 0, \ n \to \infty$. Доведемо, що послідовність $\{c_n : n \geq 1\}$ монотонна, починаючи з деякого номера. Для цього розглянемо функцію $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}, \ x \in [1, +\infty)$. Маємо: $f'(x) = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2} < 0, \ x > e^2$. Отже, функція f спадає на проміжку $[e^2, +\infty)$. Оскільки $c_n = f(n)$, то послідовність монотонна, починаючи з деякого номера n_0 $(n_0 = [e^2] + 1 = 8)$. За ознакою Лейбніца ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ збіжний. Перевіримо абсолютну збіжність ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$. До ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n|$, який є знакосталим, застосуємо ознаку порівняння в формі нерівності. Маємо: $|a_n| = \frac{\ln^2 n}{n} \geq \frac{1}{n}, \ n \geq 3$. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається, як гармонічний, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n|$ також розбіжний. Відповідь: ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ збігається умовно.

5. Загальний член ряду $a_n(x) = x^4 e^{-nx^2}, \ x \in \mathbf{R}$. Застосуємо ознаку Вейєрштрасса. Для цього знайдемо найбільше значення функції a_n на $\mathbf{R}$. Маємо: $a_n'(x) = (4x^3 - 2nx^5)e^{-nx^2} = 0$ при $x = 0, \ x = \pm\frac{2}{\sqrt{n}}$. $a_n(0) = 0, \ a_n(\pm\frac{2}{\sqrt{n}}) = \frac{4}{n^2}e^{-2}$. Тому $\max\limits_{x \in \mathbf{R}} |a_n(x)| = a_n(\pm\frac{2}{\sqrt{n}}) = \frac{2}{n^2}e^{-2} = b_n, \ n \geq 1$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається, як узагальнений гармонічний ряд з показником $\alpha = 2 > 1$. Тому за ознакою Вейєрштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ збігається рівномірно на $\mathbf{R}$.

ПРОГРАМА КУРСУ "МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ" ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ "МЕХАНІКА". II КУРС, I СЕМЕСТР

Лекцій – 54 години
Практичних занять – 54 години

МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

Метричний простір, означення. Приклади метричних просторів. Властивості відстані. Границя послідовності елементів метричного простору та її елементарні властивості. Збіжність у конкретних просторах. Означення: відкритої та замкненої куль, околу, внутрішньої та граничної точок множини, обмеженої множини. Відкриті та замкнені множини та їх властивості. Структура відкритих множин на прямій. Скрізь щільні множини. Сепарабельність. Фундаментальні послідовності. Повні метричні простори. Приклади. Теорема Кантора про вкладені кулі.

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Границя функції в точці. Два означення та властивості у випадку дійсної функції. Повторні границі. Подвійні границі і їх зв'язок з повторними. Неперервні функції: означення, елементарні властивості. Неперервність складної функції. Приклади неперервних функцій. Теорема про характеризацію неперервності. Компактні множини. Властивості компактних множин. Властивості неперервних функцій на компактах. Принцип стискаючих відображень. Наслідок. Застосування. Частинні похідні та їх властивості. Похідна за напрямком. Градієнт, основні властивості. Диференційовність. Диференціал. Достатня умова диференційовності. Властивості диференційовних функцій. Похідні другого порядку. Теорема про мішані похідні. Частинні похідні та диференціали старших порядків. Формула Тейлора. Локальний екстремум. Необхідна умова; випадок функції двох змінних. Достатня умова. Відображення, неперервність. Диференційовність. Достатня умова диференційовності. Матриця Якобі та якобіан. Правило диференціювання складної функції та наслідок для якобіанів. Теорема про обернену функцію. Існування та властивості неявної функції. Умовний екстремум. Необхідна умова. Достатня умова.

ЧИСЛОВІ РЯДИ І ДОБУТКИ

Числові ряди. Часткові суми, сума ряду, збіжні і розбіжні ряди, необхідна умова збіжності. Приклади, зокрема, гармонічний ряд, геометричний ряд. Елементарні властивості збіжних рядів. Критерій Коші збіжності числового ряду. Умова збіжності ряду з невід'ємними членами. Ознаки порівняння. Приклади. Ознаки збіжності рядів: Даламбера, Коші, логарифмічна, інтегральна Маклорена - Коші. Приклади застосування. Приклад знакочергувального ряду і його властивості. Абсолютна і умовна збіжність. Збіжність абсолютно збіжного ряду і нерівність для його суми. Умовно збіжні ряди. Ознака Лейбніца. Ознаки Діріхле і Абеля. Теорема Рімана. Множення рядів. Теорема про добуток рядів. Нескінченні добутки. Основні поняття. Необхідна і достатня умова збіжності. Дві достатні умови. Абсолютна збіжність.

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Множина збіжності. Поточкова і рівномірна збіжність послідовності функцій. Приклади. Критерій Коші рівномірної збіжності. Рівномірна збіжність ряду. Приклади. Ознака Вейєрштрасса. Ознаки Діріхле і Абеля рівномірної збіжності і приклади їх застосування. Інтегровність границі рівномірно збіжної послідовності інтегровних функцій. Неперервність границі рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій. Теореми про неперервність суми, почленне інтегрування і диференціювання ряду, приклади застосування.