КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З

ТЕОРІЇ МІРИ ТА ІНТЕГРАЛА

для студентів спеціальностей
"математика" і "статистика"
механіко–математичного факультету

Видавничо–поліграфічний центр
"Київський університет"
2003

Завдання до практичних занять з теорії міри та інтеграла для студентів спеціальностей "математика" і "статистика" механіко–математичного факультету / Укладачі А. Я. Дороговцев, С. Д. Івасишен, О. Ю. Константинов, О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, О. Н. Нестеренко, Т. О. Петрова, А. В. Чайковський. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2003. – 89 с.

Укладачі: Дороговцев Анатолій Якович, доктор фіз.-мат. наук, професор;
Івасишен Степан Дмитрович, доктор фіз.-мат. наук, професор;
Константинов Олексій Юрійович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент;
Кукуш Олександр Георгійович, доктор фіз.-мат. наук, професор (відповідальний за випуск);
Курченко Олександр Олексійович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент;
Нестеренко Олексій Никифорович;
Петрова Тамара Олександрівна, кандидат фіз.-мат. наук;
Чайковський Андрій Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук.

Рецензенти:
В. В. Булдигін, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Ю. В. Богданський, доктор фіз.-мат. наук, професор.

Затверджено Вченою Радою
механіко–математичного факультету
21 жовтня 2002 року, протокол №2

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Цей збірник завдань для практичних занять з курсу "Теорія міри та інтеграла" є другим виданням методичного посібника, розробленого викладачами кафедри математичного аналізу Київського національного університету імені Тараса Шевченка і виданого в 1991 році. Посібник виявився корисним для студентів і викладачів і використовується в ряді університетів України. У новому виданні виправлені поодинокі помилки та дещо змінені позначення, а також уміщені деякі нові задачі.

Кожне заняття передбачає такі елементи:

1) підготовку студентами відповідей на контрольні питання по темі заняття (ці відповіді повинні містити основний теоретичний матеріал, необхідний для виконання запропонованих завдань);
2) розв'язування біля дошки під керівництвом викладача 3-5 основних задач, які в тексті відмічені літерою О (у коментарях до розв'язування викладач звертає увагу на типові способи і методи розв'язування задач);
3) самостійне розв'язування студентами 3-5 задач, трохи простіших, ніж у пункті 2), і відмічених літерою С (у разі необхідності викладач надає студентам відповідну допомогу);
4) виконання студентами домашнього завдання, яке складається, як правило, зі спільної для всіх студентів частини (відповідні задачі відмічені літерою Г) та індивідуальної (задачі з літерою П).

До складу завдань для кожного заняття включені також додаткові задачі, які відмічені літерою Д. Вони містять здебільшого дуже важливий матеріал і можуть пропонуватись студентам, які успішно впоралися з основною частиною завдань.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дороговцев А.Я. Элементы теории меры и интеграла. – К., 1989.
2. Рудин У. Основы математического анализа. – М., 1982.
3. Колмооров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., 1981.
4. Халмош П. Теория меры. – М., 1953.
5. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. – М., 1973.
6. Теляковский С.А. Сборник задач по теории функций действительного переменного. – М., 1980.

ЗАНЯТТЯ 1
КЛАСИ МНОЖИН

Контрольні запитання

1. *Означення півкільця, кільця, алгебри, σ-кільця, σ-алгебри та монотонного класу множин.*
2. *Означення кільця, алгебри, σ-кільця, σ-алгебри та монотонного класу, породжених заданим класом множин.*

A1

O1. Довести, що для кожного півкільця $\mathcal{P}$, $\varnothing \in \mathcal{P}$.

O2. Довести, що клас множин

$$\mathcal{P}_1 = \{\varnothing,\ [a,b) \mid -\infty < a < b < +\infty\}$$

є півкільцем. Чи є півкільцем клас множин

$$\mathcal{H} = \{\varnothing,\ (a,b) \mid -\infty < a < b < +\infty\}?$$

C1. Довести, що клас множин

$$\mathcal{P}_2 = \{\varnothing,\, [a_1,b_1) \times [a_2,b_2) \mid -\infty < a_i < b_i < +\infty,\ i = 1,2\}$$

є півкільцем.

O3. Довести, що:

1) кільце є замкненим відносно операцій $\cap$ і $\triangle$;
2) об'єднання та перетин скінченної сукупності елементів кільця належать до кільця.

O4. Довести, що перетин зліченної кількості елементів σ-кільця належить до σ-кільця.

O5. Нехай $\mathcal{H} = \{B \subset \mathbf{R} \mid$ принаймні одна з множин B чи $\overline{B}$ є не більш ніж зліченною$\}$. Довести, що $\mathcal{H}$ — σ-алгебра.

C2. Нехай X – довільна непорожня множина. Довести, що класи її підмножин: 1) $\{\emptyset, X\}$ і 2) 2^X є σ-алгебрами.

C3. Довести, що сукупність усіх обмежених підмножин прямої $\mathbf{R}$ утворює кільце, але не є ані σ-кільцем, ані σ-алгеброю.

C4. Довести, що кожне кільце, яке складається зі скінченної кількості множин, є σ-кільцем.

C5. Довести, що класи множин

$$1)\{\{0\}, [0, \tfrac{1}{n}] \mid n \geq 1\}; \qquad 2)\{\varnothing,\ (0, \tfrac{1}{n}) \mid n \geq 1\}$$

є монотонними класами. Чи буде монотонним клас $\{[0, \frac{1}{n}) \mid n \geq 1\}$?

C6. Нехай $A \subset X$. Визначити мінімальне кільце, алгебру, σ-кільце і σ-алгебру, які містять множину A.

Д1. Довести, що клас множин є кільцем, якщо він замкнений відносно операцій: 1)$\cup$ і $\triangle$; 2)$\cap$ і $\triangle$.

Д2. Довести, що перетин довільної сукупності σ-алгебр є σ-алгеброю, а об'єднання довільної кількості σ-алгебр не є, взагалі кажучи, σ-алгеброю.

Д3. Навести приклад кільця, яке замкнене відносно операції зліченного перетину, але не є σ-кільцем. Чи існує алгебра, яка замкнена відносно операції зліченного перетину, але не є σ-алгеброю?

Д4. Нехай $\mathcal{K}$ – кільце підмножин X, $f : X \to Y$, $f(\mathcal{K}) = \{f(B) \mid B \in \mathcal{K}\}$. Довести, що $f(\mathcal{K})$ не є, взагалі кажучи, кільцем підмножин Y.

Д5. Характеристичною функцією множини A називають функцію

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A, \\ 0, & \text{якщо } x \in X \backslash A. \end{cases}$$

Нехай $\mathcal{H}$ – деякий клас підмножин X, $\widetilde{\mathcal{H}}$ – сукупність характеристичних функцій множин із $\mathcal{H}$. Довести, що $\mathcal{H}$ є кільцем тоді і лише тоді, коли $\widetilde{\mathcal{H}}$ – алгебраїчне кільце відносно множення та додавання за модулем 2.

Д6. Довести, що перетин двох півкілець не обов'язково є півкільцем. Чи є півкільцем об'єднання двох півкілець?

Д7. За якої умови на простір X кожна півалгебра його підмножин буде кільцем? Кожне кільце півалгеброю?

Б1

Г1. Нехай $f : X \to Y$ і $\mathcal{H}$ – σ-кільце підмножин Y. Довести, що клас множин $f^{-1}(\mathcal{H}) = \left\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{H}\right\}$ є σ-кільцем підмножин X.

Г2. Нехай $\mathcal{S}$ – σ-алгебра підмножин X і $B \subset X$. Довести, що клас множин $\mathcal{S} \cap B = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{S}\}$ є σ-кільцем.

Г3. Довести, що клас множин, замкнений відносно операцій $\cup$ і $\cap$, не є, взагалі кажучи, кільцем.

П1. З'ясувати, чи є півкільцем або кільцем клас множин $\mathcal{H}$, якщо:

1) $\mathcal{H} = \{\varnothing, [a,b) \mid a \in \mathbf{Q},\, b \in \mathbf{Q},\ a < b\}$;
2) $\mathcal{H} = \{\varnothing, (a,b] \mid a \in \mathbf{Z},\, b \in \mathbf{Z},\ a < b\}$;
3) $\mathcal{H} = \{\varnothing, [a,b) \mid a \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\, b \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\ a < b\}$;
4) $\mathcal{H} = \{\varnothing, (a,b] \mid a \in \mathbf{Q},\, b \in \mathbf{N},\ a < b\}$;
5) $\mathcal{H} = \{\varnothing, [a,b] \mid -\infty < a < b < +\infty\}$;
6) $\mathcal{H} = \{\varnothing, (a,b] \mid a \in \mathbf{R},\, b \in \mathbf{Q},\ a < b\}$;
7) $\mathcal{H} = \{\varnothing,\ [a_1,b_1) \times [a_2,b_2) \mid a_i \in \mathbf{Q},\, b_i \in \mathbf{Q},\ a_i < b_i,\ i = 1,2\}$;

8) $\mathcal{H} = \{\varnothing,\ [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \,|\, a_i, b_i \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q},\ a_i < b_i,\ i = 1, 2\}$;
9) $\mathcal{H} = \{\varnothing,\ (a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \,|\, -\infty < a_i < b_i < +\infty,\ i = 1, 2\}$;
10) $\mathcal{H} = \{\varnothing,\ [a_1, b_1) \times (a_2, b_2] \,|\, -\infty < a_i < b_i < +\infty,\ i = 1, 2\}$;
11) $\mathcal{H} = \{\varnothing,\ (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \,|\, -\infty < a_i < b_i < +\infty,\ i = 1, 2\}$.

П2. Нехай $\mathcal{H} \subset 2^X$ і $k(\mathcal{H}), a(\mathcal{H}), \sigma k(\mathcal{H}), \sigma a(\mathcal{H})$ та $m(\mathcal{H})$ – відповідно кільце, алгебра, σ-кільце, σ-алгебра та монотонний клас, породжені класом $\mathcal{H}$. Знайти:

1) $k(\mathcal{H})$ і $\sigma k(\mathcal{H})$, якщо $\mathcal{H} = \{A, B\}$;
2) $a(\mathcal{H})$ і $\sigma a(\mathcal{H})$, якщо $\mathcal{H} = \{A, B\}$;
3) $m(\mathcal{H})$, якщо $\mathcal{H} = \{A, B\}$;
4) $m(\mathcal{H})$, якщо $X = \mathbf{R},\ \mathcal{H} = \left\{[0, 2 - \frac{1}{n}] \,|\, n \geq 1\right\}$;
5) $m(\mathcal{H})$, якщо $X = \mathbf{R},\ \mathcal{H} = \left\{[0, 3 + \frac{1}{n}) \,|\, n \geq 1\right\}$;
6) $\sigma a(\mathcal{H})$, якщо $X = \mathbf{N},\ \mathcal{H} = \{\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}, ...\}$;
7) $k(\mathcal{H})$, якщо $X = \mathbf{N},\ \mathcal{H} = \{\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}, ...\}$;
8) $m(\mathcal{H})$, якщо $X = \mathbf{R},\ \mathcal{H} = \{\left(-e, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) |n \geq 1\}$;
9) $k(\mathcal{H})$, якщо $X = \mathbf{R},\ \mathcal{H} = \{\{x\} \,|\, x \in \mathbf{R}\}$;
10) $\sigma k(\mathcal{H})$, якщо $X = \mathbf{R},\ \mathcal{H} = \{\{x\} \,|\, x \in \mathbf{R}\}$;
11) $a(\mathcal{H})$, якщо $X = \mathbf{R},\ \mathcal{H} = \{\{x\} \,|\, x \in \mathbf{R}\}$.

П3. 1) Навести приклад півкільця $\mathcal{P}$ підмножин $X = \{1, 2, 3\}$, яке не є кільцем.

2) Навести приклад кільця $\mathcal{K}$ підмножин $X = \{1, 2, 3\}$, яке не є алгеброю.
3) Описати всі алгебри, які можна одержати з елементів класу 2^X, де $X = \{1, 2, 3\}$.
4) Навести приклад, який би свідчив, що об'єднання двох кілець не є, взагалі кажучи, кільцем.
5) Нехай $\mathcal{H} = \{B \subset \mathbf{R} \,|$ принаймні одна з множин B чи $\overline{B}$ скінченна$\}$. Довести, що $\mathcal{H}$ є алгеброю, але не є σ-алгеброю.
6) Нехай $\mathcal{H} = \{A \subset \mathbf{N} : |A| \leq 2\}$, де $|A|$ – число елементів множини A. Чи є A півкільцем? кільцем?
7) Нехай $\mathcal{H} = \{B \subset \mathbf{R} \,|\, B \cap \mathbf{Q} -$ скінченна множина$\}$. Довести, що $\mathcal{H}$ – кільце, але не σ-кільце і не алгебра.
8) Нехай $\mathcal{H} = \{B \subset \mathbf{Q} \,|\, B \cap \mathbf{N} -$ скінченна множина$\}$. Довести, що $\mathcal{H}$ є кільцем, але не є ані σ-кільцем, ані алгеброю.
9) Нехай $\mathcal{H} = \{B \subset \mathbf{R} \,|\, B \cap (\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}) -$ скінченнамножина$\}$. Довести, що $\mathcal{H}$ є кільцем, але не є ані алгеброю, ані σ-кільцем.
10) Нехай $\mathcal{H} = \{B \subset \mathbf{Z} \,|\, B -$ скінченна множина$\}$. Довести, що $\mathcal{H}$ є кільцем, але не є ані алгеброю, ані σ-кільцем.
11) Нехай $\mathcal{H} = \{B \subset \mathbf{N} | \overline{B} -$ скінченна множина$\}$. Чи є $\mathcal{H}$ півкільцем? кільцем?

ЗАНЯТТЯ 2
КЛАСИ МНОЖИН. АДИТИВНІ ФУНКЦІЇ МНОЖИН

Контрольні запитання

1. *Означення функції множин. (Функцією множин на непорожньому класі $\mathcal{H}$ називають відображення $\varphi : \mathcal{H} \to (-\infty, +\infty]$, яке набуває хоча б одне дійсне значення).*
2. *Дати означення основних класів функцій множин.*
3. *Навести властивості адитивних функцій множин.*

A2

O1. Довести, що декартів добуток двох півкілець є півкільцем. Вивести звідси, що клас множин із задачі A1.C1 є півкільцем, а також при кожному $m \geq 1$ клас множин $\mathcal{P}_m = \{\varnothing, \prod\limits_{i=1}^{m} [a_i, b_i) \,|\, -\infty < a_i < b_i < +\infty, \ i = 1, ..., m\}$ є півкільцем.

O2. Верхньою (нижньою) границею послідовності множин $\{A_n : n \geq 1\}$ називають множину $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$ ($\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$), яка складається з усіх тих елементів, котрі належать до нескінченної кількості множин A_n (до всіх множин, починаючи з деякого номера n). Довести, що:

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n.$$

C1. Нехай $\mathcal{S}$ – σ-алгебра підмножин множини X і $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{S}$. Довести, що $\left\{ \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n, \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n \right\} \subset \mathcal{S}$.

O3. Нехай $\mathcal{H}$ – клас підмножин X, і $B \subset X$. Довести, що $\sigma k(\mathcal{H} \cap B) = \sigma k(\mathcal{H}) \cap B$.

У наступних задачах $\mathcal{K}$ – кільце підмножин множини X, $\varphi : \mathcal{K} \to [0, +\infty]$ – адитивна функція множин.

O4. Нехай $\{A, B, C\} \subset \mathcal{K}$ і $\varphi(A \cup B \cup C) < +\infty$. Довести, що:

1) $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A \cap B)$;
2) $\varphi(A \cup B \cup C) = \varphi(A) + \varphi(B) + \varphi(C) - \varphi(A \cap B) - \varphi(A \cap C) - \varphi(B \cap C) + \varphi(A \cap B \cap C)$.

О5. Нехай $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{K},\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j,\ A \in \mathcal{K}$. Довести такі твердження:

1) якщо $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset A,\ n \in \mathbf{N}$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(A_i) \leq \varphi(A)$;
2) якщо $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i) \leq \varphi(A)$.

С2. Нехай $\{A, B, C\} \subset \mathcal{K}$ і $\varphi(A \cup B) < +\infty$. Довести, що

1) $\varphi(A \triangle B) \leq \varphi(A \triangle C) + \varphi(C \triangle B)$;
2) $|\varphi(A) - \varphi(B)| \leq \varphi(A \triangle B)$.

С3. Довести, що клас тих множин з $\mathcal{K}$, на яких функція φ набуває скінченних значень, є кільцем.

Д1. Нехай $\mathcal{H}$ – клас множин, $\sigma a(\mathcal{H})$ і $m(\mathcal{H})$ – відповідно σ-алгебра і монотонний клас, породжені класом $\mathcal{H}$. Довести, що $m(\mathcal{H}) \subset \sigma a(\mathcal{H})$.

Д2. Нехай $\mathcal{H}$ – клас множин. Позначимо через $\mathcal{H}'$ клас усіх верхніх і нижніх границь послідовностей множин з $\mathcal{H}$. Довести, що:

1) якщо $\mathcal{H}$ – півкільце, то $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{H}$ – σ-кільце;
2) $\mathcal{P}_1'$ містить усі інтервали і відрізки на прямій;
3) $\mathcal{P}_1'$ містить усі відкриті і замкнені (відносно евклідової метрики) множини на прямій.

Д3. Нехай $\{A_i \,|\, i = 1, ..., n\} \subset \mathcal{K},\ \varphi(X) = 1$. Довести, що $\varphi(A_1 \cap ... \cap A_n) \geq \varphi(A_1) + ... + \varphi(A_n) - (n-1)$.

Д4. Нехай $\{A_i \,|\, i = 1, ..., n\} \subset \mathcal{K},\ \varphi(A_1 \cup ... \cup A_n) < +\infty$, $S_k^{(n)} = \sum\limits_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \varphi(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}), k = 1, ..., n$. Довести, що

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k^{(n)}.$$

Д5. Нехай $\{A, B\} \subset \mathcal{K}$ і $\varphi(A \cup B) < +\infty$. Довести, що

$$|\varphi(A \cup B)\varphi(A \cap B) - \varphi(A)\varphi(B)| \leq \tfrac{1}{4}\varphi^2(A \cup B).$$

Б2

Г1. Довести, що декартів добуток кілець не є, взагалі кажучи, кільцем.

Г2. Нехай $\mathcal{P} = \{\varnothing,\ [a, b) \,|\, -\infty < a < b < +\infty\}$. Довести, що кільце, породжене півкільцем $\mathcal{P}$, не є ані алгеброю, ані σ-кільцем.

П1. Знайти верхню та нижню границі послідовності множин $\{A_n : n \ge 1\}$, якщо:

1) $A_n = \begin{cases} A, & n = 3k-2, \\ B, & n = 3k-1, \\ C, & n = 3k; \end{cases}$

2) $A_n = \begin{cases} \left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), 5\right], & n = 2k-1, \\ (-n, n], & n = 2k; \end{cases}$

3) $A_n = \begin{cases} [0,1), & n \neq 2k, \\ [0,n], & n = 2k; \end{cases}$

7) $A_n = \begin{cases} [n, n^2], & n \neq 2k, \\ [0, 1+\ln n), & n = 2k; \end{cases}$

4) $A_n = \begin{cases} (0, \operatorname{arctg} n), & n \neq 2k, \\ (-n^2, \ln n), & n = 2k; \end{cases}$

8) $A_n = \begin{cases} [-3^n, 0), & n \neq 2k, \\ (-n, -\sqrt{n}), & n = 2k; \end{cases}$

5) $A_n = \begin{cases} [-n, 0], & n \neq 2k, \\ [0, n], & n = 2k; \end{cases}$

9) $A_n = \begin{cases} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, 4\right], & n \neq 2k, \\ [3, n+3], & n = 2k; \end{cases}$

6) $A_n = \begin{cases} (1, \operatorname{ch} n), & n \neq 2k, \\ (-\ln n, 4], & n = 2k; \end{cases}$

10) $A_n = \begin{cases} [1, 2^n), & n \neq 2k, \\ (\ln n, +\infty), & n = 2k; \end{cases}$

11) $A_n = \begin{cases} [-n, 0), & n = 3k-2, \\ \left(-1-\frac{1}{n}, -1+\frac{1}{n}\right), & n = 3k-1, \\ [0, n], & n = 3k, \end{cases}$

де $k \in \mathbf{N}$.

П2. Нехай $\mathcal{K}$ – кільце підмножин X, φ – адитивна невід'ємна функція множин на $\mathcal{K}$, $\{A, B, C\} \subset \mathcal{K}$ і $\varphi(A \cup B \cup C) < +\infty$. Довести, що:

1) $\varphi(A \setminus B) = \varphi(A) - \varphi(A \cap B)$;
2) $\varphi(A \triangle B) = \varphi(A) + \varphi(B) - 2\varphi(A \cap B)$;
3) $\varphi(A \cap B) \le \varphi(A) \le \varphi(A \cup B) \le \varphi(A) + \varphi(B)$;
4) $\max(\varphi(A), \varphi(B)) \le \varphi(A \cup B) \le 2\max(\varphi(A), \varphi(B))$;
5) $\varphi(A) \le \varphi(A \cup B \cup C) \le \varphi(A) + \varphi(B) + \varphi(C)$;
6) $\max(\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)) \le \varphi(A \cup B \cup C) \le$
$\le 3\max(\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C))$;
7) $\varphi((A \cup B) \cap C) = \varphi(A \cap C) + \varphi(B \cap C) - \varphi(A \cap B \cap C)$;

8) $\varphi((A\triangle B)\cap C) = \varphi(A\cap C) + \varphi(B\cap C) - 2\varphi(A\cap B\cap C)$;
9) $\varphi((A\cap B)\cup C) = \varphi(A\cap B) + \varphi(C) - \varphi(A\cap B\cap C)$;
10) $\varphi((A\cap B)\triangle C) = \varphi(A\cap B) + \varphi(C) - 2\varphi(A\cap B\cap C)$;
11) $\varphi((A\cup B)\triangle C) = \varphi(A) + \varphi(B) + \varphi(C) - \varphi(A\cap B) - 2[\varphi(A\cap C) + \varphi(B\cap C) - \varphi(A\cap B\cap C)]$.

П3. Нехай $\mathcal{A}$ – алгебра підмножин X, $\varphi : \mathcal{A} \to [0,+\infty)$ – адитивна функція множин, $\{A,B,C\} \subset \mathcal{A}$ та відомі значення $\varphi(X)$, $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(A\cap B)$, $\varphi(A\cap C)$, $\varphi(B\cap C)$ і $\varphi(A\cap B\cap C)$. Визначити:

1) $\varphi(\overline{A}\cup\overline{B})$;
2) $\varphi(\overline{A}\triangle\overline{B})$;
3) $\varphi(\overline{A}\cap\overline{B})$;
4) $\varphi(\overline{A}\triangle B)$;
5) $\varphi(A\cap\overline{B})$;
6) $\varphi((\overline{A}\cup\overline{B})\cap C)$;
7) $\varphi((A\triangle B)\cup\overline{C})$;
8) $\varphi\left(\overline{(A\cup B)\cap\overline{C}}\right)$;
9) $\varphi((A\triangle B)\triangle\overline{C})$;
10) $\varphi((A\cup B)\triangle\overline{C})$;
11) $\varphi((A\cap B)\triangle\overline{C})$.

П4. Нехай виконуються припущення із задачі П3. Знайти $\varphi(D)$, якщо D – сукупність усіх тих елементів, які:

1) належать тільки до множини A;
2) належать тільки до множин A і B;
3) належать принаймні до однієї з множин A, B і не належать до C;
4) належать тільки до однієї з множин A, B і не належать до C;
5) належать тільки до однієї з множин A, B, C;
6) належать тільки до двох з множин A, B, C;
7) належать до не більш ніж однієї з множин A, B, C;
8) не належать до жодної з множин A, B, C;
9) належать принаймні до двох із множин A, B, C;
10) належать не більше, ніж до двох із множин A, B, C.

ЗАНЯТТЯ 3
МІРА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Контрольні запитання

1. *Дати означення міри.*
2. *Навести властивості мір.*

А3

О1. Нехай $\mathcal{K}$ – кільце і $\mu : \mathcal{K} \to [0, +\infty]$ – адитивна функція множин. Довести, що μ – міра на $\mathcal{K}$ тоді і тільки тоді, коли μ – σ-півадитивна функція на $\mathcal{K}$.

С1. Нехай μ – σ-адитивна функція множин на півкільці $\mathcal{P}$. Довести, що $\mu(\varnothing) = 0$ і μ – адитивна.

С2. Нехай μ_1, μ_2 – міри на кільці $\mathcal{K}$. Довести, що

$$\forall \{\alpha_1, \alpha_2\} \subset [0, +\infty) \ : \ \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 \text{ – міра на } \mathcal{K}.$$

О2. Нехай $\mathcal{K}$ – кільце і $\mu : \mathcal{K} \to [0, +\infty]$ – адитивна функція множин. Довести, що функція μ є мірою на $\mathcal{K}$ тоді і тільки тоді, коли вона неперервна знизу, тобто

$$\forall \{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{K}, \ A_n \subset A_{n+1}, \, n \geq 1, \ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K} \ :$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

С3. Нехай $x_0 \in X$ і

$$\forall A \subset X \ : \ \mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_0 \in A, \\ 0, & \text{якщо } x_0 \notin A. \end{cases}$$

Довести, що μ – міра на σ-алгебрі 2^X.

О3. Нехай $X = \{x_n : n \geq 1\}$, $\{p_n : n \geq 1\} \subset [0, +\infty)$ і

$$\mu(\varnothing) = 0, \quad \forall A \subset X, \ A \neq \varnothing \ : \ \mu(A) = \sum_{\{n \mid x_n \in A\}} p_n.$$

Довести, що μ – міра на σ-алгебрі 2^X.

С4. Нехай X – зліченна множина і

$$\forall A \subset X \ : \ \mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } A \text{ скінченна}, \\ +\infty, & \text{якщо } A \text{ нескінченна}. \end{cases}$$

Довести, що μ – адитивна функція на 2^X, яка є неперервною зверху, тобто

$$\forall \{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{K},\ A_{n+1} \subset A_n,\ n \geq 1,\ \mu(A_1) < +\infty\ :$$
$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Чи є μ мірою на 2^X?

О4. Нехай μ – міра на σ-алгебрі $\mathcal{S}$, $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{S}$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < +\infty$. Довести, що $\mu\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\right) = 0$.

Д1. Нехай $\mathcal{S}_X$ – σ-алгебра підмножин множини X, $\mathcal{S}_Y$ – σ-алгебра підмножин множини Y, $T : X \to Y$, причому $T^{-1}(\mathcal{S}_Y) \subset \mathcal{S}_X$, μ – міра на $\mathcal{S}_X$. Покладемо $\forall B \in \mathcal{S}_Y\ :\ \nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$. Довести, що ν – міра на $\mathcal{S}_Y$. Міру ν називають образом міри μ при відображенні T.

Д2. Нехай $\{\mu_n : n \geq 1\}$ – послідовність мір на кільці $\mathcal{K}$. Довести, що для довільної послідовності $\{\alpha_n : n \geq 1\} \subset (0, +\infty)$ функція множин $\nu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n$ є мірою на $\mathcal{K}$.

Д3. Нехай μ – міра на σ-кільці $\mathcal{H}$, $E \in \mathcal{H}$, $\mu(E) < +\infty$, $\mathcal{H}_0$ – довільний клас множин, які попарно не перетинаються, $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$. Довести, що сукупність $\{B \in \mathcal{H}_0 \mid \mu(B \cap E) \neq 0\}$ не більш, ніж злічення.

Д4. Нехай μ – міра на σ - кільці $\mathcal{H}$. Довести, що

$$\forall \{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{H}\ :\ \mu\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n\right) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu(E_n),$$

а якщо $\exists n_0 \in \mathbf{N}\ :\ \mu\left(\bigcup\limits_{i=n_0}^{\infty} E_i\right) < +\infty$, то

$$\mu\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n\right) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu(E_n).$$

Навести приклад, коли виконуються тільки строгі нерівності.

Д5. Нехай $\mathcal{P} = \{\varnothing,\ (a,b] \mid 0 \leq a < b < +\infty\}$ і

$$\mu((a,b]) = \begin{cases} 0, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \end{cases} \quad \mu(\varnothing) = 0.$$

Довести, що μ є адитивною, але не σ-адитивною функцією на півкільці $\mathcal{P}$.

Д6. Нехай $X = \mathbf{Q}$. На σ-алгебрі 2^X задати міру μ так, щоб міра кожного раціонального числа була додатною, а $\mu(X) = 1$.

Д7. Нехай $\mathcal{H} \subset 2^X$. Назвемо функцію множин $\mu : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ "суперадитивною", якщо для довільної множини T і довільного набору $\{A_\alpha \in \mathcal{H} : \alpha \in T\}$ таких, що $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} = \varnothing$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, та $\bigcup\limits_{\alpha \in T} A_\alpha \in \mathcal{H}$, виконується рівність $\mu\left(\bigcup\limits_{\alpha \in T} A_\alpha\right) = \sum\limits_{\alpha \in T} \mu(A_\alpha)$, де сума в правій частині рівна $+\infty$, якщо вона містить незліченну кількість доданків, відмінних від 0. Довести, що:

1) кожна суперадитивна функція є мірою на $\mathcal{H}$;
2) якщо X – зліченна множина, то кожна міра на $\mathcal{H}$ є суперадитивною;
3) якщо X – незліченна множина, то існує несуперадитивна міра на $\mathcal{H}$.

Б3

Г1. Нехай $f : \mathbf{R} \to [0, +\infty]$ і

$$\mu(\varnothing) = 0, \quad \forall A \subset \mathbf{R},\ A \neq \varnothing\ :\ \mu(A) = \sum_{k \in A \cap \mathbf{N}} f(k).$$

Довести, що μ – міра на 2^X.

Г2. Нехай $\mathcal{K}$ – кільце, $\mu : \mathcal{K} \to [0, +\infty)$ – адитивна функція. Довести, що функція μ є мірою на $\mathcal{K}$ тоді і тільки тоді, коли вона неперервна зверху на $\varnothing$, тобто

$$\forall \{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{K},\ A_n \supset A_{n+1},\ n \geq 1,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing\ :$$

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0.$$

Г3. Нехай μ – міра на півкільці $\mathcal{H}$. Чи правильні наступні твердження:

1) якщо μ – σ-скінченна міра на $\mathcal{H}$, то μ – скінченна міра на $\mathcal{H}$;
2) якщо μ – скінченна міра на $\mathcal{H}$, то μ – σ-скінченна міра на $\mathcal{H}$,

якщо $\mathcal{H}$ – кільце? якщо $\mathcal{H}$ – σ-алгебра?

П1. Нехай μ – міра на σ-алгебрі $\mathcal{S}$. Довести, що клас:

1) $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{S} \mid \mu(A) = 0\}$ є кільцем;
2) $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{S} \mid \mu(A \cap B) < +\infty\}$, де $B \in S$, є кільцем;

3) $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{S} \mid \mu(A) = 0$ або $\mu(\overline{A}) = 0\}$ є σ-алгеброю;
4) $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{S} \mid \mu(A) < +\infty$ або $\mu(\overline{A}) < +\infty\}$ є алгеброю.

Нехай χ_A – характеристична функція множини $A \subset X$, $\{x_1, x_2\} \subset X$ і $x_1 \neq x_2$. Чи буде μ мірою на 2^X, якщо:

5) $\forall E \subset X \ : \ \mu(E) = \chi_E(x_1) + \chi_E(x_2)$;
6) $\forall E \subset X \ : \ \mu(E) = \chi_E(x_1)\chi_E(x_2)$;
7) $\forall E \subset X \ : \ \mu(E) = 2\chi_E(x_1) + 3\chi_E(x_2)$;
8) $\forall E \subset X, \ E \neq \varnothing \ : \ \mu(E) = 1 - \chi_E(x_1), \ \mu(\varnothing) = 0$;
9) $\forall E \subset X, \ E \neq \varnothing \ : \ \mu(E) = 2 - \chi_E(x_1) - \chi_E(x_2)$, $\mu(\varnothing) = 0$;
10) $\forall E \subset X \ : \ \mu(E) = (\chi_E(x_1) + \chi_E(x_2))^2$;
11) $\forall E \subset X \ : \ \mu(E) = |\chi_E(x_1) - \chi_E(x_2)|$?

П2. Нехай μ – міра на σ-алгебрі $\mathcal{S}$, $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{S}$, $A_i \cap A_j = \varnothing, \ i \neq j, \ i, j \geq 1$. Обчислити $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, якщо:

1) $\mu(A_n) = \frac{1}{2n(2n+2)}$;
2) $\mu(A_n) = \frac{1}{n(n+1)}$;
3) $\mu(A_n) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^n}$;
4) $\mu(A_n) = \frac{1}{(2n)!}$;
5) $\mu(A_n) = \frac{1}{(2n+1)!}$;
6) $\mu(A_n) = \frac{1}{(2n-1)!}$;
7) $\mu(A_n) = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;
8) $\mu(A_n) = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;
9) $\mu(A_n) = \frac{2^n}{n!}$;
10) $\mu(A_n) = \frac{1}{n!}$;
11) $\mu(A_n) = |\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}|$;
12) $\mu(A_n) = e^{-n}$.

П3. Нехай μ – міра на σ-алгебрі $\mathcal{S}$, $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{S}$. Довести, що $\mu\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\right) = 0$, якщо:

1) $\mu(A_n) = \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)^{\sqrt{2}}$;
2) $\mu(A_n) = n^{-\sqrt{2}}$;
3) $\mu(A_n) = \sin^3 \frac{1}{n}$;
4) $\mu(A_n) = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{n}$;
5) $\mu(A_n) = \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$;
6) $\mu(A_n) = \operatorname{sh} \frac{1}{n\sqrt{n}}$;
7) $\mu(A_n) = \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3$;
8) $\mu(A_n) = \ln^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)$;
9) $\mu(A_n) = \frac{1}{n^2} \int\limits_1^n \frac{dx}{x}$;
10) $\mu(A_n) = \operatorname{ch} \frac{1}{n} - 1$;
11) $\mu(A_n) = \frac{1}{n^2} \operatorname{arctg} n$;
12) $\mu(A_n) = \sin \frac{1}{n^2}$.

ЗАНЯТТЯ 4
ЗОВНІШНЯ МІРА. λ^*-ВИМІРНІ МНОЖИНИ. ПРОДОВЖЕННЯ МІРИ

Контрольні запитання

1. *Дати означення зовнішньої міри.*
2. *Як будується зовнішня міра за заданою мірою на кільці?*
3. *Дати означення λ^*-вимірної множини.*
4. *У чому полягає процес продовження міри за Каратеодорі?*

А4

О1. Нехай λ_1^*, λ_2^* – зовнішні міри на 2^X і $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset [0, +\infty)$. Довести, що функція $\nu^* = \alpha_1\lambda_1^* + \alpha_2\lambda_2^*$ є зовнішньою мірою на 2^X.

С1. Нехай λ^* – зовнішня міра на 2^X. Довести, що:

1) λ^* є монотонною функцією на 2^X, тобто
$$\forall\{A, B\} \subset 2^X,\ A \subset B\ :\ \lambda^*(A) \le \lambda^*(B);$$

2) $\forall\{A, B, C\} \subset 2^X\ :\ \lambda^*(A\triangle B) \le \lambda^*(A\triangle C) + \lambda^*(C\triangle B)$.

С2. Нехай λ^* – зовнішня міра на 2^X і
$$\mathcal{H} = \{A \subset X \mid \lambda^*(A) = 0\}.$$
Довести, що $\mathcal{H}$ є σ-кільцем.

О2. Нехай λ^* – зовнішня міра на 2^X. Довести, що множина $A \subset X$ є λ^*-вимірною тоді і тільки тоді, коли
$$\forall B \subset X\ :\ \lambda^*(B) \ge \lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \cap \overline{A}).$$

О3. Нехай $\mathcal{P} = \{\varnothing,\ (a, b]\ \mid\ -\infty < a < b < +\infty\},\ F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2\ , \\ 2, & x \ge 2, \end{cases}$$
функція $\lambda_F\ :\ \mathcal{P} \to [0, +\infty)$ така, що $\lambda_F(\varnothing) = 0$, $\lambda_F((a, b]) = F(b) - F(a)$.

1) Продовжити міру λ_F на кільце $\mathcal{K}(\mathcal{P})$, породжене півкільцем $\mathcal{P}$.
2) Довести, що:
   а) кожна борельова множина є λ_F^*-вимірною;

b) $\lambda_F^*(\{1\}) = \lambda_F^*(\{2\}) = 1,\ \lambda_F^*(\{1,2\}) = 2$;

c) $\lambda_F^*(\mathbf{R}\backslash\{1,2\}) = 0$;

d) $\forall A \subset \mathbf{R}\ :\ \lambda_F^*(A) = |A \cap \{1,2\}|$ (число елементів множини $A \cap \{1,2\}$);

e) будь-яка множина $A \subset \mathbf{R}$ є λ_F^*-вимірною.

О4. Нехай $\mathcal{P} = \{\varnothing,\ (a,b]\ |\ -\infty < a < b < +\infty\}$, функція $\lambda\ :\ \mathcal{P} \to [0,+\infty)$ така, що $\lambda((a,b]) = b - a,\ \lambda(\varnothing) = 0$. Продовжити міру λ на кільце $\mathcal{K}(\mathcal{P})$, породжене півкільцем $\mathcal{P}$.

Нехай λ^* – зовнішня міра на $2^{\mathbf{R}}$, породжена мірою λ. Цю зовнішню міру називають зовнішньою мірою Лебега. Довести, що:

1) $\forall a \in \mathbf{R}\ :\ \lambda^*(\{a\}) = 0$;
2) Для будь-якої не більш ніж зліченної множини $A \subset \mathbf{R}$ вірно, що $\lambda^*(A) = 0$.

Д1. Нехай $X = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{P} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3,4\}\}$ і функція $\mu\ :\ \mathcal{P} \to [0,+\infty)$ така, що $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = 1$, $\mu(\{3,4\}) = 2$.

1) Довести, що μ – міра на півкільці $\mathcal{P}$.
2) Продовжити міру μ на кільце $\mathcal{K}(\mathcal{P})$, породжене півкільцем $\mathcal{P}$.
3) Побудувати зовнішню міру μ^*, породжену мірою μ.
4) Визначити σ-алгебру μ^*-вимірних множин та продовження міри μ на цю σ-алгебру.

Д2. Нехай λ^* – зовнішня міра на 2^X, для якої $\lambda^*(X) < +\infty$, $\{E,F\} \subset 2^X$ і принаймні одна з множин E чи F є λ^*-вимірною. Довести, що

$$\lambda^*(E) + \lambda^*(F) = \lambda^*(E \cup F) + \lambda^*(E \cap F).$$

Д3. Нехай μ – скінченна міра на алгебрі $\mathcal{A}$, μ^* – зовнішня міра на 2^X, яка породжена мірою μ, $\sigma a(\mathcal{A})$ – σ-алгебра, породжена алгеброю $\mathcal{A}$. Довести, що:

$$\forall A \subset X\ :\ \mu^*(A) = \min\{\overline{\mu}(B)\ |\ A \subset B,\ B \in \sigma a(\mathcal{A})\},$$

де $\overline{\mu}$ – звуження μ^* на $\sigma a(\mathcal{A})$.

Д4. Нехай виконуються припущення із задачі Д3. Довести, що множина $A \subset X$ є μ^*-вимірною тоді і лише тоді, коли $A = B \cup C$, де $B \in \sigma a(\mathcal{A})$ і $\mu^*(C) = 0$.

Д5. Нехай виконуються припущення із задачі Д3 і для множини $A \subset X$ умова
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \{C, B\} \subset \sigma a(\mathcal{A})\ :\ C \subset A \subset B,\ \overline{\mu}(B \backslash C) < \varepsilon.$$
Довести, що множина A є μ^*-вимірною.

Д6. Нехай $\mathcal{K}$ – кільце, $\sigma k(\mathcal{K})$ – σ-кільце, породжене цим кільцем, $\mu_1,\ \mu_2$ – σ-скінченні міри на $\sigma k(\mathcal{K})$ і $\forall A \in \mathcal{K}\ :\ \mu_1(A) \le \mu_2(A)$. Довести, що $\forall A \in \sigma k(\mathcal{K})\ :\ \mu_1(A)\ \le\ \mu_2(A)$.

Д7. Нехай $X = [0,1] \times [0,1]$, $\mathcal{H}$ – клас горизонтальних і вертикальних прямокутників всередині X, у яких довжина або ширина дорівнює 1. Для довільного $\Pi \in \mathcal{H}$ через $\mu(\Pi)$ позначимо площу прямокутника Π. Вказати два різні продовження міри μ на σ-алгебру $\sigma a(\mathcal{H})$, породжену класом $\mathcal{H}$.

Д8. Нехай виконуються припущення із задачі Д3 і $\mu_*(A) = \mu(X) - \mu^*(X \backslash A)$ – внутрішня міра множини $A \subset X$. Довести, що:

1) $\mu_*(A) \le \mu^*(A)$;
2) $\mu_*(A) = \max \{\overline{\mu}(C) \,|\, C \subset A,\ C \in \sigma a(\mathcal{A})\}$;
3) множина A є μ^*-вимірною тоді і лише тоді, коли $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.

Д9. Нехай виконуються припущення із задачі Д3. Довести, що множина $A \subset X$ є μ^*-вимірною тоді і лише тоді, коли
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{A}\ :\ \mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

Д10. Нехай $\mathcal{S}$ – σ-алгебра і λ – міра на $\mathcal{S}$. Покладемо
$$\mathcal{S}_0 := \{A \cup B \,|\, A \in \mathcal{S},\ B \subset C \in \mathcal{S},\ \lambda(C) = 0\},$$
$\lambda_0(A \cup B) := \lambda(A)$. Довести, що $\mathcal{S}_0$ – σ-алгебра і λ_0 – повна міра на $\mathcal{S}_0$.

Д11. Довести, що твердження із задач Д3, Д4 та Д5 правильні і для σ-скінченних мір.

Д12. Нехай μ – міра на кільці $\mathcal{K}, \overline{\mu}$ – продовження за Каратеодорі міри μ на σ-алгебру S, μ^*, $\overline{\mu}^*$ – зовнішні міри, породжені мірами μ і $\overline{\mu}$ відповідно. Довести, що $\overline{\mu}^* = \mu^*$.

Б4

Г1. Нехай μ – σ-скінченна міра на кільці $\mathcal{K}$. Довести, що зовнішня міра μ^*, породжена мірою μ, є σ-скінченною.

Г2. Нехай λ^* – зовнішня міра на 2^X і E – λ^*-вимірна множина. Довести, що $\lambda^*(X) = \lambda^*(E) + \lambda^*(\overline{E})$.

Г3. Нехай $X=(0,1]\times(0,1]$,
$$\mathcal{P}=\{\varnothing,\ (a,b]\times(0,1]\mid 0\le a<b\le 1\},$$
функція $\mu:\mathcal{P}\to[0,+\infty)$ така, що
$$\mu((a,b]\times(0,1])=b-a,\ \mu(\varnothing)=0.$$
Продовжити міру μ на кільце $\mathcal{K}(\mathcal{P})$, породжене півкільцем $\mathcal{P}$. Нехай, далі, μ^* – зовнішня міра, породжена мірою μ. Довести, що множина $(0,1]\times\{\frac{1}{2}\}$ не є μ^*-вимірною. (Вказівка: скористатися результатом задачі О2.)

П1. Нехай $\mathcal{P}=\{\varnothing,\ (a,b]\mid -\infty<a<b<+\infty\}$ і функція $\lambda_F:\mathcal{P}\to[0,+\infty)$ така, що $\lambda_F((a,b])=F(b)-F(a)$ і $\lambda_F(\varnothing)=0$, де $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ – неспадна і неперервна справа функція. Продовжити міру λ_F на кільце $\mathcal{K}(\mathcal{P})$, породжене півкільцем $\mathcal{P}$, довести, що довільна множина $A\subset\mathbf{R}$ є λ_F^*-вимірною, та знайти $\lambda_F^*(A)$ для будь-якого $A\subset\mathbf{R}$, якщо:

1) $F(x)=\begin{cases}-10, & -\infty<x<-3,\\ -5, & -3\le x<+\infty;\end{cases}$

2) $F(x)=\begin{cases}-10, & -\infty<x<-2,\\ 0, & -2\le x<+\infty;\end{cases}$

3) $F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<1,\\ 11, & 1\le x<+\infty;\end{cases}$

4) $F(x)=\begin{cases}-7, & -\infty<x<\pi,\\ 8, & \pi\le x<+\infty;\end{cases}$

5) $F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<-1,\\ 3, & -1\le x<1,\\ 5, & 1\le x<+\infty;\end{cases}$

6) $F(x)=\begin{cases}-2, & -\infty<x<1,\\ 0, & 1\le x<3,\\ 3, & 3\le x<+\infty;\end{cases}$

7) $F(x)=\begin{cases}11, & -\infty<x<5,\\ 12, & 5\le x<7,\\ 15, & 7\le x<+\infty;\end{cases}$

8) $F(x)=\begin{cases}-8, & -\infty<x<\pi,\\ 7, & \pi\le x<10,\\ 9, & 10\le x<+\infty;\end{cases}$

9) $F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ [x], & 0\le x<10,\\ 10, & 10\le x<+\infty;\end{cases}$

10) $F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ [x^2], & 0\le x<\sqrt{5},\\ 5, & \sqrt{5}\le x<+\infty;\end{cases}$

11) $F(x)=\begin{cases}-10, & -\infty<x<0,\\ [e^x], & 0\le x<2,\\ 10, & 2\le x<+\infty;\end{cases}$

12) $F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<1,\\ [\ln x], & 1\le x<e^3,\\ 5, & e^3\le x<+\infty.\end{cases}$

П2. Нехай $\{x_1, x_2\} \subset X,\ x_1 \neq x_2$. Чи є зовнішньою мірою на 2^X функція множин λ^*, якщо для довільної множини $E \subset X$:

1) $\lambda^*(E) = (1 + \chi_E(x_1))(1 + \chi_E(x_2))$;
2) $\lambda^*(E) = \chi_E(x_1) - \chi_E(x_2)$;
3) $\lambda^*(E) = (1 + \chi_E(x_1))\chi_E(x_2)$.

У наступних задачах перевірити, чи є функція множин λ^* зовнішньою мірою на 2^X. У випадку зовнішньої міри знайти клас усіх λ^*-вимірних множин.

4) $X = \{x_1, x_2\},\ \lambda^*(\{x_1\}) = \lambda^*(\{x_2\}) = 7,\ \lambda^*(X) = 1,\ \lambda^*(\varnothing) = 0$;
5) $\lambda^*(\varnothing) = 0,\ \forall E \subset X,\ E \neq \varnothing\ :\ \lambda^*(E) = 1$;
6) $\lambda^*(\varnothing) = 0,\ \forall E \subset X,\ E \neq \varnothing\ :\ \lambda^*(E) = +\infty$;
7) $X = \{1, 2\},\ \lambda^*(\{1\}) = \lambda^*(\{2\}) = 1,\ \lambda^*(X) = 5,\ \lambda^*(\varnothing) = 0$;
8) $X = \{1, 2\},\ \lambda^*(\{1\}) = \lambda^*(\{2\}) = \lambda^*(X) = 1,\ \lambda^*(\varnothing) = 0$;
9) $X = \{1, 2, 3\},\ \lambda^*(\{1\}) = \lambda^*(\{2\}) = \lambda^*(\{1, 2\}) = 1, \lambda^*(\{3\}) = 2,\ \lambda^*(\{1, 3\}) = \lambda^*(\{2, 3\}) = \lambda^*(X) = 3,\ \lambda^*(\varnothing) = 0$;
10) $X = \{1, 2, 3\},\ \lambda^*(\{1\}) = \lambda^*(\{3\}) = \lambda^*(\{1, 3\}) = 2, \lambda^*(\{2\}) = 5,\ \lambda^*(\{1, 2\}) = \lambda^*(\{2, 3\}) = \lambda^*(X) = 7,\ \lambda^*(\varnothing) = 0$.

П3. Нехай λ^* – зовнішня міра на 2^X. Чи є зовнішньою мірою на 2^X функція множин ν^*, якщо:

1) $\nu^* = \sqrt{\lambda^*}$;
2) $\nu^* = \ln(1 + \lambda^*)$;
3) $\nu^* = \min(1, \lambda^*)$;
4) $\nu^* = (\lambda^*)^2$;
5) $\nu^* = |\sin \lambda^*|$;
6) $\nu^* = \sqrt[3]{\lambda^*}$;
7) $\nu^* = \sqrt[5]{\lambda^*}$;
8) $\nu^* = (\lambda^*)^3$;
9) $\nu^* = e^{\lambda^*}$;
10) $\nu^* = |\cos \lambda^*|$.

ЗАНЯТТЯ 5
МІРА ЛЕБЕГА НА ПРЯМІЙ

Контрольні запитання

1. *Дати означення міри Лебега на* $\mathbf{R}$*.*
2. *Як визначається* σ*-алгебра борельових множин на* $\mathbf{R}$*?*

А5

У наступних задачах через λ_1 позначено міру Лебега на прямій.

О1. Нехай $\mathcal{P} = \{\varnothing,\ (a,b] \,|\, -\infty < a < b < +\infty\}$, $k(\mathcal{P})$ – кільце, породжене півкільцем $\mathcal{P}$; $\Im$, $\mathcal{F}$ і $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ – класи відповідно всіх відкритих, замкнених і борельових підмножин прямої $\mathbf{R}$ ($\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma a(\Im)$). Довести, що $\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma a(\mathcal{F}) = \sigma a(k(\mathcal{P})) = \sigma a(\mathcal{P})$. Чому кожна борельова множина є вимірною за Лебегом?

С1. Довести, що множина $A \subset \mathbf{R}$ є борельовою, та знайти $\lambda_1(A)$, якщо:

1) $A = (\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}) \cap [0,1]$;
2) $A = [a,b],\ a < b$;
3) $A = \left\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^2 \in \mathbf{Q}\right\}$;
4) $A = [a, +\infty)$;
5) $A = (-\infty, b)$.

О2. Нехай множина $A \subset \mathbf{R}$ вимірна за Лебегом. Довести, що

$$\lambda_1(A) = \inf\{\lambda_1(G) \,|\, A \subset G,\ G - \text{відкрита множина в } \mathbf{R}\}.$$

Нехай A – вимірна за Лебегом підмножина відрізка $[a,b]$, $a < b$. Довести, що

$$\lambda_1(A) = \sup\{\lambda_1(F) |\ F \subset A, F - \text{замкнена в } \mathbf{R} \text{ множина}\}.$$

О3. Нехай A – обмежена множина в $\mathbf{R}$, λ_1^* – зовнішня міра, породжена мірою λ_1, і

$$\lambda_{1*}(A) = \sup\left\{\lambda_1(F) \,|\, F \subset A,\ F - \text{замкнена множина}\right\}.$$

Довести, що:

1) $\lambda_1^*(A) = \inf\{\lambda_1(G) |\, G \supset A, G - \text{відкрита множина}\}$;
2) множина A вимірна за Лебегом тоді і тільки тоді, коли $\lambda_1^*(A) = \lambda_{1*}(A)$.

О4. Довести, що множина $A \subset \mathbf{R}$ є вимірною за Лебегом тоді і лише тоді, коли $A = B \cup C$, де $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ і $\lambda_1(C) = 0$.

О5. Канторова множина D будується таким чином: з відрізка $[0,1]$ вилучається інтервал $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$; потім з двох відрізків, що залишилися, вилучаються інтервали довжиною $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ з центрами в серединах цих відрізків; далі з чотирьох відрізків, які залишились, вилучаються інтервали довжиною $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ з центрами в серединах цих відрізків і т. д. Множину, що залишилася після вилучення всіх цих інтервалів, називають канторовою множиною. Довести, що канторова множина D :

1) є борельовою множиною і $\lambda_1(D)=0$;
2) має потужність континууму;
3) є вимірною за Жорданом. (Вказівка: використати компактність D).

Д1. Нехай A – вимірна за Лебегом підмножина $[a,b]$, $a<b$, і $\lambda_1(A)=p>0$. Довести, що для будь-якого $q\in[0,p]$ існує вимірна за Лебегом підмножина A_q множини A така, що $\lambda_1(A_q)=q$.

Д2. Нехай $A\subset[a,b],\ a<b,\ A$ – замкнена в $\mathbf{R}$ множина і $\lambda_1(A)=b-a$. Довести, що $A=[a,b]$.

Д3. Нехай A – вимірна за Лебегом множина в $\mathbf{R}$, $\lambda_1(A)>0$ і $\alpha\in(0,1)$. Довести існування такого інтервалу (a,b), що $\lambda_1(A\cap(a,b))\geq\alpha\lambda_1((a,b))$.

Д4. Нехай A – вимірна за Лебегом множина в $\mathbf{R}$ і $\lambda_1(A)>0$. Довести існування такого $\varepsilon>0$, що

$$(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\{x-y\,|\,x\in A,\ y\in A\}\,.$$

Д5. Довести, що якщо множини $A,B\subset\mathbf{R}$ є вимірними за Лебегом, то множина $A\times B\subset\mathbf{R}$ також вимірна за Лебегом і $\lambda_2(A\times B)=\lambda_1(A)\cdot\lambda_1(B)$.

Д6. Нехай c – потужність континууму. Довести, що:

1) σ-алгебра вимірних за Лебегом множин має потужність 2^c;
2) кільце вимірних за Жорданом множин має потужність 2^c;

3)* множина $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ має потужність континууму c. (Доведення цього факту спирається на трансфінітну індукцію, про яку див. И.П.Натансон "Теория функций вещественной переменной", Москва, 1974.)

Д7. Побудувати невимірну за Лебегом множину на колі, на якому введена лінійна міра Лебега. (Вказівка: Нехай C – коло одиничної довжини, $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$. До одного класу зарахуємо ті точки кола C, які переходять одна в одну при повороті на кут $n\alpha\pi,\ n\in\mathbf{Z}$. З кожного такого класу візьмемо по одній точці. Одержана множина невимірна за Лебегом).

Б5

Г1. Нехай A – вимірна за Лебегом множина на прямій, причому A має принаймні одну внутрішню точку. Довести, що $\lambda_1(A) > 0$.

Г2. Нехай μ_1 і μ_2 – скінченні міри на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Довести, що $\mu_1 = \mu_2$ на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ тоді і лише тоді, коли

$$\forall (a,b] \subset \mathbf{R}\ :\ \mu_1((a,b]) = \mu_2((a,b]).$$

П1. Довести, що множина A борельова, та обчислити $\lambda_1(A)$, якщо:

1) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n}\right);$
2) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{e^n}, n + \frac{1}{2^n}\right);$
3) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (-10, \operatorname{arctg} n) \backslash \mathbf{Q};$
4) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{n^2}\right);$
5) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[3^n, 3^n + \frac{1}{3^n}\right) \backslash \mathbf{Q};$
6) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)}, \frac{1}{\ln(n+1)}\right);$
7) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\ln n, \ln(n+1)) \backslash \mathbf{Z};$
8) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[n^2 - \frac{\pi}{3^{n+5}}, n^2 + \frac{\pi}{3^{n+5}}\right];$
9) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[n^n, n^n + \frac{1}{\ln(n+1)}\right] \cap \mathbf{Q};$
10) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^3 - \frac{1}{5^n}, n^3 + \frac{1}{5^n}\right) \cap (\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}).$

П2. Побудувати послідовність $\{A_n : n \geq 1\}$ борельових множин на прямій таку, що:

1) $\lambda_1(A_n) = 1,\ n \geq 1,\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R}$;
2) $\lambda_1(A_n) = +\infty,\ A_n \supset A_{n+1},\ n \geq 1,\ \lambda_1\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$;
3) $\lambda_1(A_n) = +\infty,\ A_n \supset A_{n+1},\ n \geq 1,\ \lambda_1\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$;
4) $\lambda_1(A_n) = +\infty,\ n \geq 1,\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{N}$;

5)* $\lambda_1(A_n) = \frac{1}{n},\ n \geq 1,\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = P,\ P$ – множина простих чисел;
6)* $\lambda_1(A_n) = +\infty,\ A_n \cap A_m = \varnothing,\ n \neq m,\ m, n \geq 1.$

7) $\lambda_1(A_n) = n,\ n \geq 1,\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R}$;
8) $\lambda_1(A_n) = 1,\ n \geq 1,\ \lambda_1\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 2$;
9) $\lambda_1(A_n) = \frac{1}{n},\ n \geq 1,\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R}$;
10)* $A_n \cap A_m \neq \varnothing,\ m, n \geq 1;\ A_n \cap A_m \cap A_l = \varnothing,\ n \neq m,\ n \neq l,\ m \neq l,\ l, m, n \geq 1.$

П3. Довести, що множина A є борельовою і визначити її міру Лебега:

1) $[-5, +\infty) \backslash \mathbf{N}$;
2) $[2, 5) \backslash [3, 6]$;
3) $[2, 5) \cup [3, 6]$;
4) $[-8, +\infty) \cap \mathbf{Z}$;
5) $\mathbf{Q} \backslash [5, 10]$;
6) $[0, 10] \backslash (\mathbf{Q} \backslash \mathbf{N})$;
7) $\{x \in [-2\pi, 2\pi] \mid \cos 2x > 0\}$;
8) $\{x \in \mathbf{R} \mid \operatorname{arctg} x > 1\}$;
9) $\left\{x \in [0, 3] \mid x^4 \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}\right\}$;
10) $\left\{x > 0 \mid \sin \frac{1}{x} < 0\right\}$.

ЗАНЯТТЯ 6
МІРА ЛЕБЕГА В ПРОСТОРІ $\mathbf{R}^m$

Контрольні запитання

1. *Дати означення міри Лебега в* $\mathbf{R}^m,\ m \geq 2.$
2. *Як визначається* σ*-алгебра борельових множин в* $\mathbf{R}^m,\ m \geq 2?$

А6

В наступних задачах через λ_m позначено міру Лебега в $\mathbf{R}^m$.

О1. Довести, що множина $A \subset \mathbf{R}^2$ є борельовою і $\lambda_2(A) = 0$, якщо:

1) $A = \{a\},\ a \in \mathbf{R};$
2) A – не більш ніж злічення множина;
3) $A = \{a\} \times (b, c],$ де $\{a, b, c\} \subset \mathbf{R},\ b < c;$
4) $A = \{a\} \times \mathbf{R},$ де $a \in \mathbf{R}.$

Довести також, що будь-яка підмножина B прямої A із 4) є вимірною за Лебегом і $\lambda_2(B) = 0$. Навести приклад обмеженої борельової множини, яка не є вимірною за Жорданом.

С1. Довести, що множина $A \subset \mathbf{R}^2$ є борельовою, та обчислити $\lambda_2(A)$, якщо:

1) $A = [a, b] \times [c, d],\ a < b,\ c < d;$
2) $A = (a, b) \times [c, d],\ a < b,\ c < d;$
3) $A = (a, b] \times (c, +\infty),\ a < b;$
4) $A = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}.$

О2. Нехай λ_G – міра Жордана на кільці $\mathcal{K}_G$ підмножин $\mathbf{R}^m$, вимірних за Жорданом. Довести, що довільна множина $A \in \mathcal{K}_G$ є вимірною за Лебегом і $\lambda_G(A) = \lambda_m(A)$. Довести також, що міра Жордана є σ-адитивною на $\mathcal{K}_G$. Навести приклад множини, вимірної за Лебегом, але не вимірної за Жорданом.

О3. Нехай $f \in C([a, b]),\ f(x) \geq 0,\ x \in [a, b],$

$$A = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq f(x),\ x \in [a, b]\}$$

і $B = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$. Довести, що A, B – борельові множини і

$$\lambda_2(A) = \int_a^b f(x)dx,\ \lambda_2(B) = 0.$$

С2. Нехай $A = \left\{(x,y) : |y| \le x^2,\ 0 \le x \le 1\right\}$. Довести, що A – борельова множина, та знайти $\lambda_2(A)$.

С3. Нехай $A_n = \left\{(x,y) \,|\, 0 \le y \le \frac{(x-n)^n}{n},\ x \in [n, n+1]\right\}$, $n \ge 1$, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Довести, що множина A є борельовою, та знайти $\lambda_2(A)$.

О4. Нехай $a \in \mathbf{R}^m,\ T : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ – невироджене лінійне перетворення, λ_G – це міра Жордана в $\mathbf{R}^m$. Довести, що:

1) для довільної множини $E \subset \mathbf{R}^m$, вимірної за Жорданом,
$$\lambda_G(TE + a) = |\det T|\lambda_G(E);$$

2) для довільної множини $E \subset \mathbf{R}^m$
$$\lambda_m^*(TE + a) = |\det T|\lambda_m^*(E);$$

3) для довільної множини $E \subset \mathbf{R}^m$, вимірної за Лебегом,
$$\lambda_m(TE + a) = |\det T|\lambda_m(E).$$

Звідси зробити висновок, що міра Лебега інваріантна відносно паралельних переносів і поворотів.

Д1. Нехай
$$\mathcal{P} = \left\{\varnothing, \prod_{i=1}^{m}(a_i, b_i] \,|\, -\infty < a_i < b_i < +\infty,\ i = 1, ..., m\right\},$$
$\mathcal{K}(\mathcal{P})$ – кільце, породжене півкільцем $\mathcal{P}$; $\Im, \mathcal{F}$ і $\mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$ – клас відповідно всіх відкритих, замкнених і борельових множин простору $\mathbf{R}^m$ ($\mathcal{B}(\mathbf{R}^m) = \sigma a(\Im)$). Довести, що $\mathcal{B}(\mathbf{R}^m) = \sigma a(\mathcal{F}) = \sigma a(k(\mathcal{P})) = \sigma a(\mathcal{P})$.

Д2. В метричному просторі (X, ρ) борельовими множинами називають множини σ-алгебри $\mathcal{B}(X)$, породженої класом усіх відкритих множин цього простору.

Нехай (X, ρ) – метричний простір, $Y \in \mathcal{B}(X)$. Довести, що

1) $\mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X) \cap Y$;
2) $\mathcal{B}(X) = \{A \cup B \,|\, A \in \mathcal{B}(Y),\ B \in \mathcal{B}(X \backslash Y)\}$.

Б6

П1. Побудувати послідовність $\{A_n : n \ge 1\}$ борельових множин на площині таку, що:

1) $\lambda_2(A_n)=1,\ n\geq 1,\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\mathbf{R}^2;$

2) $\lambda_2(A_n)=+\infty,\ A_n\supset A_{n+1},\ n\geq 1,\ \lambda_2\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)=0;$

3) $\lambda_2(A_n)=+\infty,\ n\geq 1,\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z};$

4) $\lambda_2(A_n)=\frac{1}{2^n},\ n\geq 1,\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\mathbf{R}\times\{0\};$

5) $\lambda_2(A_n)=\frac{1}{2^n},\ n\geq 1,\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z};$

6) $\lambda_2(A_n)=n,\ n\geq 1,\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\mathbf{R}^2;$

7) $\lambda_2(A_n)=\frac{1}{n},\ n\geq 1,\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\mathbf{R}^2;$

8)* $\lambda_2(A_n)=+\infty,$ і при $i=1,2$ та $n\neq m:$

$$\{x_i\,|\,(x_1,x_2)\in A_n\}\cap\{x_i\,|\,(x_1,x_2)\in A_m\}=\varnothing.$$

П2. Довести, що множина $A\subset\mathbf{R}^2$ борельова, та знайти $\lambda_2(A)$, якщо:

1) $A=\mathbf{Q}\times\mathbf{R};$
2) $A=\{x\,|\ \sin x\in\mathbf{Q}\}\times\mathbf{R};$
3) $A=(\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q})\times(\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q});$
4) $A=\{x\,|\ \cos x\in\mathbf{Q}\}\times\mathbf{R};$
5) $A=\{x\,|\,e^x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\}\times[0,1];$
6) $A=([1,2]\times[3,7])\backslash((\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q})\times\mathbf{Q});$
7) $A=((\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q})\times\mathbf{R})\cap([0,2]\times[1,3]);$
8) $A=((0,3]\times[1,2))\backslash(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q});$
9) $A=\big\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\big\}\times(\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q});$
10) $A=\big\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2\in\mathbf{Q}\big\}\times\mathbf{R}.$

П3. Довести, що множина $A\subset\mathbf{R}^2$ борельова, та знайти $\lambda_2(A)$, якщо:

1) $A=\{(x,y)\,:\,|y|\leq|\sin x|,\ |x|\leq\pi\};$
2) $A=\{(x,y)\,:\,|y|\leq|\cos x|,\ 0\leq x\leq\pi\};$
3) $A=\{(x,y)\,|\,0\leq xy\leq 1,\ 1\leq x\leq 2\};$
4) $A=\big\{(x,y)\,|\,x\sqrt{y}\leq 1,\ x\geq 1,\ y\geq 0\big\};$
5) $A=\big\{(x,y)\,|\,0\leq ye^x\leq 1,\ x\geq \frac{1}{2}\big\};$

6) $A = \left\{(x,y) \mid 0 \le x^2 y \le 2,\ x \ge 2\right\};$

7) $A = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| \le \frac{1}{2}\right\};$

8) $A = \left\{(x,y)\ :\ |y| \le \frac{1}{1+x^2},\ \frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le \sqrt{3}\right\};$

9) $A = \left\{(x,y)\ :\ |y| \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \operatorname{sh} 1 \le x \le \operatorname{sh} 2\right\};$

10) $A = \{(x,y) \mid 0 \le y \le |1-x|,\ x \in [0,4]\}.$

П4. Нехай $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Довести, що A – борельова множина, та знайти $\lambda_2(A)$, якщо:

1) $A_n = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le \frac{1}{x^2},\ x \in [n, n+1]\right\};$

2) $A_n = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le \frac{1}{x},\ x \in [n, n+1]\right\};$

3) $A_n = \{(x,y) \mid 0 \le y \le e^{-x},\ x \in [n, n+1]\};$

4) $A_n = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le e^{-|x|},\ x \in [-n, n]\right\};$

5) $A_n = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le e^{-x^2},\ x \in [-n^2, \ln n]\right\};$

6) $A_n = \left\{(x,y)\ :\ |y| \le \min\left(1, \frac{1}{x^2}\right),\ x \in [-n, n]\right\};$

7) $A_n = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le \frac{1}{1+x^2},\ x \in [n, n+1]\right\};$

8) $A_n = \{(x,y) \mid \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}} \le y \le \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{(n+1)^2}}},\ x \in [1,2]\};$

9) $A_n = \left\{(x,y) \mid \frac{1}{x^2+n+1} \le y \le \frac{1}{x^2+n},\ x \in [1, +\infty)\right\};$

10) $A_n = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{x}},\ x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right\}.$

ЗАНЯТТЯ 7
МІРА ЛЕБЕГА-СТІЛТЬЄСА НА ПРЯМІЙ

Контрольне запитання

Дати означення міри Лебега-Стілтьєса на прямій.

А7

О1. Нехай $X = \mathbf{R}$, $\mathcal{P} = \{\varnothing,\ (a,b] \mid -\infty < a < b < +\infty\}$, $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – неспадна і неперервна справа функція, а функція $\overline{\lambda}_F : \mathcal{P} \to [0, +\infty)$ така, що

$$\overline{\lambda}_F((a,b]) = F(b) - F(a),\ \overline{\lambda}_F(\varnothing) = 0.$$

Продовжити міру $\overline{\lambda}_F$ на кільце $\mathcal{K}(\mathcal{P})$, породжене півкільцем $\mathcal{P}$. Довести, що будь-яка борельова множина на прямій є λ^*_F-вимірною, де λ^*_F – зовнішня міра, породжена мірою $\overline{\lambda}_F$.

Символом λ_F позначатимемо продовження міри $\overline{\lambda}_F$ на σ-алгебру всіх λ^*_F-вимірних множин.

С1. Нехай виконуються припущення із задачі О2. Довести, що $\forall x_0 \in \mathbf{R}\ :\ \lambda_F(\{x_0\}) = F(x_0) - F(x_0-)$. Вивести звідси, що $\lambda_F(\{x_0\}) = 0$ тоді і тільки тоді, коли функція F неперервна в точці x_0.

С2. Нехай виконуються припущення задачі О1. Довести, що:

1) $\lambda_F((a,b)) = F(b-) - F(a)$;
2) $\lambda_F([a,b)) = F(b-) - F(a-)$;
3) $\lambda_F([a,b]) = F(b) - F(a-)$;
4) $\lambda_F(\mathbf{R}) = F(+\infty) - F(-\infty)$;
5) $\lambda_F([a,+\infty)) = F(+\infty) - F(a-)$;
6) $\lambda_F((-\infty,a]) = F(a) - F(-\infty)$,

де $F(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)$.

С3. Нехай $F(x) = [x],\ x \in \mathbf{R}$, де $[x]$ – ціла частина числа x. Перевірити, що функція F неспадна і неперервна справа на $\mathbf{R}$. Знайти:

1) $\lambda_F(\{x\}),\ x \in \mathbf{R}$;
2) $\lambda_F([0,20] \cap \mathbf{Q})$;
3) $\lambda_F((0,1))$;
4) $\lambda_F([0,1])$;
5) $\lambda_F(\mathbf{N})$;
6) $\lambda_F(\mathbf{Q})$.

О2. За умов задачі С3 довести, що σ-алгебра λ^*_F-вимірних множин збігається з $2^{\mathbf{R}}$ і $\forall A \subset \mathbf{R}\ :\ \lambda_F(A) = |A \cap \mathbf{Z}|$, де $|A \cap \mathbf{Z}|$ – число елементів множини $A \cap \mathbf{Z}$.

Д1. За умов задачі О1 довести, що множина $\{x \in \mathbf{R} \mid \lambda_F(\{x\}) > 0\}$ не більше, ніж злічення.

Д2. Нехай $F(x) = x + [x],\ x \in \mathbf{R}$. Довести, що для довільної вимірної за Лебегом множини $A \subset \mathbf{R}$ справджується рівність $\lambda_F(A) = \lambda_1(A) + |A \cap \mathbf{Z}|$.

Д3. Нехай μ – скінченна міра на σ-алгебрі $\mathcal{S}$ підмножин X, функція $f : X \to \mathbf{R}$ така, що $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}) \ : \ f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$ (такі функції називають борельовими). Покладемо $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, $F(t) := \mu(\{x \mid f(x) \le t\}),\ t \in \mathbf{R}$. Довести, що:

1) ν – міра на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.
2) функція F неспадна і неперервна справа на $\mathbf{R}$, $F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = \mu(X)$;
3) $\lambda_F = \nu$ на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$;
4) якщо $E \in \mathcal{S},\ f = \chi_E$, то
$$\nu(B) = \chi_B(1)\mu(E) + \chi_B(0)\mu(X \backslash E),\ B \in \mathcal{B}(\mathbf{R});$$
5) для кожної неспадної і неперервної справа функції $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такої, що $F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$, існують множина X, σ-алгебра $\mathcal{S}$ підмножин X, скінченна міра μ на $\mathcal{S}$ і борельова функція $f : X \to \mathbf{R}$ такі, що $F(t) = \mu(\{x \mid f(x) \le t\}),\ t \in \mathbf{R}$.

Б7

Г1. Нехай $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Нехай функція множин $\lambda_F : \mathcal{P}_1 \to [0, +\infty)$, де $\mathcal{P}_1 = \{\varnothing,\ (a, b] \mid -\infty < a < b < +\infty\}$, визначена таким чином: $\lambda_F((a, b]) := F(b) - F(a)$, $\lambda_F(\varnothing) := 0$. Довести, що якщо λ_F є мірою на $\mathcal{P}_1$, то функція F неспадна та неперервна справа на $\mathbf{R}$. Нехай відомо, що $\mathcal{P} = \{\varnothing,\ [a, b) \mid -\infty < a < b < +\infty\}$ і функція множин $\lambda_F : \mathcal{P} \to [0, +\infty)$, визначена наступним чином: $\lambda_F([a, b)) = F(b) - F(a)$, $\lambda_F(\varnothing) = 0$, є мірою на $\mathcal{P}$. Що можна сказати про функцію F?

Г2. Нехай F, G – неспадні неперервні справа функції на $\mathbf{R}$, λ_F і λ_G – відповідні міри Лебега-Стілтьєса на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Чи правильно, що:

1) $\lambda_F((a, b]) = \lambda_G((a, b])$, якщо $F(x) = G(x),\ x \in (a, b]$;
2) $\lambda_F([a, b]) = \lambda_G([a, b])$, якщо $F(x) = G(x),\ x \in [a, b]$?

П1. Нехай $F(x) = [x],\ x \in \mathbf{R}$. Визначити $\lambda_F(A)$, якщо:

1) $A = \mathbf{Q} \cap [-n, n],\ n \in \mathbf{N}$;
2) $A = \mathbf{Q} \cap (-n, n),\ n \in \mathbf{N}$;
3) $A = [-n, n),\ n \in \mathbf{N}$;
4) $A = (-n, n) \backslash \mathbf{Q},\ n \in \mathbf{N}$;
5) $A = \{x > 0 \mid \ \ln x < 2\}$;
6) $A = [n, n^2),\ n \in \mathbf{N} \backslash \{1\}$;
7) $A = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 4x - 5 < 0\right\}$;
8) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \ \cos \pi x > 0\} \cap [0, 10]$;
9) $A = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \ \sin \pi x < \frac{1}{2}\right\} \cap [0, 8]$;
10) $A = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \sqrt{|x|} \in (\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q})\right\} \cap [-20, 20]$.

П2. Нехай
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ e^x[x], & x > 0. \end{cases}$$
Довести, що множина A є борельовою, та визначити $\lambda_F(A)$, якщо:

1) $A = [0,1]$;
2) $A = [0,2)$;
3) $A = [0,3] \cap \mathbf{Q}$;
4) $A = [-2,2] \cap \mathbf{Q}$;
5) $A = [-2,2] \backslash \mathbf{Q}$;
6) $A = (-\infty, 1] \cap \mathbf{Q}$;
7) $A = (-\infty, 2] \backslash \mathbf{Q}$;
8) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \in \mathbf{Q}\} \cap [0,9]$;
9) $A = \{x \ge 0 \mid \sqrt{x} \in \mathbf{Q}\} \cap [0,10]$;
10) $A = \{x > 0 \mid \log_2 x \in \mathbf{Q}\} \cap [0,10]$.

П3. Нехай $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – неспадна і неперервна справа функція, λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса на $\mathbf{R}$. Довести, що довільна множина $A \subset \mathbf{R}$ є λ_F^*-вимірною, і обчислити $\lambda_F(A)$, якщо:

1) $F(x) = \begin{cases} 1, & -\infty < x < 0, \\ 2, & 0 \le x < +\infty; \end{cases}$
2) $F(x) = \begin{cases} -1, & -\infty < x < 1, \\ 3, & 1 \le x < +\infty; \end{cases}$
3) $F(x) = \begin{cases} -5, & -\infty < x < -5, \\ 10, & -5 \le x < +\infty; \end{cases}$
4) $F(x) = \begin{cases} -3, & -\infty < x < -7, \\ 7, & -7 \le x < +\infty; \end{cases}$
5) $F(x) = \begin{cases} -1, & -\infty < x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 1, \\ 2, & 1 \le x < +\infty; \end{cases}$
6) $F(x) = \begin{cases} -5, & -\infty < x < -2\pi, \\ 5, & -2\pi \le x < \pi, \\ 10, & \pi \le x < +\infty; \end{cases}$
7) $F(x) = \begin{cases} -8, & -\infty < x < -10, \\ 0, & -10 \le x < 10, \\ 11, & 10 \le x < +\infty; \end{cases}$
8) $F(x) = \begin{cases} -\sqrt{2}, & -\infty < x < e, \\ 1, & e \le x < \pi, \\ 3, & \pi \le x < +\infty; \end{cases}$
9) $F(x) = [x^3],\ x \in \mathbf{R}$;
10) $F(x) = [\operatorname{arctg} x],\ x \in \mathbf{R}$.

ЗАНЯТТЯ 8
ВИМІРНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ
Контрольні запитання

1. *Дати означення $\mathcal{F}$-вимірної, вимірної за Лебегом і вимірної за Борелем (борельової) функцій.*

2. *Навести основні теореми про вимірні функції.*

3. *Сформулювати критерій вимірності функцій в термінах простих функцій.*

А8

О1. Нехай $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір, $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j,\ i, j \geq 1,\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = X$, $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{R}$, і функція $f : X \to \mathbf{R}$ така, що $f(x) = a_n$ при $x \in A_n,\ n \geq 1$. Довести, що функція f є $\mathcal{F}$-вимірною.

С1. Нехай $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір, $A \subset X$, χ_A – характеристична функція множини A. Довести, що функція χ_A є $\mathcal{F}$-вимірною тоді і тільки тоді, коли $A \in \mathcal{F}$.

С2. Нехай $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір, $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ – $\mathcal{F}$-вимірна функція, $A \in \mathcal{F}$, f_A – це звуження функції f на множину A. Довести, що функція f_A також є $\mathcal{F}$-вимірною.

О2. Довести, що функція f є борельовою, якщо:

1) $f \in C(\mathbf{R})$;
2) $f \in C([a, b])$;
3) f – монотонна на $\mathbf{R}$ функція;
4) f – функція обмеженої варіації на $[a, b]$.

С3. За допомогою теореми про вимірність суперпозиції вимірних функцій довести, що є борельовими такі функції:

1) $\sin[x],\ x \in \mathbf{R}$;
2) $\operatorname{sign} \cos x^2,\ x \in \mathbf{R}$;
3) $\exp([3 \sin x]),\ x \in \mathbf{R}$;
4) $\sin f(x),\ x \in \mathbf{R}$,

де f – борельова функція.

С4. Нехай $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір, $f : X \to \mathbf{R}$, $f_+ = \max(f, 0)$, $f_- = -\min(f, 0)$. Довести, що функція f є $\mathcal{F}$-вимірною тоді і тільки тоді, коли функції f_+ і f_- є $\mathcal{F}$-вимірними.

С5. Нехай $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір, функції $f : X \to \mathbf{R}$ і $g : X \to \mathbf{R}$ є $\mathcal{F}$-вимірними. Довести, що

$$\{x \in X \mid f(x) < g(x)\} \in \mathcal{F},\ \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{F},$$

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{F}.$$

О3. Нехай $f(x) = |x|,\ x \in \mathbf{R}$. Побудувати послідовність простих функцій, яка поточково збігається до функції f на $\mathbf{R}$. Чи буде збіжність рівномірною на $\mathbf{R}$?

О4. Нехай $\{f_n : n \geq 1\}$ – послідовність невід'ємних борельових функцій на $\mathbf{R}$. Покладемо $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається, і $f(x) = +\infty$, якщо цей ряд розбігається. Довести, що f – борельова функція.

О5. Нехай $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ і $\forall x \in \mathbf{R}\ \exists f'(x)$. Довести, що функція f' є борельовою.

Д1. Нехай $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір. Довести, що:

1) якщо функція $f : X \to \mathbf{R}$ є $\mathcal{F}$-вимірною, то $\forall a \in \mathbf{R} : \{x \in X \mid f(x) = a\} \in \mathcal{F}$;
2) обернене твердження, взагалі кажучи, є хибним.

Д2. Нехай $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір і $f : X \to \mathbf{R}$. Довести, що з $\mathcal{F}$-вимірності $|f|$, взагалі кажучи, не випливає $\mathcal{F}$-вимірність f.

Д3. Нехай $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір і V – деяка сукупність $\mathcal{F}$-вимірних функцій. Довести, що:

1) функції $f^*(x) = \sup\limits_{f \in V} f(x)$ і $f_*(x) = \inf\limits_{f \in V} f(x),\ x \in X$, не є, взагалі кажучи, $\mathcal{F}$-вимірними;
2) якщо $X = \mathbf{R}$ і $V \subset C(\mathbf{R})$, то f^* і f_* є борельовими.

Д4. Нехай функція $f : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$ обмежена. Довести, що існує послідовність простих функцій, яка збігається до f рівномірно на $\mathbf{R}$.

Д5. Канторовою функцією називають функцію c, яка визначена на відрізку $[0, 1]$ таким чином. Зобразимо число $x \in [0, 1]$ нескінченним трійковим дробом $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\alpha_i}{3^i},\ \alpha_i \in \{0, 1, 2\},\ i \geq 1$. Нехай для числа x число $k(x)$ – найменший індекс у цьому зображенні, для якого $\alpha_k = 1$, а якщо $\alpha_i \neq 1,\ i \geq 1$, то $k(x) = +\infty$. Тепер покладемо

$$c(x) = \sum_{i=1}^{k(x)-1} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{k(x)}}$$

(при цьому для тих x, для яких можливі два різні зображення за допомогою трійкових дробів, значення $c(x)$ не залежить від вибору зображення). Довести, що функція c не спадає, неперервна на $[0,1]$ і

$$\forall x \in [0,1] \backslash D \ : \ \exists c'(x) = 0,$$

де D – канторова множина (див. задачу А5.О5). Знайти міру Лебега образу канторової множини при відображенні c.

Д6. Нехай $\mathcal{S}$ – σ-алгебра вимірних за Лебегом множин в $\mathbf{R}$. Довести, що функція $f(x) = ax, \ x \in \mathbf{R}$, де $a \in \mathbf{R}$, є $(\mathcal{S}, \mathcal{S})$-вимірною.

Б8

Г1. Нехай $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ – σ-алгебри підмножин X і $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. Яке співвідношення між класами $\mathcal{F}_1$-вимірних і $\mathcal{F}_2$-вимірних функцій?

Г2. Нехай $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір і функція $f : X \to \mathbf{R}$ така, що $\forall a \in \mathbf{Q} \ : \ \{x \in X \mid f(x) < a\} \in \mathcal{F}$. Довести, що функція f є $\mathcal{F}$-вимірною.

Г3. Довести, що якщо $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – борельова функція, то функція $g(x,y) := f(x), \ (x,y) \in \mathbf{R}^2$, також борельова.

П1. Довести, що функція $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ борельова, якщо для $(x,y) \in \mathbf{R}^2$:

1) $f(x,y) = \operatorname{sign} \sin \pi(x^2+y^2)$;
2) $f(x,y) = \operatorname{sign} \cos \pi(x^2+y^2)$;
3) $f(x,y) = (x^2+y^2)[x]$;
4) $f(x,y) = (|x|+|y|)e^{[y]}$;
5) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \sin[x^2+y^2]$;
6) $f(x,y) = \operatorname{arctg}([x]\cos(x^2+y^2))$;
7) $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(1+[x^2+y^2])$;
8) $f(x,y) = [x]^2+[y]^3$;
9) $f(x,y) = \operatorname{ch} \sin([x]+[y])$;
10) $f(x,y) = \cos \operatorname{sh}([x^2+y^2])$.

П2. Нехай $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір і $f_i : X \to \mathbf{R}$ – $\mathcal{F}$-вимірні функції, $i = \overline{1,n}$. Довести $\mathcal{F}$-вимірність таких функцій:

1) $\dfrac{f_1}{\ln(2+|f_2|)}$;
2) $\max(f_1, \ldots, f_n)$;
3) $\min(f_1, \ldots, f_n)$;
4) $\dfrac{f_1}{\operatorname{ch} f_2}$;
5) $\sin(|f_1| + ... + |f_n|)$;
6) $(1+|f_1|)^{f_2}$;
7) $\dfrac{f_1 f_2}{1+|\max(f_3,f_4)|}$;
8) $\dfrac{f_1 + ... + f_n}{10 + \operatorname{arctg} f_1}$;
9) $\dfrac{\operatorname{sh} f_1}{1+|f_2|}$;
10) $\dfrac{\operatorname{arctg} f_1}{1+|\max(f_2,f_3)|}$.

П3. Нехай $f : \mathbf{R}^m \to [0, +\infty)$. Побудувати послідовність простих функцій, яка збігається поточково до функції f на $\mathbf{R}^m$ (у випадку 1)-6) $m = 1$, а у 7)-10) $m = 2$), якщо:

1) $f(x)=x^2,\ x\in\mathbf{R}$;

2) $f(x)=\sqrt{|x|},\ x\in\mathbf{R}$

3) $f(x)=\max(0,x),\ x\in\mathbf{R}$;

4) $f(x)=|\sin x|,\ x\in\mathbf{R}$;

5) $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geq 0;\end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ \operatorname{arctg} x, & x>0;\end{cases}$

7) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$;

8) $f(x,y)=|x|+|y|,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$;

9) $f(x,y)=x^2+y^2,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$;

10) $f(x,y)=|\sin\sqrt{x^2+y^2}|,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$.

П4. Довести, що функція f є борельовою, якщо:

1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{|x|+n},\ x\in\mathbf{R}$;

2) $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x^2},\ x\in\mathbf{R}$;

3) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n[x]^4)}{n\sqrt{n}},\ x\in\mathbf{R}$;

4) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^4},\ x\in\mathbf{R}$;

5) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+[x]^4}},\ x\in\mathbf{R}$;

6) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n[x]}{1+n^5[x]^2},\ x\in\mathbf{R}$;

7) $f(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n(x^2+y^2))}{\sqrt[4]{n^4+[x^2+y^2]}},\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$;

8) $f(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n}\operatorname{arctg}(n([x]+y)),\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$;

9) $f(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin([x]^2+[y])^n,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$;

10) $f(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n(1+n[x^2+y^2])},\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$.

ЗАНЯТТЯ 9
ЕКВІВАЛЕНТНІ ФУНКЦІЇ. ЗБІЖНІСТЬ МАЙЖЕ СКРІЗЬ

Контрольні запитання

1. *Які функції називають еквівалентними відносно деякої міри? (Функції f_1 і f_2 еквівалентні відносно міри μ, якщо знайдеться така множина N нульової міри μ, що для всіх $x \notin N$ виконується $f_1(x) = f_2(x)$).*
2. *Дати означення збіжності майже скрізь послідовності функцій.*
3. *Сформулювати теорему Єгорова.*

A9

У наступних задачах $(X, \mathcal{F})$ - вимірний простір і λ - міра на σ-алгебрі $\mathcal{F}$.

O1. Нехай $\{N_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$, $\lambda(N_n) = 0$, $n \geq 1$. Довести, що $\lambda\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n\right) = 0.$

O2. Нехай $f_n : X \to \mathbf{R}$ і $f_n = 0 \pmod{\lambda}$, $n \geq 1$. Для будь-якого $x \in X$ покладемо $g_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, якщо ряд збігається, $g_1(x) = +\infty$, якщо цей ряд розбігається, і $g_2(x) = \sup\limits_{n \geq 1} f_n(x)$. Довести, що $g_i = 0 \pmod{\lambda}$, $i = 1, 2$.

O3. Нехай $X = \mathbf{R}$, λ_1 – міра Лебега на $\mathbf{R}$, $\{f, g\} \subset C(\mathbf{R})$ і $f = g \pmod{\lambda_1}$. Довести, що $\forall x \in \mathbf{R} \ : \ f(x) = g(x)$.

C1. Нехай $F(x) = [x]$, $x \in \mathbf{R}$, і λ_F – міра Лебега-Стілтьєса на σ-алгебрі $2^{\mathbf{R}}$ (див. задачу A7.O2). Довести, що:

1) $f = g \pmod{\lambda_{\mathrm{F}}} \ \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z} \ : \ f(k) = g(k)$, де $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$;
2) $\cos^2 \pi x = 1 \pmod{\lambda_{\mathrm{F}}}$;
3) $x = [x] \pmod{\lambda_{\mathrm{F}}}$.

O4. Нехай $\{f_n : n \geq 1\}$, $\{g_n : n \geq 1\}$ – послідовності вимірних функцій і виконуються такі умови:

1) $\forall n \geq 1 \ : \ f_n \leq g_n \pmod{\lambda}$;
2) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0 \pmod{\lambda}$, $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g_0 \pmod{\lambda}$.

Довести, що $f_0 \leq g_0 \pmod{\lambda}$.

C2. Нехай $f_n : X \to \mathbf{R}$, $n \geq 0$, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0 \pmod{\lambda}$ і $\varphi \in C(\mathbf{R})$. Довести, що $\varphi(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(f_0) \pmod{\lambda}$.

C3. Довести, що:

1) $\sin^n x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \pmod{\lambda_1}$;

2) $n\chi_{[0,\frac{1}{n}]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \pmod{\lambda_1}$,

де λ_1 – міра Лебега на $\mathbf{R}$.

O5. Нехай функція F і міра Лебега-Стілтьєса λ_F такі самі, як у задачі C1. Для функцій $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $n \geq 0$, довести, що

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0 \pmod{\lambda_{\mathrm{F}}} \;\Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z} \;:\; f_n(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(k).$$

C4. Нехай $X = [-1,1]$, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра підмножин X, вимірних за Лебегом і λ_1 – міра Лебега. Для послідовності функцій $f_n(x) = |x|^n$, $x \in [-1,1]$, $n \geq 1$, довести, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \pmod{\lambda_1}$, та для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайти множину $A_\varepsilon \in \mathcal{F}$ таку, що $\lambda_1(X \backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$ і $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ рівномірно на A_ε.

Д1. Нехай $\{f_n \,:\, n \geq 0\}$ – послідовність $\mathcal{F}$-вимірних функцій. Довести такі критерії збіжності майже скрізь у випадку скінченної міри λ:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0 \pmod{\lambda} \;\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \,:\, \lambda\left(\varliminf_{n\to\infty} \{x \in X \,:\, |f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon\}\right) = \lambda(X) \;\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;:\; \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X \mid |f_k(x) - f_0(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Д2. Нехай $\{f_n \,:\, n \geq 0\}$ – послідовність $\mathcal{F}$-вимірних функцій і

$$\forall \varepsilon > 0 \;:\; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x \in X \mid |f_k(x) - f_0(x)| \geq \varepsilon\}) < +\infty.$$

Довести, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0 \pmod{\lambda}$.

Д3. Нехай $\{f_n \,:\, n \geq 0\}$ – послідовність функцій і

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists A_\varepsilon \in \mathcal{F},\; \lambda(X \backslash A_\varepsilon) < \varepsilon,\; \forall x \in A_\varepsilon \;:\; f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(x).$$

Довести, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0 \pmod{\lambda}$.

Д4. Довести, що

1) функція, яка є поточковою границею послідовності $\{f_n : n \geq 1\} \subset C(\mathbf{R})$, є борельовою функцією;

2)* функція Діріхле $D(x) = \chi_{\mathbf{Q}}(x),\ x \in \mathbf{R}$, не є поточковою границею послідовності неперервних функцій (тобто не є функцією першого класу Бера);

3) функція Діріхле зображається у вигляді

$$D(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} [\cos(2\pi n! x)]^m,\ x \in \mathbf{R},$$

(тобто є функцією другого класу Бера).

Д5. Нехай $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ – функція, вимірна за Лебегом. Довести, що існує послідовність функцій $\{f_n : n \geq 1\} \subset C([a,b])$ така, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \pmod{\lambda_1}$.

Б9

Г1. Нехай $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – простір з мірою, $M = \left\{ f \mid f : X \to \overline{\mathbf{R}} \right\}$. Довести, що в просторі функцій M відношення $f(x) = g(x) \pmod{\lambda}$ рефлексивне, симетричне та транзитивне. (Тоді це відношення еквівалентності і простір розбивається на класи еквівалентності).

П1. Знайти функцію $g \in C(\mathbf{R}^m)$, щоб $g = f \pmod{\lambda_{\mathrm{m}}}$, якщо (у випадку 1)-6) $m = 1$, а 7)-10) – $m = 2$):

1) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x^2 \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x^2 \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \in \mathbf{Z}, \\ \pi, & x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Z}; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + |x|), & e^x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}, \\ \sin x^2, & e^x \in \mathbf{Q}; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} \arcsin 2^{-|x|}, & x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{N}, \\ 2^{|x|}, & x \in \mathbf{N}; \end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases}(\operatorname{ch}x)^{\operatorname{sh}x}, & e^x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Z},\\ 0, & e^x\in\mathbf{Z};\end{cases}$

7) $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & (x,y)\in\mathbf{Q}\times\mathbf{Q},\\ x^2, & (x,y)\notin\mathbf{Q}\times\mathbf{Q};\end{cases}$

8) $f(x,y)=\begin{cases}\sin x+\sin y, & (x,y)\in\mathbf{Q}\times\mathbf{R},\\ \cos x, & (x,y)\notin\mathbf{Q}\times\mathbf{R};\end{cases}$

9) $f(x,y)=\begin{cases}xy, & (x,y)\in(\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q})\times\mathbf{R},\\ x+y, & (x,y)\notin(\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q})\times\mathbf{R};\end{cases}$

10) $f(x,y)=\begin{cases}[x]+[y], & (x,y)\notin(\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q})\times\mathbf{R},\\ \operatorname{ch}x, & (x,y)\in(\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q})\times\mathbf{R}.\end{cases}$

Г2. Нехай $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ λ_F – міра Лебега-Стілтьєса, породжена функцією F, і $\{f,g\}\subset C(\mathbf{R})$. Довести, що

$$f=g\ (\operatorname{mod}\lambda_{\mathrm{F}})\ \Leftrightarrow \forall x\ge 0\ :\ f(x)=g(x).$$

П2. Нехай $\{f_n : n\ge 1\}$, $\{g_n : n\ge 1\}$ – послідовності $\mathcal{F}$-вимірних функцій і f – $\mathcal{F}$-вимірна функція. Довести $\mathcal{F}$-вимірність таких множин:

1) $\{x\in X \mid f_n(x)\ge 0,\ n\ge 1\}$;
2) $\{x\in X \mid f_n(x)\ge f(x),\ n\ge 1\}$;
3) $\left\{x\in X \mid \sup\limits_{n\ge 1} f_n(x)\ne f(x)\right\}$;
4) $\left\{x\in X \mid \inf\limits_{n\ge 1} f_n(x)< f(x)\right\}$;
5) $\left\{x\in X \mid \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)> f(x)\right\}$;
6) $\left\{x\in X \mid \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)< f(x)\right\}$;
7) $\{x\in X \mid f_n(x)<g_n(x),\ n\ge 1\}$;
8) $\left\{x\in X \mid \inf\limits_{n\ge 1} f_n(x)\ne \sup\limits_{n\ge 1} g_n(x)\right\}$;

9) $\left\{x \in X \mid \inf\limits_{n\geq 1} f_n(x) < \inf\limits_{n\geq 1} g_n(x)\right\}$;

10) $\left\{x \in X \mid \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x) < \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} g_n(x)\right\}$.

Г3. Нехай $\{f_n : n \geq 1\}$ – послідовність $\mathcal{F}$-вимірних функцій. Довести, що $\left\{x \in X \mid \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbf{R}\right\} \in \mathcal{F}$.

Г4. Нехай λ_1 – міра Лебега на $\mathbf{R}$, функція $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Чи правильні наступні твердження:

1) якщо існує функція $g \in C(\mathbf{R})$ така, що $f = g \pmod{\lambda_1}$, то f неперервна майже скрізь відносно міри λ_1;
2) якщо f неперервна майже скрізь відносно міри λ_1, то існує функція $g \in C(\mathbf{R})$ така, що $f = g \pmod{\lambda_1}$?

П3. Нехай $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $n \geq 1$. Знайти таку функцію $g \in C(\mathbf{R})$, щоб $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g \pmod{\lambda_1}$, якщо:

1) $f_n(x) = \cos^n x,\ x \in \mathbf{R}$;
2) $f_n(x) = x^2 \sin^n x^2,\ x \in \mathbf{R}$;
3) $f_n(x) = \cos^n x + \sin^n x,\ x \in \mathbf{R}$;
4) $f_n(x) = \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^n + \sin^n 2x,\ x \in \mathbf{R}$;
5) $f_n(x) = \dfrac{n^2 \sin^2 x}{1 + n^2 \sin^2 x},\ x \in \mathbf{R}$;
6) $f_n(x) = \dfrac{\sin^n x}{2 + \sin^n x},\ x \in \mathbf{R}$;
7) $f_n(x) = \sin^n \frac{1}{x},\ x \in \mathbf{R}\backslash\{0\},\ f_n(0) = 0$;
8) $f_n(x) = \sin^n 3x,\ x \in \mathbf{R}$;
9) $f_n(x) = e^{-n|x^2-1|},\ x \in \mathbf{R}$;
10) $f_n(x) = e^{-n \sin^{2n} \frac{1}{x}},\ x \in \mathbf{R}\backslash\{0\},\ f_n(0) = 0$.

П4. Довести збіжність майже скрізь відносно міри Лебега λ_1 на $\mathbf{R}$ послідовності функцій $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $n \geq 1$, і для довільного $\varepsilon > 0$ знайти множину $A_\varepsilon \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, $\lambda_1(X\backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$, на якій послідовність $\{f_n : n \geq 1\}$ збігається рівномірно, якщо:

1) $f_n(x) = \cos^n \pi x \chi_{[0,1]}(x),\ x \in \mathbf{R}$;
2) $f_n(x) = \sin^n \pi x \chi_{[0,1]}(x),\ x \in \mathbf{R}$;

3) $f_n(x) = x^n \chi_{[0,1]}(x),\ x \in \mathbf{R}$;

4) $f_n(x) = \dfrac{n^2 \sin \pi x}{1 + n^2 \sin \pi x} \chi_{[0,1]}(x),\ x \in \mathbf{R}$;

5) $f_n(x) = \dfrac{n|\cos \pi x|}{1 + n|\cos \pi x|} \chi_{[0,1]}(x),\ x \in \mathbf{R}$;

6) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n} \chi_{(0,1]}(x),\ x \in \mathbf{R}$;

7) $f_n(x) = (x^n - x^{2n}) \chi_{[0,1]}(x),\ x \in \mathbf{R}$;

8) $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^2 x^2} \chi_{[0,1]}(x),\ x \in \mathbf{R}$;

9) $f_n(x) = e^{n(x-2)} \chi_{[0,2]}(x),\ x \in \mathbf{R}$;

10) $f_n(x) = (x^n - x^{n^2}) \chi_{[0,1]}(x),\ x \in \mathbf{R}$.

П5. Нехай $f_n : X \to \mathbf{R},\ g_n : X \to \mathbf{R},\ n \geq 0,$ – це $\mathcal{F}$-вимірні функції, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0 \pmod{\lambda}$ і $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g_0 \pmod{\lambda}$. Довести, що:

1) $\max(f_n, g_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \max(f_0, g_0) \pmod{\lambda}$;

2) $\min(f_n, g_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \min(f_0, g_0) \pmod{\lambda}$;

3) $f_n + g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0 + g_0 \pmod{\lambda}$;

4) $\operatorname{ch}(f_n g_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{ch}(f_0 g_0) \pmod{\lambda}$;

5) $g_n \sin f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g_0 \sin f_0 \pmod{\lambda}$;

6) $f_n g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0 g_0 \pmod{\lambda}$;

7) $\operatorname{ch} g_n \operatorname{arctg} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{ch} g_0 \operatorname{arctg} f_0 \pmod{\lambda}$;

8) $e^{f_n^2} \ln(1 + |g_{2n}|) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{f_0^2} \ln(1 + |g_0|) \pmod{\lambda}$;

9) $(1 + |f_n|)^{g_{3n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} (1 + |f_0|)^{g_0} \pmod{\lambda}$;

10) $(1 + |f_n| + |f_{n+1}|)^{|g_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} (1 + 2|f_0|)^{|g_0|} \pmod{\lambda}$.

П6. Для функцій F з задачі Б7.П3 описати збіжність майже скрізь відносно міри λ_F.

ЗАНЯТТЯ 10
ЗБІЖНІСТЬ ЗА МІРОЮ ПОСЛІДОВНОСТІ ФУНКЦІЙ

Контрольні запитання

1. *Дати означення збіжності за мірою послідовності функцій.*
2. *Як пов'язані між собою збіжності за мірою і майже скрізь?*

А10

У наступних задачах λ – міра на вимірному просторі $(X, \mathcal{F})$; усі функції, які розглядаються, є $\mathcal{F}$-вимірними і набувають тільки скінченних значень.

О1. Нехай $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} f$ і $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} g$. Довести, що:

1) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} 0 \;\Rightarrow f_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} 0$;

2) $f_n + g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} f + g$;

3) $|f_n| \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} |f|$.

С1. Нехай $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} f$. Довести, що $\cos f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} \cos f$.

О2. Нехай λ_1 – міра Лебега на $\mathbf{R}$ і $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $n \geq 1$. Довести, що $\forall x \in \mathbf{R}\ :\ f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Чи правильно, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda_1} 0$?

С2. Нехай $f_n(x) = \sin^n x$, $x \in \mathbf{R}$, $n \geq 1$. Довести, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \pmod{\lambda_1}$. Чи правильно, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda_1} 0$?

О3. Побудувати приклад послідовності функцій, яка збігається за мірою, але в жодній точці не збігається. Знайти підпослідовність цієї послідовності, яка збігається майже скрізь.

О4. Нехай $\lambda(X) < +\infty$, f – деяка функція і $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} g$. Довести, що:

1) $\lambda(\{x \in X\ :\ |f(x)| \geq n\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

2) $g_n f \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} g f$.

С3. Довести, що твердження із задачі О4, взагалі кажучи, є хибними у випадку нескінченної міри.

С4. Нехай $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} f$ і $\forall n \geq 1 \;:\; |f_n| \leq g \pmod{\lambda}$. Довести, що $|f| \leq g \pmod{\lambda}$.

Д1. Нехай послідовність $\mathcal{F}$-вимірних функцій $\{f_n : n \geq 1\}$ така, що $\forall n \geq 1 \;:\; 0 \leq f_{n+1} \leq f_n \pmod{\lambda}$ і $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} 0$. Довести, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \pmod{\lambda}$.

Д2. Нехай $\lambda(X) < +\infty$ і $\{f_n : n \geq 1\}$ – послідовність $\mathcal{F}$-вимірних функцій. Довести, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} f$ тоді і тільки тоді, коли з довільної підпослідовності послідовності $\{f_n : n \geq 1\}$ можна виділити підпослідовність, яка збігається до f майже скрізь відносно міри λ.

Д3. Нехай $\lambda(X) < +\infty$, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} f$, $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} g$ і $\varphi \in C(\mathbf{R}^2)$. Довести, що $\varphi(f_n, g_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} \varphi(f, g)$.

Д4. Нехай $X = \mathbf{N}$, $\mathcal{F} = 2^X$ і
$$\forall A \subset X,\ A \neq \varnothing \;:\; \mu(A) = \sum_{k\in A} 2^{-k},\ \mu(\varnothing) = 0.$$
Описати збіжність за мірою μ.

Д5. Нехай $\lambda(X) < +\infty$. Довести, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \pmod{\lambda}$ тоді і тільки тоді, коли $\sup\limits_{k\geq n} |f_k - f| \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} 0$.

Д6. Нехай $\{f_{kj} \;:\; k, j \geq 1\}$, $\{f_k \;:\; k \geq 1\}$ – послідовності $\mathcal{F}$-вимірних функцій, $\forall k \in \mathbf{N} \;:\; f_{kj} \xrightarrow[j\to\infty]{\lambda} f_k$ і $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{\lambda} f$. Довести, що з сукупності $\{f_{kj} \;:\; k, j \geq 1\}$ можна виділити послідовність $\left\{f_{k(n),j(n)} \;:\; n \geq 1\right\}$, збіжну до f за мірою λ.

Б10

Г1. Нехай $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$. Довести, що послідовність характеристичних функцій $\{\chi_{A_n} : n \geq 1\}$ фундаментальна за мірою λ тоді і тільки тоді, коли $\lambda(A_j \triangle A_k) \xrightarrow[j,k\to\infty]{} 0$.

Г2. Нехай $F(x) = [x],\ x \in \mathbf{R},\ \lambda_F$ – відповідна міра Лебега-Стілтьєса на $\mathbf{R}$ і $\{f_n : n \geq 0\}$ – послідовність борельових функцій. Довести, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda_F} f_0$ тоді і тільки тоді, коли послідовність $\{f_n : n \geq 1\}$ збігається рівномірно до f_0 на $\mathbf{Z}$.

П1. Довести, що послідовність борельових функцій $\{f_n : n \geq 1\}$ збігається за мірою Лебега λ_1, та знайти її границю, якщо для $x \in \mathbf{R}$ і $n \geq 1$:

1) $f_n(x) = \chi_{[\sqrt{n},\sqrt{n+1}]}(x)$;
2) $f_n(x) = 2 - \chi_{[\ln n,\ln(n+1))}(x)$;
3) $f_n(x) = \chi_{[H_n,H_{n+1}]}(x)$, де $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$;
4) $f_n(x) = \chi_{(\ln n,\ln(n+10))}(|x|)$;
5) $f_n(x) = \sin^n x \cdot \chi_{[2\pi n,2\pi n+\pi)}(x)$;
6) $f_n(x) = \cos^n x \cdot \chi_{[-\pi/2+2\pi n,\pi/2+2\pi n]}(x)$;
7) $f_n(x) = \chi_{[n,n+\frac{1}{n}]}(x) + \frac{x}{n}\chi_{\mathbf{Q}}(x)$;
8) $f_n(x) = \cos x + |x|\chi_{[\sqrt[3]{n},\sqrt[3]{n+5}]}(x)$;
9) $f_n(x) = \chi_{[\operatorname{arctg} n,\operatorname{arctg}(n+1))}(x) + \frac{x}{n^2}\chi_{[n,n+1)}(x)$;
10) $f_n(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \chi_{[k,k+k^{-2}]}(x)$.

П2. Нехай $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – неспадна і неперервна справа функція, λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса на $\mathbf{R}$ і $\{f_n : n \geq 0\}$ – послідовність борельових функцій. Описати збіжність $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda_F} f_0$, якщо ці функції задані в задачі Б7.П3.

П3. Нехай $\lambda(X) < +\infty,\ f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} f$ і $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} g$. Довести, що:

1) $(\forall n \geq 1 \ :\ 2f_n = g_n \ (\operatorname{mod}\lambda)) \Rightarrow 2f = g \ (\operatorname{mod}\lambda)$;
2) $\forall A \in \mathcal{F}\ \forall \varepsilon > 0$:
$$\lambda(\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda(A);$$
3) $(\forall n \geq 1 \ :\ f_n < 0 \ (\operatorname{mod}\lambda)) \Rightarrow f \leq 0 \ (\operatorname{mod}\lambda)$;

4) $(\forall n \geq 1 \ : \ f_n > g \ (\mathrm{mod}\, \lambda)) \Rightarrow f \geq g \ (\mathrm{mod}\, \lambda)$;
5) $(\forall n \geq 1 \ : \ f_n < g_n \ (\mathrm{mod}\, \lambda)) \Rightarrow f \leq g \ (\mathrm{mod}\, \lambda)$;
6) якщо $\{h_n : n \geq 1\}$ – послідовність вимірних функцій, $\forall n \geq 1 \ : \ f_n \leq h_n \leq g_n (\mathrm{mod}\, \lambda)$ і $f = g (\mathrm{mod}\, \lambda)$, то $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} f$;
7) $(\forall n \geq 1 \ : \ f_n \geq g_n + 1 \ (\mathrm{mod}\, \lambda)) \Rightarrow f \geq g + 1 \ (\mathrm{mod}\, \lambda)$;
8) якщо $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g \ (\mathrm{mod}\, \lambda)$, то $f = g \ (\mathrm{mod}\, \lambda)$;
9) Навести приклад, коли $\forall n \geq 1 \ : \ f_n < g_n \ (\mathrm{mod}\, \lambda)$, але $f = g \ (\mathrm{mod}\, \lambda)$.

П4. Нехай λ_2 – міра Лебега на $\mathbf{R}^2$. Знайти одну з функцій $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, для якої $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g \ (\mathrm{mod}\, \lambda_2)$, якщо для $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ і $n \geq 1$:

1) $f_n(x, y) = \cos^n(x^2 + y^2)$;
2) $f_n(x, y) = e^{-n(x^2+y^2)}$;
3) $f_n(x, y) = e^{-n|x^2-y^2-1|}$;
4) $f_n(x, y) = 2^{\sin^n(x^4 + y^4)}$;
5) $f_n(x, y) = \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n}$;
6) $f_n(x, y) = n \ln\left(1 + \frac{|x|+|y|}{n}\right)$;
7) $f_n(x, y) = 2^{x + \frac{y^2}{n}}$;
8) $f_n(x, y) = e^{\sin^n x + \sin^n y}$;
9) $f_n(x, y) = \sin^n \frac{1}{x^2+y^2}$, коли $x^2 + y^2 \neq 0, \ f_n(0, 0) = 0$;
10) $f_n(x, y) = \cos^n \frac{1}{|x|+|y|}$, коли $|x| + |y| \neq 0, \ f_n(0, 0) = 0$.

ЗАНЯТТЯ 11
ОЗНАЧЕННЯ ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

Контрольні запитання

1. *Дати означення інтеграла Лебега від невід'ємної простої функції.*
2. *Дати означення інтеграла Лебега у загальному випадку.*

А11

У наступних задачах λ – міра на вимірному просторі $(X, \mathcal{F})$. Запис $f \in L(A, \lambda)$ означає, що функція f інтегровна по вимірній множині $A \subset X$ відносно міри λ.

О1. Користуючись означенням інтегровної простої функції, довести, що сума невід'ємних інтегровних простих функцій є інтегровною простою функцією.

С1. Нехай λ_1 і λ_2 – міри Лебега відповідно на $\mathbf{R}$ і в $\mathbf{R}^2$. Обчислити:

1) $\int\limits_{\mathbf{R}} \chi_{\mathbf{Q}}(x)\, d\lambda_1(x)$;
2) $\int\limits_{[0,20)} \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\, d\lambda_1(x)$;
3) $\int\limits_{[0,100]} \frac{1}{[x+1][x+2]}\, d\lambda_1(x)$;
4) $\int\limits_{A} (-1)^{[x^2+y^2]}\, d\lambda_2(x,y)$, де $A = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 5\right\}$.

О2. Нехай $p(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}\sin\frac{\pi}{x}, & x \in (0,1], \\ 0, & x \in \mathbf{R}\setminus(0,1]. \end{cases}$ Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{\mathbf{R}} p_-\, d\lambda_1$;
2) $\int\limits_{\mathbf{R}} p_+\, d\lambda_1$;
3) $\int\limits_{\mathbf{R}} |p|\, d\lambda_1$;
4) $\int\limits_{\mathbf{R}} p\, d\lambda_1$.

С2. Нехай $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (n, n+n^{-\alpha}]$. При яких $\alpha \in \mathbf{R}$ функція $\chi_A(x),\ x \in \mathbf{R}$, є інтегровною на $\mathbf{R}$ відносно міри Лебега λ_1 на прямій?

О3. Нехай $f(x) = \chi_A(x),\ x \in \mathbf{R}$, де $A = \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$. Користуючись означенням інтеграла Лебега, обчислити $\int\limits_{[-1,1]} f\, d\lambda_1$.

О4. Нехай функція $f : X \to \mathbf{R}$ інтегровна на X відносно міри λ. Довести нерівність Чебишова

$$\forall\varepsilon > 0 \; : \; \lambda(\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \tfrac{1}{\varepsilon} \int\limits_X |f(x)|\, d\lambda(x).$$

С3. Нехай функція $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ така, що

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 2, & 1 \leq x < 2, \\ 3, & x \geq 2, \end{cases}$$

λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса на $\mathbf{R}$. Довести, що довільна функція $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ є інтегровною на $\mathbf{R}$ відносно міри λ_F і

$$\int\limits_{\mathbf{R}} f\, d\lambda_F = 2f(1) + f(2).$$

С4. Нехай $f, g \; : \; X \; \to \; \mathbf{R}$ – $\mathcal{F}$-вимірні функції, $g \; \in \; L(X, \lambda)$, і $|f(x)| \leq g(x) \; (\operatorname{mod} \lambda)$. Довести, що $f \in L(X, \lambda)$.

Д1. Нехай $\lambda(X) < +\infty$ і $f : X \to \mathbf{R}$ – $\mathcal{F}$-вимірна функція. Довести, що $f \in L(X, \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\lambda(\{x \mid k \leq |f(x)| < k+1\}).$$

Д2. Довести, що у випадку нескінченної міри твердження з задачі Д1, взагалі кажучи, хибне.

Д3. Нехай $f \in L(X, \lambda)$ і $\lambda(X) < +\infty$. Довести, що

$$\int\limits_X f(x)\, d\lambda(x) = \lim_{h \to 0+} \sum_{k=-\infty}^{\infty} kh\lambda(\{x \mid kh \leq f(x) < (k+1)h\}).$$

Д4. При припущеннях із задачі Д1 довести, що $f \in L(X, \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\{x \mid |f(x)| \geq k\}).$$

Д5. Для функції $f \in L(X, \lambda)$ довести, що при $k \to \infty$

$$k\lambda(\{x \mid |f(x)| \geq k\}) \to 0.$$

Д6. При припущеннях із задачі Д1 довести, що $f \in L(X, \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \lambda(\{x \mid |f(x)| \geq 2^k\}).$$

Д7. Нехай $\lambda(X) < +\infty$, f, g – $\mathcal{F}$-вимірні функції і $\forall c \in \mathbf{R}$: $\lambda(\{x \mid f(x) < c\}) = \lambda(\{x \mid g(x) < c\})$. Довести, що $f \in L(X, \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли $g \in L(X, \lambda)$. При цьому $\int\limits_X f(x)\, d\lambda(x) = \int\limits_X g(x)\, d\lambda(x)$.

Д8. Нехай $X = \mathbf{R}$, $\lambda = \lambda_1$ – міра Лебега, $A \subset \mathbf{R}$ – обмежена вимірна за Лебегом множина, $f : A \to \mathbf{R}$ – рівномірно неперервна на A функція. Довести, що $f \in L(A, \lambda)$.

Б11

Г1. Нехай $f \in L(X, \lambda)$. Довести, що при $n \to \infty$

$$\lambda(\{x \,:\, |f(x)| \geq n\}) \to 0.$$

П1. Нехай $\{A, B, C\} \subset \mathcal{F}$, $\lambda(A \cup B \cup C) < +\infty$ і відомі міри множин $A, B, C, A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cap B \cap C$. Обчислити:

1) $\int\limits_X |\chi_A - \chi_B|\, d\lambda$;
2) $\int\limits_X |\chi_A - 2\chi_B|\, d\lambda$;
3) $\int\limits_X |3\chi_A - \chi_B|\, d\lambda$;
4) $\int\limits_X |2\chi_A - 3\chi_B|\, d\lambda$;
5) $\int\limits_X |\chi_A + \chi_B - \chi_C|\, d\lambda$;
6) $\int\limits_X |\chi_A - 2\chi_A\chi_B|\, d\lambda$;
7) $\int\limits_X |\chi_A + 2\chi_B - \chi_C|\, d\lambda$;
8) $\int\limits_X |2\chi_A + 3\chi_B - \chi_C|\, d\lambda$;
9) $\int\limits_X |\chi_A - 2\chi_B + \chi_C|\, d\lambda$;
10) $\int\limits_X |\chi_A + \chi_B - 2\chi_B\chi_C|\, d\lambda$.

П2. Нехай λ_1 – міра Лебега на $\mathbf{R}$. Обчислити інтеграли $\int\limits_A f_+\, d\lambda_1$, $\int\limits_A f_-\, d\lambda_1$, $\int\limits_A |f|\, d\lambda_1$, $\int\limits_A f\, d\lambda_1$, якщо:

1) $f(x) = (-1)^{[x]}$, $A = [-3, 5]$;
2) $f(x) = (-1)^{[x]}[x]$, $A = [-4, 4)$;
3) $f(x) = [x]$, $A = [-4, 4]$;
4) $f(x) = (-1)^{[x^2]}$, $A = [0, \sqrt{6}]$;
5) $f(x) = [x] \operatorname{sign} \cos \pi x$, $A = [0, 6]$;
6) $f(x) = [x|x|]$, $A = [-2, 2]$;
7) $f(x) = \operatorname{sign} \cos \pi x$, $A = [-3, 3]$;
8) $f(x) = [\operatorname{arctg} x]$, $A = [-9, 9]$;
9) $f(x) = [x][2 \sin x]$, $A = [0, \pi]$;
10) $f(x) = [\arcsin x]$, $A = [-1, 1]$.

П3. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\mathbf{R}} p\,d\lambda_1$, якщо:

1) $p = \sin\chi_A,\ A = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left(n, n+2^{-|n|}\right);$
2) $p = \sin 2\chi_A,\ A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} [n, n+3^{-n});$
3) $p = -\chi_A,\ A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \left(n^2, n^2 + \frac{1}{n(n+1)}\right);$
4) $p = \operatorname{sh}\chi_A + \chi_A,\ A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} (n+3^{-n}, n+2^{-n});$
5) $p = \operatorname{arctg}\chi_A,\ A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \left(n!, n! + \frac{1}{n!}\right);$
6) $p = \ln(1+\chi_A),\ A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \left[6n, 6n + \frac{e}{n!}\right);$
7) $p = 10\chi_A,\ A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \left[\frac{5}{n} - \frac{1}{n(n+1)}, \frac{5}{n}\right);$
8) $p = \chi_A(\chi_A+1),\ A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{9n(n+1)}, \frac{1}{n}\right);$
9) $p = 3\chi_A,\ A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \left(\frac{7}{n}, \frac{7}{n} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right);$
10) $p(x) = -\chi_A(|x|),\ x\in\mathbf{R},\ A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \left(\frac{100}{n} - \frac{1}{n!}, \frac{100}{n}\right).$

П4. Нехай λ_2 – міра Лебега в $\mathbf{R}^2$. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\mathbf{R}} p\,d\lambda_2$, якщо:

1) $p = 2\sin\chi_A,\ A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} (n, n+2^{-n}) \times (n, n+3^{-n});$
2) $p = \chi_A + 2\sin\chi_A,$
$$A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \bigcup_{m\in\mathbf{N}} (n, n+2^{-n}) \times (m, m+2^{-m});$$
3) $p = \operatorname{arctg} 3\chi_A,$
$$A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \bigcup_{m\in\mathbf{N}} (n, n+2^{-n}) \times \left(m, m+\frac{1}{m!}\right);$$
4) $p = \operatorname{sh}\chi_A,\ A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}} \bigcup\limits_{m\in\mathbf{N}} \left[n, n+3^{-|n|}\right) \times \left(m, m+\frac{1}{m!}\right);$
5) $p = \chi_A(1+\chi_A),\ A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} [n, n+5^{-n}) \times [0, 3^n);$
6) $p = \chi_A(2+\chi_A),\ A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} (n, n+7^{-n}) \times [0, 2^n];$

7) $p = \operatorname{sh}\chi_A, \; A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \left(n^2, n^2 + \frac{1}{(n!)^2}\right) \times (0, n!)\,;$

8) $p = \ln(1 + \chi_A),$
$$A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \bigcup_{m\in\mathbf{N}} \left(n^2, n^2 + \tfrac{1}{n!}\right) \times \left(3m^2, 3m^2 + \tfrac{2^m}{m!}\right);$$

9) $p = \chi_A, \; A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \bigcup\limits_{m\in\mathbf{N}} [n, n + 2^{-n}] \times [m, m+1)\,;$

10) $p = \chi_A, \; A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \left(n, n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \left(n, n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$

П5. Нехай $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – неспадна і неперервна справа функція, λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса на $\mathbf{R}$ і $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Довести, що $f \in L(\mathbf{R}, \lambda_F)$ та обчислити $\int\limits_{\mathbf{R}} f\, d\lambda_F$, якщо:

1) $F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ [x], & 0 \le x < 100, \\ 100, & 100 \le x < +\infty, \end{cases} \qquad f(x) = 2^x;$

2) F із задачі 1), $f(x) = \sin x;$

3) $F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ [2x], & 0 \le x < 10, \\ 20, & 10 \le x < +\infty, \end{cases} \qquad f(x) = 3^x;$

4) F із задачі 3), $f(x) = F(x);$

5) F із задачі 1), $f(x) = F(x);$

6) F із задачі 1), $f(x) = F^2(x);$

7) $F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ [x^2], & 0 \le x < 100, \\ 10000, & 100 \le x < +\infty, \end{cases} \qquad f(x) = x^2;$

8) F із задачі 7), $f(x) = x^4;$

9) F із задачі 7), $f(x) = e^{x^2};$

10) $F(x) = \begin{cases} -100, & -\infty < x < -99, \\ [x], & -99 \le x < 100, \\ 100, & 100 \le x < +\infty, \end{cases} \qquad f(x) = x^2.$

ЗАНЯТТЯ 12
ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

Контрольні запитання

1. *Сформулювати властивості інтеграла Лебега.*
2. *Як пов'язані між собою інтеграли Лебега і Рімана?*
3. *Критерій інтегровності за Ріманом.*

А12

О1. Нехай $f(x) = \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\sin x,\ x \in \mathbf{R}$. Обчислити інтеграл $\int\limits_{[0,\pi]} f\,d\lambda_1$, де λ_1 – міра Лебега на $\mathbf{R}$. Чи є функція f інтегровною за Ріманом на $[0,\pi]$?

О2. Довести нерівності

1) $2/\sqrt[4]{e} \le \int\limits_{[-1,1]} e^{x^2+x}\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\,d\lambda_1(x) \le 2e^2$;

2) $3\pi e \le \int\limits_{A} e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)^{-1}\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\,d\lambda_2(x,y) \le \frac{3\pi e^4}{4}$,

де $A = \left\{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\},\ \lambda_2$ – міра Лебега на $\mathbf{R}^2$.

С1. Довести нерівність

$$\int\limits_{[0,1]} e^{-x}\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\,d\lambda_1(x) \le \int\limits_{[0,1]} e^{-x^2}\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\,d\lambda_1(x).$$

С2. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{[0,+\infty)} \frac{d\lambda_1(x)}{[x+1][x+2]}$; 2) $\int\limits_{[0,+\infty)} \frac{d\lambda_1(x)}{[x]!}$.

С3. Нехай $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ – довільна функція. Довести, що функція $f(x)\chi_{\mathbf{Q}}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, є борельовою і $\int\limits_{\mathbf{R}} f\chi_{\mathbf{Q}}\,d\lambda_1 = 0$.

С4. Нехай $f \in C(\mathbf{R}^m)$, λ_m – міра Лебега в $\mathbf{R}^m$ і K – компактна множина в $\mathbf{R}^m,\ m \ge 1$. Довести, що $f \in L(K,\lambda_m)$.

О3. Нехай $f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha},\ x \ge 1$. Для яких $\alpha \in \mathbf{R}$ невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається абсолютно? умовно? Для яких $\alpha \in \mathbf{R}$ вірно, що $f \in L([1,+\infty),\lambda_1)$?

О4. Нехай $F(x) = [x],\ x \in \mathbf{R},\ \lambda_F$ – відповідна міра Лебега-Стілтьєса на $\mathbf{R}$ і $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – деяка функція. Довести, що $f \in L(\mathbf{R}, \lambda_F)$ тоді і тільки тоді, коли $\sum\limits_{k \in \mathbf{Z}} |f(k)| < +\infty$. При цьому

$$\forall A \subset \mathbf{R}\ :\ \int\limits_A f\, d\lambda_F = \sum_{k \in A \cap \mathbf{Z}} f(k).$$

С5. Нехай λ_F – міра Лебега-Стілтьєса з задачі О4. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{\mathbf{R}} e^{-|x|}\, d\lambda_F(x)$;

2) $\int\limits_{\mathbf{R}} \chi_{\mathbf{Q}}\, d\lambda_F(x)$;

3) $\int\limits_{\mathbf{R}} \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\, d\lambda_F(x)$;

4) $\int\limits_{[1,+\infty)} \frac{1}{x(x+1)}\, d\lambda_F(x)$.

Д1. Нехай $f \in L(X, \lambda)$. Довести, що

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A \in \mathcal{F},\ \lambda(A) < \delta\ :\ \left| \int\limits_A f\, d\lambda \right| < \varepsilon.$$

Цю властивість називають абсолютною неперервністю інтеграла Лебега.

Д2. Нехай функція $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ має майже скрізь відносно міри λ_1 на $[a, b]$ похідну φ', обмежену на $[a, b]$. Довести, що $\varphi' \in L([a, b], \lambda_1)$.

Д3. Нехай A – замкнена підмножина відрізка $[a, b]$ і $\lambda_1(A) = 0$. Довести, що функція χ_A інтегровна за Ріманом на $[a, b]$.

Д4. Нехай множина $A \subset [a, b]$ вимірна за Лебегом. Довести, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує проста функція

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{(a_k, b_k]}(x),\ x \in \mathbf{R},\ \left\{a_k, b_k \mid k = \overline{1, n}\right\} \subset \mathbf{R},$$

така, що

$$\int\limits_{\mathbf{R}} |\chi_A - p|\, d\lambda_1 < \varepsilon.$$

Д5. Нехай $f \in L([a, b], \lambda_1)$. Довести, що:

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists g \in C([a, b])\ :\ \int\limits_{[a,b]} |f - g|\, d\lambda_1 < \varepsilon$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t \in (0, \delta)\ :$
$\int\limits_{[0,1-\delta)} |f(x + t) - f(x)|\, d\lambda_1(x) < \varepsilon$, де $[a, b] = [0, 1]$;

3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists g \in C([a, b]),\ g(a) = g(b) = 0\ :\ \int\limits_{[a,b]} |f - g|\, d\lambda_1 < \varepsilon$.

Д6. Навести приклад інтегровної за Ріманом на відрізку $[a,b]$ функції, множина точок розриву якої щільна в $[a,b]$.

Д7. Нехай $\{f_k : k \geq 0\}$ – послідовність $\mathcal{F}$-вимірних функцій і $\lambda(X) < +\infty$. Довести, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} f_0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X \frac{|f_n - f_0|}{1 + |f_n - f_0|}\, d\lambda = 0.$$

Б12

П1. Довести нерівності:

1) $\displaystyle\int\limits_{[0,\frac{\pi}{2})} e^{-\sin x}\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\, d\lambda_1(x) \geq \frac{\pi}{2e};$

2) $\displaystyle\frac{1}{2} \leq \int\limits_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}}(1 - \chi_{\mathbf{Q}}(x))\, d\lambda_1(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}};$

3) $\displaystyle\frac{1}{5} \leq \int\limits_{[4,5)} \frac{1}{x}\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\, d\lambda_1(x) \leq \frac{1}{4};$

4) $\displaystyle\frac{1}{3e} \leq \int\limits_{[0,1)} x^2 e^{-x^2}(1 - \chi_{\mathbf{Q}}(x))\, d\lambda_1(x) \leq \frac{1}{3};$

5) $\displaystyle\int\limits_{[0,1]} \sqrt{1 + x^2}\, d\lambda_1(x) \geq \int\limits_{[0,1]} \sqrt{1 + x^4}\, d\lambda_1(x);$

6) $\displaystyle\int\limits_{[1,2)} \ln x\, d\lambda_1(x) \geq \int\limits_{[1,2)} (\ln x)^2\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\, d\lambda_1(x);$

7) $\displaystyle\frac{4\pi}{3} \leq \int\limits_A \frac{\chi_{\mathbf{R}\times(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})}(x,y)}{1 + \frac{1}{2}\cos(x^2 + y^2)}\, d\lambda_2(x,y) \leq 4\pi,$

де $A = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\right\};$

8) $\displaystyle\int\limits_A \frac{(|x| + |y|)^9\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)}{\sqrt{1 + |x| + |y|}}\, d\lambda_2(x,y) \leq \sqrt{2},$

де $A = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1\};$

9) $\displaystyle\int\limits_A \sin^4(x^4+y^4)\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(y)\,d\lambda_2(x,y) \le \int\limits_A \sin^2(x^4+y^4)\,d\lambda_2(x,y),$

де $A = \big\{(x,y) \mid x^4+y^4 \le 2\pi\big\}$;

10) $\displaystyle\int\limits_A e^{-(x^2+y^2)}\,d\lambda_2(x,y) \le \int\limits_A e^{-(x^2+y^2)^2}\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\,d\lambda_2(x,y),$

де $A = \big\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\big\}$.

Г1. Нехай $f \in L(X,\lambda)$, $\{A_n : n \ge 1\} \subset \mathcal{F}$ і $\lambda(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Довести, що $\int\limits_{A_n} f\,d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

П2. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_{[0,+\infty)} 2^{-[x]}\,d\lambda_1(x)$;

2) $\displaystyle\int\limits_{[1,+\infty)} \frac{1}{[x]!}\,d\lambda_1(x)$;

3) $\displaystyle\int\limits_{[0,+\infty)} \frac{d\lambda_1(x)}{[2x+1][2x+3]}$;

4) $\displaystyle\int\limits_{[-2,+\infty)} e^{-[x]}\,d\lambda_1(x)$;

5) $\displaystyle\int\limits_{[0,+\infty)} \frac{d\lambda_1(x)}{[3x+1][3x+4]}$;

6) $\displaystyle\int\limits_{[1,+\infty)} \frac{d\lambda_1(x)}{[2x]!}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} 2^{-([x]+[y])}\,d\lambda_2(x,y)$;

8) $\displaystyle\int\limits_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} \frac{d\lambda_2(x,y)}{[x]![y]!}$;

9) $\displaystyle\int\limits_{[0,1]\times[1,+\infty)} \frac{d\lambda_2(x,y)}{[x+y]!}$;

10) $\displaystyle\int\limits_{[1,+\infty)\times[0,1)} \frac{d\lambda_2(x,y)}{[x-y]!}$.

П3. Довести, що $f \in L([0,1],\lambda_1)$, та обчислити інтеграл $\int\limits_{[0,1]} f\,d\lambda_1$, якщо:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbf{Q}, \\ x^4, & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x^{10}, & x \in \mathbf{Q}, \\ (1+x^2)^{-1}, & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x, & \cos x \in \mathbf{Q}, \\ \operatorname{tg} x, & \cos x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \sin x \in \mathbf{Q}, \\ \sin^2 x, & \sin x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} x, & \sin x \in \mathbf{Q}, \\ \cos^2 x, & \sin x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}; \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x}, & x \in \mathbf{Q}\backslash\{0\}, \\ \sin^4 x, & x \in (\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}) \cup \{0\}; \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} x, & \sin x \in \mathbf{Q}, \\ \operatorname{ch}^2 x, & \sin x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}; \end{cases}$

8) $f(x) = \begin{cases} x^{10}, & x \in \mathbf{Q}, \\ \operatorname{sh}^2 x, & x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}; \end{cases}$

9) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & x \in \mathbf{Q}, \\ (1+x^2)^{-1}, & x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}; \end{cases}$

10) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & x \in \mathbf{Q}, \\ (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}, & x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}. \end{cases}$

П4. Для яких $\alpha \in \mathbf{R}$ збігається невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ і для яких $\alpha \in \mathbf{R}$ виконується $f \in L([1,+\infty),\lambda_1)$, якщо для $x \geq 1$:

1) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^\alpha}$;

2) $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x^\alpha}$;

3) $f(x) = \dfrac{\sin x^6}{x^\alpha}$;

4) $f(x) = \sin x^\alpha$?

Чи збігається невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ і чи $f \in L([1,+\infty),\lambda_1)$, якщо для $x \in \mathbf{R}$:

5) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k} \chi_{[k,k+1)}(x)$;

6) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin k}{k} \chi_{[k,k+1)}(x)$;

7) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\chi_{[k^2,(k+1)^2)}(x);$

8) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k}{k^2}\chi_{[k^2,(k+1)^2)}(x);$

9) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}\chi_{[k^3,(k+1)^3)}(x);$

10) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\cos k\chi_{[\sqrt{k},\sqrt{k+1})}(x)?$

П5. Нехай $F(x)=[x],\ x\in\mathbf{R}$, і λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса на $\mathbf{R}$. Довести, що $f\in L(A,\lambda_F)$, та обчислити інтеграл $\int\limits_A f\,d\lambda_F$, якщо:

1) $f(x)=2^{-|x|},\ x\in A=\mathbf{R};$
2) $f(x)=\frac{1}{\Gamma(x)},\ x\in A=[1,+\infty);$
3) $f(x)=x^{-2},\ x\in A=[1,+\infty);$
4) $f(x)=\sin\pi x,\ x\in A=\mathbf{R};$
5) $f(x)=\operatorname{ch}x,\ x\in A=\mathbf{R}\backslash\mathbf{Z};$
6) $f(x)=e^x,\ x\in A=(0,10)\cap\mathbf{N};$
7) $f(x)=x2^{-x},\ x\in A=\mathbf{N};$
8) $f(x)=3^x,\ x\in A=(-\infty,0];$
9) $f(x)=\frac{1}{(2x+1)(2x+3)},\ x\in A=[0,+\infty);$
10) $f(x)=\frac{1}{(3x+1)(3x+4)},\ x\in A=[0,+\infty).$

ЗАНЯТТЯ 13
ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД ПІД ЗНАКОМ ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

Контрольні запитання

1. *Сформулювати теорему Лебега про інтегрування монотонної послідовності функцій.*
2. *Сформулювати теореми Б.Леві і Фату.*
3. *Сформулювати теорему Лебега про мажоровну збіжність.*

A13

У наступних задачах $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір і λ – міра на σ-алгебрі $\mathcal{F}$.

O1. Нехай $\{f_n : X \to \mathbf{R} \,:\, n \geq 0\}$ – послідовність $\mathcal{F}$-вимірних функцій, λ – скінченна міра і $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0 \pmod{\lambda}$. Довести, що

$$\int\limits_X \sin f_n \, d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_X \sin f_0 \, d\lambda.$$

C1. При виконанні припущень із задачі O1 довести, що

$$\int\limits_X e^{-f_n^2} \, d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_X e^{-f_0^2} \, d\lambda.$$

C2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,100]} \frac{x^{40}}{1+x^{40}} \sin^n x \, d\lambda_1(x)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} \exp\left\{-\left(x + \frac{x^4}{n}\right)\right\} d\lambda_1(x)$,

де λ_1 – міра Лебега на $\mathbf{R}$.

O2. Нехай функція $g : X \to \mathbf{R}$ – вимірна і для кожного $n \in \mathbf{N}$

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x), & \text{якщо } |g(x)| < n, \\ n, & \text{якщо } g(x) \geq n, \\ -n, & \text{якщо } g(x) \leq -n. \end{cases}$$

Довести, що $g \in L(X,\lambda)$ тоді і тільки тоді, коли $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \int\limits_X |g_n|\,d\lambda < +\infty$. При цьому

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n\,d\lambda = \int\limits_X g\,d\lambda.$$

О3. Нехай $A \in \mathcal{F}$, функції $a_n : A \to \mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}$, є $\mathcal{F}$-вимірними і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_A |a_n|\,d\lambda < +\infty$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно майже скрізь відносно міри λ на A, його сума є інтегровною на множині A функцією і виконується рівність

$$\int\limits_A \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_A a_n\,d\lambda.$$

О4. Нехай $F(x) = [x]$, $x\in\mathbf{R}$, і λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса на $\mathbf{R}$; послідовність функцій $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $n \geq 0$, така, що $\forall k\in\mathbf{Z} : f_n(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(k)$ і $\forall n\in\mathbf{N}\ \forall k\in\mathbf{Z} : |f_n(k)| \leq a_k$, причому $\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} a_k < +\infty$. Довести, що

$$\int\limits_{\mathbf{R}} f_n\,d\lambda_F \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k\in\mathbf{Z}} f_0(k).$$

С3. Знайти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,100\pi]} \cos^{2n}\pi x\,d\lambda_F(x)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,100\pi]} \cos^{2n}\pi x\,d\lambda_1(x)$,

де λ_F – міра з задачі О4, а λ_1 – міра Лебега на $\mathbf{R}$.

С4. Нехай $f_n(x) = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)$, $x\in\mathbf{R}$. Довести, що

$$0 = \int\limits_{\mathbf{R}} \lim_{n\to\infty} f_n\,d\lambda_1 < \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}} f_n\,d\lambda_1 = 1.$$

Д1. Побудувати послідовність $\{f_n : n \geq 1\} \subset L([0,1],\lambda_1)$ обмежених функцій, яка збігається поточково до неінтегровної відносно міри λ_1 на $[0,1]$ функції.

Д2. Побудувати послідовність функцій $f_n \in L([0,1],\lambda_1)$, $n \geq 1$, яка збігається майже скрізь відносно міри λ_1 до функції $f \in L([0,1],\lambda_1)$ і таку, що

$$\int\limits_{[0,1]} f_n\, d\lambda_1 \not\to \int\limits_{[0,1]} f\, d\lambda_1,\ n \to \infty.$$

Д3. Побудувати послідовність функцій $\{f_n : n \geq 1\} \subset L([0,1],\lambda_1)$ таку, що:

1) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f\ (\operatorname{mod} \lambda_1)$, де $f \in L([0,1],\lambda_1)$;
2) $\int\limits_{[0,1]} f_n\, d\lambda_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{[0,1]} f\, d\lambda_1$;
3) не існує такої функції $g \in L([0,1],\lambda_1)$, щоб

$$\forall n \geq 1\ :\ |f_n| \leq g\ (\operatorname{mod} \lambda_1) \text{ на } [0,1].$$

Д4. Довести, що твердження теореми Лебега про мажоровну збіжність залишиться істинним, якщо збіжність майже скрізь замінити на збіжність за мірою.

Д5. Нехай $\forall n \geq 0\ :\ f_n : X \to \mathbf{R}$ – $\mathcal{F}$-вимірна функція, λ – скінченна міра і $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} f_0$. Довести, що для довільної неперервної і обмеженої на $\mathbf{R}$ функції g справедлива рівність

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X g(f_n(x))\, d\lambda(x) = \int\limits_X g(f_0(x))\, d\lambda(x).$$

Д6. Нехай $\forall n \geq 1\ :\ f_n \in L(X,\lambda),\ f_n \geq 0$ на X і $\sup\limits_{n\geq 1} \int\limits_X f_n\, d\lambda < +\infty$. Чи можна стверджувати, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n \in L(X,\lambda)$?

Д7. Нехай $\{f_n : n \geq 1\} \subset L(X,\lambda),\ g \in L(X,\lambda)$ і

$$\forall n \geq 1\ \forall x \in X\ :\ |f_n(x)| \leq g(x).$$

Довести, що функція $f(x) = \overline{\lim\limits_{n\geq 1}} f_n(x),\ x \in X$, інтегровна на X і $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_X f_n\, d\lambda \leq \int\limits_X f\, d\lambda$.

Д8. Нехай $\forall n \geq 0\ :\ f_n \in L(X,\lambda),\quad f_n \geq 0,\ f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0\ (\operatorname{mod} \lambda)$ і $\int\limits_X f_n\, d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_X f_0\, d\lambda$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X |f_n - f_0| = 0.$$

Д9. Нехай $\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2$ – σ-алгебри вимірних за Лебегом множин в $\mathbf{R}$ і $\mathbf{R}^2$ відповідно, $A \in \mathcal{S}_1,\ f : A \to [0, +\infty),\ B := \{(x, y) \mid 0 \le y \le f(x),\ x \in A\}$. Довести, що $B \in \mathcal{S}_2$ тоді і лише тоді, коли f – вимірна за Лебегом функція, і при цьому $\lambda_2(B) = \int\limits_A f(x)\, d\lambda_1(x)$, де $\lambda_1,\ \lambda_2$ – міри Лебега в $\mathbf{R}$ та в $\mathbf{R}^2$ відповідно.

Д10. Нехай $\lambda_1,\ \lambda_2$ – міри на вимірному просторі $(X, \mathcal{S})$, $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2$. Довести, що $L(X, \lambda) = L(X, \lambda_1) \cap L(X, \lambda_2)$, причому $\forall f \in L(X, \lambda)\ :\ \int\limits_X f\, d\lambda = \int\limits_X f\, d\lambda_1 + \int\limits_X f\, d\lambda_2$.

Б13

Г1. Нехай для будь-яких $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ і $k = 1, 2$ функція $f_{nk} : X \to \mathbf{R}$ є $\mathcal{F}$-вимірною, λ – скінченна міра, $f_{nk} \xrightarrow[n\to\infty]{} f_{0k} \pmod{\lambda}$, $k = 1, 2$, і $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ – неперервна та обмежена функція. Довести рівність

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X g(f_{n1}(x), f_{n2}(x))\, d\lambda(x) = \int\limits_X g(f_{01}(x), f_{02}(x))\, d\lambda(x).$$

Г2. Нехай $\{f_n : n \ge 1\} \subset L(X, \lambda),\ \forall n \in \mathbf{N}\ \forall x \in X\ :\ f_n(x) \ge 0$ і $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in X$. Довести, що $f \in L(X, \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n\, d\lambda < +\infty$. При цьому $\int\limits_X f\, d\lambda = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n\, d\lambda$.

Г3. Нехай для функцій $\{f_n\ :\ n \ge 0\} \subset R([a, b])$ виконуються умови:

1) $\forall x \in [a, b]\ :\ f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(x)$;
2) $\exists C > 0\ \forall n \ge 1\ \forall x \in [a, b]\ :\ |f_n(x)| \le C$.

Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, dx = \int\limits_a^b f_0(x)\, dx$ (інтеграли слід розуміти як інтеграли Рімана).

П1. Нехай λ_1 – міра Лебега на $\mathbf{R}$, функції $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ і $g_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $n \geq 1$, є вимірними за Лебегом, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \pmod{\lambda_1}$ і $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g \pmod{\lambda_1}$. Знайти такі границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\sin f_n(x)}{1+x^2}\, d\lambda_1(x);$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{f_n^2(x)}{1+f_n^2(x)} e^{-x^2}\, d\lambda_1(x);$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} e^{-x-f_n^2(x)}\, d\lambda_1(x);$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\min(f_n(x),1)}{1+x^2+f_n^2(x)+g_n^2(x)}\, d\lambda_1(x);$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\min(f_n^2(x),3)}{1+x^4+f_n^2(x)+|g_n(x)|}\, d\lambda_1(x);$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-|x| - f_n^2(x)} \operatorname{arctg}(f_n(x)+g_n^2(x))\, d\lambda_1(x);$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,100]} \frac{1}{\sqrt{x}+g_n^2(x)} \sin(f_n^2(x)-g_n(x))\, d\lambda_1(x);$

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,10]} \frac{1}{x^{3/4}+|f_n(x)|} \cdot \frac{g_n(x)}{1+g_n^2(x)}\, d\lambda_1(x);$

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{f_n(x)+g_n(x)}{(1+f_n^2(x))(1+g_n^2(x))}\, d\lambda_1(x);$

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)} \cdot \frac{f_n(x)\sin(f_n(x)-g_n(x))}{1+|f_n(x)|}\, d\lambda_1(x).$

П2. Чи можна перейти до границі під знаком інтеграла $\int\limits_{\mathbf{R}} f_n \, d\lambda_1$, якщо для будь-яких $n \in \mathbf{N}$ і $x \in \mathbf{R}$:

1) $f_n(x) = \chi_{(n,n+1]}(x)$;
2) $f_n(x) = n^2 \chi_{[0,\frac{1}{n})}(x)$;
3) $f_n(x) = n^2 e^{-nx^2}$;
4) $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$;
5) $f_n(x) = (n - n^2 x)\chi_{[0,\frac{1}{n})}(x)$;
6) $f_n(x) = (n - n^3 x^2)\chi_{(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})}(x)$;
7) $f_n(x) = (n^2 - n^4 x)\chi_{\left[0,\frac{1}{n^2}\right.}(x)$;
8) $f_n(x) = n^2(1 - nx)\chi_{[0,\frac{1}{n})}(x)$;
9) $f_n(x) = n^{-\alpha}\chi_{[n,2n]}(x),\ \alpha \in \mathbf{R}$;
10) $f_n(x) = n^{\alpha} e^{-nx}\chi_{[0,+\infty)}(x),\ \alpha \in \mathbf{R}$.

П3. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} e^{-nx^2} \, d\lambda_1(x)$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} e^{-\frac{x^2}{n}} \, d\lambda_1(x)$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}} \dfrac{\sin^n x}{1+x^2} \, d\lambda_1(x)$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} e^{-nx} \operatorname{arctg} x \, d\lambda_1(x)$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} e^{-\frac{x^2}{n}} \frac{1}{1+x^2} \, d\lambda_1(x)$;
6) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} n\left(e^{-\frac{x}{n}} - 1\right) \frac{1}{1+x^4} \, d\lambda_1(x)$;
7) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} e^{-x}\left(1 + \sin^n \frac{1}{n}\right) \, d\lambda_1(x)$;
8) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}} (1 + \cos^n x^4)(1 + x^2)^{-1} \, d\lambda_1(x)$;
9) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}} n \sin \frac{x}{n} \cdot (1 + x^4)^{-1} \, d\lambda_1(x)$;
10) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} n e^{-x}\left(\sqrt[5]{1 + \frac{x}{n}} - 1\right) \, d\lambda_1(x)$.

П4. Нехай λ_F – міра Лебега-Стілтьєса на $\mathbf{R}$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbf{R}} f_n\,d\lambda_F$, якщо для довільних $x\in\mathbf{R}$ і $n\in\mathbf{N}$:

1) $F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ 1, & 0\le x<1,\\ 2, & 1\le x<+\infty,\end{cases}\quad f_n(x)=\sqrt[n]{|x|};$

2) $F(x)=\begin{cases}-2, & -\infty<x<-1,\\ [x], & -1\le x<2,\\ 2, & 2\le x<+\infty,\end{cases}\quad f_n(x)=\sqrt[n]{|x|+|x|^n};$

3) $F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ 5, & 0\le x<1,\\ 7, & 1\le x<+\infty,\end{cases}\quad f_n(x)=\chi_{(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})}(x)+\sqrt[n]{|x|};$

4) $F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ [x], & 0\le x<5,\\ 5, & 5\le x<+\infty,\end{cases}\quad f_n(x)=\dfrac{1}{1+x^{2n}};$

5) $F(x)=\begin{cases}-6, & -\infty<x<-5,\\ [x], & -5\le x<5,\\ 5, & 5\le x<+\infty,\end{cases}\quad f_n(x)=\dfrac{|x|^n}{1+|x|^n};$

6) $F(x)=[2x], f_n(x)=\sin^{2n}\pi x\chi_{[0,100]}(x);$

7) $F(x)=[2x], f_n(x)=2^{-|x|}\sin^{2n}\pi x;$

8) $F(x)=[2x], f_n(x)=3^{-|x|}\cos^{2n}2\pi x;$

9) $F(x)=[2x], f_n(x)=\left|\cos^n\frac{1}{x}\right|\chi_{(0,+\infty)}(x);$

10) $F(x)=[x|x|], f_n(x)=e^{-x^2}\sin^{2n}\pi x^2.$

ЗАНЯТТЯ 14
ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД ПІД ЗНАКОМ ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА (ПРОДОВЖЕННЯ)

А14

У наступних задачах $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір і λ – повна міра на σ-алгебрі $\mathcal{F}$.

О1. Нехай $T \subset \mathbf{R}$, t_0 – гранична точка множини T, $\{f(t,\cdot) \mid t \in T\} \subset L(A,\lambda)$, $A \in \mathcal{F}$ і виконуються умови:

1) $\exists g \in L(A,\lambda)\ \forall t \in T\ \forall x \in X\ :\ |f(t,x)| \le g(x)$;
2) $\exists \widetilde{f} : X \to \mathbf{R}\ :\ f(t,\cdot) \xrightarrow[t \to t_0]{} \widetilde{f}\ (\mathrm{mod}\,\lambda)$.

Довести, що $\widetilde{f} \in L(A,\lambda)$ і $\int\limits_A f(t,x)\,d\lambda(x) \xrightarrow[t\to t_0]{} \int\limits_A \widetilde{f}(x)\,d\lambda(x)$.

С1. Обчислити

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{x} + |\sin tx|} \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\,d\lambda_1(x),$$

де λ_1 – міра Лебега на $\mathbf{R}$.

С2. Нехай $g(t) = \int\limits_{[0,+\infty)} e^{-tx^2} \frac{[x]}{1+[x^2]}\,d\lambda_1(x),\ t > 0$. Довести, що $g \in C((0,+\infty))$.

С3. Нехай $g(t) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-|t|(x^2+y^2)}([x] + [y])\,d\lambda_2(x,y)$, $t \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, де λ_2 – міра Лебега на $\mathbf{R}^2$. Довести, що $g \in C(\mathbf{R}\setminus\{0\})$.

О2. Нехай $f : \mathbf{R} \to [0,+\infty)$ – борельова функція і

$$\exists C > 0\ \forall \alpha > 0\ :\ \int\limits_{[0,+\infty)} \frac{\sin^2 \alpha x}{\alpha^2 x} f(x)\,d\lambda_1(x) \le C.$$

Довести, що $\int\limits_{[0,+\infty)} x f(x)\,d\lambda_1(x) < +\infty$.

О3. Нехай функції $f(x),\ x \in \mathbf{R}$ і $xf(x), x \in \mathbf{R}$, інтегровні на $\mathbf{R}$ відносно міри Лебега. Довести, що функція

$$g(t) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{itx} f(x)\,d\lambda_1(x),\ t \in \mathbf{R},$$

неперервно диференційовна на $\mathbf{R}$, та знайти похідну g'.

C4. Нехай функція $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ вимірна за Лебегом і обмежена на $\mathbf{R}$. Довести, що функція

$$g(t) = \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\cos tx^2}{1+x^6} f(x)\, d\lambda_1,\ t \in \mathbf{R},$$

неперервно диференційовна на $\mathbf{R}$, та знайти похідну g'.

O4. Обчислити інтеграл

$$I(t) = \int\limits_{[0,+\infty)} \frac{e^{-tx^2} - e^{-x^2}}{x} \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\, d\lambda_1(x),\ t > 0.$$

Д1. Послідовність функцій $\{f_n : n \geq 1\} \subset L(A, \lambda)$, $A \in \mathcal{F}$, називають рівномірно інтегровною на A, якщо

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \int\limits_{\{x \mid\ |f_n(x)| > c\}} |f_n(x)|\, d\lambda(x) \xrightarrow[c\to\infty]{} 0.$$

Нехай $\lambda(A) < +\infty$, послідовність $\{f_n : n \geq 1\}$ рівномірно інтегровна на A і $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \pmod{\lambda}$. Довести, що

$$f \in L(A, \lambda) \quad \text{і} \quad \int\limits_A f_n\, d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_A f\, d\lambda.$$

Д2. Нехай $\lambda(A) < +\infty$, $\{f_n : n \geq 1\}$ – послідовність $\mathcal{F}$-вимірних функцій і $\exists \delta > 0 \ :\ \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} \int\limits_A |f_n|^{1+\delta}\, d\lambda < +\infty$. Довести, що послідовність $\{f_n : n \geq 1\}$ рівномірно інтегровна на A.

Д3. Нехай $\lambda(A) < +\infty$, $\{f_n : n \geq 1\} \subset L(A, \lambda)$ і $f \in L(A, \lambda)$. Довести, що $\int\limits_A |f_n - f|\, d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ тоді і тільки тоді, коли $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} f$ і $\{f_n : n \geq 1\}$ рівномірно інтегровна на A.

Д4. Теорема Валле Пуссена. Нехай $\lambda(A) < +\infty$. Довести, що послідовність функцій $\{f_n : n \geq 1\}$ рівномірно інтегровна на A тоді і тільки тоді, коли існує така зростаюча функція $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, що

$$\frac{g(t)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty \ \text{і} \ \sup_{n \in \mathbf{N}} \int\limits_A g(|f_n(x)|)\, d\lambda(x) < +\infty.$$

Б14

П1. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_{[0,1]} \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\ln(|t|+x)\,d\lambda_1(x)$;

2) $\lim\limits_{t\to 1}\int\limits_{\mathbf{R}} \dfrac{1}{1+x^2+t^2}\,d\lambda_1(x)$;

3) $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_{[-1,1]} \dfrac{1}{t^2+\sqrt{1-x^2}}\,d\lambda_1(x)$;

4) $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_{[2,+\infty)} \dfrac{1}{t^2+x^2+x-2}\,d\lambda_1(x)$;

5) $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_{[0,+\infty)} \dfrac{1}{|t|+1+x^3}\,d\lambda_1(x)$;

6) $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\cos(xyt)\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\,d\lambda_2(x,y)$;

7) $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2+t)\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(y)\,d\lambda_2(x,y)$;

8) $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2+t^2)\,d\lambda_2(x,y)$;

9) $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_{A} \ln\sqrt{t^2+x^2+y^2}\,d\lambda_2(x,y)$,

$$A=\big\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\big\};$$

10) $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_{A} \dfrac{1}{t^2+\sqrt{t^2+1-x^2-y^2}}\,d\lambda_2(x,y)$,

$$A=\big\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\big\}.$$

П2. Довести, що функція $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ неперервна, якщо:

1) $g(t)=\int\limits_{\mathbf{R}} e^{-(1+t^2)[x^2]}\,\mathrm{sign}(\sin^2 x-\frac{1}{2})\,d\lambda_1(x)$;

2) $g(t)=\int\limits_{\mathbf{R}} \dfrac{\cos(tx+t^4\sin x)}{1+x^4}[x]^2\,d\lambda_1(x)$;

3) $g(t)=\int\limits_{\mathbf{R}}\dfrac{\operatorname{arctg}(t^4\ln(1+x^2))}{1+[x]^2}\operatorname{sign}((x-1)\cos x)\,d\lambda_1(x);$

4) $g(t)=\int\limits_{\mathbf{R}}e^{-|x|}[x]^4\dfrac{\operatorname{sign}(\cos x)}{2+\sin(tx+t^8x^2)}\,d\lambda_1(x);$

5) $g(t)=\int\limits_{\mathbf{R}}\dfrac{e^{-[x]^4}\ln(2+t^4x^4)}{2+\operatorname{sign}(\cos x)}\,d\lambda_1(x);$

6) $g(t)=\int\limits_{\mathbf{R}}[x]^2(1+x^4)^{-1}\sin(t\cos^2 x)\,d\lambda_1(x);$

7) $g(t)=\int\limits_{\mathbf{R}^2}e^{-(x^2+|y|)}\cos(xyt)\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\,d\lambda_2(x,y);$

8) $g(t)=\int\limits_{\mathbf{R}^2}\operatorname{arctg}(\operatorname{ch}([xy]))(1+t^2+(x^2+y^2)^2)^{-1}\,d\lambda_2(x,y);$

9) $g(t)=\int\limits_{\mathbf{R}^2}e^{-(x^2+[y]^2)}\sin(xyt)\,d\lambda_2(x,y);$

10) $g(t)=\int\limits_{\mathbf{R}^2}\sin(x+[y]+t)(1+t^2+(x^2+y^2)^2)^{-1}\,d\lambda_2(x,y).$

Г1. Нехай функція $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ вимірна за Лебегом і обмежена. Довести, що функція

$$g(t)=\int\limits_{[0,+\infty)}e^{-tx}f(x)\,d\lambda_1(x),\ t\in(0,+\infty),$$

нескінченно диференційовна на $(0,+\infty)$, і знайти $g^{(k)},\ k\in\mathbf{N}$.

П3. Довести, що функція $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ неперервно диференційовна на $\mathbf{R}$, і знайти g', якщо:

1) $g(t)=\int\limits_{\mathbf{R}}\dfrac{\sin(tx^4)}{1+x^8}\operatorname{sign}(\cos e^{-x})\,d\lambda_1;$

2) $g(t)=\int\limits_{\mathbf{R}}e^{-|x|}\cos(tx^{10})[x^2]\,d\lambda_1(x);$

3) $g(t)=\int\limits_{\mathbf{R}}e^{-[x]^2}[x^{10}]\ln(1+t^2x^2)\,d\lambda_1(x);$

4) $g(t)=\int\limits_{\mathbf{R}}\operatorname{arctg}(tx)\operatorname{sign}(\cos 4x)(1+[x]^8)^{-1}\,d\lambda_1(x);$

5) $g(t)=\int\limits_{\mathbf{R}}\operatorname{arctg}(t^2x^4)\operatorname{sign}(\cos x^2)(1+[x]^8)^{-1}\,d\lambda_1(x);$

6) $g(t) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-x^2} \operatorname{sign}(\sin x)(1+t^2x^2)^{-1}\, d\lambda_1(x);$

7) $g(t) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-(|x|+|y|)} \sin(tx)\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(y)\, d\lambda_2(x,y);$

8) $g(t) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} \sin(t([x]+y))(1+(x^2+y^2)^4)^{-1}\, d\lambda_2(x,y);$

9) $g(t) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-t^2(x^2+y^2)}(1+(x^2+y^2)^3)^{-1}\, d\lambda_2(x,y);$

10) $g(t) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}(\sin^2(tx)+\cos^2(ty))\, d\lambda_2(x,y).$

П4. За допомогою диференціювання за параметром обчислити інтеграли:

1) $I(m) = \int\limits_{[0,+\infty)} \dfrac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} \sin mx\, d\lambda_1(x),$
$$m \in \mathbf{R},\ \alpha > 0,\ \beta > 0;$$

2) $I(m) = \int\limits_{[0,+\infty)} \dfrac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} \cos mx\, d\lambda_1(x),$
$$m \in \mathbf{R},\ \alpha > 0,\ \beta > 0;$$

3) $I(\alpha) = \displaystyle\int\limits_{[0,+\infty)} \left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-x}}{x}\right)^2 \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\, d\lambda_1(x),\ \alpha > 0;$

4) $I(a) = \int\limits_{[1,+\infty)} \dfrac{\operatorname{arctg} ax}{x^2\sqrt{x^2-1}}\, d\lambda_1(x),\ a \in \mathbf{R};$

5) $I(\alpha) = \int\limits_{[0,+\infty)} (1+x^2)^{-1}\ln(\alpha^2+x^2)\, d\lambda_1(x),\ \alpha \in \mathbf{R};$

6) $I(b) = \int\limits_{[0,+\infty)} e^{-ax^2}\cos bx\, d\lambda_1(x),\ b \in \mathbf{R},\ a > 0.$

ЗАНЯТТЯ 15
ЗАРЯДИ. АБСОЛЮТНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ І СИНГУЛЯРНІСТЬ

Контрольні запитання

1. *Дати означення заряду.*
2. *Сформулювати теореми про розклад Гана простору X відносно заряду ν і розклад Жордана заряду ν. (Якщо $X = X_+ \cup X_-$ є деякий розклад Гана, то розклад Жордана $\nu = \nu_+ + \nu_-$ задається рівностями $\nu_+(A) := \nu(A \cap X_+)$, $\nu_-(A) = |\nu(A \cap X_-)|$, де A – довільна вимірна множина).*
3. *В якому випадку заряд називають абсолютно неперервним і в якому сингулярним відносно міри?*
4. *Сформулювати теорему Радона-Никодима.*

A15

В наступних задачах $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір і λ – міра на σ-алгебрі $\mathcal{F}$.

O1. Нехай $f \in L(X, \lambda)$ і $\nu(A) = \int\limits_A f\,d\lambda,\ A \in \mathcal{F}$. Довести, що ν – скінченний заряд на $\mathcal{F}$. Знайти розклад Гана простору X відносно заряду ν і розклад Жордана заряду ν.

C1. Нехай λ_1 – міра Лебега на $\mathbf{R}$, $\delta_0(A) = \chi_A(0)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, і $\nu = \lambda_1 - \delta_0$. Знайти розклад Гана простору $\mathbf{R}$ відносно заряду ν та розклад Жордана заряду ν.

O2. Нехай $\mu, \lambda - \sigma$-скінченні міри на σ-алгебрі $\mathcal{F}$, і $\mu << \lambda$. Довести, що $\dfrac{d\,\mu}{d\lambda} \geq 0 \ (\operatorname{mod} \lambda)$.

O3. Нехай $\mu_1,\ \mu_2,\ \lambda$ – σ-скінченні міри на σ-алгебрі $\mathcal{F}$, і $\mu_i << \lambda,\ i = 1, 2$. Довести, що $\mu = \mu_1 + \mu_2 << \lambda$ і $\dfrac{d\,\mu}{d\lambda} = \dfrac{d\,\mu_1}{d\lambda} + \dfrac{d\,\mu_2}{d\lambda} \ (\operatorname{mod} \lambda)$ на X.

C2. Нехай $\nu = \nu_+ - \nu_-$ є розклад Жордана заряду ν. Довести, що $\nu_+ \perp \nu_-$.

O4. Нехай $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – неспадна і неперервно диференційовна функція і λ_F – відповідна їй міра Лебега-Стілтьєса, яка розглядається на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Довести, що $\lambda_F << \lambda_1$ і $\dfrac{d\lambda_F}{d\lambda_1} = F' \ (\operatorname{mod} \lambda_1)$ на $\mathbf{R}$, де λ_1 – міра Лебега на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

О5. Нехай $F(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ e^x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ і λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса, яка розглядається на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Зобразити міру λ_F у вигляді $\lambda_F = \lambda_a + \lambda_s$, де λ_a, λ_s – міри на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$, $\lambda_a << \lambda_1$, $\lambda_s \perp \lambda_1$, λ_1 – міра Лебега на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Обчислити $\dfrac{d\lambda_a}{d\lambda_1}$.

С3. Нехай $\delta_k(A) = \chi_A(k)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, $k = \overline{0,n}$, $\nu = \lambda_1 - \delta_0 - 2\delta_1 - 3\delta_2 - \ldots - (n+1)\delta_n$. Зобразити заряд ν у вигляді $\nu = \nu_a + \nu_s$, де $\nu_a << \lambda_1$ і $\nu_s \perp \lambda_1$, та обчислити $\dfrac{d\nu_a}{d\lambda_1}$, де λ_1 – міра Лебега на $\mathbf{R}$.

С4. Нехай $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2 + [x], & x \geq 0, \end{cases}$ і λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса, яка розглядається на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{[-10,10]} x\, d\lambda_F(x).$$

Д1. Нехай $X = \mathbf{N}$, $\{p_n : n \geq 1\} \subset (0, +\infty)$, $\{q_n : n \geq 1\} \subset (0, +\infty)$, $B = \{2n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$, $\lambda(A) = \sum\limits_{n \in A} p_n$, і $\mu(A) = \sum\limits_{n \in A \cap B} q_n$, $A \in 2^{\mathbf{N}}$. Зобразити міру λ у вигляді суми мір λ_a і λ_s, де $\lambda_a << \mu$ і $\lambda_s \perp \mu$. Обчислити $\dfrac{d\lambda_a}{d\mu}$.

Д2. Нехай μ і λ – скінченні міри на σ-алгебрі $\mathcal{F}$. Довести, що $\mu << \lambda$ тоді і тільки тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall A \in \mathcal{F}, \ \lambda(A) < \delta \ : \ \mu(A) < \varepsilon.$$

Д3. Нехай λ, μ і τ – σ-скінченні міри на $\mathcal{F}$, $\tau << \mu$ і $\mu << \lambda$. Довести, що $\tau << \lambda$ і $\dfrac{d\tau}{d\lambda} = \dfrac{d\tau}{d\mu} \cdot \dfrac{d\mu}{d\lambda} \pmod{\lambda}$ на X.

Д4. Нехай λ, μ – σ-скінченні міри на $\mathcal{F}$, $\mu << \lambda$ і $\lambda << \mu$. Довести, що $\dfrac{d\lambda}{d\mu} = \left(\dfrac{d\mu}{d\lambda}\right)^{-1}$ $(\operatorname{mod} \mu$ і $\operatorname{mod} \lambda)$ на X.

Д5. Нехай μ_k, $k \geq 1$, μ і λ – σ-скінченні міри на $\mathcal{F}$ такі, що $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k(A)$, $A \in \mathcal{F}$, та $\forall k \geq 1 \ : \ \mu_k << \lambda$. Довести, що

$\mu << \lambda$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d}{d\lambda} \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k = \dfrac{d\mu}{d\lambda} \pmod{\lambda}$ на X.

Д6. Нехай X – деяка множина, $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ – σ-алгебри її підмножин, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, μ – σ-скінченна міра на $\mathcal{F}_2$ і функція $f \in L(X,\mu)$ є $\mathcal{F}_2$-вимірною. Довести, що існує $\mathcal{F}_1$-вимірна функція $g \in L(X,\mu)$ така, що

$$\forall A \in \mathcal{F}_1 \ : \ \int\limits_A g\, d\mu = \int\limits_A f\, d\mu.$$

Д7. Нехай $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – неспадна, неперервна справа функція, λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса на $\mathbf{R}$, $f \in C([a,b])$. Довести, що

$$\int\limits_{[a,b]} f\, d\lambda_F = \int\limits_a^b f(x)\, dF(x) + f(a)(F(a) - F(a-)),$$

де інтеграл в правій частині рівності слід розуміти як інтеграл Рімана-Стілтьєса.

Д8. Нехай $(X, \mathcal{F}, \mu)$ – простір зі скінченною мірою, $g : X \to \mathbf{R}$ – борельова функція, $F(t) = \mu(\{x \mid g(x) \le t\})$, $t \in \mathbf{R}$, λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Користуючись формулами заміни змінних і заміни міри в інтегралі Лебега, довести, що:

1) $\int\limits_X g\, d\mu = \int\limits_{\mathbf{R}} x\, d\lambda_F(x)$, якщо хоч один з інтегралів скінченний або $g \ge 0 \pmod{\mu}$;
2) якщо F має щільність (тобто існує борельова функція $f : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$ така, що
$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\, d\lambda_1(t), \ x \in \mathbf{R},$$
λ_1 – міра Лебега на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$) і $g \in L(X, \lambda)$, то
$$\int\limits_X g\, d\lambda_F = \int\limits_{\mathbf{R}} x f(x)\, d\lambda_1(x).$$

Б15

Г1. Нехай μ_1, μ_2 і μ – міри на $\mathcal{F}$. Довести, що якщо $\mu_1 \perp \mu$ і $\mu_2 \perp \mu$, то $\mu_1 + \mu_2 \perp \mu$. Чи справедливе обернене твердження?

Г2. Нехай λ – σ-скінченна міра, ν – σ-скінченний заряд на $\mathcal{F}$, $\nu << \lambda$. Виразити в термінах похідної Радона-Нікодіма $\dfrac{d\nu}{d\lambda}$ необхідну і достатню умову того, що:

1) ν – скінченний заряд; 2) ν – міра і $\lambda << \nu$.

Г3. Нехай μ_1, μ_2, λ – міри на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$, $\mu := \mu_1 + \mu_2$. Чи вірно, що:

1) $\mu << \lambda \Rightarrow (\mu_1 << \lambda$ або $\mu_2 << \lambda)$?
2) $(\lambda << \mu_1,\ \lambda << \mu_2) \Rightarrow \lambda << \mu$?
3) $\lambda << \mu \Rightarrow (\lambda << \mu_1$ або $\lambda << \mu_2)$?

Г4. Нехай μ – σ-скінченна міра на $\mathcal{F}$. Довести, що існує скінченна міра λ на $\mathcal{F}$ така, що $\lambda << \mu$ і $\mu << \lambda$.

П1. Нехай λ_m – міра Лебега на $\mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$. Довести, що μ – заряд на $\mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$, знайти відповідний заряду μ розклад Гана простору $\mathbf{R}^m$ і розклад Жордана заряду μ, якщо для $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$:

1) $\mu(A) = \int\limits_{[0,10\pi]\cap A} \sin x\, d\lambda_1(x),\ m = 1;$
2) $\mu(A) = \int\limits_{[0,20\pi]\cap A} \cos x\, d\lambda_1(x) - \lambda_1(A),\ m = 1;$
3) $\mu(A) = 3\int\limits_A e^{-|x|}\, d\lambda_1(x) - 2\lambda_1(A),\ m = 1;$
4) $\mu(A) = \int\limits_{[0,10]\cap A} (x^2 - 25)\, d\lambda_1(x) - \int\limits_{[10,20]\cap A} (x - 15)\, d\lambda_1(x),$ $m = 1;$
5) $\mu(A) = \int\limits_A (5^{2x+1} - 5^x)\, d\lambda_1(x) + 4\lambda_1(A),\ m = 1;$
6) $\mu(A) = \int\limits_A \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} d\lambda_1(x) - 6\lambda_1(A),\ m = 1;$
7) $\mu(A) = \int\limits_{A\cap\{(x,y)\,|\ x^2+y^2\le 9\pi\}} \cos(x^2 + y^2)\, d\lambda_2(x, y),$ $m = 2;$
8) $\mu(A) = \int\limits_{A\cap\{(x,y)\,|\ 1<x^2+y^2<9\}} e^{x^2+y^2}\, d\lambda_2(x, y) - 5\lambda_2(A),$ $m = 2;$
9) $\mu(A) = \int\limits_A [(x + 1)^2 + (y - 2)^2]\, d\lambda_2(x, y) - 4\lambda_2(A), m = 2;$
10) $\mu(A) = \int\limits_A (x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y)\, d\lambda_2(x, y) + \lambda_2(A), m = 2;$

П2. Нехай $X=(0,1]$, $\mathcal{B}(X)$ – σ-алгебра борельових підмножин X і λ_1 – міра Лебега на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Нехай, далі, μ – міра на $\mathcal{B}(X)$ і $F(x)=\mu((0,x])$, $x\in(0,1]$, $F(0)=0$. Довести, що $\mu << \lambda_1$, та знайти $\dfrac{d\,\mu}{d\lambda_1}$, якщо для $x\in(0,1]$:

1) $F(x)=\operatorname{arctg} x$;
2) $F(x)=\arcsin\dfrac{2^{x^2}-1}{2}$;
3) $F(x)=(2+x)^{1+x}-2$;
4) $F(x)=\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt$;
5) $F(x)=\dfrac{x}{1+x}$;
6) $F(x)=\int\limits_0^x 2^{t^2-t}\,dt$;
7) $F(x)=2^x-1$;
8) $F(x)=3^{x^4}-1$;
9) $F(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;
10) $F(x)=2^{\sin x^2}-1$.

П3. Нехай $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ – неспадна і неперервна справа функція, λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ і λ_1 – міра Лебега на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Зобразити міру λ_F у вигляді $\lambda_F=\lambda_a+\lambda_s$, де $\lambda_a << \lambda_1$, $\lambda_s\perp\lambda_1$, та обчислити $\dfrac{d\lambda_a}{d\lambda_1}$, якщо:

1) $F(x)=|x|\cdot[x],\ x\in\mathbf{R}$;
2) $F(x)=[x|x|]+x|x|,\ x\in\mathbf{R}$;
3) $F(x)=[x]+3x,\ x\in\mathbf{R}$;
4) $F(x)=[e^x]+e^x,\ x\in\mathbf{R}$;
5) $F(x)=[2x]+\int\limits_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t^4},\ x\in\mathbf{R}$;
6) $F(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, & x<0,\\ 2+\operatorname{arctg} x, & x\ge 0;\end{cases}$
7) $F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ x^2+1, & 0\le x<1,\\ 3x^4, & 1\le x<+\infty;\end{cases}$
8) $F(x)=\begin{cases}-1, & -\infty<x<0,\\ 1, & 0\le x<1,\\ 2x, & 1\le x<+\infty;\end{cases}$

9) $F(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ x+1, & 1 \le x < +\infty; \end{cases}$

10) $F(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & -\infty < x < 0, \\ 2^{[x]}, & 0 \le x < +\infty. \end{cases}$

П4. Нехай $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – неспадна і неперервна справа функція, λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса. Обчислити інтеграл $\int\limits_A f\,d\lambda_F$, якщо:

1) $f(x) = x,\ F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt,\ A = [-1, 1];$
2) $f(x) = \cos^2 x,\ F(x) = 2x,\ A = [0, 10];$
3) $f(x) = x,\ F(x) = e^x + [x],\ A = [0, 10];$
4) $f(x) = x,\ F(x) = \operatorname{arctg} x + [3x],\ A = [0, 1];$
5) $f(x) = x^2,\ F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-x}, & x \ge 0, \end{cases} A = [0, 1];$
6) $f(x) = \frac{x}{x+1},\ F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & x \ge 0, \end{cases} A = [0, 1];$
7) $f(x) = \operatorname{ch} x,\ F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3, & x \ge 0, \end{cases} A = [-1, 1];$
8) $f(x) = x^3,\ F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^x + [x], & x \ge 0, \end{cases} A = [0, 10];$
9) $f(x) = x^3,\ F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t^4} + [x|x|],\ A = [0, 3];$
10) $f(x) = x^2,\ F(x) = \begin{cases} -1, & x < -\frac{\pi}{2}, \\ \sin x, & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x \ge \frac{\pi}{2}, \end{cases} A = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$

ЗАНЯТТЯ 16
ПРОСТОРИ $L_p(X,\lambda),\ 1 \le p < +\infty$

Контрольні запитання

1. *Дати означення просторів* $L_p(X,\lambda),\ 1 \le p < +\infty$.
2. *Яку послідовність називають збіжною в просторі* $L_p(X,\lambda),\ p \ge 1$?

А16

У наступних задачах $(X,\mathcal{F})$ – вимірний простір, λ – міра на σ-алгебрі $\mathcal{F}$, λ_m – міра Лебега в $\mathbf{R}^m$, $m \in \mathbf{N}$, і $\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f|^p\, d\lambda\right)^{1/p}$, якщо $f \in L_p(X,\lambda),\ 1 \le p < +\infty$.

O1. Нехай $\{f,g\} \subset L_2([0,1],\lambda_1)$. Довести, що $fg \in L_1([0,1],\lambda_1)$. Чи завжди $fg \in L_2([0,1],\lambda_1)$?

C1. Нехай $p \ge 1$. Для яких $\alpha \in \mathbf{R}$ функція $f(t) = t^{-\alpha}$, $t > 0$, належить до $L_p([0,1],\lambda_1)$? $L_p([1,+\infty),\lambda_1)$?

O2. Нехай $\{f_n : n \ge 0\} \subset L_p(X,\lambda),\ f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0$ в $L_p(X,\lambda)$. Довести, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} f_0$.

O3. Нехай $\{f_n : n \ge 0\} \subset L_p(X,\lambda),\ f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0$ в $L_p(X,\lambda)$, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g \pmod{\lambda}$. Довести, що $f_0 = g \pmod{\lambda}$ на X.

O4. Нехай $f_n(x) = (\sqrt{|x|} + 1 + \frac{1}{n})^{-1},\ x \in \mathbf{R},\ n \ge 1$, $f(x) = (\sqrt{|x|}+1)^{-1},\ x \in \mathbf{R}$. При яких $p \ge 1$ $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ в $L_p(\mathbf{R},\lambda_1)$? Нехай A – борельова множина, $\lambda_1(A) < +\infty$, $g(x) = f(x)\chi_A(x)$, $x \in \mathbf{R}$. При яких $p \ge 1$ $\quad f_n\chi_A \xrightarrow[n\to\infty]{} g$ в $L_p(\mathbf{R},\lambda_1)$?

C2. Нехай $f_n(x) = \sqrt{n}\chi_{[0,\frac{1}{n})}(x),\ x \in \mathbf{R}$, і $f(x) = 0,\ x \in \mathbf{R}$. Довести, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ в $L_1(\mathbf{R},\lambda_1)$, але ця послідовність не збігається в просторі $L_2(\mathbf{R},\lambda_1)$.

С3. З'ясувати, чи збігається в $L_p(\mathbf{R}, \lambda_1)$ послідовність функцій $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ n \geq 1$, якщо:

1) $f_n(x) = \begin{cases} x^n - x^{2n}, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]; \end{cases}$
2) $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0, & x \notin [0, \frac{1}{n}]; \end{cases}$
3) $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2+1}\chi_{[n,+\infty)}(x)$.

С4. Нехай $\delta_0(A) = \chi_A(0),\ \mu(A) = \lambda_1(A) + \delta_0(A)$ для $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ і $f_n(x) = \sqrt{n}\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x),\ x \in \mathbf{R},\ n \geq 1$. Дослідити на збіжність послідовність $\{f_n : n \geq 1\}$ у просторах $L_1(\mathbf{R}, \lambda_1)$ і $L_1(\mathbf{R}, \mu)$.

Д1. Нехай $f \in L_p(X, \lambda)$. Довести, що

$$\|f\|_p = \sup\left\{\int\limits_X fg\, d\lambda \mid g \in L_q(X,\lambda),\ \|g\|_q \leq 1\right\},$$

де число q таке, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Д2. Нехай $\lambda(X) < +\infty$. Довести, що $L_\infty(X, \lambda) \subset L_p(X, \lambda)$ при всіх $p \geq 1$ і $\|f\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p$ при всіх $f \in L_\infty(X, \lambda)$.

Д3. Довести, що в просторі $L_p([0,1], \lambda_1)$ щільні такі множини функцій:

1) множина всіх кусково-сталих функцій;
2) $C([0,1])$;
3) множина всіх многочленів, які розглядаються на $[0,1]$;
4) множина всіх многочленів парного степеня, які розглядаються на $[0,1]$.

Д4. Навести приклад послідовності функцій $\{f_n : n \geq 1\} \subset L_1([0,1], \lambda_1)$, яка збігається у просторі $L_1([0,1], \lambda_1)$, але не збігається в жодній точці відрізка $[0,1]$.

Д5. Нехай $f \in L_p(\mathbf{R}, \lambda_1)$. Довести, що

$$\int\limits_{\mathbf{R}} |f(x+t) - f(x)|^p\, d\lambda_1(x) \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Д6. Нехай додатні числа p, q і r пов'язані співвідношенням $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, $f \in L_p(X, \lambda)$, $g \in L_q(X, \lambda)$ і $h \in L_r(X, \lambda)$. Довести, що добуток $fgh \in L_1(X, \lambda)$ і

$$\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

Д7. Нехай $1 \le p \le s \le q,\ p < q$. Довести, що

$$L_p(X,\lambda) \cap L_q(X,\lambda) \subset L_s(X,\lambda)$$

і для довільної функції $f \in L_p(X,\lambda) \cap L_q(X,\lambda)$ виконується нерівність $\|f\|_s \le \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{\beta}$, де

$$\alpha = \tfrac{s^{-1}-q^{-1}}{p^{-1}-q^{-1}},\ \beta = \tfrac{p^{-1}-s^{-1}}{p^{-1}-q^{-1}}.$$

Б16

Г1. Нехай $1 \le p < q < +\infty,\ A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}),\ \lambda_1(A) < +\infty$. Довести, що

1) $L_q(A,\lambda_1) \subset L_p(A,\lambda_1)$;
2) жодний з просторів $L_p(\mathbf{R},\lambda_1)$ і $L_q(\mathbf{R},\lambda_1)$ не міститься в іншому.

Г2. Нехай $\{g, f_n\ :\ n \ge 1\} \subset L_p(X,\lambda)$ і виконуються умови:

1) $\forall n \ge 1\ :\ |f_n| \le g\ (\operatorname{mod} \lambda)$;
2) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f\ (\operatorname{mod} \lambda)$.

Довести, що $f \in L_p(X,\lambda)$ і $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ в $L_p(X,\lambda)$.

П1. Для яких $p \ge 1$ справедливо, що $f \in L_p([0,1],\lambda_1)$, якщо:

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0,1)\backslash\mathbf{Q}, \\ \sin x, & x \in (0,1) \cap \mathbf{Q}; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \in (0,1)\backslash\mathbf{Q}, \\ \cos x, & x \in (0,1) \cap \mathbf{Q}; \end{cases}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}, x \in (0,1)$;

4) $f(x) = \dfrac{e^x \ln x}{x^2(1-x)^4}, x \in (0,1)$;

5) $f(x) = \dfrac{\chi_{\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}}(x)}{\sqrt{x}(1-x)}, x \in (0,1)$;

6) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^4(1-x)^5}, x \in (0,1)$?

Нехай $A = \big\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\big\}$. З'ясувати, для яких $p \ge 1$ справедливо, що $f \in L_p(A,\lambda_2)$, якщо:

7) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{-1}, & x^2+y^2 \ne 0, \\ 1, & x^2+y^2 = 0; \end{cases}$

8) $f(x,y) = \begin{cases} (|x|+|y|)^{-1}, & x^2+y^2 \ne 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0; \end{cases}$

9) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+xy+y^2)^{-1}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

10) $f(x,y)=\begin{cases}|x-y|^{-1}, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$

П2. З'ясувати, для яких значень $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}$ і $p\geq 1$ справедливо, що $f\in L_p(\mathbf{R},\lambda_1)$, якщо для $x\in\mathbf{R}$:

1) $f(x)=\dfrac{|x|^\alpha}{(1+x^2)^\beta}$;

2) $f(x)=\dfrac{\ln(1+|x|^\alpha)}{(1+x^4)^\beta}$;

3) $f(x)=|1-x|^\alpha|1+x|^\beta$;

4) $f(x)=\dfrac{|1-x|^\beta}{|x|^\alpha(1+x^4)}\ln(1+|x|)$;

5) $f(x)=\dfrac{|\operatorname{arctg}x|^\beta}{(1+x^2)^\alpha}$;

6) $f(x)=\dfrac{|1+x|^\alpha-1}{(1+x^2)|x|^\beta}$.

Визначити ті значення $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}$ і $p\geq 1$, для яких $f\in L_p(\mathbf{R}^2,\lambda_2)$, якщо для $(x,y)\in\mathbf{R}^2$:

7) $f(x,y)=(1+x^2+y^2)^{-\alpha}$;

8)* $f(x,y)=(1+|x|^\alpha+|y|^\beta)^{-1}$;

9) $f(x,y)=((1+|x|^\alpha)(1+|y|^\beta))^{-1}$;

10) $f(x,y)=\begin{cases}|1-x^2-y^2|^{-\alpha}, & x^2+y^2\neq 1,\\ 0, & x^2+y^2=1.\end{cases}$

П3. З'ясувати, для яких значень $p\geq 1$ послідовність функцій $\{f_n : n\geq 1\}\subset L_p(\mathbf{R},\lambda_1)$ збігається в $L_p(\mathbf{R},\lambda_1)$, якщо для $x\in\mathbf{R}$ і $n\in\mathbf{N}$:

1) $f_n(x)=\sqrt{n}\chi_{[0,\frac{1}{n})}(x)$;

2) $f_n(x)=n^2e^{-nx^2}$;

3) $f_n(x)=\sqrt{n}\chi_{\left[0,\frac{1}{n^2}\right.}(x)$;

4) $f_n(x)=n^2e^{-\frac{x^2}{n^2}}$;

5) $f_n(x)=n^{-2}e^{-\frac{x}{n}}\chi_{[0,+\infty)}(x)$;

6) $f_n(x)=\sqrt{|n-n^2x|}\,\chi_{[0,\frac{1}{n})}(x)$;

7) $f_n(x)=\frac{1}{x^4+1}\,\chi_{[n,+\infty)}(x)$;

8) $f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|}+1}\,\chi_{[n,2n]}(x)$;

9) $f_n(x)=\frac{1}{|x|+1}\,\chi_{[n,n^3+n]}(x)$;

10) $f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|}+1}\,\chi_{[-n^2,n^2]}(x)$.

ВІДПОВІДІ

Заняття 1

О2. Ні. **С5.** Ні. **С6.** $a(A) = \sigma a(A) = \{\varnothing, A, X\backslash A, X\}$, $k(A) = \sigma k(A) = \{\varnothing, A\}$. **Д3.** Кільце скінченних множин дійсних чисел. Не існує. **Д4.** Приклад: $X = \mathbf{R}$, $\mathcal{K} = \{\varnothing, \{-1, 2\}, \{1\}, \{-1, 1, 2\}\}$, $f(x) = x^2$. **Д6.** Не обов'язково. Приклад: $\mathcal{P}_1 = \{\varnothing, \{1\}\}$, $\mathcal{P}_2 = \{\varnothing, \{1, 2\}\}$. **Д7.** $|X| \leq 2$ і $X = \varnothing$ відповідно. **Г3.** Приклад: $\mathcal{K} = \{\{4\}\}$. **П1.** Кілець немає. Півкільцями є класи в пунктах $1, 2, 3, 7, 8, 10$. **П2.** 1) $k(\mathcal{H}) = \sigma k(\mathcal{H}) = \{\varnothing, A, B, A\backslash B, A \cap B, B\backslash A, A\triangle B, A \cup B\}$; 2) $a(\mathcal{H}) = \sigma a(\mathcal{H}) = \{\varnothing, A, B, A\backslash B, A\cap B, B\backslash A, A\triangle B, A\cup B, X, X\backslash A, X\backslash B, X\backslash(A\backslash B), X\backslash(A \cap B), X\backslash(B\backslash A), X\backslash(A\triangle B), X\backslash(A \cup B)\}$; 3) $m(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$; 4) $m(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \cup \{[0, 2)\}$; 5) $m(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \cup \{[0, 3]\}$; 6) $\sigma a(\mathcal{H}) = 2^{\mathcal{H}}$; 7) кільце утворюють всі скінченні множини натуральних чисел (включаючи порожню); 8) $m(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \cup \{(-e, e)\}$; 9) кільце утворюють усі скінченні множини дійсних чисел (включаючи порожню); 10) σ-кільце утворюють усі не більш ніж зліченні множини дійсних чисел (включаючи порожню); 11) алгебру утворюють усі скінченні множини дійсних чисел (включаючи порожню) і їх доповнення до множини дійсних чисел.

П3. 1) $\mathcal{P} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$; 2) $\mathcal{K} = \{\varnothing, \{1\}\}$; 3) $\{\varnothing, X\}$, 2^X, $\{\varnothing, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$, $\{\varnothing, \{2\}, \{1, 3\}, X\}$, $\{\varnothing, \{3\}, \{1, 2\}, X\}$; 4) останні два кільця попереднього пункту; 5) $\mathcal{H}$ не є σ-алгеброю, бо $\mathbf{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{n\} \notin \mathcal{H}$; 6) буде півкільцем, але не кільцем, бо $\{1\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\} \notin \mathcal{H}$; 7) $\mathcal{H}$ не є σ-кільцем, бо $\mathbf{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{n\} \notin \mathcal{H}$; 8) $\mathcal{H}$ не є σ-кільцем, бо $\mathbf{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{n\} \notin \mathcal{H}$; 9) $\mathcal{H}$ не є σ-кільцем, бо $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{\sqrt{2}n\} \notin \mathcal{H}$; 10) $\mathcal{H}$ не є σ-кільцем, бо $\mathbf{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{n\} \notin \mathcal{H}$; 11) $\mathcal{H}$ не є півкільцем.

Заняття 2

П1. 1) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = A \cap B \cap C$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = A \cup B \cup C$; 2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = [1, 5]$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \mathbf{R}$; 3) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = [0, 1)$,

$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = [0,+\infty)$; 4) $\varliminf_{n\to\infty} A_n = (0,\frac{\pi}{2})$, $\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \mathbf{R}$; 5) $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \{0\}$, $\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \mathbf{R}$; 6) $\varliminf_{n\to\infty} A_n = (1,4]$, $\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \mathbf{R}$; 7) $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varnothing$, $\varlimsup_{n\to\infty} A_n = [0,+\infty)$; 8) $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varnothing$, $\varlimsup_{n\to\infty} A_n = (-\infty,0)$; 9) $\varliminf_{n\to\infty} A_n = [3,4]$, $\varlimsup_{n\to\infty} A_n = (e,+\infty)$; 10) $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varnothing$, $\varlimsup_{n\to\infty} A_n = [1,+\infty)$; 11) $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varnothing$, $\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \mathbf{R}$. **П3.** 1) $\varphi(X)-\varphi(A\cap B)$; 2) $\varphi(A)+\varphi(B)-2\varphi(A\cap B)$; 3) $\varphi(X)-\varphi(A)-\varphi(B)+\varphi(A\cap B)$; 4) $\varphi(X)-\varphi(A)-\varphi(B)+2\varphi(A\cap B)$; 5) $\varphi(A)-\varphi(A\cap B)$; 6) $\varphi(C)-\varphi(A\cap B\cap C)$; 7) $\varphi(X)-\varphi(C)+\varphi(A\cap C)+$ $+\varphi(B\cap C)-2\varphi(A\cap B\cap C)$; 8) $\varphi(X)-\varphi(A)-\varphi(B)+$ $+\varphi(A\cap B)+\varphi(B\cap C)+\varphi(C\cap A)-\varphi(A\cap B\cap C)$; 9) $\varphi(X)-$ $-\varphi(A)-\varphi(B)-\varphi(C)+2\varphi(A\cap B)+2\varphi(B\cap C)+$ $+2\varphi(C\cap A)-4\varphi(A\cap B\cap C)$; 10) $\varphi(X)-\varphi(A)-\varphi(B)-$ $-\varphi(C)+\varphi(A\cap B)+2\varphi(B\cap C)+2\varphi(C\cap A)-$ $-2\varphi(A\cap B\cap C)$; 11) $\varphi(X)-\varphi(C)-\varphi(A\cap B)+2\varphi(A\cap B\cap C)$. **П4.** 1) $\varphi(A)-\varphi(A\cap B)-\varphi(A\cap C)+\varphi(A\cap B\cap C)$; 2) $\varphi(A\cap B)-\varphi(A\cap B\cap C)$; 3) $\varphi(A)+\varphi(B)-\varphi(A\cap B)-$ $-\varphi(B\cap C)-\varphi(C\cap A)+\varphi(A\cap B\cap C)$; 4) $\varphi(A)+\varphi(B)-$ $-2\varphi(A\cap B)-\varphi(B\cap C)-\varphi(C\cap A)+2\varphi(A\cap B\cap C)$; 5) $\varphi(A)+\varphi(B)+\varphi(C)-2\varphi(A\cap B)-2\varphi(B\cap C)-$ $-2\varphi(C\cap A)+3\varphi(A\cap B\cap C)$; 6) $\varphi(A\cap B)+\varphi(B\cap C)+$ $+\varphi(C\cap A)-3\varphi(A\cap B\cap C)$; 7) $\varphi(X)-\varphi(A\cap B)-$ $-\varphi(B\cap C)-\varphi(C\cap A)+2\varphi(A\cap B\cap C)$; 8) $\varphi(X)-\varphi(A)-$ $-\varphi(B)-\varphi(C)+\varphi(A\cap B)+\varphi(B\cap C)+\varphi(C\cap A)-\varphi(A\cap B\cap C)$; 9) $\varphi(A\cap B)+\varphi(B\cap C)+\varphi(C\cap A)-2\varphi(A\cap B\cap C)$; 10) $\varphi(X)-\varphi(A\cap B\cap C)$.

Заняття 3

С4. Не є, бо $\mu(X)\neq\mu\left(\bigcup\limits_{x\in X}\mu(\{x\})\right)=0$. **Д4.** Нехай $X=\{1,2\}$, $\mathcal{H}=2^X$, $\mu(\{1\})=\mu(\{2\})=1$, $E_{2n}=\{1\}$, $E_{2n-1}=\{2\}$, $n\geq 1$. Тоді $\varliminf_{n\to\infty}\mu(E_n)=\varlimsup_{n\to\infty}\mu(E_n)=1$, $\mu(\varliminf_{n\to\infty}E_n)=0, \mu(\varlimsup_{n\to\infty}E_n)=2$. **Д6.** Нехай $\mu(\{q_n\})=2^{-n}$, $n\geq 1$, де $\mathbf{Q}=\{q_n : n\geq 1\}$. **Г3.** Вірно лише 2) у випадку σ-алгебри. **П1.** Відповідь "так"в пунктах 5),7), "ні" в пунктах 6),8),9),10),11). **П2.** 1) $\frac{1}{4}$; 2)1; 3)$\frac{5}{4}$; 4) $\operatorname{ch} 1 - 1$; 5) $\operatorname{sh} 1 - 1$; 6) $\operatorname{sh} 1$; 7)$\frac{1}{3}$; 8)$\frac{1}{2}$; 9)$e^2 - 1$; 10)$e - 1$; 11)$\sqrt{2} - 1$; 12)$\frac{1}{e-1}$.

Заняття 4

Д1. 2)$\mu(\{1,2\}) = 2$, $\mu(\{1,3,4\}) = \mu(\{2,3,4\}) = 3$, $\mu(X) = 4$; 3)$\mu^*(A) = |A \cap \{1,2\}| + 2\operatorname{sign}(|A \cap \{3,4\}|)$; 4)$\mathcal{S} = k(\mathcal{P})$. **Д7.** $\mu_1 = \lambda_2$, $\mu_2(A) = 2(\lambda_2(A \cap [0,\frac{1}{2}]^2) + \lambda_2(A \cap (\frac{1}{2},1]^2))$. **П1.** 1) $\lambda_F^*(A) = 5\chi_A(-3)$; 2) $\lambda_F^*(A) = 10\chi_A(-2)$; 3) $\lambda_F^*(A) = 11\chi_A(1)$; 4) $\lambda_F^*(A) = 15\chi_A(\pi)$; 5) $\lambda_F^*(A) = 3\chi_A(-1) + 2\chi_A(1)$; 6) $\lambda_F^*(A) = 2\chi_A(1) + 3\chi_A(3)$; 7) $\lambda_F^*(A) = \chi_A(5) + 3\chi_A(7)$; 8) $\lambda_F^*(A) = 15\chi_A(\pi) + 2\chi_A(10)$; 9) $\lambda_F^*(A) = \sum\limits_{i=1}^{10} \chi_A(i)$; 10) $\lambda_F^*(A) = \sum\limits_{i=1}^{5} \chi_A(\sqrt{i})$; 11) $\lambda_F^*(A) = 11\chi_A(0) + 3\chi_A(2) + \sum\limits_{i=2}^{7} \chi_A(\ln i)$; 12) $\lambda_F^*(A) = \chi_A(e) + \chi_A(e^2) + 3\chi_A(e^3)$. **П2.** 1)-4),7) Не є. 5) $\mathcal{S} = \{\varnothing, X\}$; 6) $\mathcal{S} = 2^X$; 8) $\mathcal{S} = \{\varnothing, X\}$; 9) $\mathcal{S} = \{\varnothing, X, \{3\}, \{1,2\}\}$; 10) $\mathcal{S} = \{\varnothing, X, \{2\}, \{1,3\}\}$. **П3.** 1)-3),6),7) – є, 4),5),8) – не обов'язково, 9),10) – не є.

Заняття 5

С1. 1) $\lambda_1(A) = 1$; 2) $\lambda_1(A) = b - a$; 3) $\lambda_1(A) = 0$; 4),5) $\lambda_1(A) = +\infty$. **Д6.** 3)* Розв'язок див. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М., 1977. **П1.** 1)$\lambda_1(A) = 2$; 2)$\lambda_1(A) = \frac{e}{e-1}$; 3)$\lambda_1(A) = \frac{\pi}{2} + 10$; 4)$\lambda_1(A) = 1$; 5)$\lambda_1(A) = \frac{1}{2}$; 6)$\lambda_1(A) = \frac{1}{\ln 2}$; 7)$\lambda_1(A) = +\infty$; 8)$\lambda_1(A) = \frac{\pi}{3^5}$; 9)$\lambda_1(A) = 0$; 10)$\lambda_1(A) = \frac{1}{2}$. **П2.** 1) $A_n = [\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2})$, $n = 2k$, $A_n = [-\frac{n+1}{2}, \frac{1-n}{2})$, $n = 2k-1$, $k \geq 1$; 2) $A_n = [n, +\infty)$, $n \geq 1$; 3) $A_n = [0,1] \cup [n, +\infty)$, $n \geq 1$; 4) $A_n = \mathbf{N} \cup [n, +\infty)$, $n \geq 1$; 5) $A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [p_k, p_k + \frac{1}{n2^k}]$, $n \geq 1$, $P = \{p_n : n \geq 1\}$; 6) $A_n = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \{[k, k+1) \mid k = 2^n(m - \frac{1}{2})\}$, $n \geq 1$;

Заняття 6

О1. Приклад: $\mathbf{Q} \cap [0,1]$. **С1.** 1),2) $\lambda_2(A) = (b-a)(d-c)$; 3) $\lambda_2(A) = +\infty$; 4) $\lambda_2(A) = 0$. **О2.** Приклад: $\mathbf{Q} \cap [0,1]$. **С2.** $\lambda_2(A) = \frac{2}{3}$. **С3.** $\lambda_2(A) = 1$. **П1.** 1) $\{A_n : n \geq 1\}$ – перенумерована деяким чином зліченна множина

$\{[k,k+1)\times[l,l+1)\mid k,l\in\mathbf{Z}\}$; 2) $A_n = [n,+\infty)\times\mathbf{R},\ n\geq 1$; 3) $A_n = \mathbf{Z}^2\cup([n,+\infty)\times\mathbf{R}),\ n\geq 1$; 4) $A_n = (\mathbf{R}\times\{0\})\cup$ $\cup((0,\frac{1}{2^n})\times[0,1]),\ n\geq 1$; 5) $A_n = (\mathbf{Z}\times\mathbf{Z})\cup((0,\frac{1}{2^n})\times[0,1]),\ n\geq 1$; **П2.** $1), 2), 4), 10)\ \lambda_2(A)=0;\ 3), 5), 9)\ \lambda_2(A)=+\infty;\ 6), 7)\ \lambda_2(A)=4;$ $8)\ \lambda_2(A)=3.$ **П3.** Значення $\lambda_2(A)$: $1)8;\ 2)4;\ 3)\ln 2;\ 4)1;\ 5)\frac{1}{\sqrt{e}};\ 6)1;$ $7)\frac{\pi}{3};\ 8)\frac{\pi}{3};\ 9)2;\ 10)5.$ **П4.** Значення $\lambda_2(A)$: $1)1;\ 2)+\infty;\ 3)\frac{1}{e};\ 4)2;$ $5)\sqrt{\pi};\ 6)6;\ 7)\frac{\pi}{4};\ 8)\ln\frac{2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{5}};\ 9)\frac{\pi}{4};\ 10)2.$

Заняття 7

С3. $1)1$ при $x\in\mathbf{Z}$; 0 при $x\notin\mathbf{Z}$; $2)21;\ 3)0;\ 4)2;\ 5)+\infty;\ 6)+\infty.$ **Г1.** Функція F неспадна і неперервна зліва. **Г2.** 1) Так. 2) Ні. **П1.** $1)2n+1;\ 2)2n-1;\ 3)2n;\ 4)0;\ 5)7;\ 6)n^2-n;\ 7)5;\ 8)6;\ 9)9;\ 10)32.$ **П2.** Значення $\lambda_F(A)$: $1), 6)e;\ 2)e^2;\ 3)e+e^2+e^3;\ 4)e+e^2;$ $5), 7)e^2-e;\ 8)e+e^2+\cdots+e^9;\ 9)e+e^4+e^9;\ 10)e+e^2+e^4+e^8.$ **П3.** 1) $|A\cap\{0\}|$; 2) $4|A\cap\{1\}|$; 3) $15|A\cap\{-5\}|$; 4) $10|A\cap\{-7\}|$; 5) $2|A\cap\{0\}|+|A\cap\{1\}|$; 6) $10|A\cap\{-2\pi\}|+5|A\cap\{\pi\}|$; 7) $8|A\cap\{-10\}|+11|A\cap\{10\}|$; 8) $(1+\sqrt{2})\cdot|A\cap\{e\}|+$ $+2|A\cap\{\pi\}|$; 9) $\left|A\cap\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}}\{\sqrt[3]{n}\}\right)\right|$; 10) $|A\cap\{-\operatorname{tg}1, 0, \operatorname{tg}1\}|$.

Заняття 8

О3. $f_n(x) = \sum\limits_{k=-n^2}^{n^2-1}\chi_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})}(x)|\frac{k}{n}|,\ \ x\in\mathbf{R}$. Не буде. **Д1.** 2) Нехай $X=\mathbf{R}$, $\mathcal{F}$ – всі не більш ніж зліченні множини та їх доповнення, $f(x)=x$. Тоді $f^{-1}([0,1])=[0,1]\notin\mathcal{F}$. **Д2.** Нехай $\mathcal{F}\neq 2^X$, $A\notin\mathcal{F}$, $f(x)=\chi_A(x)-\chi_{X\setminus A}(x)$. Тоді $f^{-1}(\{1\})=A\notin\mathcal{F}$, але $|f|(x)=1,\ x\in X$ – вимірна. **Д5.** $\lambda_1(c(D))=1$. **Г1.** Клас всіх $\mathcal{F}_1$-вимірних функцій міститься в класі всіх $\mathcal{F}_2$-вимірних функцій. **П3.** 1)-6) $f_n(x) = \sum\limits_{k=-n^2}^{n^2-1}\chi_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})}(x)f(\frac{k}{n}),\ \ x\in\mathbf{R}$; 7)-10)

$$f_n(x,y)=\sum_{k=-n^2}^{n^2-1}\sum_{l=-n^2}^{n^2-1}\chi_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})}(x)\chi_{[\frac{l}{n},\frac{l+1}{n})}(y)f(\tfrac{k}{n},\tfrac{l}{n}),\ (x,y)\in\mathbf{R}^2.$$

Заняття 9

С4. $A_\varepsilon=[-1+\frac{\varepsilon}{2}, 1-\frac{\varepsilon}{2}]$. **Г4.** 1) Ні. $f=\chi_{\mathbf{Q}}$. 2) Ні. $f=\chi_{[0,+\infty)}$. **П1.** $1), 2)\ g(x)=0,\ x\in\mathbf{R}$; 3) $g(x)=\pi,\ x\in\mathbf{R}$;

4) $g(x) = \ln(1+|x|),\ x\in\mathbf{R}$; 5) $g(x) = \arcsin 2^{-|x|},\ x\in\mathbf{R}$; 6) $g(x) = (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x},\ x\in\mathbf{R}$; 7) $g(x,y) = x^2,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$; 8)$g(x,y) = \cos x,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$; 9) $g(x,y) = xy,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$; 10) $g(x,y) = \operatorname{ch} x,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$. **П3.** $1)-4), 6)-9)\ g(x)=0,\ x\in\mathbf{R}$; $5), 10)\ g(x)=1,\ x\in\mathbf{R}$. **П4.** $1) A_\varepsilon = [\frac{\varepsilon}{2}, \pi - \frac{\varepsilon}{2}]$; $2) A_\varepsilon = [0, \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}] \cup$ $\cup[\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}, \pi]$; $3) A_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon]$; $4) A_\varepsilon = [\frac{\varepsilon}{2}, 1-\frac{\varepsilon}{2}]$; $5) A_\varepsilon = [0, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}]\cup$ $\cup[\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}, \pi]$; $6) A_\varepsilon = (0, 1-\varepsilon]$; $7) A_\varepsilon = (0, 1-\varepsilon]$; $8) A_\varepsilon = [\varepsilon, 1]$; $9) A_\varepsilon = [0, 2-\varepsilon]$; $10) A_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon]$. **П6.** Збіжність еквівалентна тому, що 1) $f_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(0)$; 2) $f_n(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(1)$; 3) $f_n(-5) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(-5)$; 4) $f_n(-7) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(-7)$; 5) $f_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(0),\ f_n(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(1)$; 6) $f_n(-2\pi) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(-2\pi),\ f_n(\pi) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(\pi)$; 7) $f_n(-10) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(-10),\ f_n(10) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(10)$; 8) $f_n(e) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(e),\ f_n(\pi) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(\pi)$; 9) $f_n(\sqrt[3]{k}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(\sqrt[3]{k}),\ k\in\mathbf{Z}\cup\{0\}$; 10) $f_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(0)$, $f_n(-\operatorname{tg} 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(-\operatorname{tg} 1),\ f_n(\operatorname{tg} 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(\operatorname{tg} 1)$.

Заняття 10

О2. Не правильно. **С2.** Не правильно. **О3.** Розглянути "плаваючу сходинку" $f_n(x) = \chi_{\left[n\cdot 2^{-[\log_2 n]}-1, (n+1)\cdot 2^{-[\log_2 n]}-1\right)}(x),\ x\in[0,1)$. Підпослідовність $f_{2^N}(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2^N})}(x), x\in[0,1), N\geq 1$, збіжна майже скрізь. **С3.** Приклад: $X=\mathbf{R},\ \lambda=\lambda_1,\ f(x)=x,\ g(x)=\frac{1}{x}\chi_{[n,+\infty)}(x),\ x\in\mathbf{R}$. **Д4.** Збіжність поточкова. **П1.** Границею f є функція: $1), 3)-7)$, $9), 10)\ f(x)=0,\ x\in\mathbf{R}$; 2) $f(x)=2,\ x\in\mathbf{R}$; 8) $f(x)=\cos x,\ x\in\mathbf{R}$. **П2.** Відповіді див. 9Б.П6. **П3.** 6)$f_n(x)=\frac{1}{2n},\ x\in\mathbf{R},\ g_n(x)=\frac{1}{n},\ x\in\mathbf{R}$. **П4.** $1)-3), 9), 10)\ g(x,y)=0, (x,y)\in\mathbf{R}^2$, $4), 8)\ g(x,y)=1,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$, 5) $g(x,y)=\max(|x|,|y|),\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$, 6) $g(x,y)=|x|+|y|,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$, 7) $g(x,y)=2^x,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$.

Заняття 11

С1. 1)0; 2)20; 3)$\frac{100}{101}$; 4)π. **О2.** 1) $\ln 2$; 2)$1-\ln 2$; 3)1; 4)$1-\ln 4$. **С2.** $\alpha > 1$. **О3.** 0. **Д2.** Приклад: $f(x)=\frac{1}{2},\ x\in X$. **П1.** 1) $\lambda(A)+\lambda(B)-2\lambda(A\cap B)$; 2) $\lambda(A)+2\lambda(B)-2\lambda(A\cap B)$;

3) $3\lambda(A)+\lambda(B)-2\lambda(A\cap B)$; 4) $2\lambda(A)+3\lambda(B)-4\lambda(A\cap B)$; 5) $\lambda(A)+\lambda(B)+\lambda(C)-2\lambda(A\cap C)-2\lambda(B\cap C)+2\lambda(A\cap B\cap C)$; 6) $\lambda(A)$; 7) $\lambda(A)+2\lambda(B)+\lambda(C)-2\lambda(A\cap C)-2\lambda(B\cap C)+2\lambda(A\cap B\cap C)$; 8) $2\lambda(A)+3\lambda(B)+\lambda(C)-2\lambda(A\cap C)-2\lambda(B\cap C)+2\lambda(A\cap B\cap C)$; 9) $\lambda(A)+2\lambda(B)+\lambda(C)-2\lambda(A\cap B)-2\lambda(B\cap C)$; 10) $\lambda(A)+\lambda(B)-2\lambda(A\cap B\cap C)$. **П2.** Позначимо: $I_1:=\int\limits_A f_+\,d\lambda_1$; $I_2:=\int\limits_A f_-\,d\lambda_1$; $I_3:=\int\limits_A |f|\,d\lambda_1$; $I_4:=\int\limits_A f\,d\lambda_1$. Тоді: 1) $I_1=I_2=4, I_3=8,\ I_4=0$; 2) $I_1=6,\ I_2=10,\ I_3=16,\ I_4=-4$; 3) $I_1=6, I_2=10, I_3=16, I_4=-4$; 4) $I_1=I_2=3, I_3=6, I_4=0$; 5) $I_1=I_2=\frac{15}{2},\ I_3=15,\ I_4=0$; 6) $I_1=1,\ I_2=5,\ I_3=6,\ I_4=-4$; 7) $I_1=I_2=3,\ I_3=6,\ I_4=0$; 8) $I_1=9-\operatorname{tg}1,\ I_2=18-\operatorname{tg}1,\ I_3=27-2\operatorname{tg}1,\ I_4=-9$; 9) $I_1=\frac{5\pi}{3}-3,\ I_2=0,\ I_3=\frac{5\pi}{3}-3,\ I_4=\frac{5\pi}{3}-3$; 10) $I_1=1-\sin 1,\ I_2=2-\sin 1,\ I_3=3-\sin 1,\ I_4=-1$. **П3.** 1) $3\sin 1$; 2) $\frac{\sin 2}{2}$; 3) -1; 4) $\frac{1}{2}(\operatorname{sh}1+1)$; 5) $\frac{\pi}{4}(e-1)$; 6) $e(e-1)\ln 2$; 7) 10; 8) $\frac{2}{9}$; 9) $\frac{1}{2}$; 10) $-2(e-1)$. **П4.** 1) $\frac{2}{5}\sin 1$; 2) $1+2\sin 1$; 3) $(e-1)\operatorname{arctg}3$; 4) $2(e-1)\operatorname{sh}1$; 5) 3; 6) $\frac{6}{5}$; 7) $(e-1)\operatorname{sh}1$; 8) $(e-1)(e^2-1)\ln 2$; 9), 10) $+\infty$. **П5.** 1) $2^{101}-2$; 2) $\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}-\cos\frac{201}{2})$; 3) $\frac{3^{10}-1}{\sqrt{3}-1}\sqrt{3}$; 4) 210; 5) 5050; 6) 338350; 7) 50005000; 8) $\frac{1}{6}(10^4\cdot(10^4+1)\times\times(2\cdot 10^4+1))$; 9) $\frac{e^{10000}-1}{e-1}e$; 10) 666700.

Заняття 12

О1. Інтеграл рівний 2, функція неінтегровна за Ріманом. **С2.** 1)1; 2)e. **О3.** Абсолютна збіжність при $\alpha>1$, умовна при $\alpha\in(0,1]$, інтегровність за Лебегом при $\alpha>1$. **С5.** 1)$\frac{e+1}{e-1}$; 2) $+\infty$; 3)0; 4)1. **Д6.** Приклад: $f(q_n)=\frac{1}{2^n},\ n\ge 1$; $f(x)=0,\ x\notin\mathbf{Q}$, де $\{q_n:n\ge 1\}==\mathbf{Q}\cap[a,b]$. **П2.** 1) 2; 2) $e-1$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{e^3}{e-1}$; 5) $\frac{11}{54}$; 6) $\frac{e-2}{2}$; 7) 4; 8) e^2; 9), 10) $e-\frac{1}{2}$. **П3.** 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $-\ln\cos 1$; 4) $\frac{1}{2}-\frac{\sin 2}{4}$; 5) $\frac{1}{2}+\frac{\sin 2}{4}$; 6) $\frac{3}{8}-\frac{\sin 2}{4}+\frac{\sin 4}{32}$; 7) $\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sh}2}{4}$; 8) $\frac{\operatorname{sh}2}{4}-\frac{1}{2}$; 9) $\frac{\pi}{4}$; 10) $\ln(1+\sqrt{2})$. **П4.** Невласний інтеграл збіжний і функція інтегровна за Лебегом відповідно при: 1) $\alpha>0,\ \alpha>1$; 2) $\alpha>-1,\ \alpha>1$; 3) $\alpha>-5,\ \alpha>1$; 4) $|\alpha|>1,\ \alpha<-1$. В пунктах

5)-10) невласний інтеграл збіжний, функція неінтегровна за Лебегом. **П5.** $1)\ 3;\ 2)\ e;\ 3)\ \frac{\pi^2}{6};\ 4), 5)\ 0;\ 6)\ \frac{e^{10}-e}{e-1};\ 7)\ 2;\ 8)\ \frac{3}{2};\ 9)\ \frac{1}{2};\ 10)\ \frac{1}{3}.$

Заняття 13

С2. $1)\ 0;\ 2)\ 1.$ **С3.** $1)\ 101;\ 2)\ 0.$ **Д1.** Приклад: $f_n(x) = \frac{1}{x}\chi_{[\frac{1}{n},1]}$. **Д2.** Взяти послідовність з задачі С4. **Д3.** Приклад: $f_n(x) = \frac{1}{x}\chi_{[\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}]}$, $f(x) = 0,\ x \in [0,1]$. **Д6.** Не завжди. **П1.** В усіх пунктах отримаємо границю, підставивши в інтеграл $f(x)$ замість $f_n(x)$ і $g(x)$ замість $g_n(x)$. **П2.** Можна лише в 9) при $\alpha > 1$ і в 10) при $\alpha < 1$. **П3.** $1)\ 0;\ 2)\ 1;\ 3), 4)\ 0;$ $5)\ \frac{\pi}{2};\ 6)\ -\frac{\pi}{4};\ 7)\ 1;\ 8)\ \pi;\ 9)\ 0;\ 10)\ \frac{1}{5}.$ **П4.** $1)\ 1;\ 2)\ 4;\ 3)\ 7;\ 4)\ \frac{1}{2};\ 5)\ 9;$ $6)\ 100;\ 7)\ \frac{3}{\sqrt{2}};\ 8)\ 2;\ 9), 10)\ 0.$

Заняття 14

С1. 2. **О3.** $g'(t) = \int\limits_{\mathbf{R}} ixe^{itx}f(x)\,d\lambda_1(x),\quad t\in\mathbf{R}.$ **С4.** $g'(t) = -\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{x^2\sin tx^2}{1+x^6}f(x)\,d\lambda_1(x),\quad t\in\mathbf{R}.$ **О4.** $I(t) = -\frac{1}{2}\ln t,\ t > 0.$ **П1.** $1)\ -1;\ 2)\ \frac{\pi}{\sqrt{2}};\ 3)\ \pi;\ 4)\ \frac{\ln 4}{3};\ 5)\ \frac{2\pi}{3\sqrt{3}};\ 6)\ \pi;\ 7), 8)\ \frac{\pi}{2};\ 9)\ -\frac{\pi}{2};$ $10)\ 2\pi.$ **Г1.** $g^{(k)}(t) = \int\limits_{\mathbf{R}}(-x)^k e^{-tx}f(x)\,d\lambda_1(x),\ t \in (0,+\infty),\ k\in\mathbf{N}.$ **П3.** В усіх пунктах, щоб отримати похідну, досить продиференціювати підінтегральний вираз по t. **П4.** $1)\ I(m) = \operatorname{arctg}(\frac{m}{\alpha}) - \operatorname{arctg}(\frac{m}{\beta}),\ m\in\mathbf{R};$ $2)\ I(m) = \frac{1}{2}\ln\frac{m^2+\beta^2}{m^2+\alpha^2},\ m\in\mathbf{R},\ \alpha,\beta > 0;\ 3)\ I(\alpha) = 2(\alpha\ln\alpha - (\alpha+1)\ln(\alpha+1) + \alpha\ln 2 + \ln 2),\ \alpha > 0;\ 4)\ I(a) = \frac{\pi}{2}a + \frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sign} a \times (1 - \sqrt{1-a^2}),\ a\in\mathbf{R};\ 5)\ I(\alpha) = \pi\ln(1+|\alpha|),\ \alpha\in\mathbf{R};$ $6)\ I(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}},\ b\in\mathbf{R},\ a > 0.$

Заняття 15

О1. $X_+ = \{x\in X \mid f(x)\geq 0\},\quad X_- = \{x\in X \mid f(x) < 0\}.$ **С1.** $X_+ = \mathbf{R}\setminus\{0\},\ X_- = \{0\}.$ **О5.** $\lambda_a = \lambda_{e^x},\ \lambda_s = \lambda_{F(x)-e^x},\ \frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = e^x.$ **С3.** $\lambda_a = \lambda_1,\ \lambda_s = \mu - \lambda_1,\ \frac{d\mu_a}{d\lambda_1} = 1.$ **С4.** $\frac{2165}{3}.$ **Д1.** $\lambda_a(A) = \sum\limits_{n\in A\cap B} p_n,\ \lambda_s(A) = \sum\limits_{n\in A\setminus B} q_n,\ \frac{d\lambda_a}{d\mu}(n) = \frac{p_n}{q_n}\chi_B(n).$ **Г1.** Так. **Г2.** $1)\ \frac{d\nu}{d\lambda} \in L(X,\lambda);\ 2)\ \frac{d\nu}{d\lambda} > 0 \pmod\lambda.$ **Г3.** 1),2) Так;

3) Ні. **П1.** 1) $X_+ = \bigcup\limits_{n=1}^{5}[(2n-2)\pi,(2n-1)\pi],\ \mu_+(A) = \int\limits_{X_+\cap A} \sin x\, d\lambda_1(x)$; 2) $X_+ = \varnothing$; $\mu_+(A) = 0$; 3) $X_+ = [\ln 2 - \ln 3, \ln 3 - \ln 2]$; $\mu_+(A) = \int\limits_{X_+\cap A} (3e^{-|x|} - 2)\, d\lambda_1(x)$; 4) $X_+ = [5,15]$; $\mu_+(A) = \int\limits_{[5,10]\cap A} (x^2-25)\, d\lambda_1(x) + \int\limits_{[10,15]\cap A} (15-x)\, d\lambda_1(x)$; 5) $X_+ = X$; $\mu_+(A) = \mu(A)$; 6) $X_+ = (-\infty, 2-\log_2 6]$; $\mu_+(A) = \int\limits_{X_+\cap A} ((\frac{1}{2})^{x-2} - 6)\, d\lambda_1(x)$;

7) $X_+ = \{(x,y)\,|\, x^2+y^2 \in [0,\frac{\pi}{2}] \cup \bigcup\limits_{n=1}^{4}[\frac{(4n-1)\pi}{2}, \frac{(4n+1)\pi}{2}]\}$, $\mu_+(A) = \int\limits_{X_+\cap A} \cos(x^2+y^2)\, d\lambda_2(x,y)$; 8) $X_+ = \{(x,y)\,|\, \ln 5 \le x^2+y^2 \le 9\}$, $\mu_+(A) = \int\limits_{X_+\cap A} (e^{x^2+y^2} - 5)\, d\lambda_2(x,y)$;

9) $X_+ = \{(x,y)\,|\,(x+1)^2 + (y-2)^2 \ge 4\}$, $\mu_+(A) = \int\limits_{X_+\cap A} ((x+1)^2 + (y-2)^2 - 4)\, d\lambda_2(x,y)$;

10) $X_+ = \{(x,y)\,|\,(x+y)^2 + (y+3)^2 \ge 8\}$, $\mu_+(A) = \int\limits_{X_+\cap A} ((x+y)^2 + (y+3)^2 - 8)\, d\lambda_2(x,y)$,

в усіх пунктах $X_- = X \backslash X_+,\ \mu_- = \mu - \mu_+$. **П2.** $\frac{d\mu}{d\lambda_1} = F'(x),\ x \in (0,1]$. **П3.** $\lambda_a = \lambda_{F_1}$, $\lambda_s = \lambda_{F_2}$, де $F_2(x) = F(x) - F_1(x)$, 1) $F_1(x) = |x|[x] - \frac{[|x|]([|x|]+1)}{2}\operatorname{sign} x$, $x \notin \mathbf{Z}$, у цілих точках доозначається за неперервністю справа, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = [x]\operatorname{sign} x$, $x \in \mathbf{R}$; 2) $F_1(x) = x|x|$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = 2|x|$, $x \in \mathbf{R}$; 3) $F_1(x) = 3x$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = 3$, $x \in \mathbf{R}$; 4) $F_1(x) = e^x$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = e^x$, $x \in \mathbf{R}$; 5) $F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t^4}$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = \frac{1}{1+x^4}$, $x \in \mathbf{R}$; 6) $F_1(x) = \operatorname{arctg} x$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbf{R}$; 7) $F_1(x) = x^2\chi_{[0,1)}(x) + (3x^4-2)\chi_{[1,+\infty)}(x)$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = 2x\chi[0,1)(x) + 12x^3\chi[1,+\infty)(x)$, $x \in \mathbf{R}$; 8) $F_1(x) = -1 + (2x-3)\chi[1,+\infty)(x)$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = 2\chi[1,+\infty)(x)$, $x \in \mathbf{R}$; 9) $F_1(x) = x$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = 1$, $x \in \mathbf{R}$; 10) $F_1(x) = \operatorname{arctg} x\chi_{(-\infty,0]}(x)$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = \frac{1}{1+x^2}\chi_{(-\infty,0]}(x)$, $x \in \mathbf{R}$. **П4.** 1) 0; 2) $10 + \frac{\sin 20}{2}$;

3) $9e^{10} + 56$; 4) $\frac{1}{2}\ln 2 + 2$; 5) $-5e^{-1} + 2$; 6) $2\ln 2 - 1$; 7) $9\operatorname{sh} 1 - 6\operatorname{ch} 1$; 8) $754e^{10} + 391$; 9) $\frac{1}{4}\ln 82 + \sum\limits_{n=1}^{9}\sqrt{n^3}$; 10) $\frac{\pi^2}{2} - 4$.

Заняття 16

О1. Не завжди, наприклад: $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\chi_{(0,1]}(x),\ x \in [0,1]$. **С1.** Для $\alpha < \frac{1}{p}$ і $\alpha > \frac{1}{p}$ відповідно. **О4.** При $p > 2$ і при $p \geq 1$ відповідно. **С3.** Збігаються в усіх пунктах. **С4.** Збігається тільки в $L_1(\mathbf{R}, \lambda_1)$. **Д4.** Це – "плаваюча сходинка" (див. розв'язок задачі А10.03) **П1.** $1)-7), 9), 10)\ p \in \varnothing$; 8) $p \in [1, 2)$. **П2.** 1) $(2\beta-\alpha)p > 1,\ \alpha p > -1$, 2) $4\beta p > 1$; 3) $\alpha p > -1,\ \beta p > -1,\ (\alpha + \beta)p < -1$; 4) $(\alpha - 1)p < 1,\ \beta p > -1,\ (4 + \alpha - \beta)p > 1$; 5) $2\alpha p > 1,\ \beta p > -1$; 6) $(2 + \beta - \alpha)p > 1,\ (\beta - 1)p < 1$; 7) $(2\alpha - 1)p > 1$; 8) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < p,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$; 9) $\alpha p > 1,\ \beta p > 1$; 10) $p \in \varnothing$. **П3.** 1) $p < 2$; $2), 4)\ p \in \varnothing$; 3) $p < 4$; 5) $p \geq 1$; 6) $p < 2$; 7) $p \geq 1$; 8) $p > 2$; 9) $p > 1$; 10) $p > 2$.

ПРОГРАМА КУРСУ

Означення і приклади: півкільця, кільця, алгебри, σ-кільця, σ-алгебри, монотонного класу. Теорема про монотонне кільце.

Породжені класи множин. Означення. Лема про перетин сім'ї кілець. Борельові множини. Приклади. Приклад породженої σ-алгебри:

$$\sigma a\left(\{\varnothing,\ (a,b] \mid a,b\in \mathbf{R},\ a<b\}\right)=\mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

Теорема про структуру кільця, породженого півкільцем. Теорема про монотонний клас, породжений кільцем.

Функції множин. Основні класи функцій множин. Міра. Зв'язок між адитивністю та σ-адитивністю. Властивості міри на кільці. Теорема про неперервність міри знизу і зверху. Обернені твердження для адитивних функцій. Приклади.

Означення міри Жордана в $\mathbf{R}^m$. Теорема про σ-адитивність міри Жордана. Наслідки для довжини і площі.

Теорема про σ-адитивність λ_F.

Задача продовження міри. Теорема про продовження міри з півкільця на породжене кільце.

Зовнішня міра. Породжена зовнішня міра. Зовнішня міра, породжена довжиною на $k(\mathcal{P})$, де $\mathcal{P}=\{\varnothing,\ (k,k+1] \mid k\in \mathbf{Z}\}$.

Вимірність за Каратеодорі. Теорема Каратеодорі. Повнота продовження. Теорема про вимірність множин вихідного кільця. Теорема про єдиність продовження. Приклад побудови продовження. Теорема про наближення.

Міра Лебега на прямій. Вимірні за Лебегом множини. Приклади. Вимірність за Лебегом вимірних за Жорданом множин. Міра Лебега-Стілтьєса на прямій. Вимірні за Лебегом-Стілтьєсом множини. Приклади.

Заряди. Адитивність та скінченність заряду на частині множини скінченного заряду. Теореми про розклад Гана та Жордана. Приклад.

Відображення вимірних просторів. Прообраз σ-алгебри. Вимірні відображення. Приклади. Критерій вимірності. Наслідок для дійсної функції. Борельова σ-алгебра на розширеній прямій. Вимірна функція зі значеннями в $\overline{\mathbf{R}}$. Приклади вимірних за Лебегом та Борелем дійсних функцій на прямій.

Суперпозиція вимірних відображень. Наслідок. Дві теореми про властивості вимірних функцій. Приклади застосування.

Прості вимірні функції. Теорема про наближення. Критерій вимірності.

Властивість, що виконується майже скрізь. Приклади. Еквівалентні функції. Приклади. Теорема про вимірність. Збіжність майже скрізь. Єдиність границі. Теорема про вимірність границі.

Верхня і нижня границі послідовності множин. Теорема Єгорова. Істотність припущення про скінченність міри.

Збіжність за мірою. Теорема про єдиність границі. Два приклади про зв'язок.

Теорема Лебега. Фундаментальні за мірою послідовності. Фундаментальність збіжної за мірою послідовності. Теорема про фундаментальну за мірою послідовність (лема Рісса). Наслідки: теорема Рісса, критерій збіжності за мірою.

Означення абстрактного інтегралу Лебега (з коментарями та прикладами). Елементарні властивості. Теорема про σ-адитивність інтегралу. Адитивність, граничний перехід для монотонної послідовності множин. Незалежність від значень функції на нуль-множині. Інтеграли від еквівалентних функцій. Подальші властивості інтегралу Лебега.

Теорема про інтегрування монотонної послідовності функцій. Теорема про адитивну залежність інтегралу від функції. Наслідки: про інтегрування суми ряду і про модуль інтегралу. Нерівність Коші-Буняковського- Шварца. Теореми Б.Леві та Фату. Наслідок. Теорема Лебега про мажоровану збіжність.

Порівняння інтегралів Рімана та Лебега на $[a, b]$. Критерій інтегровності за Ріманом. Невласні інтеграли на $[a, +\infty)$ та інтеграли Лебега. Інтеграл Лебега-Стілтьєса.

Абстрактний інтеграл Лебега, що залежить від параметра. Теореми про неперервність та диференціювання за параметром. Приклади.

Міра, породжена перетворенням. Приклади. Загальна формула заміни змінної. Приклад застосування. Абсолютна неперервність і сингулярність мір та зарядів. Критерій абсолютної неперервності заряду. Приклади. Похідна Радона-Никодима. Теорема Радона-Никодима: для підпорядкованих мір, для скінченних мір, загальний випадок. Наслідок. Приклади.

Теорема Лебега про розклад заряду. Приклад.

Добуток σ-алгебр є півкільцем. Добуток вимірних просторів. Переріз множин та теорема про вимірність перерізу. Переріз функцій та теорема про вимірність перерізів функції.

Теорема про добуток мір. Переріз множин нульової міри. Принцип Кавальєрі. Інтеграли: однократний, подвійний і повторний. Теорема Фубіні.

Нерівності Гельдера і Мінковського. Простір L_p та його повнота. Щільність множини всіх простих функцій, а також її підкласу, в L_p. Щільність $C_0(\mathbf{R})$ в $L_p(\mathbf{R}, \mathcal{S}, \lambda)$.