XV Всеукраїнська заочна математична олімпіада журналу "У світі математики"

Цього року було проведено п'ятнадцяту Всеукраїнську заочну математичну олімпіаду журналу "У світі математики". В ній міг взяти участь кожен учень 5-12 класів. Переможцями та призерами олімпіади стали:

I місце

Колянко Михайло (УФМЛ КНУ, 10 кл.)
Ребрик Юрій (м. Сімферопіль, 8 кл.)
Яриш Олександр (м. Київ, 10 кл.)
Здомський Іван (с. Чорний Потік Івано-Франківської обл., 11 кл.)

II місце

Федянович Олег (м. Кривий Ріг, 10 кл.)
Стрельников Владислав (м. Запоріжжя, 10 кл.)
Хівренко Герман (м. Київ, 7 кл.)

III місце

Самченко Дмитро (м. Запоріжжя, 8 кл.)
Мамулат Анатолій (с. Йосипівка Одеської обл., 10 кл.)
Нестеренко Дмитро (м. Одеса, 8 кл.)

Вітаємо всіх переможців та призерів олімпіади з їх досягненнями, які для когось були першими, і, сподіваємось, не останніми! Тепер нагадаємо умови та наведемо розв'язки задач олімпіади.

1. Мама дала Дмитрику гроші на 100 олівців. Виявилось, що на честь 15-річчя магазин проводить акцію: при покупці 15 олівців або повертає ціну 4 олівців, або дарує ще 5 олівців. Яку найбільшу кількість олівців може придбати Дмитрик?

Розв'язок. Зрозуміло, що Дмитрик може спочатку декілька разів купити 15 олівців та забрати гроші за 4 олівця (назвемо це *операцією А*), потім якомога більшу кількість разів купити 15 олівців та взяти ще 5 олівців (назвемо це *операцією Б*) і нарешті купити ще декілька олівців на залишок грошей. *Операцію А* можна здійснити щонайбільше 8 разів, бо на неї витрачається ціна 11 олівців, а тому після 8 її виконань залишаться гроші лише на 12 олівців. Далі складемо таблицю

Операцій А	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Операцій Б	6	5	5	4	3	3	2	1	0
Олівців за залишок грошей	10	14	3	7	11	0	4	8	12
Усього олівців	130	129	133	132	131	135	134	133	132

Отже, Дмитрик має купити 75 олівців та забрати ціну 20 олівців. Тоді йому вистачить грошей ще на 45 олівців та 15 олівців йому подарують. Усього він отримає 135 олівців.

Відповідь: 135 олівців.

2. Знайти хоча б одну трійку різних натуральних чисел x, y, z для яких $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2011}$.

Розв'язок. Для кожного натурального n маємо $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$ та $\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n(2n+1)}$, звідки $\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n(2n-1)} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$. При $n = 2010$ це означає, що

$$\frac{1}{4019} - \frac{1}{4019 \cdot 4020} + \frac{1}{4020} = \frac{1}{2010}.$$

Відповідь: наприклад, $x = 4019$, $y = 4019 \cdot 4020$, $z = 4020$.

Зауваження. Умову задовольняє багато інших трійок натуральних чисел x, y, z. Наприклад, $\frac{1}{3 \cdot 1005} - \frac{1}{12 \cdot 1005} + \frac{1}{4 \cdot 1005} = \frac{1}{2010}$, $\frac{1}{1006} - \frac{1}{2010} + \frac{1}{1005 \cdot 1006} = \frac{1}{2010}$, тощо.

3. У скількох 10-цифрових чисел сума будь-яких трьох сусідніх цифр є парною?

Розв'язок. Усі шукані числа можна отримати так: перші дві цифри обрати довільно, а кожну наступну цифру — так, щоб сума її та двох попередніх цифр була парною. Тоді маємо 9 варіантів для першої цифри, 10 — для другої та 5 — для кожної з восьми наступних, звідки і випливає відповідь.

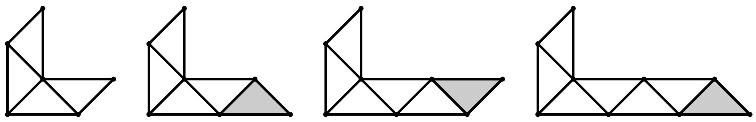
Відповідь: $9 \cdot 10 \cdot 5^8$ чисел.

4. Одного разу равлик заповз на вершину бамбука, який росте так, що усі точки його стебла піднімаються вгору з однаковою швидкістю. На це йому знадобилося 4 години. Потім равлик відпочив годину на вершині та спустився вниз за 5 годин. У скільки разів швидкість равлика більша за швидкість бамбука, якщо обидві швидкості є постійними?

Розв'язок. Нехай r та b — швидкості равлика та бамбука. Тоді равлик рухався вгору 4 години зі швидкістю $r + b$ та годину зі швидкістю b, а вниз — 5 годин зі швидкістю $r - b$. Отже, $4(r + b) + b = 5(r - b)$, звідки $r = 10b$.

Відповідь: у 10 разів.

5. Довести, що при кожному $n \geq 4$ існує шестикутник, який можна розрізати на n однакових трикутників.



Розв'язок. Шукані шестикутники для $n = 4, 5, 6, 7$ зображено на рисунку. Для збільшення кількості трикутників розбиття достатньо і надалі додавати по одному трикутнику.

6. Таблиця містить 51 рядок та 99 стовпчиків. Том Сойєр заповнює 50 перших рядків таблиці числами від 1 до 99 таким чином, аби числа у жодному рядку не повторювалися. Чи обов'язково після цього Гекльберрі Фінн зможе заповнити числами від 1 до 99 останній рядок таблиці так, аби числа у ньому також не повторювалися та у кожному стовпчику останнє число відрізнялось від усіх попередніх?

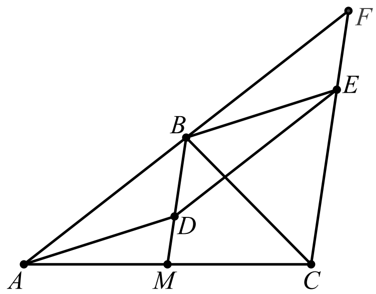
Розв'язок. Нехай Том Сойєр заповнює рядки таблиці таким чином:

1	2	3	...	49	50	51	52	...	99
2	3	4	...	50	1	51	52	...	99
3	4	5	...	1	2	51	52	...	99
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
49	50	1	...	47	48	51	52	...	99
50	1	2	...	48	49	51	52	...	99

Тоді у кожному з перших 50 стовпчиків вже зустрічаються всі числа від 1 до 50. Оскільки Гекльберрі Фінн не може помістити всі ці 50 чисел у останні 49 стовпчиків, то у деякому стовпчику його число співпаде з одним з чисел Тома.

Відповідь: ні, не обов'язково.

7. На медіані BM трикутника ABC відмітили довільну точку D. Про точку E відомо, що $DE \parallel AB$ та $CE \parallel BM$. Довести, що $BE = AD$.



Розв'язок. Нехай F — точка перетину прямих AB та CE. Тоді $BFED$ — паралелограм, а BM — середня лінія трикутника ACF. Звідси $AB = BF = ED$. Але $AB \parallel DE$, тому $ABED$ — паралелограм, а отже $BE = AD$.

8. Для довільних $a, b, c, d > 0$ довести нерівність

$$\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} \geq \frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d}.$$

Розв'язок. Після домноження обох частин нерівності на $(a+b+c+d)(a+b)(c+d) > 0$ та зведення подібних нерівність, яку слід довести, набуває вигляду $a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0$, тобто $(ad - bc)^2 \geq 0$.

9. У класі 29 учнів. Деякі трійки учнів ходили у кіно, причому жодні два учні не відвідали кіно разом більше одного разу. Довести, що можна вибрати 8 учнів таким чином, що жодні троє з них не були у кіно разом.

Розв'язок. Розглянемо найбільшу групу учнів, жодні троє з яких не були у кіно разом. Припустимо, що вона складається з $k \leq 7$ учнів (інакше все доведено). Це означає, що кожен з решти $29 - k$ учнів був у кіно з деякою парою учнів з групи (інакше його можна було б додати до групи), причому різним учням відповідають різні пари (інакше виявилось би, що деяка пара учнів відвідала кіно у складі двох різних трійок). Пару учнів можна вибрати $\frac{k(k-1)}{2}$ способами, тому $\frac{k(k-1)}{2} \geq 29 - k$, тобто $k^2 + k \geq 58$. Але при $k \leq 7$ маємо $k^2 + k \leq 49 + 7 = 56$, суперечність.

10. Розв'язати систему рівнянь

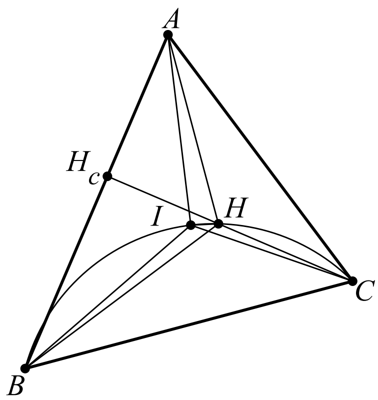
$$\begin{cases} x^3 + 3x(y-z)^2 = 4, \\ y^3 + 3y(z-x)^2 = 32, \\ z^3 + 3z(x-y)^2 = 36. \end{cases}$$

Розв'язок. Додамо перші два рівняння системи та віднімемо третє. Після тотожних перетворень дістанемо $(x+y-z)^3 = 0$, звідки $z = x+y$. Підставляючи це значення у перші два рівняння системи, дістанемо $4x^3 = 4$, $4y^3 = 42$, звідки $x = 1$, $y = 2$ та $z = x + y = 3$. Залишається зробити перевірку.

Відповідь: $x = 1, y = 2, z = 3$.

11. Нехай ABC — гострокутний трикутник, у якому $\angle BAC = 60^\circ$ та $AB > AC$. Позначимо H та I точки перетину висот та бісектрис цього трикутника відповідно. Знайти відношення $\angle ABC : \angle AHI$.

Розв'язок. Оскільки $\angle C > \angle A = 60^\circ > \angle B$, то $AC < BC < AB$. Тому точка I буде знаходитись у трикутнику BHH_c, де CH_c — висота трикутника ABC. За відомими формулами



$$\angle BIC = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\angle A = 120^\circ, \angle BHC = 180^\circ - \angle A = 120^\circ,$$

тому чотирикутник $BIHC$ вписаний. Нехай $\angle C = \gamma$. Тоді

$$\angle AHI = \angle AHB - \angle IHB = \angle AHB - \angle ICB =$$

$$= 180^\circ - \gamma - \tfrac{1}{2}\gamma = 180^\circ - \tfrac{3}{2}\gamma = \tfrac{3}{2}(120^\circ - \gamma) = \tfrac{3}{2}\angle B.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

12. Многочлен $P(x) = x^{2010} \pm x^{2009} \pm \ldots \pm x \pm 1$ не має жодного дійсного кореня. Яка найбільша кількість коефіцієнтів цього многочлена може дорівнювати -1?

Розв'язок. Многочлен $P(x) = x^{2010} - x^{2009} + x^{2008} - x^{2007} + \ldots + x^2 - x + 1$ з 1005 від'ємними коефіцієнтами не має дійсних коренів. Справді, добуток $(x+1)P(x) = x^{2011} + 1$ має єдиний дійсний корінь $x = -1$, який очевидно не є коренем многочлена $P(x)$. Припустимо тепер, що многочлен $P(x)$ має щонайменше 1006 від'ємних та відповідно щонайбільше 1005 додатних коефіцієнтів. Тоді сума коефіцієнтів цього многочлена дорівнює $P(1) < 0$, а $P(2) \geq 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} - \ldots - 2 - 1 = 1 > 0$. Отже, многочлен $P(x)$ має дійсний корінь на інтервалі $(1, 2)$, суперечність.

Відповідь: 1005.