КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

НАВЧАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

для студентів механіко–математичного факультету

(2 семестр першого курсу)

Видавничо-поліграфічний центр
"Київський університет"
2004

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко - математичного факультету (2 семестр першого курсу) / Упорядн. М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, А. В. Чайковський, О. Н. Нестеренко. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004. – 89 с.

Наведені тексти задач і відповіді до них з таких розділів математичного аналізу: інтегральне числення функцій однієї змінної, теорія рядів, інтеграл Рімана – Стільтьєса. Матеріал структуровано відповідно до плану практичних занять.

Рецензенти

Г. Л. Кулініч, доктор фізико–математичних наук, професор

Ю. Ю. Трохимчук, доктор фізико–математичних наук, професор

Затверджено Вченою Радою
механіко–математичного факультету
15 вересня 2003 року

ЗМІСТ

ЗАНЯТТЯ 1
ПЕРВІСНА Й НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.
ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Контрольні запитання

1. *Означення первісної і невизначеного інтеграла.*
2. *Таблиця основних інтегралів.*
3. *Елементарні властивості невизначених інтегралів.*
4. *Узагальнення означення первісної.*

А1

1. Для функції

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

знайти первісну, графік якої проходить через точку $(1, \pi)$.

2. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непарна і має первісну F на $\mathbb{R}$. Довести, що функція F – парна.

3. Знайти інтеграли:

1) $\int (x^2+1)^2\,dx$;
2) $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right)\,dx$;
3) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$;
4) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$;
5) $\int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$;
6) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}\,dx$;
7) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$;
8) $\int (a\sin x + b\cos x)\,dx$.

4. Знайти інтеграли:

1) $\int |x|\,dx$;
2) $\int (|x+1| - |x-1|)\,dx$;
3) $\int e^{-|x|}\,dx$;
4) $\int \max(1, x^2)\,dx$.

5. Для розривних функцій знайти первісні в розумінні узагальненого означення:

1) $f(x) = \operatorname{sign} x,\ x \in \mathbb{R}$;
2) $f(x) = [x],\ x \in (1,3)$;
3) $f(x) = \operatorname{sign}(x^2 - 5x + 6)$, $x \in \mathbb{R}$;
4) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ \sin \pi x, & x > 1. \end{cases}$

Д1. Знайти $\int [x] |\sin \pi x|\,dx$.

Д2. Для функцій

1) $f(x) = \operatorname{sign} \cos x,\ x \in \mathbb{R};$ 2) $f(x) = [x^3],\ x \in (0, 2)$

знайти первісну в розумінні узагальненого означення.

Д3. Знайти функцію $f \in C^1((0, +\infty))$, якщо $f'(x^2) = \dfrac{1}{x},\ x > 0.$

Д4. Знайти функцію $f \in C^1([0, 1])$, якщо $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x,\ x \in \mathbb{R}.$

Б1

1. Функції $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ та $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ мають похідні на інтервалі (a, b). Довести, що:

1) fg є первісною функції $f'g + fg'$ на (a, b);

2) $\dfrac{f}{g}$ є первісною функції $\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ на $(a, b),\ g(x) \neq 0,\ x \in (a, b).$

2. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – парна і має первісну F на $\mathbb{R}$. Довести, що функція $F - F(0)$ – непарна.

3. Знайти інтеграли:

1) $\int \left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2 dx;$

2) $\int \dfrac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\, dx;$

3) $\int \dfrac{\left(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}\, dx;$

4) $\int \dfrac{x^2+3}{x^2-1}\, dx;$

5) $\int \dfrac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx;$

6) $\int (2^x + 3^x)^2\, dx;$

7) $\int \dfrac{e^{3x}+1}{e^x+1}\, dx;$

8) $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx.$

4. Знайти інтеграли:

1) $\int x|x|\, dx;$

2) $\int (x + |x|)^2\, dx;$

3) $\int \min(1, x^2)\, dx;$

4) $\int \sin|x|\, dx.$

5. Для розривних функцій знайти первісні у розумінні узагальненого означення:

1) $f(x) = [3x],\ x \in (0, 2);$

2) $f(x) = \operatorname{sign}(x^2 - 3x + 2),$ $x \in \mathbb{R};$

3) $f(x) = \{x\},\ x \in (0, 3)$, де $\{x\} = x - [x]$ – дробова частина числа $x \in \mathbb{R}$.

ЗАНЯТТЯ 2
ЗНАХОДЖЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ТАБЛИЦІ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ ТА ЕЛЕМЕНТАРНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ

А2

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$;

2) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(5x-2)^5}}$;

3) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$;

4) $\int \dfrac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$;

5) $\int \dfrac{dx}{1+\cos x}$;

6) $\int \cos^2 x\,dx$;

7) $\int \dfrac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

8) $\int \dfrac{dx}{\sin x}$;

9) $\int \dfrac{\cos x\,dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$;

10) $\int \dfrac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}\,dx$;

11) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$;

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$;

13) $\int x(1-x)^{10}\,dx$;

14) $\int \dfrac{x}{(x-1)^{100}}\,dx$;

15) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$;

16) $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$;

17) $\int \dfrac{dx}{x^2+x-2}$;

18) $\int \sin x\sin(x+a)\,dx$;

19) $\int \dfrac{dx}{1+e^x}$;

20) $\int \dfrac{x^3dx}{x^8-2}$.

Д1. Знайти інтеграл $\int \dfrac{x\,dx}{x^4+3x^2+2}$.

Д2. Знайти інтеграли:

1) $\int \operatorname{ch}^2 x\,dx$;

2) $\int \operatorname{ch} x\operatorname{ch} 3x\,dx$.

Д3. Нехай $x_0 \in (a,b)$ і функція $f \in C((a,b)\backslash\{x_0\})$ має розрив першого роду в точці x_0. Довести, що функція не має первісної на інтервалі (a,b).

Б2

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-7x}}$;

2) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$;

4) $\int \left(e^{-x}+e^{-2x}\right)\,dx$;

5) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$;

6) $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$;

7) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$;

8) $\int x\exp(-x^2)\,dx$;

9) $\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx$;

10) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx$;

11) $\int \operatorname{tg} x\,dx$;

12) $\int \sin^2 x\,dx$;

13) $\int \cos^4 x\,dx$;

14) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$;

15) $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\,\sqrt{1-x^2}}$;

16) $\int \frac{x^4}{(x^5+1)^4}\,dx$;

17) $\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$;

18) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$;

19) $\int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2+3)}$;

20) $\int \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$;

21) $\int \cos 2x\cos 3x\,dx$;

22) $\int \sin^3 x\,dx$;

23) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$;

24) $\int \operatorname{ch} x\operatorname{sh} x\,dx$.

2. За допомогою виділення повних квадратів знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

2) $\int \frac{dx}{5-12x-9x^2}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$.

ЗАНЯТТЯ 3
ІНТЕГРУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ПІДСТАНОВКИ

Контрольне запитання

Формула заміни змінної для невизначеного інтеграла

А3

1. За допомогою відповідних підстановок знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$

2) $\int \cos^5 x\,\sqrt{\sin x}\,dx;$

3) $\int \frac{\sin x\,\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx;$

4) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx;$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}};$

6) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x}.$

2. За допомогою тригонометричних або гіперболічних підстановок знайти інтеграли (параметри додатні):

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$

2) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx;$

3) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx;$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}.$

3. Шляхом виділення повного квадрата знайти інтеграли:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}};$ 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}};$ 3) $\int\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx.$

Д1. Невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ знайти:

1) шляхом виділення повного квадрата квадратного тричлена;

2) за допомогою підстановки $\sqrt{x^2+x+1}=1+tx.$

Порівняти отримані відповіді.

Б3

1. За допомогою вказаної підстановки знайти інтеграли:

1) $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ $(x+1=t^2)$; 2) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\left(x=\dfrac{1}{t}\right)$.

2. Знайти інтеграли:

1) $\int \dfrac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$;

2) $\int \dfrac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}\,dx$;

3) $\int \dfrac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$;

4) $\int \dfrac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}}$;

5) $\int \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}\,dx$.

3. Обчислити невизначений інтеграл $\int \sin x\cos x\,dx$ трьома способами: 1) підстановкою $\sin x=t$; 2) підстановкою $\cos x=t$; 3) перетворенням підінтегрального виразу за допомогою формули $2\sin x\cos x=\sin 2x$. Порівняти відповіді.

4. Знайти інтеграли:

1) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$;

2) $\int \dfrac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

3) $\int \dfrac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-2}}$;

4) $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx$.

ЗАНЯТТЯ 4
ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Контрольне запитання

Формула інтегрування частинами для невизначеного інтеграла.

А4

1. За допомогою інтегрування частинами знайти інтеграли:

1) $\int \ln x\,dx$;

2) $\int x^\alpha \ln x\,dx,\ \alpha\neq -1$;

3) $\int x\sin x\,dx$;

4) $\int x^2\arccos x\,dx$;

5) $\int \dfrac{\arcsin x}{x^2}\,dx$;

6) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$;

7) $\int \dfrac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;

8) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

2. Знайти інтеграли:

1) $\int (x^2+x+1)e^x\,dx$;
2) $\int (x^2-x+1)\sin x\,dx$;
3) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$;
4) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$;
5) $\int (\arcsin x)^2\,dx$;
6) $\int \dfrac{xe^{\operatorname{arctg} x}dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Д1. Нехай функції $u : I \to \mathbb{R}$, $v : I \to \mathbb{R}$ мають неперервні на інтервалі I похідні $n+1$-го порядку. Довести *узагальнену формулу інтегрування частинами*:

$$\int uv^{(n+1)}dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{(k)}v^{(n-k)} - (-1)^n\int u^{(n+1)}v\,dx, \quad x \in I.$$

Д2. Нехай P – алгебраїчний поліном n-го степеня, $a \neq 0$. Довести, що

$$\int P(x)e^{ax}\,dx = \left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \frac{P''(x)}{a^3} - \cdots + (-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right)e^{ax} + C.$$

Д3. Знайти $\int \dfrac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

Б4

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;
2) $\int x^2\operatorname{arctg} 4x\,dx$;
3) $\int \dfrac{x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$;
4) $\int \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$;
5) $\int \dfrac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$;
6) $\int \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$.

2. Знайти інтеграли:

1) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$;
2) $\int x^2e^{-2x}\,dx$;
3) $\int x\cos x\,dx$;
4) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$;
5) $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$;
6) $\int x\operatorname{arctg}^2 x\,dx$;
7) $\int x\sin^2 x\,dx$;
8) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$;
9) $\int \dfrac{x}{\cos^2 x}\,dx$;
10) $\int x\ln\dfrac{x-1}{x+1}\,dx$;
11) $\int \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$.

ЗАНЯТТЯ 5
ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Контрольні запитання

1. *Теорема про представлення правильного раціонального дробу у вигляді суми елементарних дробів.*
2. *Метод невизначених коефіцієнтів.*
3. *Інтегрування елементарних раціональних дробів.*

А5

1. Шляхом представлення правильних дробів у вигляді суми елементарних знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;
2) $\int \frac{x^4\,dx}{x^4+5x^2+4}$;
3) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$;
4) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$;
5) $\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+1)}$;
6) $\int \frac{dx}{x^4+1}$;
7) $\int \frac{x^4+2x^2+x}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx$.

2. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,dx$;
2) $\int \frac{x^4\,dx}{(x^{10}-10)^2}$;
3) $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,dx$;
4) $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$.

Д1. Для яких значень параметрів $a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ інтеграл

$$\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}\,dx$$

є раціональною функцією?

Д2. Для натурального n і полінома n-го степеня P обчислити інтеграл

$$\int \frac{P(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx.$$

Д3. Обчислити інтеграл
$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}}, \quad \text{де } n \text{ – натуральне число.}$$

Д4. За допомогою методу Остроградського знайти раціональну частину інтегралів:

1) $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\,dx$;

2) $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,dx$.

Б5

1. Знайти інтеграли від раціональних функцій:

1) $\int \frac{dx}{x^4-1}$;

2) $\int \frac{dx}{x^3+1}$;

3) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$;

4) $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+x-2}$;

5) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$;

6) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)}$;

7) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2(x+1)}$.

2. За допомогою різних прийомів знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^3}{x^8+3}\,dx$;

2) $\int \frac{x^{11}\,dx}{x^8+3x^4+2}$;

3) $\int \frac{x^9\,dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$;

4) $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}$.

ЗАНЯТТЯ 6
ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

А6

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x}} \frac{dx}{(x+1)^2}$;

2) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{(x+1)^3(x-1)}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$;

4) $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\, dx$.

2. Знайти інтеграли від квадратичних ірраціональностей:

1) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$;

2) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$.

3. Застосовуючи різні методи, знайти такі інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$;

2) $\int \frac{(x^2-1)\, dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$;

3) $\int \frac{(x^2+1)\, dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

Д1. За допомогою підстановок Ейлера:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$, якщо $a > 0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$, якщо $c > 0$;

3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$

знайти наступні інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$;

2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$;

3) $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\, dx$.

Д2. Інтеграл від біномного диференціала

$$\int x^m(a+bx^n)^p\, dx, \text{ де } m,\ n,\ p \text{ – раціональні числа,}$$

за *теоремою Чебишова* зводиться до інтегрування раціональних функцій лише в таких трьох випадках:

Випадок 1. $p \in \mathbb{Z}$. Застосовується підстановка $x = t^N$, де N – спільний знаменник дробів m і n.

Випадок 2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$. Застосовується підстановка $a + bx^n = t^N$, де N – знаменник дробу p.

Випадок 3. $\dfrac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$. Застосовується підстановка $ax^{-n}+b=t^N$, де N – знаменник дробу p.

Знайти інтеграли:

1) $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$; 2) $\int \dfrac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $\int \dfrac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\sqrt[8]{x}}dx$.

Б6

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

2) $\int \dfrac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

3) $\int \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$;

4) $\int \sqrt[n]{\dfrac{(x-a)^{1-n}}{(x-b)^{n+1}}}\,dx,\ n\geq 1$;

5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$;

6) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$;

7) $\int \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$;

8) $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$;

9) $\int \dfrac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$;

10) $\int \dfrac{x+1}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$;

11) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.

ЗАНЯТТЯ 7
ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Контрольні запитання

1. *Інтегрування виразів* $\sin^m x\cos^n x,\ m,n\in\mathbb{Z}$.
2. *Інтегрування виразів* $R(\sin x,\cos x)$, *де* R *– раціональна функція. Універсальна тригонометрична підстановка.*

А7

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \cos^2 x\,dx$;

2) $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$;

3) $\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx$;

4) $\int \dfrac{dx}{\sin x}$;

5) $\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$;

6) $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$.

2. Вивести рекурентну формулу для обчислення невизначеного інтеграла
$$I_n = \int \sin^n x\,dx, \quad n \geq 2.$$
За допомогою цієї формули знайти інтеграл $\int \sin^4 x\,dx$.

3. Знайти інтеграли:

1) $\int \sin 5x \cos x\,dx$;
2) $\int \sin^2 2x \cos^2 3x\,dx$;
3) $\int \dfrac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$, $\sin(a-b) \neq 0$;
4) $\int \dfrac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$;
5) $\int \dfrac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$;
6) $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$;
7) $\int \dfrac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$.

Д1. Нехай q, r – раціональні числа. За допомогою підстановки $z = \sin^2 x$ звести інтеграл $\int \cos^q x \sin^r x\,dx$ до інтеграла від біномного диференціала. Для яких значень $q, r \in \mathbb{Q}$ цей інтеграл виражається через елементарні функції?

Д2. Довести, що
$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x}\,dx = Ax + B \ln|a \sin x + b \cos x| + C,$$
де A, B, C – сталі.

Вказівка. Покласти $a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x)$, де A та B – сталі.

Д3. Довести, що
$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c}\,dx =$$
$$= Ax + B \ln|a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c},$$
де A, B, C – деякі коефіцієнти.

Д4. Довести, що
$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x}\,dx =$$
$$= A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$
де A, B, C – деякі коефіцієнти.

Б7

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x\,dx$;

2) $\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$;

3) $\int \dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$;

4) $\int \sin 3x\cos 2x\,dx$;

5) $\int \dfrac{dx}{(1+\cos x)\sin x}$;

6) $\int \dfrac{dx}{3+5\cos x}$;

7) $\int \dfrac{\sin^2 x+\cos^3 x}{3\cos^2 x+\sin^4 x}\sin x\,dx$;

8) $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$;

9) $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$;

10) $\int \dfrac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$;

11) $\int \cos^2 ax\cos^2 bx\,dx$;

12) $\int \dfrac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$.

2. Вивести рекурентні формули для інтегралів:

1) $I_n=\int \dfrac{dx}{\sin^n x},\ n\ge 1$;

2) $K_n=\int \dfrac{dx}{\cos^n x},\ n\ge 1$.

Застосувати отримані формули для знаходження $\int \dfrac{dx}{\sin^5 x}$ і $\int \dfrac{dx}{\cos^7 x}$.

ЗАНЯТТЯ 8
РІЗНІ ПРИЙОМИ ІНТЕГРУВАННЯ

Контрольні запитання

1. *Формула заміни змінної.*
2. *Формула інтегрування частинами.*

А8

1. Знайти наступні інтеграли:

1) $\int x^2 e^{2x}\,dx$;

2) $\int x^7 e^{-x^2}\,dx$;

3) $\int e^{ax}\cos^2 bx\,dx$;

4) $\int x^2 e^x\cos x\,dx$;

5) $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt{e^x}+\sqrt[3]{e^x}+\sqrt[6]{e^x}}$;

6) $\int \sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx$;

7) $\int \left(1-\dfrac{2}{x}\right)^2 e^x\,dx$;

8) $\int \ln^n x\,dx,\ n\in\mathbb{N}$;

9) $\int \dfrac{\ln\left((x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right)}{(x+a)(x+b)}\,dx$;

10) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$;

11) $\int x\arcsin(1-x)\,dx$;

12) $\int x \arccos \frac{1}{x}\, dx$;

13) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\, dx$;

14) $\int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2)\, dx$.

Д1. Нехай R – раціональна функція n змінних, $a_i \in \mathbb{Q}$, $1 \le i \le n$. Довести, що інтеграл

$$\int R(\exp(a_1 x), \exp(a_2 x), ..., \exp(a_n x))\, dx$$

виражається через елементарні функції.

Д2. Нехай R – раціональна функція, знаменник якої має лише дійсні корені. Довести, що інтеграл $\int R(x) e^{ax}\, dx$ виражається через елементарні функції та *інтегральний логарифм*

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\, dx = \operatorname{li}(e^{ax}) + C,$$

де

$$\operatorname{li} x = \int \frac{dx}{\ln x}.$$

Д3. В якому випадку інтеграл

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x\, dx,$$

де $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + ... + \frac{a_n}{x^n}$ і $a_0, a_1, ..., a_n$ – сталі, є елементарною функцією?

Б8

Знайти наступні інтеграли:

1) $\int x^2 \sin 5x\, dx$;

2) $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\, dx$;

3) $\int x e^x \sin x\, dx$;

4) $\int \cos^2 \sqrt{x}\, dx$;

5) $\int \frac{1+\exp(2x)}{(1+\exp(x))^2}\, dx$;

6) $\int \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1}\, dx$;

7) $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\, dx$;

8) $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2}\, dx$;

9) $\int x \operatorname{arctg}(x+1)\, dx$;

10) $\int \arcsin \sqrt{x}\, dx$;

11) $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\, dx$;

12) $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\, dx$.

ЗАНЯТТЯ 9
КОНТРОЛЬНА РОБОТА. ОСНОВНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

Завдання індивідуальні. Зразок варіанта

1. Знайти первісну функції $f(x) = \min\{\sin x, \cos x\},\ x \in (0, \pi/2)$.
2. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x\,dx}{(x^4+1)\operatorname{arctg} x^2}$;

2) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x+2}+1)\sqrt{\sqrt{x+2}-1}}$;

3) $\int \sin(\ln x)\,dx$;

4) $\int \frac{6-2x-x^2}{(x+2)^2(x^2+2)}\,dx$;

5) $\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx$;

6) $\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+1}$;

7) $\int 2^{\sin x}\sin 2x\,dx$.

Розв'язки

1. Маємо
$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x \le \frac{\pi}{4}; \\ \cos x, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$
Функція f на проміжках $(0, \pi/4)$ і $(\pi/4, \pi/2)$ має первісну F, причому
$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + C_1, & 0 < x < \frac{\pi}{4}; \\ \sin x + C_2, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$
Співвідношення між сталими C_1 і C_2 визначимо з умови неперервності первісної на інтервалі $(0, \pi/2)$:
$$F\left(\frac{\pi}{4}-\right) = F\left(\frac{\pi}{4}+\right).$$
Тому
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} + C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + C_2, \quad C_2 = C_1 - \sqrt{2}.$$
Покажемо, що
$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + C, & 0 < x \le \frac{\pi}{4}; \\ \sin x - \sqrt{2} + C, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
є шуканою первісною, тобто, що
$$F'(x) = f(x),\ x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Для точок $x \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$ це випливає з правил диференціювання, а для $x = \dfrac{\pi}{4}$ – з наслідку з теореми Лагранжа: оскільки існують односторонні границі похідних $F'\left(\dfrac{\pi}{4}+\right) = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right), F'\left(\dfrac{\pi}{4}-\right) = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, то існують односторонні похідні $F'_{+}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ і $F'_{-}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. Отже, існує $F'\left(\dfrac{\pi}{4}+\right) = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Відповідь:

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + C, & 0 < x \le \frac{\pi}{4}; \\ \sin x - \sqrt{2} + C, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2.

1) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^4+1)\operatorname{arctg} x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\,x^2}{(x^4+1)\operatorname{arctg} x^2} =$
$\displaystyle= \frac{1}{2}\int \frac{d\,(\operatorname{arctg} x^2)}{\operatorname{arctg} x^2} = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{arctg} x^2| + C.$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt{x+2}+1)\sqrt{\sqrt{x+2}-1}} = \left| \begin{array}{ll} t = \sqrt{x+2}, & \\ x = t^2 - 2, & dx = 2t\,dt \end{array} \right| =$
$\displaystyle= \int \frac{2t\,dt}{(t+1)\sqrt{t-1}} = \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{t-1}, & \\ t = u^2+1, & dt = 2u\,du \end{array} \right| =$
$\displaystyle= 4\int \frac{(u^2+1)u\,du}{(u^2+2)u} = 4\left(\int du - \int \frac{du}{u^2+2}\right) =$
$\displaystyle= 4u - 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}} + C,$ де $u = \sqrt{\sqrt{x+2}-1}$.

3) Двічі застосуємо формулу інтегрування частинами:
$\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin(\ln x), & u' = \dfrac{\cos(\ln x)}{x} \\ v' = 1, & v = x \end{array} \right| =$
$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx =$
$\displaystyle= \left| \begin{array}{ll} u = \cos(\ln x), & u' = -\dfrac{\sin(\ln x)}{x} \\ v' = 1, & v = x \end{array} \right| =$
$= x\sin(\ln x) - \big(x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx\big) =$
$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx.$
Отримали лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла, з якого знаходимо

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C.$$

4) Розклад підінтегральної раціональної функції шукаємо у вигляді суми елементарних дробів з невизначеними коефіцієнтами

$$\frac{6-2x-x^2}{(x+2)^2(x^2+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях, знаходимо $A=1, B=1, C=-1, D=0$. Тому

$\int \dfrac{6-2x-x^2}{(x+2)^2(x^2+2)}dx =$

$= \int \left(\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} - \dfrac{x}{x^2+2}\right) dx =$

$= \ln|x+2| - \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2) + C.$

5) Застосуємо формулу для інтеграла $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du$:

$\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx = \int x\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx =$

$= \int \left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx - \frac{1}{2}\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$

$= \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} -$

$-\frac{3}{16}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right) + C.$

6) Використаємо універсальну тригонометричну підстановку:

$\int \dfrac{dx}{3\cos x + \sin x + 1} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, \\ x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$

$= \int \dfrac{dt}{-t^2+t+2} = -\int \dfrac{dt}{(t+1)(t-2)} =$

$= -\frac{1}{3}\int\left(\dfrac{1}{t-2} - \dfrac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{3}\ln\left|\dfrac{t+1}{t-2}\right| + C,$ де $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

7) За формулою інтегрування частинами

$\int 2^{\sin x}\sin 2x\,dx = 2\int 2^{\sin x}\sin x\cos x\,dx =$

$= 2\int 2^{\sin x}\sin x\,d(\sin x) = \dfrac{2}{\ln 2}\int \sin x\,d(2^{\sin x}) =$

$= \dfrac{2}{\ln 2}\left(2^{\sin x}\sin x - \int 2^{\sin x}\,d(\sin x)\right) =$

$= \dfrac{2}{\ln 2}\left(2^{\sin x}\sin x - \dfrac{1}{\ln 2}2^{\sin x}\right) + C.$

ЗАНЯТТЯ 10
ОЗНАЧЕННЯ ІНТЕГРАЛА РІМАНА.
КРИТЕРІЙ ІНТЕГРОВНОСТІ

Контрольні запитання

1. *Означення розбиття, діаметра розбиття, підрозбиття.*
2. *Означення верніх і нижніх сум Дарбу.*
3. *Означення верхнього та нижнього інтегралів Рімана.*
4. *Критерій інтегровності.*

A10

1. Записати верхні й нижні суми Дарбу для функцій:

1) $f(x) = \dfrac{1-x}{2},\ x \in [-1, 1]$;
2) $f(x) = x^2,\ x \in [0, 1]$.

2. Обчислити за означенням верхній і нижній інтеграли для функцій

1) $f(x) = \dfrac{1-x}{2},\ x \in [-1, 1]$;
2) $f(x) = x^2,\ x \in [0, 1]$
(*Вказівка.* Застосувати нерівність
$$a^2 \le \frac{a^2+ab+b^2}{3} \le b^2,\ 0 \le a \le b);$$
3) $f(x) = \sin x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
(*Вказівка.* Застосувати нерівність
$(b-a)\sin a \le \cos a - \cos b \le (b-a)\sin b,\ 0 \le a < b \le \frac{\pi}{2}$).

Зробити висновок щодо інтегровності за Ріманом цих функцій.

3. Нехай функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, b]$. Довести, що функції $|f|$ та $\sin f$ також інтегровні за Ріманом на відрізку $[a, b]$.

4. За допомогою критерію інтегровності довести, що функція $f(x) = \sqrt{1-x^2},\ x \in [0, 1]$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[0, 1]$.

5. Нехай функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ і послідовність $\{z_n : n \ge 1\} \subset [a, b]$ такі, що:

1) функція f обмежена на відрізку $[a, b]$;
2) $f \in C\left([a, b]\backslash\{z_n : n \ge 1\}\right)$;
3) послідовність $\{z_n : n \ge 1\}$ збіжна.

Довести, що $f \in R([a, b])$.

Д1. Функція $f \in R([a,b])$ така, що

$$\forall[\alpha,\beta] \subset [a,b]\ \exists c \in (\alpha,\beta) : f(c) = 0.$$

Довести, що $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$.

Д2. Довести, що обмежена на відрізку $[a,b]$ функція інтегровна за Ріманом на цьому відрізку тоді й тільки тоді, коли для довільних ε і δ існує розбиття відрізка $[a,b]$, для якого сума довжин відрізків з коливанням функції, більшим ніж δ, менша за ε.

Д3. Для функції Рімана $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}; \\ \dfrac{1}{n}, & \text{якщо } x = \dfrac{m}{n}, \end{cases}$ де m і n – взаємно прості цілі числа, $0 \le m \le n$, визначити множину точок розриву й довести, що $f \in R([0,1])$.

Д4. Функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ така, що

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists g \in R([a,b])\,\forall x \in [a,b] :\ |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Довести, що $f \in R([a,b])$.

Д5. Нехай $f \in R([a,b]), \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Довести твердження:

1) якщо $\varphi \in C(\mathbb{R})$, то $\varphi(f) \in R([a,b])$;
2) якщо для кожного $A > 0 :\ \varphi \in R([-A,A])$, то не обов'язково $\varphi(f) \in R([a,b])$.

Б10

1. Записати верхні й нижні суми Дарбу для функцій:

1) $f(x) = e^x,\ x \in [0,1]$;
2) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \in [1,2]$;
3) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$

2. Обчислити за означенням нижній і верхній інтеграли для функцій:

1) $f(x) = e^x, x \in [0,1]$
(*Вказівка.* Застосувати нерівність

$$e^a(b-a) \le e^b - e^a \le e^b(b-a),\ a \le b);$$

2) $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in [1, 2]$
(*Вказівка.* Застосувати нерівність

$$\frac{b-a}{b} \le \ln b - \ln a \le \frac{b-a}{a},\ 1 \le a \le b);$$

3) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$

Зробити висновок щодо інтегровності за Ріманом цих функцій.

3. Нехай функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, b]$. Довести, що функція $\operatorname{arctg} f$ також інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, b]$.

4. Нехай функція $f \in R([0, 1])$. Довести, що функція $g(x) = f(|x|)$, $x \in [-1, 1]$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[-1, 1]$.

5. Довести, що сума та добуток інтегровних за Ріманом на відрізку $[a, b]$ функцій також інтегровні за Ріманом на цьому відрізку.

6. Довести інтегровність функції $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}\left(\sin \frac{1}{x}\right), & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ на відрізку $[0, 1]$.

ЗАНЯТТЯ 11
ІНТЕГРАЛ ЯК ГРАНИЦЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ СУМ. ТЕОРЕМА ДАРБУ

Контрольні запитання

1. *Означення інтегральних сум.*
2. *Означення границі інтегральних сум.*
3. *Теорема Дарбу.*

А11

1. Нехай для функцій $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ існують скінченні границі інтегральних сум $\lim\limits_{|\lambda| \to 0} S(f, \lambda)$ та $\lim\limits_{|\lambda| \to 0} S(g, \lambda)$. Довести, що

$$\lim_{|\lambda| \to 0} S(f + g, \lambda) = \lim_{|\lambda| \to 0} S(f, \lambda) + \lim_{|\lambda| \to 0} S(g, \lambda).$$

2. Для функції $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, обмеженої на $[a, b]$, та сталої $\alpha > 0$ обчислити границю

$$\lim_{|\lambda|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k^{1+\alpha}.$$

3. Довести, що для функції Діріхле

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q},\\ 0, & \text{якщо } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

границя інтегральних сум не існує.

4. Довести, що функції

1) $f(x)=x^2,\ x\in[0,1];$

2) $f(x)=\sin x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];$

3) $f(x)=\frac{1}{1+x^2},\ x\in[0,1]$

інтегровні за Ріманом на відповідних відрізках. Обчислити інтеграли від цих функцій як границі інтегральних сум.

5. Довести збіжність послідовностей $\{a_n : n\geq 1\}$, виразити значення границь цих послідовностей через визначені інтеграли:

1) $a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n};$

2) $a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{3n};$

3) $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2};$

4) $a_n=\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \alpha\geq 0;$

5) $a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n+k};$

6) $a_n=\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)};$

7) $a_n=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sqrt{n^2-k^2};$

8) $a_n=\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n+1}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}.$

Д1. Завдання задачі 5 для послідовностей:

1) $a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}};$

2) $a_n=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k,j=1}^{n}\cos\frac{k}{n}\cos\frac{j}{n};$

3) $a_n = \sqrt[n]{\prod\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)}$, де $f \in C([0,1]), f(x) > 0,\ x \in [0,1]$;

4) $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{ka_k}{n}$, де послідовність $a_n \to a \in \mathbb{R}, n \to \infty$;

5) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2}$.

Д2. Для інтегровної за Ріманом на відрізку $[a,b]$ функції f знайти границі:

1) $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\sin\Delta x_k$;

2) $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + f(\xi_k)\Delta x_k\right)$;

3) $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} \prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(1 + f(\xi_k)\Delta x_k\right)$.

Д3. Для інтегровних за Ріманом на відрізку $[a,b]$ функцій f, g знайти границю

$$\lim_{|\lambda|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)g(\eta_k)\Delta x_k,$$

де $\xi_k,\ \eta_k \in [x_k, x_{k+1}], 0 \le k \le n-1$.

Д4. Довести, що для довільної обмеженої на відрізку функції f існують границі $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} L(f,\lambda)$, $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} U(f,\lambda)$, що дорівнюють відповідно нижньому і верхньому інтегралам від функції f на відрізку $[a,b]$.

Д5. Нехай $f \in R([a,b])$ і $\forall x \in [a,b]\ :\ f(x) > 0$. Довести, що

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Б11

1. Нехай для функції $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ існує скінченна границя інтегральних сум $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} S(f,\lambda)$. Довести, що

$$\lim_{|\lambda|\to 0} S(cf,\lambda) = c \lim_{|\lambda|\to 0} S(f,\lambda).$$

2. Чи існує скінченна границя інтегральних сум для функції

$$y = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{якщо } 0 \le x < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{якщо } x = \frac{\pi}{2}? \end{cases}$$

3. Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Довести, що існування границі інтегральних сум та її значення для функції f на відрізку $[a, b]$ не залежать від значень цієї функції на довільній скінченній множині.

4. Довести, що функції

1) $f(x) = e^x, \ x \in [0, 1]$;
2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \ x \in [1, 4]$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \ x \in [1, 2]$;
4) $f(x) = |x|, \ x \in [-1, 1]$,

інтегровні за Ріманом на відповідних відрізках. Підібравши зручні інтегральні суми, обчислити інтеграли Рімана від цих функцій.

5. Довести збіжність наступних послідовностей $\{a_n : n \geq 1\}$, виразити значення границь цих послідовностей через визначені інтеграли:

1) $a_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{n^2 + k^2}$;
2) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{(n+k)^2}$;
3) $a_n = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=0}^{n-1} k \sqrt[n]{e^k}$;
4) $a_n = \dfrac{1}{n^4} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \sqrt[3]{k^3 + n^3}$;
5) $a_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin \dfrac{k}{n}$;
6) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{2n} \dfrac{n}{n^2 + k^2}$;
7) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{2n-1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}}$;
8) $a_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\cos^2 \frac{\pi k}{4n}}$.

ЗАНЯТТЯ 12
ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. ФОРМУЛА НЬЮТОНА – ЛЕЙБНІЦА.

Контрольні запитання

1. *Елементарні властивості визначеного інтеграла.*
2. *Формула Ньютона – Лейбніца.*
3. *Властивості інтеграла як функції верхньої межі.*
4. *Теорема про середнє значення.*

А12

1. Зобразити у прямокутній системі координат криволінійні трапеції, виразити їх площі через визначені інтеграли та обчислити ці інтеграли за допомогою формули Ньютона – Лейбніца:

1) $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{x}, \ 0 \leq x \leq 4\}$;

2) $\left\{(x,y)\mid 0\le y\le \cos x,\ 0\le x\le \frac{\pi}{2}\right\}$;

3) $\left\{(x,y)\mid 0\le y\le \dfrac{1}{1+x^2},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\le x\le \sqrt{3}\right\}$;

4) $\left\{(x,y)\mid 0\le y\le \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \operatorname{sh}1\le x\le \operatorname{sh}2\right\}$;

5) $\{(x,y)\mid 0\le y\le |1-x|,\ 0\le x\le 2\}$;

6) $\{(x,y)\mid 0\le y\le f(x),\ -2\le x\le 1\}$,

де $f(x)=\begin{cases}|x+1|, & \text{якщо } -2\le x\le 0;\\ 2-x & \text{якщо } 0<x\le 1.\end{cases}$

2. Чи правомірне таке застосування формули Ньютона – Лейбніца

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1}=-2?$$

3. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int\limits_0^x(\operatorname{arctg}u)^2du}{\sqrt{x^2+1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int\limits_0^x\exp(u^2)du\right)^2}{\int\limits_0^x\exp(2u^2)du}$.

4. Оцінити інтеграл $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dx}{1+0,5\cos x}$.

5. Який знак має інтеграл $\int\limits_0^{2\pi}x\sin x\,dx$?

6. Який інтеграл більший: $\int\limits_0^1\exp(-x)dx$ чи $\int\limits_0^1\exp(-x^2)dx$? Чому?

7. Довести нерівність $\dfrac{1}{2}<\int\limits_0^1\dfrac{2x}{1+x^{13}}\,dx<1$.

8. Побудувати графіки функцій:

1) $f(x)=\int\limits_0^x e^{u^2}du,\ x\in\mathbb{R}$; 2) $f(x)=\int\limits_0^x e^{-u^2}du,\ x\in\mathbb{R}$.

9. Знайти границю послідовності $\int\limits_0^1\dfrac{x^n}{1+x^{13}}\,dx,\ n\ge 1$.

10. Нехай $\{f,g\}\subset C([a,b])$. Довести нерівність Коші – Буняковського

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

За яких умов на функції має місце рівність?

Д1. Нехай функція $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$. Довести, що $\forall x \in [a,b] : f(x) = 0$. Чи істотна умова неперервності?

Д2. Навести приклад функції $f \in R([a,b])$, яка не має первісної на відрізку $[a,b]$.

Д3. Навести приклад функції $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, яка має первісну на відрізку $[a,b]$, але не інтегровна за Ріманом на цьому відрізку $[a,b]$.

Д4. Нехай $f \in R([a,b]),\ F(x) = \int\limits_a^x f(u)\,du, x \in [a,b]$ і $F \in C^{(1)}([a,b])$. Чи вірно, що функція f неперервна на відрізку $[a,b]$?

Д5. Визначити функцію $f \in C([a,b])$, якщо для довільного полінома p

$$\int\limits_a^b f(x)p(x)dx = 0.$$

Д6. Нехай $f \in R([a,b])$. Довести, що

$$\exists \theta \in [a,b] : \int\limits_a^\theta f(u)du = \int\limits_\theta^b f(u)du.$$

Б12

1. За допомогою формули Ньютона – Лейбніца обчислити інтеграли і зобразити криволінійні трапеції, площі яких виражають ці інтеграли:

1) $\int\limits_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx;$

2) $\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

3) $\int\limits_{\operatorname{ch}3}^{\operatorname{ch}5} \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}};$

4) $\int\limits_{-1}^{3} |x|\,dx;$

5) $\int\limits_{-2}^{2} |x^2-1|\,dx;$

6) $\int\limits_{0}^{2\pi} |\sin x|\,dx;$

7) $\int\limits_{0}^{3} x[x]\,dx;$

8) $\int\limits_{0}^{2} [x^2]\,dx.$

Символом $[a]$ позначена ціла частина дійсного числа a.

2. Користуючись формулою Ньютона – Лейбніца, знайти інтеграли:

1) $\int\limits_1^{\sqrt[3]{e}} \dfrac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

2) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \dfrac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\, dx$;

3) $\int\limits_1^{e} \dfrac{\sin(\ln x)}{x}\, dx$;

4) $\int\limits_0^{1} \dfrac{x^3}{x^8+1}\, dx$;

5) $\int\limits_1^{2} \dfrac{e^x}{e^x-1}\, dx$;

6) $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}\, dx$.

3. Знайти похідні функцій:

1) $F(x) = \int\limits_1^{x} \ln t\, dt,\ x>0$; 2) $F(x) = \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2\, dt,\ x>0$.

4. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^{x} \cos u^2\, du}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} u}\, du}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin u}\, du}$.

5. Довести, що

$$\int\limits_0^{x} \exp(u^2)\, du \sim \frac{1}{2x}\exp(x^2),\ x\to +\infty.$$

6. Оцінити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{1} \exp(-x^2)\, dx$;

2) $\int\limits_0^{1} \dfrac{x^6}{\sqrt{1+x}}\, dx$;

3) $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx$.

7. Довести нерівності:

1) $9 < \int\limits_8^{18} \dfrac{x+1}{x+2}\, dx < \dfrac{19}{2}$;

2) $\dfrac{1}{e} \le \int\limits_0^{1} x^x\, dx \le 1$;

3) $\forall k,n \in N, n\ge 2\ :\ \dfrac{1}{k+1} < \int\limits_k^{k+1} \dfrac{dx}{x} < \dfrac{1}{k}$ і

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n} < \int\limits_1^{n} \dfrac{dx}{x} < 1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n-1}$.

8. Побудувати графіки функцій:

1) $f(x)=\int\limits_1^x \frac{e^u}{u}\,du,\ x\ge 1;$ 2) $f(x)=\int\limits_0^x \frac{\sin u}{u}\,du,\ x\in\mathbb{R}.$

ЗАНЯТТЯ 13
ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ. ЗАМІНА ЗМІННОЇ

Контрольні запитання

1. *Формула інтегрування частинами для інтеграла Рімана.*
2. *Формула заміни змінної для інтеграла Рімана.*

А13

1. Обчислити інтегруванням частинами інтеграли:

1) $\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx;$ 2) $\int\limits_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx;$ 3) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\,dx.$

2. Обчислити за допомогою заміни змінної:

1) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}};$ 2) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx.$

3. Чи можна в інтегралі $\int\limits_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ покласти $x=\sin t$? Чому? Обчислити цей інтеграл.

4. Знайти $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4-\cos x}.$

5. Нехай функція $f\in C([0,1])$. Довести, що:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx=\int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx;$ 2) $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$

6. Нехай функція $f\in C(\mathbb{R})$. Довести, що:

1) функція f непарна тоді й тільки тоді, коли $\forall x\in\mathbb{R}:\ \int\limits_{-x}^{x} f(u)\,du=0;$

2) функція f періодична з періодом T тоді й тільки тоді, коли

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ \int\limits_x^{x+T} f(u)\,du=\int\limits_0^T f(u)\,du.$$

Дати геометричну інтерпретацію цим рівностям.

7. Для інтеграла $I_n = \int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx,\ n \geq 1$ знайти рекурентну формулу і обчислити цей інтеграл.

Д1. Нехай функція $f \in C([-1,1])$. Довести нерівність
$$\int\limits_0^1 f(x)f(-x)dx \leq \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 f^2(x)dx.$$

Д2. Нехай функція $f \in C([0,1])$ і $\forall x \in [0,1] : f(x) > 0$. Знайти
$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(-x)}\,dx.$$

Д3. Нехай функція $f \in C(\mathbb{R})$ така, що
$$\exists p, q \in \mathbb{R},\ p+q \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}:\ pf(x)+qf(-x)=1.$$
Знайти $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx$, де $a > 0$.

Д4. Нехай функція $f \in C([-a,a])$ і парна. Довести рівність
$$\int\limits_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^x}dx = \int\limits_0^a f(x)\,dx.$$

Д5. Для $x > 0,\ a > 0$ довести нерівності:

1) $\left|\int\limits_x^{x+a} \frac{\sin u}{u}\,du\right| < \frac{3}{x}$; 2) $\left|\int\limits_x^{x+1} \sin u^2\,du\right| < \frac{2}{x}$.

Б13

1. Обчислити інтегруванням частинами інтеграли:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$; 3) $\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$; 5) $\int\limits_0^1 x\ln(1+x^2)\,dx$;

2) $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$; 4) $\int\limits_1^2 (3x+2)\ln x\,dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi} x^3\sin x\,dx$;

7) $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5}\,dx$.

2. Нехай $f \in C^{(2)}([a,b])$. Довести, що

$$\int\limits_a^b x f''(x)\,dx = (bf'(b) - f(b)) - (af'(a) - f(a)).$$

3. За допомогою заміни змінної обчислити:

1) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; 3) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$; 5) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}$.

2) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}\,dx$; 4) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$;

4. В інтегралі $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$, де функція $f \in C([0,2\pi])$, зробити заміну змінної $\sin x = t$.

5. Пояснити, чому формальна заміна змінної $t = \sqrt[3]{x^2}$ в інтегралі $\int\limits_{-1}^{1} dx$ приводить до помилки.

6. Нехай функція $f \in C(\mathbb{R})$. Довести, що функція f парна тоді і тільки тоді, коли

$$\forall x \in \mathbb{R}: \int\limits_{-x}^{x} f(u)\,du = 2\int\limits_0^x f(u)du.$$

Дати геометричне тлумачення.

7. Довести, що одна з первісних парної неперервної функції є функцією непарною, а кожна первісна непарної неперервної функції є парною функцією.

8. Довести, що первісна неперервної на $\mathbb{R}$ періодичної з періодом $T > 0$ функції є періодичною з періодом T функцією тоді й тільки тоді, коли

$$\int\limits_0^T f(x)\,dx = 0.$$

ЗАНЯТТЯ 14
ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ. ДОВЖИНА ДУГИ

Контрольні запитання

1. *Формули для площі криволінійної трапеції та криволінійного сектора.*
2. *Формули для довжини кривої в декартових, полярних координатах та заданої параметрично.*

А14

1. Обчислити площі фігур, обмежених кривими, заданими у прямокутній декартовій системі координат:

1) $ax = y^2,\ ay = x^2;\ a > 0;$
2) $y = 2x - x^2,\ x + y = 2;$
3) $y = 2^x,\ y = 2,\ x = 0;$
4) $y^2 = x^2(a^2 - x^2).$

2. Обчислити площі фігур, обмежених кривими, заданими у полярній системі координат:

1) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi;$
2) $r = a \sin 3\varphi,\ a > 0.$

3. За допомогою переходу до полярної системи координат, обчислити площу фігури, обмеженої кривою $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

4. Знайти довжини кривих (параметри додатні):

1) $y^2 = 4x,\ 0 \le x \le 1;$
2) $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a},\ 0 \le x \le b,\ a > 0;$
3) $x = \cos^4 t,\ y = \sin^4 t;$
4) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (*астроїда*);
5) $r = a\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ (*спіраль Архімеда*).

Д1. Знайти площі фігур, обмежених кривими:
1) $x^3 + y^3 = 3axy,\ a > 0$ (*лист Декарта*);
2) $x^4 + y^4 = ax^2y,\ a > 0.$

Д2. Обчислити площу петлі кривої $x = 3t^2,\ y = 3t - t^3$.

Д3. Обчислити довжину кривої:

$$y = \int_0^x \sqrt{\sin u}\, du,\ 0 \le x \le \pi.$$

Д4. Довести, що для гладкої кривої $\lim\limits_{|\lambda| \to 0} l(\Gamma_\lambda) = \sup\limits_{\lambda} l(\Gamma_\lambda)$.

Б14

1. Обчислити площі фігур, обмежених кривими, заданими у прямокутній декартовій системі координат:

1) $y = x^2 + 1,\ x + y = 3;$
2) $y^2 = 2x + 1,\ x - y = 1;$
3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$
4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ x = 2a,\quad a > 0;$
5) $y = \sin^3 x,\ y = \cos^3 x,$
$0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}.$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 2x + 2$, дотичною до неї в точці $M(3;5)$ і віссю ординат.

3. Обчислити площі фігур, обмежених кривими, заданими у полярній системі координат:

1) $r = a(1 + \cos\varphi),\ a > 0$ (*кардіоїда*);
2) $r = a\sin 2\varphi;$
3) $r = 2a\cos 3\varphi,\ r \ge a,\ a > 0.$

4. Знайти площу фігури, обмеженої лемніскатою з рівнянням
$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy,\quad a > 0.$$

5. Обчислити довжину дуги кривої:

1) $y^2 = x^3$, що відтинається прямою $x = \dfrac{4}{3}$;
2) $y = \dfrac{x^2}{2} - 1$, що відтинається віссю абсцис;
3) $y^2 = (x+1)^3$, що відтинається прямою $x = 4$;
4) $y = \ln\sin x,\ \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{2}.$

6. Обчислити периметр фігури, обмеженої лініями $x^2 = (y+1)^3$ та $y = 4$.

7. Обчислити довжину кривої, заданої параметрично:
$$x = e^t(\cos t + \sin t),\quad y = e^t(\cos t - \sin t),\ t \in [0,1].$$

8. Обчислити довжину кривої, заданої у полярній системі координат:

1) $r = a(1 + \cos\varphi),\ a > 0$ (*кардіоїда*);
2) $r\varphi = 1,\quad \dfrac{1}{2} \le \varphi \le 2$ (*гіперболічна спіраль*).

ЗАНЯТТЯ 15
ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМІВ І ПЛОЩ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ. ТЕОРЕМИ ГУЛЬДІНА

Контрольні запитання

1. *Формули для об'ємів тіл обертання.*
2. *Формули для площ поверхонь тіл обертання.*
3. *Координати центра ваги. Теореми Гульдіна*

А15

1. Знайти об'єм зрізаного конуса, основи якого – еліпси з півосями a_1, b_1 та a_2, b_2 відповідно, а висота дорівнює h.
2. Знайти об'єм параболоїда обертання, площа основи якого дорівнює S, а висота – H.
3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2, \quad y = 0$ навколо: 1) осі абсцис; 2) осі ординат.
4. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої півобертом спіралі Архімеда $r = a\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi$ навколо полярної осі.
5. Знайти площі поверхонь, утворених обертанням наступних кривих:

1) $y = x\sqrt{\dfrac{x}{a}},\ \ 0 \le x \le a$ навколо осі абсцис;
2) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ навколо осі абсцис;
3) $r = a(1 + \cos\varphi)$ навколо полярної осі.

6. Визначити координати центра ваги дуги кола $x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi$, $|\varphi| \le \alpha$ для фіксованих $a > 0, \quad 0 < \alpha \le \pi$. Обчислити площу поверхні сфери радіуса a.
7. Визначити координати центра ваги фігури, обмеженої параболами $ax = y^2,\ \ ay = x^2$, де $a > 0$.
8. Знайти об'єм і площу поверхні тора, утвореного обертанням кола $x^2 + (y - b)^2 = a^2,\ 0 < a \le b$ навколо осі абсцис.
Д1. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1;$
2) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 = ax;$
3) $x+y+z^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$, де $a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$

Д2. Нехай функція f неперервно диференційовна і строго монотонна на відрізку $[a,b]$. Довести, що об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ординат криволінійної трапеції $\{(x,y)|\ 0 \le y \le f(x),\ a \le x \le b\}$, дорівнює $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$.

Д3. Нехай $0 \le \alpha \le \beta \le \pi,\ r \in C([\alpha,\ \beta])$. Довести, що об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі криволінійного сектора $\{(\rho,\varphi)|\,0 \le \rho \le r(\varphi)\}$, дорівнює $V = \dfrac{2\pi}{3}\int\limits_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$.

Д4. Знайти координати центра ваги:

1) сектора $\{(x,y)|\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 \le r \le a,\ |\varphi| \le \alpha\}$, де $a > 0$, $0 < \alpha \le \pi$;

2) однорідної півкулі радіуса a;

3) однорідної півсфери радіуса a.

Б15

1. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями:

1) $xy = 4,\ x = 1,\ y = 0$ навколо осі абсцис;

2) $y^2 = (x+4)^3,\ x = 0$ навколо осі ординат;

3) $(y-3)^2 + 3x = 0,\ x = -3$ навколо осі абсцис;

4) $y = e^x,\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0$ навколо кожної з осей Ox та Oy.

2. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої астроїдою $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої кривою $x = a\sin t,\ \ y = b\sin 2t$.

4. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ z = \dfrac{c}{a}x,\ z = 0;$

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (еліпсоїд).

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої:

1) $y^2 = 4+x$, що відтинається прямою $x = 2$, навколо осі абсцис;

2) $y = \cos\dfrac{\pi x}{2a},\ \ -a \le x \le a$, навколо осі абсцис.

6. Знайти центр ваги арки циклоїди $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1-\cos t)$.

7. Знайти координати центра ваги фігури

$$\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

8. За допомогою теорем Гульдіна знайти координати центрів ваги півкола і півкруга радіуса a.

ЗАНЯТТЯ 16
ЧИСЛОВІ РЯДИ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Контрольні запитання

1. *Означення числового ряду, його часткової суми.*
2. *Означення збіжного числового ряду, його суми й залишка.*
3. *Необхідні умови збіжності числового ряду.*
4. *Критерій збіжності ряду з невід'ємними членами.*
5. *Критерій Коші збіжності числового ряду.*

А16

1. Знайти часткові суми, дослідити збіжність, знайти суми та залишки наступних рядів:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots;$

2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\ldots;$

3) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots;$

4) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots;$

5) $\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)+\left(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\ldots+$
$+\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)+\ldots.$

2. Дослідити збіжність рядів:

1) $0,001+\sqrt{0,001}+\sqrt[3]{0,001}+\ldots;$

2) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots;$

3) $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\ldots+\frac{1}{1000n+1}+\ldots;$

4) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots.$

3. Довести збіжність рядів, використовуючи критерій Коші:

1) $a_0+\frac{a_1}{10}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}+\ldots,$ де $|a_n|<10,\ n\geq 0;$

2) $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{2^n}+\ldots.$

4. Використовуючи критерій Коші, довести розбіжність ряду

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

5. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ з невід'ємними членами збігається. Довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Навести приклад, який показує, що обернене твердження невірне.

Д1. Знайти часткові суми, дослідити збіжність, знайти суму та залишок ряду

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots.$$

Д2. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Чи випливає звідси збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$? Навести відповідні приклади.

Б16

1. Знайти часткові суми, дослідити збіжність, знайти суми та залишки рядів:

1) $\dfrac{3}{1^2\cdot 2^2}+\dfrac{5}{2^2\cdot 3^2}+\ldots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots;$

2) $\dfrac{2}{1^2\cdot 3^2}+\dfrac{3}{2^2\cdot 4^2}+\ldots+\dfrac{n+1}{n^2(n+2)^2}+\ldots;$

3) $\dfrac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{2}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}+\ldots;$

4) $\dfrac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\dfrac{1}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+3)(n+6)}+\ldots.$

2. Використовуючи необхідну умову збіжності ряду, довести розбіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n};$ 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}.$

3. Довести збіжність рядів, використовуючи критерій Коші:

1) $\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1}+\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{2}+\ldots+$
$+\dfrac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}+\ldots;$

2) $\dfrac{\cos x}{1^2}+\dfrac{\cos x^2}{2^2}+\ldots+\dfrac{\cos x^n}{n^2}+\ldots.$

Вказівка. Використати нерівність

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},\quad n\geq 2.$$

4. Довести розбіжність рядів, використовуючи критерій Коші:

1) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots;$

2) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}} + \ldots.$

5. Нехай $a_n \le c_n \le b_n,\ n \ge 1,$ і ряди $(A)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\quad (B)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються. Довести, що тоді ряд $(C)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ також збігається. Що можна стверджувати про збіжність ряду (C), якщо ряди (A) і (B) розбігаються? Навести відповідні приклади.

6. Нехай ряди з невід'ємними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ розбігаються. Що можна стверджувати про збіжність рядів

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\};$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$?

7. Нехай ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ збігаються. Довести збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|;$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2;$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}.$

ЗАНЯТТЯ 17
ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ З НЕВІД'ЄМНИМИ ЧЛЕНАМИ

Контрольні запитання

1. *Ознаки порівняння, Д'Аламбера і Коші.*
2. *Логарифмічна ознака та ознака Раабе. Ознака Гаусса.*
3. *Інтегральна ознака Маклорена – Коші.*

A17

1. За допомогою ознак порівняння дослідити збіжність наступних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2};$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4+1}};$ 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2};$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n(2^n-1)};$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1+n^2}{n^2};$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}}$.

2. Використовуючи ознаки Д'Аламбера або Коші, дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1000^n}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n \cdot n!}{n^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

3. Використовуючи інтегральну ознаку Маклорена – Коші, дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}.$$

4. Використовуючи ознаки Раабе, логарифмічну або Гаусса, дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\, e^n}{n^{n+p}}$.

Д1. Довести, що для будь-якого збіжного ряду з невід'ємними членами й залишками $\{r_n \ : \ n \ge 1\}$ існує збіжний ряд з невід'ємними членами й залишками $\{r'_n \ : \ n \ge 1\}$, що задовольняють умову $r_n = o(r'_n),\ n \to \infty$.

Д2. Нехай послідовність невід'ємних чисел $\{a_n \ : \ n \ge 1\}$ монотонно не зростає. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається тоді й лише тоді, коли збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Б17

1. За допомогою ознак порівняння дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n\alpha}{n^3}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 5^{n-1}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n-2}$.

2. Використовуючи ознаки Коші або Д'Аламбера, дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \dfrac{1}{n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{2^n+3^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4\left(\sqrt{5}+(-1)^n\right)^n}{4^n}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{(2n-1)!!}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$;

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

3. Використовуючи інтегральну ознаку Маклорена – Коші, дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p(\ln n)^q}$;

4) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$.

4. Використовуючи ознаки Раабе або Гаусса, дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,n^{-p}}{q(q+1)\ldots(q+n)} \quad (q>0).$$

ЗАНЯТТЯ 18
АБСОЛЮТНО ТА УМОВНО ЗБІЖНІ РЯДИ

Контрольні запитання

1. *Означення абсолютно та умовно збіжних рядів.*
2. *Ознаки Лейбніца, Діріхле, Абеля.*

А18

1. Дослідити абсолютну та умовну збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$;

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$;

5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

2. Довести умовну збіжність рядів на інтервалі $(0,\pi)$:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$.

3. Для рядів

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$,

де $x \in (0, \pi)$, знайти множини параметрів (x, p), для яких вони збігаються: а) абсолютно; б) умовно.

4. Дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n}$; 3) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$.

5. Довести, що для кожного $p > 0$ сума ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ лежить в інтервалі $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

6. Оцінити залишок ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$ і вказати, скільки доданків треба взяти, щоб обчислити його суму з точністю до $\varepsilon = 10^{-8}$.

7. Довести збіжність ряду

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots$$

і знайти його суму.

8. Довести розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

Д1. Дослідити збіжність рядів:

1) $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \ldots$;

2) $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \ldots$.

Д2. Нехай послідовність $\{a_n : \ n \geq 1\}$ періодична з періодом $p \in \mathbb{N}$. Знайти необхідні й достатні умови збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Б18

1. Встановити, які зі знакозмінних рядів збігаються абсолютно, умовно або розбігаються:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{n}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{\sqrt[4]{n}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$;

6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}\ln n}{n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}\cos\frac{\pi}{n}}{n}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}\sin\frac{\pi}{n}}{n}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n+1)!!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

2. Переконатися в тому, що доданки рядів

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots+$
$+\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}+\ldots$;

2) $\dfrac{1}{2^{2/3}-1}-\dfrac{1}{2^{2/3}+1}+\dfrac{1}{3^{2/3}-1}-\dfrac{1}{3^{2/3}+1}+\ldots+$
$+\dfrac{1}{n^{2/3}-1}-\dfrac{1}{n^{2/3}+1}+\ldots$

не задовольняють умови ознаки Лейбніца. Чи збігаються ці ряди?

3. Нехай ряд умовно збігається. Чи збережеться його збіжність, якщо для деякого числа N переставити перші N доданків? Чи збережеться при цьому його сума?

4. Дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\left(\sqrt{n}+(-1)^{n-1}\right)^p}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\dfrac{n\pi}{4}}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{12}}{\ln n}$;

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^2 n}\,\cos\dfrac{n^2\pi}{n+1}$.

ЗАНЯТТЯ 19
ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ РЯДІВ. ДОБУТОК РЯДІВ. НЕСКІНЧЕННІ ДОБУТКИ

Контрольні запитання

1. *Теорема про арифметичні дії зі збіжними рядами.*
2. *Перестановка членів абсолютно та умовно збіжних рядів.*
3. *Добуток рядів за Коші. Теореми про достатні умови збіжності добутку рядів.*
4. *Означення нескінченного числового добутку, його часткового добутку. Означення збіжного числового добутку.*

А19

1. Знайти суми рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{n^3}\right)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right)$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$.

2. Вважаючи, що сума ряду Лейбніца відома $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2\right)$, знайти суми рядів:

1) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$; 2) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$.

3. Переставити доданки збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ таким чином, щоб одержаний ряд: а) був розбіжним; б) був розбіжним до $+\infty$.

4. Використовуючи множення рядів за Коші, обчислити добуток

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}.$$

5. Використовуючи множення рядів за Коші, довести рівність

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,q^n,\ \text{де } |q|<1.$$

6. Довести, що квадрат у розумінні Коші збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ є розбіжним рядом.

7. Знайти часткові добутки й довести рівності:

1) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$;

2) $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)=\frac{1}{1-x}$, $|x|<1$;

3) $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$;

4) $\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}=\frac{1}{4}$.

Д1. Нехай $\{a_n\ :\ n\geq 1\}\subset(0,+\infty),\ a_n\to 0$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ розбігається. Довести, що для довільного числа s існує послідовність $\varepsilon_n\in\{-1,1\}$, $n\geq 1$, для якої $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n=s$.

Д2. Довести рівносильність тверджень:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається абсолютно;

2) $\forall\{\varepsilon_n\ :\ \varepsilon_n\in\{-1,1\},\ n\geq 1\}:\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n$ збігається;

3) $\forall\{\varepsilon_n\ :\ \varepsilon_n\in\{0,1\},\ n\geq 1\}:\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n$ збігається.

Б19

1. Довести, що доданки умовно збіжного ряду можна, не змінюючи їх порядку, згрупувати таким чином, що одержаний ряд буде абсолютно збіжним.

2. Нехай члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ задовольняють наступні умови:

1) $a_n\to 0,\ n\to\infty$;
2) для деякої строго зростаючої послідовності натуральних чисел $\{p_n\ :\ n\geq 1\}$, що задовольняє умову $\sup\limits_{n\geq 1}(p_{n+1}-p_n)<\infty$,

   збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, де $A_n=\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i$.

Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається.

3. Нехай перестановка $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ задовольняє умову
$$\sup_{n\geq 1}|\sigma(n)-n|<\infty.$$

Довести, що ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ одночасно або розбігаються, або збігаються до тієї самої суми.

4. Що можна стверджувати про суму двох рядів, з яких

1) один ряд збігається, а інший розбігається;
2) обидва ряди розбігаються?

5. Довести, що

1) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$;
2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$;
3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

6. Знайти часткові добутки й довести рівності:

1) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}$;
2) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}$;
3) $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = 2$;
4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}$;
5) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) = 2$.

ЗАНЯТТЯ 20
ЗБІЖНІСТЬ НЕСКІНЧЕННИХ ДОБУТКІВ

Контрольні запитання

1. *Необхідна умова збіжності нескінченного добутку.*
2. *Достатні умови збіжності нескінченних добутків. Зв'язок зі збіжністю числових рядів.*
3. *Абсолютна збіжність нескінченних добутків.*

А20

1. Чи випливає зі збіжності добутків $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ і $\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ збіжність добутків:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n)$; 2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n^2$?

2. Дослідити збіжність нескінченних добутків:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$;

2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^p}\right)$;

3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{x^n}{2^n}\right)$;

4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$;

5) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)$;

6) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{x^n}{n^p}\right) \cos \dfrac{x^n}{n^q}$,
$(|x| \le 1,\ q > 0)$.

3. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ збігається. Довести, що тоді збігається нескінченний добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos a_n$.

4. Дослідити абсолютну й умовну збіжність добутків:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)$; 2) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Д1. Нехай $\{a_n :\ n \ge 1\} \subset (0, +\infty)$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ збігається абсолютно. Довести, що добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не залежить від порядку множників.

Д2. Нехай $\{a_n :\ n \ge 1\} \subset (0, +\infty)$ і
$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = O(1),\ n \to \infty.$$

Довести, що добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ розбігається.

Д3. Довести формулу Стірлінга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n},\ n\to\infty.$$

Вказівка. Границю відношення лівої і правої частин подати у вигляді нескінченного добутку і для знаходження його числового значення використати формулу Валліса.

Б20

1. Чи випливає зі збіжності добутків $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ і $\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ збіжність добутків:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n q_n$;   2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{p_n}{q_n}$?

2. Дослідити збіжність наступних нескінченних добутків:

1) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$;   2) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$;

3) $\prod\limits_{n=n_0}^{\infty}\dfrac{n^2+an+b}{n^2+cn+d}$, де $n^2+cn+d>0$ при $n\ge n_0$;

4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;   6) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x}{c+n}\right)e^{\frac{x}{n}}$, де $c>0$;

5) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{n}}$;   7) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$.

3. Нехай для послідовності $\{a_n : n\ge 1\}\subset\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається абсолютно. Довести, що тоді збігається нескінченний добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+a_n\right)$.

4. Дослідити абсолютну й умовну збіжність наступних добутків:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$;   4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$;

2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$;   5) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

3) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n}}{\ln n}\right)$;

ЗАНЯТТЯ 21
ПОТОЧКОВА Й РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ ПОСЛІДОВНОСТІ ФУНКЦІЙ. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ

Контрольні запитання

1. *Означення поточкової збіжності послідовності функцій.*
2. *Означення рівномірної збіжності послідовності функцій.*
3. *Теорема про зв'язок поточкової та рівномірної збіжності.*
4. *Критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності.*

А21

1. Для послідовності $\{f_n(x) = x^n,\ 0 < x < 1\ :\ n \geq 1\}$ і фіксованого $x \in (0, 1)$ визначити найменший номер $N = N(\varepsilon, x)$, починаючи з якого відхилення членів послідовності в точці x від граничної функції не перевищує 0.001, якщо 1) $x = \dfrac{1}{10}$; 2) $x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$; 3) $x = \dfrac{1}{\sqrt[m]{10}}$, $m \in \mathbb{N}$. Чи збігається ця послідовність функцій рівномірно на інтервалі $(0, 1)$?

2. Дослідити послідовність функцій $\{f_n(x),\ x \in A\ :\ n \geq 1\}$ на поточкову й рівномірну збіжність на заданій множині A, якщо:

1) $f_n(x) = \sin^n x;\ A = [0; \pi]$;
2) $f_n(x) = x^n - x^{n+1};\ A = [0; 1]$;
3) $f_n(x) = x^n - x^{2n};\ A = [0; 1]$.

3. Дослідити послідовність функцій $\{f_n(x),\ x \in A_i\ :\ n \geq 1\}$ на поточкову й рівномірну збіжність на кожній із заданих множин A_i, якщо:

1) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n};\ A_1 = [0; 1 - \varepsilon];\ A_2 = [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon];$
$A_3 = [1 + \varepsilon, +\infty)$, де $\varepsilon \in (0; 1)$;
2) $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^2x^2};\ A_1 = [0; 1];\ A_2 = (1, +\infty)$.

4. Дослідити послідовність функцій $\{f_n(x),\ x \in \mathbb{R}\ :\ n \geq 1\}$ на поточкову й рівномірну збіжність на множині $A = \mathbb{R}$, якщо:

1) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$;
2) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$;
3) $f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}$;
4) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$;
5) $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$.

5. Дослідити послідовність функцій $\{f_n(x),\ x \in \mathbb{R}\ :\ n \geq 1\}$ на поточкову й рівномірну збіжність на заданих множинах $A_i,\ i = 1, 2$, якщо:

1) $f_n(x) = e^{-(x-n)^2};\ A_1 = (-l; l),\ l > 0;\ A_2 = \mathbb{R}.$
2) $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n;\ A_1 = (a; b);\ A_2 = \mathbb{R}.$

Д1. Чи збігається послідовність $\{\sin^n x \cos x,\ x \in \mathbb{R} \,:\, n \geq 1\}$ рівномірно на $\mathbb{R}$?

Д2. Знайти поточкову на $\mathbb{R}$ границю послідовності функцій $\left\{f_n(x) = n \sin\sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2},\ x \in \mathbb{R} \,:\, n \geq 1\right\}$. Чи збігається ця послідовність рівномірно на $[0; a],\ a > 0$? на $\mathbb{R}$?

Д3. Довести, що рівномірна на осі границя послідовності поліномів є поліномом.

Д4. Чи випливає з того, що $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$ те, що $x f_n(x) \rightrightarrows x f(x)$ на $[a, b]$? Чи вірне обернене твердження?

Б21

1. 1) Довести, що послідовність функцій $\{f_n(x) = xe^{-nx},\ x \in [0, +\infty) \,:\, n \geq 1\}$ на промені $[0, +\infty)$ рівномірно збігається до нуля.

2) При яких значеннях параметра α послідовність функцій $\{f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx},\ x \in [0, +\infty) \,:\, n \geq 1\}$ на промені $[0, +\infty)$ рівномірно збігається до нуля?

2. Показати, що послідовності $\{f_n(x),\ x \in [0, \pi] \,:\, n \geq 1\}$ збігаються на відрізку $[0; \pi]$ поточково, але не рівномірно:

1) $f_n(x) = \sqrt[n]{\sin x}$;
2) $f_n(x) = \sqrt[n]{x \sin x}$;
3) $f_n(x) = (g(x))^n$;
4) $f_n(x) = \sqrt[n]{g(x)}$,

де $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \in (0; \pi], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

3. Дослідити послідовність функцій $\{f_n(x),\ x \in A \,:\, n \geq 1\}$ на поточкову й рівномірну збіжність на заданій множині A, якщо:

1) $f_n(x) = \dfrac{1}{n + x},\ A = (0, +\infty);$
2) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n + x},\ A = [0, 1];$
3) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right),\ A = (0, +\infty);$
4) $f_n(x) = e^{n(x-1)},\ A = (0, 1);$
5) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n},\ A = [0; 2].$

ЗАНЯТТЯ 22
ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ. МНОЖИНА ЗБІЖНОСТІ. РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РЯДУ

Контрольні запитання

1. *Означення абсолютної та умовної збіжності функціонального ряду.*
2. *Означення множини збіжності функціонального ряду.*
3. *Означення рівномірної збіжності функціонального ряду.*
4. *Критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду.*

A22

1. Визначити множини збіжності (абсолютної та умовної) функціональних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n e^{x^{2n+1}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi x^n)$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+x^n)$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^p \sin nx}{1+n^q},\ q>0;\ 0<x<\pi$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+y^n},\ y \geq 0.$

2. Дослідити на рівномірну та поточкову збіжність функціональні ряди на заданих множинах A:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2},\ A=[-1;1]$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!},\ A=(0;+\infty)$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n,\ A=[0;1]$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)},\ A=(0,+\infty)$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{(1+x)(1+2x)...(1+nx)},\ A=[0,\varepsilon],\ \varepsilon>0$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{(1+x)(1+2x)...(1+nx)},\ A=[\varepsilon,+\infty),\ \varepsilon>0.$

3. (*Ознака Лейбніца* рівномірної збіжності функціонального ряду). Нехай послідовність функцій $\{a_n(x),\ x \in A\ :\ n \geq 1\}$ задовольняє наступні умови:

1) $\forall x \in A\ \forall n \geq 1\ :\ a_n(x) \geq 0;$
2) $\forall x \in A\ \forall n \geq 1\ :\ a_n(x) \geq a_{n+1}(x);$
3) $\sup\limits_{x \in A} |a_n(x)| \to 0,\ n \to \infty.$

Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n(x)$ збігається рівномірно на A.

4. Довести рівномірну збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n + x^2}$ на $\mathbb{R}$.

5. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x),\ x \in A$ збігається рівномірно на множині A. Довести, що:

1) $\sup\limits_{x \in A} |a_n(x)| \to 0,\ n \to \infty;$

2) $\sup\limits_{x \in A} \left| \sum\limits_{k=n+1}^{2n} a_k(x) \right| \to 0,\ n \to \infty.$

Д1. Довести рівномірну на A збіжність ряду

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{-\frac{x}{n}}^{\frac{x}{n}} \sin t^2 dt,\ A = [-3; 4];$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n|x|} \sin(x^2 \sqrt{n}),\ A = \mathbb{R}.$

Д2. Дослідити ряди на рівномірну збіжність на множині $(0; 1)$:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{nx}^{(n+1)x} \dfrac{dt}{1 + t^{2004}};$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{nx - \frac{1}{n}}^{(n+1)x + \frac{1}{n}} e^{-t^2} dt.$

Д3. Знайти множину поточкової збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n + 2^n}{n^x + x^{2n}}$. Чи збігається ряд рівномірно на цій множині?

Д4. Нехай $\{a_n\ :\ n \geq 1\}$ рівномірно збігається до 0 на A, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(x) + a_{n+1}(x)|$ рівномірно збігається на A. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ рівномірно збігається на A.

Б22

1. Визначити множини збіжності (абсолютної та умовної) функціональних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)...(1+x^n)}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n+y^n},\ x>0,\ y>0$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$.

2. Визначити при $x \in (0;1]$ суму й залишок функціонального ряду

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + ... + x(1-x)^{n-1} + ...$$

і показати, що він збігається рівномірно на відрізку $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. При якому значенні n залишок даного ряду задовольняє нерівність $|r_n(x)| < 0.01$ одночасно для всіх x на цьому відрізку?

3. Показати, що функціональний ряд

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} + ... + \frac{1}{(x+2n-1)(x+2n+1)} + ...$$

рівномірно збігається до функції $\frac{1}{2(x+1)}$ на множині $[0, +\infty)$. При якому значенні n залишок даного ряду задовольняє нерівність $|r_n(x)| < 0.01$ при всіх $x \in [0, +\infty)$?

4. Дослідити на рівномірну та поточкову збіжність функціональні ряди на заданих множинах A :

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n,\ A = (-q; q),\ q < 1$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n,\ A = (-1; 1)$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right),\ A = [-1; 1]$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)},\ A = (0, +\infty)$.

5. Довести рівномірну збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\cos x}$ на $\mathbb{R}$.

ЗАНЯТТЯ 23
ОЗНАКИ РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ

Контрольне запитання

Ознаки Веєрштрасса, Діріхле та Абеля рівномірної збіжності функціонального ряду.

А23

1. Дослідити на рівномірну збіжність ряд на множині A

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2+x^2},\ A=\mathbb{R};$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{n^2+x^2}{n^2},\ A=[-c;c],\ c>0;\quad A=\mathbb{R};$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^2}{n^3+x^3},\ A=[0;c];$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x\sqrt[3]{n}}{1+n^3x^2},\ A=\mathbb{R};$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{x^2+n^3},\ A=\mathbb{R};$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n},\ A=[\varepsilon,2\pi-\varepsilon],\ \varepsilon\in(0;\pi);$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n},\ A=[0,2\pi];$

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\sin\dfrac{1}{3^nx},\ A=(0,+\infty).$

2. Дослідити на рівномірну збіжність ряд на множині A

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n},\ A=(0,+\infty);$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x\sin nx}{\sqrt{x+n}},\ A=[0,+\infty);$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2nx^2}{n-\sqrt{n}+1},\ A=[0,+\infty);$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},\ A=[0,1].$

3. Довести рівномірну збіжність ряду на множині A

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n+x^2},\ A=\mathbb{R};$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n+x^2}},\ A=[0,+\infty).$

4. Довести, що якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збіжний, то *ряд Діріхле* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ збігається рівномірно на $x\in[0;+\infty)$.

5. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ збігається абсолютно й рівномірно на $[a,b]$. Чи обов'язково ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ збігається рівномірно на $[a,b]$?

6. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, члени якого є монотонними функціями на відрізку $[a,b]$, збігається абсолютно в кінцевих точках відрізка. Довести, що цей ряд збігається абсолютно й рівномірно на $[a,b]$.

7. Послідовності функцій $\{a_n(x),x\in A:n\geq 1\}$ і $\{b_n(x),x\in A:n\geq 1\}$ задовольняють умови:

1) $\forall n\geq 1\ \forall x\in A\ :\ |a_n(x)|\leq b_n(x);$

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ збігається рівномірно на A.

Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ збігається рівномірно на A.

Д1. Послідовності $\{a_n(x),x\in A:n\geq 1\}$ і $\{b_n(x),x\in A:n\geq 1\}$ задовольняють умови:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}(x)-a_n(x)|$ збігається рівномірно на A;

2) $\sup\limits_{x\in A}|a_n(x)|\to 0,\ n\to\infty;$

3) $\exists C>0\ \forall n\geq 1\ \forall x\in A\ :\ |\sum\limits_{k=1}^{n}b_k(x)|\leq C.$

Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ збігається рівномірно на A. Вивести з цього твердження ознаку Діріхле рівномірної збіжності.

Д2. Послідовності $\{a_n(x), x \in A : n \geq 1\}$ і $\{b_n(x), x \in A : n \geq 1\}$ задовольняють умови:

1) функція a_1 обмежена на A;
2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}(x) - a_n(x)|$ збігається поточково на A, причому $\sup\limits_{x \in A} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}(x) - a_n(x)| < +\infty$;
3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ збігається рівномірно на A.

Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ збігається рівномірно на A. Вивести з цього твердження ознаку Абеля рівномірної збіжності.

Д3. (*Теорема Діні*). Нехай $a_n : [\alpha, \beta] \to [0, +\infty),\ a_n \in C([\alpha, \beta]),\ n \geq 1.$ Припустимо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a(x),\ x \in [\alpha, \beta]$ збігається поточково на $[\alpha, \beta]$, причому $a \in C([\alpha, \beta])$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ збігається рівномірно на $[\alpha, \beta]$.

Б23

1. Довести рівномірну збіжність ряду на множині A:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{1 + n^4 x^2},\ A = [0, +\infty);$
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{1 - x^{2n}}}{2^n},\ A = [-1; 1];$
3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n!}(x^n - x^{-n}),\ A = \left[\dfrac{1}{2}; 1\right];$
4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx},\ A = [0, +\infty);$
5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1},\ A = [a, b],\ 0 < a < b;$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+n^2},\ A=\mathbb{R};$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+2^n},\ A=(-2;+\infty);$

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}),\ A=\left[\dfrac{1}{2};2\right].$

2. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{x+\sqrt{n}}$ збігається рівномірно на промені $[0,+\infty)$. Скільки членів ряду треба взяти, щоб його залишок на всьому промені $[0,+\infty)$ не перевищував $0,01$?

3. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ рівномірно збіжний на всій числовій прямій, а ряд з модулів його членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ хоча і збіжний на $\mathbb{R}$, але нерівномірно.

4. Дослідити ряди на рівномірну збіжність на вказаних множинах:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+\sin x},\ A=[0,2\pi];$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}},\ A=[-10,10];$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}},\ A=\mathbb{R}.$

5. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ рівномірно збігається на множині $[0,+\infty)$.

ЗАНЯТТЯ 24
ВЛАСТИВОСТІ РІВНОМІРНО ЗБІЖНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ

Контрольні запитання

1. *Теорема про неперервність суми функціонального ряду.*
2. *Теорема про почленне диференціювання функціонального ряду.*
3. *Теорема про почленне інтегрування функціонального ряду.*

A24

1. Дослідити на неперервність задані функції на вказаних множинах, якщо:

1) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n(n+1)},\ x \in \mathbb{R};$

2) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x + \dfrac{1}{n}\right)^n,\ A = (-1; 1);$

3) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n n^x},\ A = \mathbb{R}.$

2. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 1-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$. Чи можна для цього перейти до границі під знаком суми?

3. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}\right)$ збігається нерівномірно на відрізку $[0; 1]$, однак його сума неперервна на цьому відрізку.

4. Дослідити на диференційовність задані функції на вказаних множинах, якщо:

1) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^3},\ A = \mathbb{R};$

2) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x}{n+x},\ A = \mathbb{R}.$

5. Довести, що *тета-функція* $\theta(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ визначена і нескінченно диференційовна при $x > 0$.

6. За допомогою теореми про почленне інтегрування функціонального ряду довести рівності:

1) $\dfrac{x}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n,\ x\in(-1;1);$

2) $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,\ x\in(-1;1).$

7. Чи можна почленно інтегрувати ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}})$ на відрізку $[0;1]$?

Д1. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ при кожному $x\in\mathbb{R}$.

Вказівка. За допомогою почленного диференціювання по x знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-ny}\dfrac{\sin nx}{n}$ при $y>0$. Після цього перейти до границі при $y\to 0+$.

Д2. Знайшовши суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$ в околі точки 0, обчислити суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Д3. Користуючись почленним інтегруванням функціонального ряду, довести, що $\int\limits_0^1 x^{-x}dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^n}$.

Б24

1. Визначити область існування функцій і дослідити їх на неперервність:

1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x+n^{(-1)^n-1}}{x^2+n^2};$

2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{(1+x^2)^n}.$

2. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-(x-n)^2}$ рівномірно збігається на відрізку $[0;1]$ і його сума нескінченно диференційовна.

3. Переконатися, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2^n\pi x)}{2^n}$ рівномірно збіжний на $\mathbb{R}$. Показати, що цей ряд не можна почленно диференціювати на жодному проміжку.

4. Нехай $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{e^{-nx}}{1+n^2},\ x\geq 0$. Довести, що $f\in C([0,+\infty)), f\in C^{\infty}((0,+\infty))$ і що $f'(0)$ не існує.

5. Показати, що послідовність $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n,\ n \geq 1$ збігається рівномірно на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, але $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)|'_{x=1} \neq \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(1)$.

6. Показати, що послідовність $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\sin(nx + \frac{\pi}{2}),\ n \geq 1$ збігається рівномірно на $\mathbb{R}$, але $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \neq \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$.

7. Показати, що послідовність $f_n(x) = nxe^{-nx^2},\ n \geq 1$ збігається на відрізку $[0,1]$, але $\int\limits_0^1 \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx \neq \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx$.

8. Чи можна перейти до границі під знаком інтеграла у виразі $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx$?

9. Виходячи з рівності $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}$, визначити суму $s_n(x) = \frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{4x^4}{1+x^4} + ... + \frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}$. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}$ і знайти його суму.

ЗАНЯТТЯ 25
СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. РАДІУС ЗБІЖНОСТІ. ВЛАСТИВОСТІ СУМИ

Контрольні запитання

1. *Формули для радіуса збіжності степеневого ряду.*
2. *Теорема Коші – Адамара.*
3. *Теорема про рівномірну збіжність степеневого ряду.*

А25

1. Визначити радіус і множину збіжності степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2} x^n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}},\ a > 0$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right) x^n$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

2. Знайти множини збіжності рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin\frac{\pi}{2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$.

3. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ має радіус збіжності r.

1) Довести, що радіус збіжності кожного з рядів
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^n;\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^2+1) a_n x^n;\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+3} x^n;\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} a_n x^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$
також дорівнює r.

2) Нехай $r \in (0;+\infty)$. Знайти радіус збіжності рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} x^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

4. Визначити множину точок збіжності A і множину точок абсолютної збіжності B рядів. Чи збігаються вони рівномірно на множині C?

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},\ C=[-1;0]$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{x}\right)^n,\ C=A$.

Д1. Визначити радіус і множину збіжності степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5 ... (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 ... (2n)}\right)^p (\frac{x-1}{2})^n$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\frac{n}{e})^n x^n$.

Д2. Описати всі степеневі ряди, що рівномірно збігаються на $\mathbb{R}$.

Д3. Нехай $a_n \geq 0,\ n \geq 0$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a(x)$ збігається на інтервалі $(-r,r),\ r>0$ і існує границя $\lim\limits_{x\to r-} a(x)$. Довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$.

Д4. Навести приклад степеневого ряду, збіжного на $\mathbb{R}$, сума якого $f(x)$ задовольняє умови: 1) $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ |x^{-n} f(x)| \to +\infty,\ |x| \to +\infty$; 2) $\forall \alpha > 0\ :\ e^{-\alpha x} f(x) \to 0,\ |x| \to +\infty$.

Б25

1. Визначити радіус, множини абсолютної та умовної збіжності степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{n^2} x^n,\ 0 < a < 1;$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{a^n + b^n},\ a > 0, b > 0;$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\, x^n;$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n};$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}.$

2. Знайти множину збіжності узагальнених степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1} \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n;$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{3n}(n!)^2}{(3n)!} \operatorname{tg}^n x.$

3. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ має радіус збіжності $r,\ 0 < r < +\infty$. Визначити радіус збіжності рядів 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_n x^n;$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n a_n x^n.$

4. Визначити множину точок збіжності A і множину точок абсолютної збіжності B наступних рядів. Чи збігаються вони рівномірно на множині C?

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n}(3x-1)^n,\ C = \left[\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{3}\right);$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2^{n(1-x)}}{n},\ C = A.$

ЗАНЯТТЯ 26
РЯД ТЕЙЛОРА

Контрольні запитання

1. *Теорема про розклад функції в ряд Тейлора.*
2. *Основні розклади в ряд Тейлора – Маклорена.*

А26

1. Користуючись основними розкладами, розкласти у степеневий ряд відносно x функції:

1) $\sin^2 2x;$

2) $\sin^3 x;$

3) $\dfrac{1}{(1-x)^2};$

4) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}};$

5) $\dfrac{x}{x^2 - 5x + 6};$

6) $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)};$

7) $\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3},$ знайти похідну 1000-го порядку цієї функції в точці 0;

8) $\ln(1 + x + x^2 + x^3).$

2. Розклавши попередньо похідні, шляхом почленного інтегрування отримати розклади у степеневий ряд функцій:

1) $f(x) = \arcsin x$;
2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$;
3) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{2 - x^2}$;
4) $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2}$;
5) $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$.

3. Функцію $f(x) = \ln x$ розкласти за цілими додатними степенями дробу $\dfrac{x-1}{x+1}$.

4. Функцію $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ розкласти у степеневий ряд за цілими додатними степенями дробу $\dfrac{x}{1+x}$.

5. Чи можливо, що ряд Тейлора функції f відносно 0 розбігається всюди, крім самої точки 0, але функція розкладається у степеневий ряд у деякому околі точки 0?

Д1. Розкласти в ряд Тейлора відносно 0 функції $e^{e^x}, e^{\sin x}, e^{\cos x}, \ln(2 + e^x)$.

Д2. Нехай функції f, g розкладаються в ряд Тейлора в деякому околі точки 0.

1) Довести, що функції $f + g, f - g, f \cdot g$ також розкладаються в ряд Тейлора у деякому околі точки 0.

2) Довести те ж саме для функції $f(g)$, якщо $g(0) = 0$. Навести приклад, що показує, що умову $g(0) = 0$, узагалі кажучи, не можна відкинути.

3) Нехай $\min\left\{k \mid f^{(k)}(0) \neq 0\right\} \geq \min\left\{k \mid g^{(k)}(0) \neq 0\right\}$. Доозначимо функцію f/g у точці 0 за неперервністю. Довести, що її можна розкласти в ряд Тейлора у деякому околі точки 0.

Д3. Довести, що функція $f \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon)),\ \varepsilon > 0$ розкладається в ряд Тейлора в деякому околі точки 0 тоді й лише тоді, коли

$$\exists C > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (-\delta, \delta)\ \forall k \geq 0\ :\ |f^{(k)}(x)| \leq C \frac{k!}{\delta^k}.$$

Б26

1. Користуючись основними розкладами, розкласти в ряд за невід'ємними степенями x функції:

1) $\dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2}$;
2) $\dfrac{x}{1 + x - 2x^2}$;
3) $\dfrac{1+x}{(1-x^2)^2}$;
4) e^{-x^2};
5) $\cos^2 x$;
6) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$;
7) $\dfrac{1}{1 - 5x + 6x^2}$.

2. Розклавши попередньо похідні, шляхом почленного інтегрування отримати розклади у степеневий ряд функцій:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} x,$ знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1};$

2) $f(x) = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x;$

3) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$

3. Розкласти в ряд Тейлора в околі точки 1 функцію:

1) $(x+1)e^x;$ 2) $x(\ln x - 1).$

4. Функцію $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ розкласти у степеневий ряд за цілими від'ємними степенями змінної x.

ЗАНЯТТЯ 27
ДІЇ ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ РЯДАМИ.
РЯДИ В КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ

Контрольні запитання

1. *Теорема про почленне диференціювання степеневого ряду.*
2. *Теорема про почленне інтегрування степеневого ряду.*
3. *Означення збіжності ряду з комплексними членами.*
4. *Теорема Коші -- Адамара для степеневих ряду в комплексній площині.*

А27

1. Виконуючи дії зі степеневими рядами, розкласти у степеневі ряди функції:

1) $f(x) = \ln^2(1-x);$

2) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x};$

3) $f(x) = \int\limits_0^x \dfrac{\operatorname{arctg} t}{t} dt;$

4) $f(x) = \int\limits_0^x \dfrac{tdt}{\ln(1+t)}$ (виписати чотири члени).

2. Застосовуючи почленне диференціювання, обчислити суми рядів:

1) $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - ...;$

2) $1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + ...;$

3) $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+...$

Вказівка. Похідну ряду домножити на $1-x$.

3. Застосовуючи почленне інтегрування, обчислити суми рядів:

1) $x-4x^2+9x^3-16x^4+...;$
2) $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+...$.

4. За допомогою розкладу підінтегральних функцій у ряди обчислити з точністю до 0.001 інтеграли:

1) $\int\limits_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx;$ 2) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$

5. Визначити радіус і круг збіжності степеневих рядів у комплексній площині:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-i)^n}{n2^n};$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!z^n}{(1+i)(1+2i)...(1+ni)}.$
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}};$

6. Використовуючи ряди у комплексній площині, отримати розклади у степеневий ряд відносно x наступних функцій:

1) $\frac{1}{1+x+x^2};$ 3) $\frac{x\sin a}{1-2x\cos a+x^2}.$
2) $e^{x\cos a}\cos(x\sin a);$

Д1. Нехай P – поліном на комплексній площині, $P(0)\neq 0$. Довести, що функція $\frac{1}{P}$ розкладається в ряд Тейлора у крузі радіуса

$$R=\min\{|z|\mid P(z)=0\}.$$

Д2. Розкласти функцію $\frac{1}{1+z^2}$ у ряд Тейлора в комплексній площині: 1) в околі точки 0; 2) в околі точки $a>0$; 3) в околі точки $-a$. Знайти відповідні радіуси збіжності.

Б27

1. Виконуючи дії зі степеневими рядами, розкласти у степеневі ряди відносно x функції:

1) $f(x)=(1+x^2)\operatorname{arctg} x$;
2) $f(x)=(\operatorname{arctg} x)^2$;
3) $f(x)=\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$;
4) $f(x)=\int\limits_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

2. Виконуючи дії зі степеневими рядами, розкласти у ряд Тейлора в околі точки 1 функції:

1) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},\ x>0$;
2) $f(x)=\int\limits_1^x \dfrac{e^t-e}{t-1}dt$.

3. Нехай $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Розкласти в ряд Тейлора – Маклорена функцію $F(x)=\dfrac{f(x)}{1-x}$.

4. Застосовуючи почленне диференціювання, обчислити суму ряду

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots.$$

5. Застосовуючи почленне інтегрування, обчислити суму ряду

$$x+2x^2+3x^3+\ldots.$$

6. За допомогою розкладу підінтегральних функцій у ряди обчислити з точністю до 0.001 інтеграли:

1) $\int\limits_0^2 \dfrac{\sin x}{x}dx$;
2) $\int\limits_0^1 \cos x^2 dx$.

7. Чи збігаються ряди в комплексній площині:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(i-1)^n$;
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{2in}$;
3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}((\sqrt{2}-1)+(\pi-3)i)^n$?

8. Визначити радіус і круг збіжності степеневих рядів у комплексній площині:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-3+i)^n}{\sqrt{n}}$;
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$;
3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(1-e^{i\alpha})^n}$.

ЗАНЯТТЯ 28
КОНТРОЛЬНА РОБОТА. ЧИСЛОВІ І ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ І РЯД ТЕЙЛОРА

Завдання індивідуальні. Зразок варіанта

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n!)^2}{n^{2n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \sin\frac{1}{n}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{n}$.

3. Довести рівність: $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

4. Визначити множини абсолютної й умовної збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

5. Дослідити рівномірну збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^4 e^{-nx^2}$ на $\mathbb{R}$.

6. Визначити множину збіжності степеневого ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n}}{n^3 4^n}$.

7. Розкласти у степеневий ряд відносно x функцію $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$.

Розв'язки

1. а) Ряд знакосталий, бо $a_n = \ln \frac{n^2+1}{n^2} > 0,\ n \geq 1$. Застосуємо ознаку порівняння у формі еквівалентності. Оскільки $\ln(1+x) \sim x$, $x \to 0$, і $\frac{1}{n^2} \to 0,\ n \to \infty$, то $a_n = \ln \frac{n^2+1}{n^2} = \ln(1+\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n^2} = b_n,\ n \to \infty$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний як узагальнений гармонічний ряд з показником $\alpha = 2 > 1$. Тому за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.

б) Ряд знакосталий, бо $a_n = \frac{6^n (n!)^2}{n^{2n}} > 0,\ n \geq 1$. Оскільки у виразі для a_n присутній факторіал, зручно застосувати ознаку Д'Аламбера. Маємо: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6^{n+1}((n+1)!)^2 n^{2n}}{6^n (n!)^2 (n+1)^{2(n+1)}} = 6(n+1)^2 \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2(n+1)}} =$
$= 6(\frac{n}{n+1})^{2n} = 6\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-2} \to 6e^{-2} = r,\ n \to \infty$. Значення

$r = 6e^{-2} < 1$. Тому за ознакою Д'Аламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний.

в) Ряд знакосталий, бо $a_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)} \sin\dfrac{1}{n} > 0,\ n \geq 1$. Застосуємо спочатку ознаку порівняння у формі еквівалентності. Оскільки $\sin x \sim x,\ x \to 0,\ \frac{1}{n} \to 0,\ n \to \infty$, і $n \sim (n+1),\ n \to \infty$, то $a_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)} \sin\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{\ln(n+1)} \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = b_n$. Збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ еквівалентна збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Цей ряд зручно дослідити за інтегральною ознакою Маклорена – Коші. Уведемо функцію $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)},\ x \in [1, +\infty)$. Тоді $b_n = f(n),\ n \geq 1$, а функція f монотонно спадає на $[1, +\infty)$. Інтеграл

$$\int\limits_1^A f(x)dx = \int\limits_1^A \frac{1}{\ln(x+1)}\, d(\ln(x+1)) = \ln(\ln(x+1))|_{x=1}^{x=A} = \\ = \ln\ln(A+1) - \ln\ln 2 \to +\infty,\ A \to +\infty.$$

Тому за інтегральною ознакою ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – розбіжний. За ознакою порівняння розбіжним також є ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Ряд знакозмінний: $a_n = \dfrac{(-1)^n \ln^2 n}{n} < 0$ при непарних n і $a_n > 0$ при парних n. Застосуємо ознаку Лейбніца. $a_n = (-1)^n c_n$ і $c_n = \dfrac{\ln^2 n}{n} = \left(\dfrac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \to 0,\ n \to \infty$. Доведемо, що послідовність $\{c_n : n \geq 1\}$ монотонна, починаючи з деякого номера. Для цього розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x},\ x \in [1, +\infty)$. Маємо: $f'(x) = \dfrac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} = \dfrac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2} < 0,\ x > e^2$. Отже, функція f спадає на проміжку $[e^2, +\infty)$. Оскільки $c_n = f(n)$, то послідовність монотонна, починаючи з деякого номера n_0 ($n_0 = [e^2] + 1 = 8$). За ознакою Лейбніца ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ збіжний. Перевіримо абсолютну збіжність ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$. До ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n|$, який є знакосталим, застосуємо ознаку порівняння у формі нерівності. Маємо: $|a_n| = \dfrac{\ln^2 n}{n} \geq \dfrac{1}{n}, \ n \geq 3$. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ розбігається як гармонічний, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n|$ – також розбіжний. Відповідь: ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ збігається умовно.

3. 1 спосіб. Перемножимо ряди за Коші:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \frac{1}{(n-m)!} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} C_n^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(1+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Тут використано формулу бінома Ньютона $(a+b)^n = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m}$.

2 спосіб. Використовуючи розклад експоненти в ряд Тейлора – Маклорена $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \ x \in \mathbb{R}$, маємо, що $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = e, \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!} = e^2$. Тому рівність, яку треба довести, рівносильна очевидній рівності: $(e)^2 = e^2$.

4. Загальний член ряду $a_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}, \ n \geq 1$. Розглянемо такі випадки. 1) $x \in (-1;1)$. Тоді $|a_n(x)| \leq |x|^n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^n$ збіжний при $|x| < 1$ як геометричний. Тому за ознакою порівняння збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$, отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ – збіжний абсолютно. 2) $x \in (-\infty;-1) \cup$ $\cup\ (1;+\infty)$. Тоді $|a_n(x)| \leq \dfrac{|x^n|}{x^{2n}} = \dfrac{1}{|x|^n} = (\dfrac{1}{|x|})^n$. Аналогічно п.1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{|x|}\right)^n$ збігається як геометричний. Тому за ознакою порівняння збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$, отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ – збіжний абсолютно. 3) $x = \pm 1$. Тоді $|a_n(x)| = \dfrac{1}{2} \not\to 0, \ n \to \infty$, тобто не виконується необхідна умова збіжності ряду. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ – розбіжний.

Відповідь: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ збіжний абсолютно при $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1;1\}$ і розбіжний при $x = \pm 1$.

5. Загальний член ряду $a_n(x) = x^4 e^{-nx^2},\ x \in \mathbb{R}$. Застосуємо ознаку Вейєрштрасса. Для цього знайдемо найбільше значення функції a_n на $\mathbb{R}$. Маємо: $a_n'(x) = (4x^3 - 2nx^5)e^{-nx^2} = 0$ при $x = 0,\ x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. $a_n(0) = 0,\ a_n\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{4}{n^2}e^{-2}$. Тому $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |a_n(x)| = a_n\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) = $ $= \dfrac{2}{n^2}e^{-2} = b_n,\ n \geq 1$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається як узагальнений гармонічний ряд з показником $\alpha = 2 > 1$. Тому за ознакою Вейєрштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ збігається рівномірно на $\mathbb{R}$.

6. Нехай $b_n = \dfrac{1}{n^3 4^n}, y := (x-4)^2$. Тоді степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n y^n$ має радіус збіжності $r = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{b_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 4(\sqrt[n]{n})^3 = 4 \cdot 1^3 = 4$. Ряд збігається абсолютно при $y \in (-4;4)$ і розбігається при $|y| > 4$. У кінцевих точках $y = \pm 4$ маємо $|b_n y^n| = \dfrac{1}{n^3}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ збігається як узагальнений гармонічний ряд з показником $\alpha = 3 > 1$. Тому степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n y^n$ збігається абсолютно при $y \in [-4;4]$ і розбігається при $|y| > 4$. Отже, маємо, що при $(x-4)^2 \leq 4$, тобто при $x \in [2;6]$, заданий в умові ряд збігається абсолютно, а при $x \notin [2;6]$ – розбігається.

7. Користуючись розкладом у ряд Тейлора – Маклорена $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\ x \in (-1;1]$, маємо:

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-x^n}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(-1-(-1)^{n-1})\frac{x^n}{n} =$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\ x \in (-1;1).$$

ЗАНЯТТЯ 29
ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ

Контрольні запитання

1. *Означення функції обмеженої варіації.*
2. *Означення варіації.*
3. *Властивості варіації.*
4. *Розклад Жордана функції обмеженої варіації.*

A29

1. Довести, що функції мають обмежену варіацію та визначити $V(f,[a,b])$, якщо:

1) $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x\in[-1;1]\backslash\{0\};\end{cases}\quad a=-1,\ b=1,;$

2) $f(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ 1-x, & x\in(0;1)\\ 2, & x=1;\end{cases},\ a=0,\ b=1;$

3) $f(x)=|\sin x|,\ [a,b]=[0,n\pi],\ n\in\mathbb{N}.$

2. Довести, що функція $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ не має обмеженої варіації на $[0;1]$:

1) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q};\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \sin\frac{\pi}{x}, & x\in(0;1];\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ x\,\mathrm{sign}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right), & x\in(0;1].\end{cases}$

3. Нехай функція $f\in\mathbf{BV}([a,b]),\ g(x)=Af(x)+B,\ x\in[a,b]$. Довести, що $V(g,[a,b])=|A|V(f,[a,b])$.
4. Нехай функція $f\in C([a,b])$ така, що $|f|\in\mathbf{BV}([a,b])$. Довести, що $f\in\mathbf{BV}([a,b])$. Навести приклад, який показує, що умова неперервності в цьому твердженні істотна.

5. Нехай функція $\varphi \in C([a,b])$ і $f(x) := \int\limits_a^x \varphi(u)du,\ x \in [a,b]$. Довести, що $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ і $V(f,[a,b]) = \int\limits_a^b |\varphi(u)|du$.

6. Для функції $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ нехай $F(a) := 0;\ F(x) := V(f,[a,x]),\ x \in [a,b]$. Визначити функцію F, якщо

1) $f(x) = |x|,\ [a,b] = [-1,1]$;
2) $f(x) = \sin x,\ [a,b] = [0,2\pi]$;
3) $f(x) = x - |x|,\ [a,b] = [0,3]$.

7. Подати у вигляді різниці двох неспадних функцій такі функції:

1) $f(x) = x^2,\ x \in [-1;1]$;
2) $f(x) = x^3 - |x|,\ x \in [-1;1]$;
3) $f(x) = \cos x,\ x \in [0;2\pi]$.

Д1. Нехай $f \in \mathbf{BV}([a;b]) \cap C([a;b])$. Довести, що а) функція $V(f,[a,x])$ неперервна на $[a,b]$; б) функцію f можна подати у вигляді різниці двох неперервних і монотонно неспадних на відрізку $[a;b]$ функцій.

Д2. Довести, що функція обмеженої варіації може мати розриви лише першого роду, причому множина точок розриву не більш ніж злічення.

Д3. Нехай $f \in \mathbf{BV}([0;1])$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V\left(f;[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]\right)$ – збіжний.

Д4. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{x^\beta}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \beta > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Довести, що $V(f,[0,1]) = +\infty$ при $\alpha \le \beta$. При яких значеннях α, β функція $f \in \mathbf{BV}([0,1])$?

Б29

1. Довести, що функція $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & x \in (0,1], \end{cases}$ не має обмеженої варіації на $[0,1]$.

2. Довести, що функції мають обмежену варіацію та знайти $V(f,[a,b])$

1) $f(x) = \cos x,\ [a,b] = [0,2\pi]$;

2) $f(x)=\begin{cases}-x-1, & x\in[-1;0],\\ x-x^2, & x\in(0;1],\end{cases}\qquad [a;b]=[-1;1];$

3) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\in[0;1),\\ 5, & x=1,\\ x^2, & x\in(1;2],\end{cases}\qquad [a;b]=[0;2];$

4) $f(x)=\begin{cases}x^2\,\mathrm{sign}(\sin\frac{\pi}{x}), & x\in(0;1],\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad [a;b]=[0;1].$

3. Нехай $f\in\mathbf{BV}([a,b])$. Довести, що $|f|\in\mathbf{BV}([a,b])$.

4. Функція $f\in C^{(1)}([a,b])$. Довести, що $f\in\mathbf{BV}([a,b])$ і

$$V(f,[a,b])=\int\limits_a^b|f'(x)|\,dx.$$

5. Нехай функція $f\in\mathbf{BV}([a,b])$ і $F(x):=V(f,[a,x]),\ x\in[a,b]$. Визначити функцію F, якщо

1) $f(x)=|\sin x|,\ [a,b]=[0,2\pi];$
2) $f(x)=x-x^2,\ [a,b]=[-1,1].$

6. Подати у вигляді різниці двох неспадних функцій такі функції:

1) $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & 0<|x|\le 1;\end{cases}$
2) $f(x)=|x|,\ x\in[-2;1];$
3) $f(x)=\cos\frac{\pi x^3}{2},\ x\in[-1;1].$

ЗАНЯТТЯ 30
ІНТЕГРАЛ СТІЛТЬЄСА

Контрольні запитання

1. *Означення інтеграла Рімана – Стілтьєса.*
2. *Теорема про збіжність інтегральних сум до інтеграла Рімана -- Стілтьєса.*
3. *Класи інтегровних функцій.*
4. *Формули для обчислення інтеграла Рімана – Стілтьєса.*

А30

1. Обчислити наступні інтеграли Рімана – Стілтьєса як границі відповідних інтегральних сум:

1) $\int\limits_0^1 x^2\,d\alpha(x)$, якщо $\alpha(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 2, & 0<x<1,\\ 3, & x=1;\end{cases}$

2) $\int\limits_0^3 f(x)\,d\alpha(x)$, якщо $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0;1),\\ 1, & x\in[1;2),\\ x, & x\in[2;3],\end{cases}$ $\alpha(x)=\begin{cases}1, & x\in[0;1],\\ x, & x\in(1;2],\\ 2, & x\in(2;3].\end{cases}$

2. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{-1}^1 x\,d(\operatorname{arctg}x)$;

2) $\int\limits_{-1}^1 2^x\,d\alpha(x)$, якщо $\alpha(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1;0],\\ 1, & x\in(0;1];\end{cases}$

3) $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,d\alpha(x)$, якщо $\alpha(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{x+1}{2}, & x\in(0;\pi]\\ \dfrac{x^2}{2}, & x\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right],\\ 20, & x\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right];\end{cases}$

4) $\int\limits_0^{2\pi} \alpha(x)\,d(\sin x)$, для функції α з пункту 3).

3. Нехай одинична маса рівномірно розподілена на відрізку $[0;2]$, і у точках $x=1$ і $x=2$ додатково розміщені одиничні маси. Нехай $\alpha(x)$ – маса, що зосереджена на відрізку $[0;x]$. 1) Побудувати графік функції

$\alpha(x),\ x \in [0;2]$. 2) Обчислити масу відрізка $[x_1, x_2],\ 0 \le x_1 < x_2 \le 2$.
3) Обчислити інтеграли: $\int\limits_0^2 x d\alpha(x),\ \int\limits_0^2 (x+1)^2 d\alpha(x)$.

4. Нехай у точках $x_n = \dfrac{1}{n},\ n \ge 1$ зосереджені маси $m_n = \dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda}$, де $\lambda > 0$. Нехай $\alpha(x)$ – маса, що міститься на $[0; x],\ 0 \le x \le 1$. Обчислити інтеграли $\int\limits_0^1 d\alpha(x),\ \int\limits_0^1 x\, d\alpha(x)$.

5. Нехай $f \in C([a,b]),\ \alpha \in C([a,b])$ і монотонно не спадає на відрізку $[a; b]$. Покладемо $F(x) := \int\limits_a^x f(u)\, d\alpha(u),\ x \in [a,b]$. Довести, що $F \in C([a,b]) \cap \mathbf{BV}([a,b])$.

Д1. Навести приклад двох монотонно неспадних розривних на $[a; b]$ функцій α_1, α_2 таких, що: 1) інтеграл $\int\limits_a^b \alpha_1(x)\, d\alpha_2(x)$ існує; 2) інтеграл $\int\limits_a^b \alpha_1(x)\, d\alpha_2(x)$ не існує.

Б30

1. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^a x^2\, d(\ln(1+x)),\ a > 0;$ 2) $\int\limits_0^{2\pi} 2^x\, d(\mathrm{sign}(\cos x));$

3) $\int\limits_{-1}^1 (x^2+1)\, d\alpha(x)$, якщо $\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 0], \\ \mathrm{arctg}\, \dfrac{1}{x}, & x \in (0; 1]; \end{cases}$

4) $\int\limits_{-1}^1 \alpha(x)\, d(x^2+1)$, де α – функція з пункту 3).

2. Нехай у точках $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ числової прямої відповідно зосереджені маси $m_1, m_2, \ldots, m_n,\ a < x_1,\ b > x_n$. Нехай $\alpha(x)$ – маса, що міститься на відрізку $[a, x],\ x \in [a,b]$. Побудувати графік функції α. Обчислити інтеграли: 1) $\int\limits_a^b x\, d\alpha(x)$; 2) $\int\limits_a^b x^2\, d\alpha(x)$; 3) $\int\limits_a^b f(x) d\alpha(x)$, де $f \in C([a,b])$.

3. Нехай $f(x) = \alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0), \\ 1, & x \in [0; 1]. \end{cases}$ Довести, що f не належить класу $RS(\alpha, [-1; 1])$.

ВІДПОВІДІ

Б1

3. 1) $x-\frac{1}{x}-2\ln|x|+C$; 2) $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$; 3) $2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5}+$ $+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}+C$; 4) $x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$; 5) $\arcsin x+\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+C$; 6) $\frac{4^x}{\ln 4}+2\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$; 7) $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$; 8) $-x-\operatorname{ctg}x+C$. **4.** 1) $\frac{x^2|x|}{3}+C$; 2) $\frac{2x^2}{3}(x+|x|)+C$; 3) $\frac{x^3}{3}+C, |x|\le 1; x-\frac{2}{3}\operatorname{sign}x+$ $+C, |x|>1$; 4) $\cos x-2+C, x\le 0; -\cos x+C, x>0$. **5.** 1) C, $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$; $x-\frac{1}{3}+C, x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$; $2x-1+C, x\in\left[\frac{2}{3},1\right)$; $3x-$ $-2+C, x\in\left[1,\frac{4}{3}\right)$; $4x-\frac{10}{3}+C, x\in\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$; $5x-5+C, x\in\left[\frac{5}{3},2\right)$; 2) $x+C, x\le 1; -x+2+C, 1<x\le 2; x-2+C, x>2$; 3) $\frac{x^2}{2}+C$, $x\in(0,1)$, $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{2}+C$, $x\in[1,2)$, $\frac{(x-2)^2}{2}+1+C$, $x\in[2,3)$.

Б2

1. 1) $-\frac{2}{7}\sqrt{2-7x}+C$; 2) $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}+C$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}\right|+$ $+C$; 4) $-e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$; 5) $-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C$; 6) $-\frac{1}{2(x^2+1)}+C$; 7) $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+C$; 8) $-\frac{1}{2}\exp(-x^2)+C$; 9) $\ln(2+e^x)+C$; 10) $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+$ $+C$; 11) $-\ln|\cos x|+C$; 12) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$; 13) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+$ $+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 14) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C$; 15) $-\frac{1}{\arcsin x}+C$; 16) $-\frac{1}{15(x^5+1)^3}+C$; 17) $\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C$; 18) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$; 19) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$; 20) $\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+$ $+C$; 21) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+C$; 22) $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$; 23) $\operatorname{tg}x-$ $-\operatorname{ctg}x+C$; 24) $\frac{1}{4}\operatorname{ch}2x+C$. **2.** 1) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C$; 2) $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{3x+5}{3x-1}\right|+$ $+C$; 3) $\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right|+C$; 4) $\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}|+C$; 5) $\arcsin\frac{x+3}{4}+C$.

Б3

1. 1) $2\left(\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right)+C$; 2) $-\arcsin\dfrac{1}{|x|}+C$.

2. 1) $-\operatorname{ctg}(\ln x)+C$; 2) $\dfrac{2}{3}\left(\operatorname{arctg} e^x\right)^{\frac{3}{2}}+C$; 3) $\ln|\ln(\ln x)|+C$; 4) $\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\dfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$; 5) $-\sqrt{a^2-x^2}+a\arcsin\dfrac{x}{a}+$ $+C$. **4.** 1) $-\dfrac{3}{140}(9+12x+14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}}+C$; 2) $\dfrac{2}{3}(-2+\ln x)\sqrt{1+\ln x}+$ $+C$; 3) $\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C$; 4) $\dfrac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-$ $-\dfrac{(a-b)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})+C$.

Б4

1. 1) $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$; 2) $\dfrac{x^3}{3}\operatorname{arctg}4x-\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{1}{384}\ln\left(x^2+\dfrac{1}{16}\right)+$ $+C$; 3) $x\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}^2x+C$; 4) $-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}+$ $+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$; 5) $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\sin^2x}+\operatorname{ctg}x\right)+C$; 6) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x+$ $+\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)+C$. **2.** 1) $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2x-\dfrac{4}{3}\ln x+\dfrac{8}{9}\right)+C$; 2) $-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2+\right.$ $\left.+x+\dfrac{1}{2}\right)+C$; 3) $x\sin x+\cos x+C$; 4) $x\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; 5) $-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x+C$; 6) $\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}^2x-x\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+$ $+1)+C$; 7) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{4}\sin 2x-\dfrac{1}{8}\cos 2x+C$; 8) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$; 9) $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$; 10) $\dfrac{1}{2}(x^2-1)\ln\dfrac{x-1}{x+1}-x+C$; 11) $\dfrac{e^x}{x+1}+C$.

Б5

1. 1) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$; 2) $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+$ $+C$; 3) $\ln|(x-2)(x+5)|+C$; 4) $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+3x+\dfrac{1}{3}\ln|x-1|-\dfrac{16}{3}\ln|x+$ $+2|+C$; 5) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$; 6) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}+C$; 7) $\dfrac{1}{4}\ln|x+1|-\dfrac{1}{8}\ln(x^2+1)+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{4}\dfrac{x+1}{x^2+1}+C$.

2. 1) $\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{3}}+C$; 2) $\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}+C$; 3) $-\frac{1}{10}\operatorname{arctg}(x^5+$ $+1)-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}+C$; 4) $\frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2}+C$.

Б6

1. 1) $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$; 2) $\frac{3}{4}\ln\frac{\sqrt[3]{x^4}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})^3}-$ $-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{7}+C$; 3) $6t-3t^2-2t^3+\frac{3}{2}t^4+\frac{6}{5}t^5-\frac{6}{7}t^7+$ $+3\ln(1+t^2)-6\operatorname{arctg}t+C$, де $t=\sqrt[6]{x+1}$; 4) $\frac{n}{a-b}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}$, $a\neq b$, $\frac{1}{a-x}+C$, $a=b$; 5) $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$; 6) $\ln|x+0,5+$ $+\sqrt{x^2+x}|+C$; 7) $3\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\ln|x+0,5+\sqrt{x^2+x+1}|+C$; 8) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}+C$; 9) $\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{11}{8}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}}+$ $+C$; 10) $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C$; 11) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}+C$.

Б7

1. 1) $-\frac{3}{5}\cos^{\frac{5}{3}}x+\frac{3}{11}\cos^{\frac{11}{3}}x+C$; 2) $\frac{1}{\cos x}+\cos x+C$; 3) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C$; 4) $-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 5x}{5}+\cos x\right)+C$; 5) $\frac{1}{2(\cos x+1)}+$ $+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$; 6) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|+C$; 7) $-\frac{3}{4}\ln(\cos^2 x+\cos x+$ $+1)+\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\operatorname{arctg}\frac{2\cos x-1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{2\cos x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{4}\ln(\cos^2 x-\cos x+$ $+1)+C$; 8) $\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C$; 9) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x-$ $-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+3\ln|\operatorname{tg}x|+C$; 10) $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C$; 11) $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2ax}{8a}+\frac{\sin 2bx}{8b}+$ $+\frac{\sin(2(a-b)x)}{16(a-b)}+\frac{\sin(2(a+b)x)}{16(a+b)}+C$, $|a|\neq|b|$; 12) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+$ $+x+C$. **2.** 1) $I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$; $K_n=\frac{n-2}{n-1}K_{n-2}+$

$+\dfrac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}$, $n \geq 2$; $I_5 = -\dfrac{\cos x}{4\sin^4 x} - \dfrac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \dfrac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$; $K_7 = \dfrac{\sin x}{6\cos^6 x} + \dfrac{5\sin x}{24\cos^4 x} + \dfrac{5\sin x}{16\cos^2 x} + \dfrac{5}{16}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

Б8

1) $-\dfrac{1}{5}x^2\cos 5x + \dfrac{2}{25}x\sin 5x + \dfrac{2}{125}\cos 5x + C$; 2) $2e^t(t^5 - 5t^4 + 20t^3 - 60t^2 + 120t - 120) + C$, де $t = \sqrt{x}$; 3) $\dfrac{1}{2}e^x(x\sin x - x\cos x + \cos x) + C$; 4) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{4}\cos 2\sqrt{x} + C$; 5) $x + \dfrac{2}{1+e^x} + C$; 6) $\sqrt{e^{2x}+4e^x-1} + 2\ln\left(e^x + 2 + \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\right) - \arcsin\dfrac{2e^x-1}{e^x\sqrt{5}} + C$; 7) $-e^{-x} - \operatorname{li}(e^{-x}) + C$; 8) $\dfrac{e^x}{x+1} + C$; 9) $-\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \dfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1) + C$; 10) $\dfrac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + (x-0,5)\arcsin\sqrt{x} + C$; 11) $\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| + C$; 12) $-\dfrac{x}{8} + \dfrac{\operatorname{sh}4x}{32} + C$.

Б10

1. 1) $U(f,\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1}\exp(x_{k+1})\Delta x_k$, $L(f,\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1}\exp(x_k)\Delta x_k$; 2) $U(f,\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{x_k}\Delta x_k$, $L(f,\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{x_{k+1}}\Delta x_k$; 3) $U(f,\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1}x_{k+1}\Delta x_k$, $L(f,\lambda) = 0$. **2.** 1) $\int\limits_0^1 f(x)dx = e-1$; 2) $\int\limits_1^2 f(x)dx = \ln 2$; 3) верхній інтеграл дорівнює $\dfrac{1}{2}$, нижній інтеграл дорівнює 0.

Б11

2. Не існує. **4.** 1) $e-1$; 2) $\dfrac{3}{4}$; 3) $\ln 2$; 4) 1. **5.** 1) $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2}{1+x^2}dx$; 2) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(1+x)^2}$; 3) $\int\limits_0^1 xe^x dx$; 4) $\int\limits_0^1 x^2\sqrt[3]{1+x^3}dx$; 5) $\int\limits_0^1 \sin x dx$; 6) $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{1+x^2}$; 7) $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; 8) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}$.

Б12

1. 1) $\frac{45}{4}$; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) 2; 4) 5; 5) 4; 6) 4; 7) $6,5$; 8) $5-\sqrt{2}-\sqrt{3}$.
2. 1) $\arcsin\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{32}\left(12-7\sqrt[3]{4}\right)$; 3) $1-\cos 1$; 4) $\frac{\pi}{16}$; 5) $\ln(e+1)$; 6) 2. **4.** 1) $\ln x$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x+\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$. **5.** 1) 1; 2) 1. **6.** 1) $\frac{\pi}{2}<I<$ $<\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$; 2) $\frac{1}{e}<I<1$; 3) $\frac{1}{7\sqrt{2}}<I<\frac{1}{7}$.

Б13

1. $\frac{\pi}{2}-1$; 2) $\frac{\pi}{2}-1$; 3) $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$; 4) $10\ln 2-\frac{17}{4}$; 5) $\ln 2-\frac{1}{2}$; 6) $\pi^3-6\pi$; 7) $\frac{15}{256}-\frac{\ln 2}{64}$. **3.** 1) $\ln\frac{2(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{5}}$; 2) $\ln\frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}$; 3) $\frac{\pi a^4}{16}$; 4) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; 5) $\frac{\pi}{2\sqrt{a^2+1}}$. **4.** $\int\limits_{-1}^{0}\left(f(2\pi+\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)\right)\,dt+$ $+\int\limits_{0}^{1}\left(f(\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)\right)\,dt$.

Б14

1. 1) 4,5; 2) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$; 3) πab; 4) $ab\left(2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})\right)$; 5) $\frac{5}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}$.
2. 9. **3.** 1) $\frac{3\pi a^2}{2}$; 2) $\frac{\pi a^2}{4}$; 3) $a^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **4.** a^2. **5.** 1) $\frac{112}{27}$; 2) $\sqrt{6}+\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; 3) $\frac{670}{27}$; 4) $\frac{1}{2}\ln 3$. **6.** $\frac{670}{27}+10\sqrt{5}$. **7.** $2(e-1)$.
8. 1) $2a$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{2}+\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Б15

1. 1) 16π; 2) $\frac{2048\pi}{35}$; 3) 72π; 4) $\frac{\pi}{2}\left(e^4-1\right), 4\pi e^2$. **2.** $\frac{32}{105}\pi a^3$.
3. $\frac{16}{15}\pi ab^2$. **4.** 1) $\frac{2}{3}abc$; 2) $\frac{4}{3}\pi abc$. **5.** 2) $\frac{62\pi}{3}$; 3) $2\sqrt{\pi^2+4a^2}+$ $+\frac{8a^2}{\pi}\ln\frac{\pi+\sqrt{\pi^2+4a^2}}{2a}$. **6.** $\left(\pi a,\frac{4}{3}a\right)$. **7.** $\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4b}{3\pi}\right)$. **8.** $\left(0,\frac{2a}{\pi}\right)$ і $\left(0,\frac{4a}{3\pi}\right)$.

Б16

1. 1) $S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$; $S = 1$; $R_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$. 2) $S_n = \dfrac{5}{16} -$ $-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + +\dfrac{1}{(n+2)^2}\right)$; $S = \dfrac{5}{16}$; $R_n = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2}\right)$.
3) $S_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$; $S = \dfrac{1}{2}$; $R_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.
4) $S_n = \dfrac{1}{18}\left(\dfrac{73}{60} - \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} - \dfrac{1}{n+4} - \dfrac{1}{n+5} - \right.\right.$ $\left.\left.-\dfrac{1}{n+6}\right)\right)$; $S = \dfrac{73}{1080}$; $R_n = \dfrac{1}{18}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} - \dfrac{1}{n+4} - \right.$ $\left.-\dfrac{1}{n+5} - \dfrac{1}{n+6}\right)$. **5.** Ряд (C) може збігатися (напр., $a_n = -1$, $b_n = 1, c_n = 0$), може розбігатися (напр., $a_n = b_n = c_n = 1$). **6.** 1) Може збігатися (напр., $a_n = 1 + (-1)^n,\ b_n = 1 + (-1)^{n+1}$), може розбігатися (напр., $a_n = 1 + (-1)^n,\ b_n = a_n,\ n \geq 1$); 2) розбігається.

Б17

1. 1), 2), 5), 6) – розбігаються, 3), 4) – збігаються. **2.** 1) – 5),7),8),10) – 12) – збігаються, 6),9) - розбігаються. **3.** 1), 2) – збігаються, 3), 4) – збігаються при $p > 1$ та при $p = 1,\ q > 1$. **4.** Збігається при $p + q > 1$, розбігається при $p + q \leq 1$.

Б18

1. 1),3),8),10) – збігаються абсолютно, 4),5),6),7) – збігаються умовно, 2),9) – розбігаються. **2.** 1) Розбігається; 2) збігається. **3.** Збережеться.
4. 1) Збігається абсолютно при $p > 2$, збігається умовно при $1 < p \leq 2$; 2) збігається абсолютно при $p > 1$, збігається умовно при $\dfrac{1}{2} < p \leq 1$; 3),4) – збігаються умовно.

Б19

4. 1) Розбігається; 2) може збігатися (напр., $a_n = (-1)^n,\ b_n = (-1)^{n+1}$), може розбігатися (напр., $a_n = b_n = 1,\ n \geq 1$). **6.** 1) $P_n = \dfrac{2(n^2+3n+3)}{3(n+1)(n+2)}$;
2) $P_n = \dfrac{n+3}{3(n+1)}$; 3) $P_n = 2\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}\right)$; 4) $P_n = \left(2^n \sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)^{-1}$;
5) $P_n = \dfrac{2(n+1)}{n+2}$.

Б20

1. 1), 2) випливає. **2.** 1) Розбігається; 2), 4) – 6) збігається; 3) збігається при $a = c$, 7) збігається при $x \neq 0$. **4.** 1) – 3), 5) збігається умовно; 4) розбігається.

Б21

1. 2) $\alpha < 1$. **3.** Послідовності збіжні: 1) рівномірно до $f(x) = 0$, $x \in (0, +\infty)$; 2) рівномірно до $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$; 3) поточково, нерівномірно до $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$; 4) поточково, нерівномірно до $f(x) = 0$, $x \in (0, 1)$; 5) рівномірно до $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ x, & x \in (1, 2]. \end{cases}$

Б22

1. 1) Збіжний абсолютно при $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$; 2) збіжний абсолютно при $x \in (-1, 1)$; 3) збіжний абсолютно при $x \in (-1; 1)$;
4) збіжний абсолютно при $x \neq -1$; 5) при $p > 1$ збіжний абсолютно при $x > -1$, при $0 < p \leq 1$ збіжний умовно при $x > -1$, при $p \leq 0$ всюди розбіжний; 6) збіжний абсолютно, якщо $|x| < 1$ або $|y| < 1$; 7) збіжний абсолютно, якщо $|x| < 1$ і $|y| < 1$. **2.** Сума $S = 1$, залишок $r_n = (1-x)^n$. При $n \geq 7$. **3.** При $n \geq 25$. **4.** 1),3),4) – збіжний рівномірно; 2) збіжний поточково, нерівномірно.

Б23

2. $n \geq 10000$. **4.** 1),2),3) – збіжний рівномірно.

Б24

1. 1) Визначена і неперервна на $\mathbb{R}$; 2) визначена на $\mathbb{R}$, неперервна при $x \neq 0$. **8.** Так. **9.** $s_n = \dfrac{x}{1-x} - \dfrac{2^n x^{2^n}}{1 - x^{2^n}}$, $s = \dfrac{x}{1-x}$.

Б25

1. 1) $r = \infty$, збіжний абсолютно при $x \in \mathbb{R}$; 2) $r = \max\{a, b\}$, збіжний абсолютно при $x \in (-r, r)$; 3) $r = 1$, збіжний абсолютно при $x \in (-1; 1)$,

збіжний умовно при $x=-1$; 4) $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, збіжний абсолютно при $x\in(-r,r)$; 5) $r=1$, збіжний абсолютно при $x\in(-1;1)$.
2. 1) $x\in(0,+\infty)$; 2) $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **3.** 1) $\dfrac{r}{2}$; 2) 0.
4. 1) $A=\left[\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{2}\right),\ B=\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{2}\right)$. Так. 2) $A=B=[1,+\infty)$. Так.

Б26

1. 1) $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n+1},\ x\in(-1;1)$; 2) $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n,\ x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x^{2n-2}+x^{2n-1}),\ x\in(-1,1)$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{n!},\ x\in\mathbb{R}$. 5) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\ x\in\mathbb{R}$; 6) $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1},\ x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3^n-2^n)x^{n-1},\ x\in\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$. **2.** 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x\in[-1,1]$; $\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1},\ x\in(-1,1)$; 3) $1+\dfrac{x^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\dfrac{x^{2n+2}}{2n+1},\ x\in[-1;1]$. **3.** 1) $2e+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x-1)^k\dfrac{(k+2)e}{k!}$; 2) $-1+\sum\limits_{k=2}^{\infty}(-1)^k\dfrac{1}{k(k-1)}(x-1)^k$. **4.** $-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^k$.

Б27

1. 1) $x+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1},\ |x|\le 1$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}\right)\dfrac{x^{2n}}{n},\ |x|\le 1$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)},\ |x|<+\infty$; 4) $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1},\ |x|\le 1$. **2.** 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n,\ |x-1|<1$; 2) $e\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n\cdot n!},\ x\in\mathbb{R}$. **3.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\right)x^n$.
4. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x},\ |x|<1$. **5.** $\dfrac{x}{(1-x)^2},\ |x|<1$. **6.** 1) $1,605$; 2) $0,905$.
7. 1),2) – розбіжні; 3) збіжний. **8.** 1) $r=1$; 2) $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $r=|1-e^{i\alpha}|$.

Б29

2. 1) 4; 2) $\frac{5}{2}$; 3) 13; 4) $\frac{\pi^2}{3}$. **5.** 1) $F(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 2 - \sin x, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \\ 4 + \sin x, & x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]; \end{cases}$

2) $F(x) = \begin{cases} 2 + x - x^2, & x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right], \\ \frac{5}{2} - x + x^2, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$

6. $f = g - h$; 1) $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0), \\ 1, & x = 0, \\ 2, & x \in (0; 1]; \end{cases}$ $h(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1; 0), \\ 1, & x \in [0; 1]; \end{cases}$

2) $g(x) = x + 2;$ $h(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x \in [-2; 0), \\ 2, & x \in [0; 1]; \end{cases}$

3) $g(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x^3}{2}, & x \in [-1; 0), \\ 2 - \cos \frac{\pi x^3}{2}, & x \in (0; 1]; \end{cases}$

$h(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0], \\ 2 - 2\cos \frac{\pi x^3}{2}, & x \in (0; 1]. \end{cases}$

Б30

1. 1) $\frac{a^2}{2} - a + \ln(a+1);$ 2) $2(2^{\frac{3\pi}{2}} - 2^{\frac{\pi}{2}});$ 3) $\frac{\pi}{2} - 2;$ 4) 0.

2. 1) $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k;$ 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k^2;$ 3) $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k f(x_k).$

ПРОГРАМА КУРСУ "МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ" ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ "МАТЕМАТИКА" ТА "СТАТИСТИКА". I КУРС, 2 СЕМЕСТР

Лекцій – 68 годин
Практичних занять – 68 годин

I. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Первісна. Структура множини первісних. Невизначений інтеграл і його елементарні властивості. Інтеграли від елементарних функцій. Інтегрування частинами та за допомогою підстановки, приклади. Інтегрування раціональних функцій. Розклад на елементарні дроби. Інтегрування елементарних дробів. Інтегрування раціональних функцій від тригонометричних функцій. Інтегрування функцій, що містять ірраціональності.

II. ІНТЕГРАЛ РІМАНА. ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ

Задача обчислення площі криволінійної трапеції. Поняття, пов'язані з визначеним інтегралом: розбиття, діаметр розбиття, суми Дарбу, інтегральна сума; їх геометрична інтерпретація. Верхній і нижній інтеграли. Інтеграл Рімана та інтегровні функції. Властивості сум Дарбу, наслідок. Приклад неінтегровної функції. Коливання функції. Необхідна і достатня умова інтегровності. Інтегровність на відрізку функцій: неперервної, монотонної і обмеженої із скінченним числом точок розриву. Інтеграл як границя інтегральних сум. Теорема Дарбу. Властивості визначеного інтеграла: інтегровність суми, добутку й абсолютної величини інтегровних функцій; теореми про середнє значення та їх геометрична інтерпретація.

Інтеграл як функція верхньої межі інтегрування: умови неперервності й диференційовності. Теорема про існування первісної неперервної на відрізку функції. Формула Ньютона – Лейбніца, два доведення. Диференціювання інтеграла зі змінними межами. Формула інтегрування частинами, приклад. Формула Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі. Формула заміни змінної. Граничний перехід під знаком інтеграла.

Задача обчислення площі. Означення площі, квадровність, необхідна й достатня умова квадровності. Квадровність криволінійної трапеції і криволінійного сектора, приклади. Об'єм тіла обертання. Спрямні криві. Достатня умова спрямності й формула для обчислення. Площа поверхні обертання. Теореми Гульдіна.

III. ЧИСЛОВІ РЯДИ І ДОБУТКИ

Числові ряди. Часткові суми, сума ряду, збіжні й розбіжні ряди, необхідна умова збіжності. Приклади, зокрема, гармонічний і геометричний ряди. Елементарні властивості збіжних рядів. Критерій Коші збіжності числового ряду.

Умови збіжності ряду з невід'ємними членами. Лема. Ознаки порівняння. Приклади, означення сталої Ейлера. Ознаки збіжності рядів: Д'Аламбера, Коші, логарифмічна, Маклорена – Коші. Приклади застосування.

Ряд Лейбніца і його властивості. Абсолютна й умовна збіжність. Збіжність абсолютно збіжного ряду і нерівність для його суми. Умовно збіжні ряди й відповідні суми членів одного знаку. Ознака Лейбніца. Ознаки Діріхле та Абеля. Теорема Рімана. Множення рядів. Теорема про добуток рядів.

Нескінченні добутки. Основні поняття. Необхідна й достатня умова збіжності. Дві достатні умови. Абсолютна збіжність і перестановка співмножників.

IV. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Множина збіжності. Поточкова і рівномірна збіжність послідовності функцій. Приклади. Критерій Коші рівномірної збіжності. Рівномірна збіжність ряду. Приклади. Ознака Вейєрштрасса. Ознаки Діріхле та Абеля рівномірної збіжності і приклади їх застосування.

Інтегровність границі рівномірно збіжної послідовності інтегровних функцій. Неперервність границі рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій. Теореми про неперервність, про почленне інтегрування і диференціювання функціонального ряду, приклади застосування.

Степеневі ряди. Теорема Коші – Адамара. Приклади рядів з різними множинами збіжності. Рівномірна збіжність. Неперервність суми, теорема Абеля. Почленне інтегрування і диференціювання. Визначення коефіцієнтів через суму. Теорема про єдиність.

Ряд Тейлора. Достатня умова розкладу в ряд Тейлора. Ряд Тейлора для показникової і тригонометричних функцій. Біноміальний ряд.

Степеневі ряди з комплексними членами. Множина збіжності. Показникова функція в комплексній площині. Формули Ейлера.

V. ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ ТА ІНТЕГРАЛ СТІЛТЬЄСА

Властивості монотонних функцій. Розклад на неперервну частину і функцію стрибків. Функції обмеженої варіації, варіація. Варіація монотонної функції. Приклад функції з необмеженою варіацією. Теорема про адитивність варіації. Теорема Жордана. Необхідна й достатня умова спрямності кривої.

Суми Дарбу – Стілтьєса відносно монотонної функції, їх властивості. Означення інтеграла Рімана – Стілтьєса відносно монотонної функції. Необхідна і достатня умова інтегровності. Класи інтегровних функцій відносно монотонних функцій. Означення і властивості інтеграла Стілтьєса відносно функції обмеженої варіації. Нерівність для абсолютної величини інтеграла. Інтегрування частинами. Обчислення інтеграла Стілтьєса. Граничний перехід під знаком інтеграла Стілтьєса. Теорема Хеллі.

Навчальне видання
Навчальні завдання
до практичних занять з математичного аналізу
для студентів механіко–математичного факультету
(2 семестр першого курсу)

Упорядники ДЕНИСЬЄВСЬКИЙ Микола Олексійович
КУРЧЕНКО Олександр Олексійович
НАГОРНИЙ Володимир Никифорович
ЧАЙКОВСЬКИЙ Андрій Володимирович
НЕСТЕРЕНКО Олексій Никифорович

Редактор
Молодший редактор