

## XVII Всеукраїнська заочна математична олімпіада журналу “У світі математики”

Олімпіаду проводять журнал “У світі математики”, газета “Математика”, журнал “Математика в школі”, Українське математичне товариство та Мала Академія Наук. В олімпіаді може взяти участь кожен учень 5 – 12 класів.

Наполегливо радимо потренуватись та випробувати свої здібності всім претендентам на участь в обласних та Всеукраїнській олімпіадах, а також відбіркових змаганнях на Міжнародну математичну олімпіаду.

Одинадятикласники - переможці олімпіади будуть запрошені на очний тур вступної олімпіади механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Розв'язання задач слід надсилати до 25 лютого 2013 року (за поштовим штемпелем) на адресу:

01601 МСП, Київ,  
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка  
механіко-математичний факультет  
кафедра теорії ймовірностей  
“Олімпіада 5-12”

### Умови задач

1. У книзі “Як здобувати друзів та почуватися у своїй тарілці” написано:

*Замініть у слові *інопланетянин* однакові букви на однакові цифри, а різні — на різні. Якщо отримане число виявиться простим, то ви обов'язково його зустрінете!*

Чи варто сподіватися на зустріч з прибульцем?

2. Знайти найменше натуральне число, сума остач від ділення якого на 5 та на 7 дорівнює 9.

3. Чи можна розрізати квадрат на трикутник, чотирикутник, п'ятикутник та шестикутник (не обов'язково опуклі) так, щоб жоден з цих багатокутників не мав прямих кутів?

4. У вузлах сітки  $3 \times 100$  сидять жуки (у кожному рядку 100 жуків та у кожному стовчику 3 жуки). Скільки можна провести прямих, на яких сидять рівно 3 жуки?

5. Декілька мавп кидаються одна в одну гранатами. Відомо, що у кожну мавпу влучило вдвічі більше або вдвічі менше гранатів, ніж кинула вона сама, а усього було кинуто 50 гранатів. Чи усі гранати влучили у ціль?



6. Про додатні числа  $a, b, c$  відомо, що

$$4abc(a + b + c) = (a + b)^2(a + c)^2.$$

Довести, що  $a + b + c = \frac{bc}{a}$ .

7. Нехай  $O$  та  $H$  — центр описаного кола та точка перетину висот гострокутного трикутника  $ABC$ ,  $D$  — основа висоти, проведеної до  $BC$ , а  $E$  — середина  $AO$ . Довести, що описане коло трикутника  $ADE$  проходить через середину відрізка  $OH$ .

8. Чи існують такі натуральні числа  $a$  та  $b$ , що при кожному  $n \geq 1$  число  $2^n a + b$  є повним квадратом?

9. Є 360 кульок 18 кольорів (по 20 кульок кожного кольору). Перший гравець бере по одній кульці та дає другому, а другий кладе її на вільну клітинку дошки  $9 \times 9$ . Якщо в деякому рядку чи стовпчику дошки опиняються п'ять кульок одного кольору поспіль, то їх знімають з дошки та кладуть у коробку. Перший гравець виграє, якщо дошку буде повністю заповнено кульками, а другий — якщо всі кульки опиняться у коробці. Чи має хтось з гравців вигравшу стратегію? Якщо має, то хто?

10. Діагоналі  $AC$  та  $BD$  вписаного чотирикутника  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$ . Відомо, що  $\angle BAD = 60^\circ$  та  $AO = 3OC$ . Довести, що сума деяких двох сторін чотирикутника дорівнює сумі двох інших сторін.

11. Нехай  $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$  та

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = 4.$$

Знайти найменше можливе значення виразу

$$a_1 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^3}{3} + \frac{a_4^4}{4}.$$

12. Послідовність  $x_1, x_2, x_3, \dots$  визначено умовами

$$x_1 = a, \quad x_2 = b \quad \text{та} \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad n \geq 1.$$

Чи існують такі дійсні числа  $a$  та  $b$ , при яких знайдуться принаймні 2013 чисел, кожне з яких зустрічається у послідовності  $x_1, x_2, x_3, \dots$  більше одного разу?