

## **XVII Всеукраїнська заочна математична олімпіада журналу “У світі математики”**

Цього року було проведено сімнадцяту Всеукраїнську заочну математичну олімпіаду журналу “У світі математики”. В ній міг взяти участь кожен учень 5-12 класів. Переможцями та призерами олімпіади стали:

### **I місце**

Шлапак Ярина (м. Київ, 6 клас)  
Абкеримов Е. (с. Танкове, АРК, 7 клас)  
Малахов Олександр (м. Запоріжжя, 10 клас)  
Самченко Дмитро (м. Запоріжжя, 10 клас)

### **II місце**

Житарюк Юлія (с. Марфівка, АРК, 8 клас)  
Селіханович Даніїл (м. Одеса, 9 клас)  
Алексеева Вероніка (с. Марфівка, АРК, 10 клас)  
Іванова Віра (м. Дніпропетровськ, 10 клас)  
Юрченко Богдан (м. Кобеляки, Полтавська обл., 11 клас)

### **III місце**

Савченко Антон (м. Харків, 6 клас)  
Білова Юлія (м. Дніпропетровськ, 7 клас)  
Кльоз Віталій (м. Кобеляки, Полтавська обл., 7 клас)  
Афанасьєва Олеся (м. Дніпропетровськ, 8 клас)  
Мисковець Ольга (м. Луцьк, 9 клас)  
Пожидаєв Максим (м. Одеса, 9 клас)  
Кузьмищев Максим (м. Слов'янськ, Донецька обл., 10 клас)  
Волошин Дмитро (м. Кривий Ріг, Дніпропетровська обл., 11 клас)

Вітаємо всіх переможців та призерів олімпіади з їх досягненнями, які для когось були першими, і, сподіваємось, не останніми! Тепер нагадаємо умови та наведемо розв'язки задач олімпіади.

**1.** У книзі “Як здобувати друзів та почуватися у своїй тарілці” написано:

*Замініть у слові **інопланетянин** однакові букви на однакові цифри, а різні — на різні. Якщо отримане число виявиться простим, то ви обов'язково його зустрінете!*

Чи варто сподіватися на зустріч з прибульцем?

*Розв'язок.* У слові **інопланетянин** буква **н** зустрічається 4 рази, а інші 9 букв по одному разу. Тому якщо замінити різні букви різними цифрами, то будуть використані всі 10 цифр по одному разу та ще тричі — цифра, яка відповідає букві **н**. Але сума усіх цифр від 0 до 9 дорівнює 45, тобто ділиться на 3. Отже, і сума цифр отриманого

числа буде ділитися на 3. За ознакою подільності отримане тринадцятицифрове число буде ділитися на 3, а тому не може бути простим.

*Відповідь:* не варто.

**2.** Знайти найменше натуральне число, сума остач від ділення якого на 5 та на 7 дорівнює 9.

*Розв'язок.* Остача від ділення на 5 не більша за 4, а остача від ділення на 7 не більша за 6. Тому сума цих остач може дорівнювати 9 лише у двох випадках: коли число дає остачу 4 при діленні на 5 та остачу 5 при діленні на 7 або дає остачу 3 при діленні на 5 та остачу 6 при діленні на 7. Остачу 4 при діленні на 5 дають числа 4, 9, 14, 19, ..., серед них остача 5 при діленні на 7 вперше зустрічається у числа 19. Аналогічно остачу 3 при діленні на 5 дають числа 3, 8, 13, 18, ..., серед них остача 6 при діленні на 7 вперше зустрічається у числа 13.

*Відповідь:* 13.

**3.** Чи можна розрізати квадрат на трикутник, чотирикутник, п'ятикутник та шестикутник (не обов'язково опуклі) так, щоб жоден з цих многокутників не мав прямих кутів?

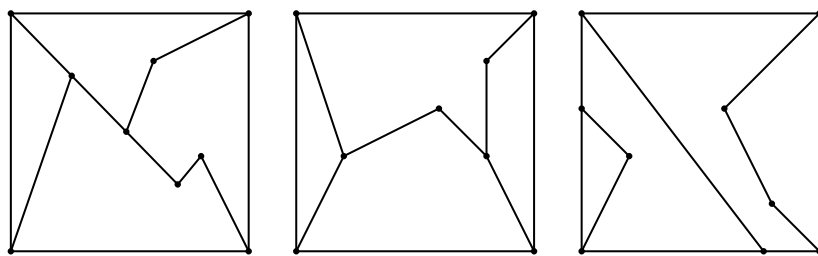


Рис. 1.

*Розв'язок.* Три приклади потрібного розрізання зображено на рис. 1.

*Відповідь:* так, можна.

**4.** У вузлах сітки  $3 \times 100$  сидять жуки (у кожному рядку 100 жуків та у кожному стовчику 3 жуки). Скільки можна провести прямих, на яких сидять рівно 3 жуки?

*Розв'язок.* Зрозуміло, що три жуки на прямій мають сидіти по одному в усіх трьох рядках. Але між двома жуками, які сидять у першому та третьому рядках, буде ще один жук тоді та лише тоді, коли ці жуки сидять у стовпчиках з номерами однакової парності. Тому через кожного жука у першому рядку можна провести 50 прямих, а всього  $100 \cdot 50 = 5000$  прямих.

*Відповідь:* 5000.

**5.** Декілька мавп кидаються одна в одну гранатами. Відомо, що у кожну мавпу влучило вдвічі більше або вдвічі менше гранатів, ніж кинула вона сама, а усього було кинуто 50 гранатів. Чи усі гранати влучили у ціль?

*Розв'язок.* Для кожної мавпи запишемо два числа — кількість гранатів, які кинула вона, та кількість гранатів, які влучили у неї. Одне з цих чисел є вдвічі більшим за інше, тому їх сума ділиться на 3. Таким чином, сума всіх записаних чисел теж буде ділитися на 3. Але якщо усі гранати влучили у ціль, то кожен з 50 гранатів враховано двічі, тобто сума всіх записаних чисел дорівнює 100, суперечність.

*Відповідь:* не всі.

6. Про додатні числа  $a, b, c$  відомо, що

$$4abc(a+b+c) = (a+b)^2(a+c)^2.$$

Довести, що  $a+b+c = \frac{bc}{a}$ .

*Розв'язок.* Позначимо  $a(a+b+c) = x$ ,  $bc = y$ . Тоді

$$abc(a+b+c) = xy, \quad (a+b)(a+c) = a^2 + ab + ac + bc = x + y$$

та рівність з умови задачі набуває вигляду  $4xy = (x+y)^2$ , звідки  $(x-y)^2 = 0$ , тобто  $x = y$ , або  $a+b+c = \frac{bc}{a}$ .

7. Нехай  $O$  та  $H$  — центр описаного кола та точка перетину висот гострокутного трикутника  $ABC$ ,  $D$  — основа висоти, проведеної до  $BC$ , а  $E$  — середина  $AO$ . Довести, що описане коло трикутника  $ADE$  проходить через середину відрізка  $OH$ .

*Розв'язок.* Нехай  $F$  — середина  $OH$ , а  $G$  — точка, симетрична до  $H$  відносно  $BC$  (рис. 2). Неважко обчислити, що  $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$ , а тому  $\angle BGC = \angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$ , тобто точка  $G$  належить описаному колу трикутника  $ABC$ . Далі,  $EF$  та  $FD$  — середні лінії трикутників  $AOH$  та  $OHG$ , звідки  $EF \parallel AD$  та  $DF = \frac{1}{2}GO = \frac{1}{2}AO = AE$ . Отже,  $ADEF$  — рівнобічна трапеція, а тому описане коло трикутника  $ADE$  проходить через точку  $F$ .

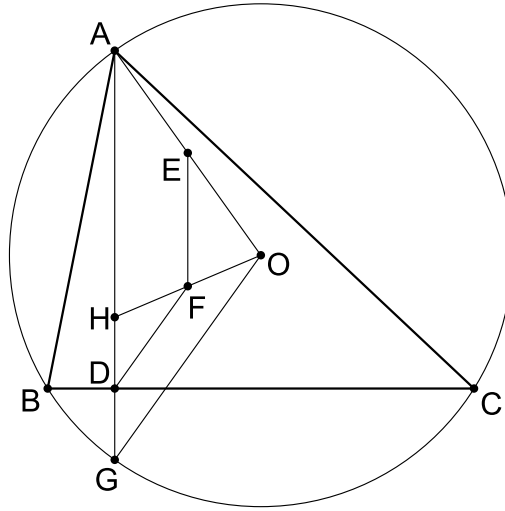


Рис. 2.

8. Чи існують такі натуральні числа  $a$  та  $b$ , що при кожному  $n \geq 1$  число  $2^n a + b$  є повним квадратом?

*Розв'язок.* Припустимо, що шукані числа  $a$  та  $b$  існують, та нехай  $2^{2n}a + b = x_n^2$ ,  $n \geq 1$ . Тоді  $4x_n^2 - x_{n+1}^2 = (2x_n + x_{n+1})(2x_n - x_{n+1}) = 3b$ , а отже число  $2x_n + x_{n+1}$  має бути дільником  $3b$  при кожному  $n \geq 1$ . Проте при достатньо великих  $n$  маємо  $2^{2n}a + b > b^2$ , а тому  $x_n > b$  та  $2x_n + x_{n+1} > 3x_n > 3b$ , суперечність.

*Відповідь:* не існують.

9. Є 360 кульок 18 кольорів (по 20 кульок кожного кольору). Перший гравець бере по одній кульці та дає другому, а другий кладе її на вільну клітинку дошки  $9 \times 9$ .

Якщо в деякому рядку чи стовпчику дошки опиняться п'ять кульок одного кольору поспіль, то їх знімають з дошки та кладуть у коробку. Перший гравець виграє, якщо дошку буде повністю заповнено кульками, а другий — якщо всі кульки опиняться у коробці. Чи має хтось з гравців виграшну стратегію? Якщо має, то хто?

*Розв'язок.* Покажемо, яким чином другий гравець може забезпечити собі перемогу. Нехай він розіб'є дошку на 18 прямокутників розміру  $1 \times 4$  та один прямокутник  $9 \times 1$  як показано на рис. 3. Далі він буде збирати у кожному з прямокутників кульки певного кольору. Коли деякий прямокутник  $1 \times 4$  буде повністю заповнено, він зможе покласти наступну кульку цього кольору у сусідню з даним прямокутником клітинку прямокутника  $9 \times 1$  та зняти усі п'ять кульок з дошки. Оскільки кількість кульок кожного кольору ділиться на 5, то рано чи пізно всі кульки опиняться у коробці та другий гравець виграє.

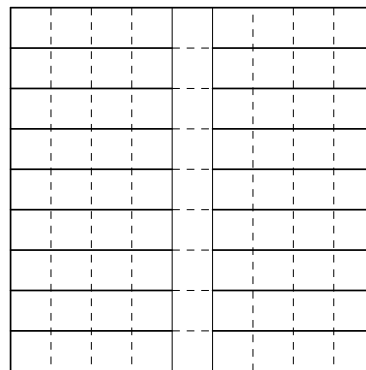


Рис. 3.

*Відповідь:* виграшну стратегію має другий гравець.

**10.** Діагоналі  $AC$  та  $BD$  вписаного чотирикутника  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$ . Відомо, що  $\angle BAD = 60^\circ$  та  $AO = 3OC$ . Довести, що сума деяких двох сторін чотирикутника дорівнює сумі двох інших сторін.

*Розв'язок.* Оскільки чотирикутник  $ABCD$  є вписаним, то  $\angle BCD = 120^\circ$ . За теоремою косинусів з трикутників  $ABD$  та  $CBD$  знаходимо

$$AB^2 + AD^2 - BD^2 = 2AB \cdot AD \cos \angle BAD = AB \cdot AD,$$

$$CB^2 + CD^2 - BD^2 = 2CB \cdot CD \cos \angle BCD = -CB \cdot CD.$$

Порівнюючи площі трикутників  $ABD$  та  $CBD$ , які мають спільну основу  $BD$ , дістаємо, що

$$\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AO}{OC} = 3 = \frac{AD \cdot AD \sin \angle BAD}{CB \cdot CD \sin \angle BCD} = \frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} (AB - DA)^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD = BD^2 - AB \cdot AD = \\ &= BD^2 - 3CB \cdot CD = CB^2 + CD^2 - 2CB \cdot CD = (BC - CD)^2, \end{aligned}$$

а отже  $AB + CD = AD + BC$  або  $AB + BC = AD + CD$  (з рис. 4 зрозуміло, що обидва ці випадки є можливими).

**11.** Нехай  $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$  та

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = 4.$$

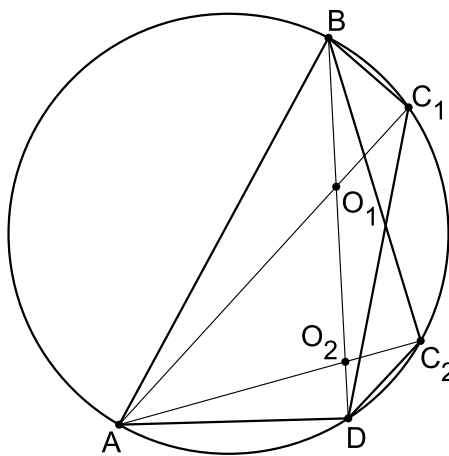


Рис. 4.

Знайти найменше можливе значення виразу

$$a_1 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^3}{3} + \frac{a_4^4}{4}.$$

*Розв'язок.* За нерівністю Коші

$$4 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} \geq 4 \sqrt[4]{\frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4}},$$

звідки  $a_1 a_2 a_3 a_4 \geq 1$ . Застосовуючи ще раз нерівність Коші до 12 чисел  $a_1$ , 6 чисел  $a_2^2$ , 4 чисел  $a_3^3$  та 3 чисел  $a_4^4$ , дістанемо

$$a_1 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^3}{3} + \frac{a_4^4}{4} = \frac{1}{12} (12a_1 + 6a_2^2 + 4a_3^3 + 3a_4^4) \geq \frac{25}{12} \sqrt[25]{(a_1 a_2 a_3 a_4)^{12}} \geq \frac{25}{12}.$$

Залишилось зауважити, що значення  $\frac{25}{12}$  досягається при  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ .

*Відповідь:*  $\frac{25}{12}$ .

**12.** Послідовність  $x_1, x_2, x_3, \dots$  визначено умовами

$$x_1 = a, \quad x_2 = b \quad \text{та} \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad n \geq 1.$$

Чи існують такі дійсні числа  $a$  та  $b$ , при яких знайдуться принаймні 2013 чисел, кожне з яких зустрічається у послідовності  $x_1, x_2, x_3, \dots$  більше одного разу?

*Розв'язок.* Розглянемо послідовність  $\dots, F_{-3}, F_{-2}, F_{-1}, F_0, F_1, F_2, F_3, \dots$ , визначену умовами  $F_1 = F_2 = 1$  та  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Обчислимо декілька членів цієї послідовності:

|       |         |      |      |      |      |     |     |     |     |     |         |
|-------|---------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|---------|
| $n$   | $\dots$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $\dots$ |
| $F_n$ | $\dots$ | $-3$ | $2$  | $-1$ | $1$  | $0$ | $1$ | $1$ | $2$ | $3$ | $\dots$ |

Оскільки при  $n \geq 1$  маємо  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  та  $F_{-n-2} = -F_{-n-1} + F_{-n}$ , то індукцією за  $n$  неважко встановити, що  $F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n$ ,  $n \geq 1$ . Зокрема  $F_{-1} = F_1$ ,  $F_{-3} = F_3$ ,  $F_{-5} = F_5$ ,  $F_{-7} = F_7$ ,  $\dots$

Тепер покладемо  $a = F_{-4999}$  та  $b = F_{-4998}$ . Тоді  $x_n = F_{n-5000}$ ,  $n \geq 1$ , а тому у послідовності  $x_1, x_2, x_3, \dots$  більше одного разу зустрічаються такі 2500 чисел:

$$x_1 = x_{9999} = F_{4999}, \quad x_3 = x_{9997} = F_{4997}, \quad x_5 = x_{9995} = F_{4995}, \quad \dots, \quad x_{4999} = x_{5001} = F_1.$$

*Відповідь:* існують.