Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
кафедра геометрії, топології і динамічних систем

Володимир Кіосак
Олександр Пришляк

РІМАНОВА ГЕОМЕТРІЯ

Київ–2017

УДК 514.765.1+512.813.4

В.Кіосак, О.Пришляк. **Ріманова геометрія. Навчальний посібник.** К.:, 2017. – 49 с.

Рецензенти:
С.І.Максименко, д-р фіз.-мат. наук,
А.П.Петравчук, д-р фіз.-мат. наук

Затверджено вченою радою
механіко-математичного факультету
20 березня 2017 року

Зміст

Вступ

Ріманова геометрія належить до класичних розділів математики, але це не заважає їй продовжувати успішно розвиватися і зараз. Тісно пов'язана з геометрією, теорією груп, топологією, інтегральною геометрією та іншими розділами математики, відповідаючи на питання, що ставить теорія відносності та механіка, ріманова геометрія не перестає привертати увагу дослідників і сьогодні.

Ріманову геометрію можна розглядати як узагальнення поняття внутрішньої геометрії поверхонь у тривимірних евклідових просторах. При цьому перша квадратична форма поверхні є однією з можливих ріманових або, більш загально, псевдоріманових структур на многовиді. Ці структури задаються симетричними додатновизначеними та невиродженими білінійними формами, відповідно. Застосування спеціальної системи координат, наприклад півгеодезичної, є одним з основних методів в теорії поверхонь, що значно спрощує основні формули і дозволяє описувати геометричні властивості поверхонь. Ця робота присвячена опису можливих презентацій метричного тензора псевдоріманового простору в спеціальних системах координат. Причому, нас не цікавить сама система координат, а лише вид метрики і тензорні ознаки, того щоб метричний тензор мав такий вигляд. Результати сучасних досліджень пропонується застосувати до метрик класичних просторів.

В кінці кожного розділу приводяться вправи, розв'язання яких допоможе оволодіти предметом.

§ 1. Основні геометричні об'єкти та псевдоріманові простори

Псевдорімановим простором V_n називають дійсний диференційований многовид X_n класу C^r, в якому існує поле двічі коваріантного симетричного неособливого тензору g_{ij}, який називають *метричним тензором* простору.

В кожній локальній системі координат X_n його *компоненти* це функції класу C^{r-1} від координат $x^1,\ x^2,\ \ldots, x^n$ деякої точки $M \in X_n$. Метричний тензор задовольняє умовам

$$g_{ij}(x^1,\ x^2,\ \ldots, x^n) = g_{ji}(x^1,\ x^2,\ \ldots, x^n) \tag{1.1}$$

$$g = det\,|g_{ij}(x)| \neq 0, \tag{1.2}$$

Тут і далі $i,\ j = 1, 2, \ldots, n$

Квадратична форма

$$I = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \tag{1.3}$$

називається *основною метричною формою* псевдоріманового простору.

Нагадаємо, що за одноіменними індексами діє правило Ейнштейна про сумування (знак суми не пишеться).

Для матриці метричного тензора g_{ij} визначають обернену матрицю, яку позначають g^{ij}:

$$g_{\alpha i} g^{\alpha j} = \delta_i^j. \tag{1.4}$$

Тут δ_i^j — символи Кронекера.

Використовуючи метричний тензор g_{ij} визначають:

символи Христофеля I роду

$$\Gamma_{ijk}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}(x)}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^k}\right), \tag{1.5}$$

символи Христофеля II роду

$$\Gamma_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij\alpha}(x) g^{\alpha h}(x), \tag{1.6}$$

тензор Рімана

$$R^h{}_{ijk} = \partial_j \Gamma_{ik}^h(x) + \Gamma_{ik}^\alpha(x)\Gamma_{j\alpha}^h(x) - \partial_k \Gamma_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^\alpha(x)\Gamma_{k\alpha}^h(x), \tag{1.7}$$

тензор кривини

$$R_{hijk}(x) = g_{h\alpha} R^\alpha_{\cdot\, ijk}, \tag{1.8}$$

тензор Річчі

$$R_{ij}(x) = R^{\alpha}_{\cdot\, ij\alpha}(x), \tag{1.9}$$

скалярну кривину

$$R(x) = g^{\alpha\beta}(x) R_{\alpha\beta}(x). \tag{1.10}$$

Тут і далі $h,\ k = 1, 2, \dots, n$.

Об'єкти, що визначаються через метричний тензор називають *внутрішніми об'єктами*, а геометричні властивості, які отримують при вивчені цих об'єктів, *внутрішньою геометрією* псевдоріманового простору V_n.

Для вивчення внутрішньої геометрії використовують слідуючі більш складні тензори:

тензор конциркулярної кривини

$$Z^{h}_{\cdot\, ijk} = R^{h}_{\cdot\, ijk} - \frac{R}{n(n-1)}(g_{ij}\delta^h_k - g_{ik}\delta^h_j), \tag{1.11}$$

тензор проективної кривини

$$W^{h}_{\cdot\, ijk} = R^{h}_{\cdot\, ijk} - \frac{1}{n-1}(R_{ij}\delta^h_k - R_{ik}\delta^h_j), \tag{1.12}$$

тензор конформної кривини

$$C^{h}_{\cdot\, ijk} = R^{h}_{\cdot\, ijk} + \delta^h_j P_{ik} - \delta^h_k P_{ij} + P^h_j g_{ik} - P^h_k g_{ij}, \tag{1.13}$$

де $P^h_j = P_{\alpha j} g^{\alpha h}$, а тензор P_{ij}, який має назву

тензор Брінкмана, визначається як

$$P_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(R_{ij} - \frac{1}{2(n-1)} R g_{ij}\right), \tag{1.14}$$

тензор Ейнштейна

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}, \tag{1.15}$$

тензор енергії-імпульса

$$T_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij}. \tag{1.16}$$

Рівність нулю визначених тензорів тягне за собою певні геометричні властивості псевдоріманових просторів, в яких це відбувається. Тому в залежності від того, які тензори обнуляються виділяють такі класи спеціальних псевдоріманових просторів:

$R_{ijkl} = 0$ — *плаский простір*,
$Y^h_{ijk} = 0$ — *простір сталої кривини*,
$W^h_{ijk} = 0$ — *проективно плаский простір*,
$C^h_{ijk} = 0$ — *конформно плаский простір*,
$R_{ij} = 0$ — *Річчі плаский простір*,

$E_{ij}=0$ — *простір Ейнштейна,*
$R=0$ — *простір сталої скалярної кривини.*

В псевдоріманових просторах визначають поняття коваріантної похідної. Коваріантну похідну будемо позначати комою. За визначенням коваріантною похідною тензора називають

$$\begin{aligned} S^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q,k} \;&=\; \partial_k S^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q} \;+\; \Gamma^{i_1}_{k\alpha} S^{\alpha i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q} \;+\ldots+ \\ +\;\; \Gamma^{i_p}_{k\alpha} S^{i_1i_2\ldots i_{p-1}\alpha}_{j_1j_2\ldots j_q} \;&-\; \Gamma^{\beta}_{kj_1} S^{i_1i_2\ldots i_p}_{\beta j_2\ldots j_q} \;-\ldots-\; \Gamma^{\beta}_{kj_q} S^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_{q-1}\beta} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Для коваріантної похідної виконуються *тотожності Річчі*

$$\begin{aligned} S^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q,kl} - S^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q,lk} \;&=\; -S^{\alpha i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q} R^{i_1}_{\cdot\,\alpha kl} \;-\ldots- \\ +\;\; S^{i_1i_2\ldots i_{p-1}\alpha}_{j_1j_2\ldots j_q} R^{i_p}_{\cdot\,\alpha kl} \;&+\; S^{i_1i_2\ldots i_p}_{\beta j_2\ldots j_q} R^{\beta}_{\cdot\, j_1kl} \;+\ldots-\; S^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_{q-1}\beta} R^{\beta}_{\cdot\, j_qkl} \end{aligned} \tag{1.18}$$

Якщо деякий тензор має декілька індексів одного й того ж роду, то з нього можна створити новий тензор симетричний чи кососиметричний. Це дозволяє визначити дві тензорні операції:
симетрування

$$a_{(ij)} = a_{ij} + a_{ji} \tag{1.19}$$

та *альтернування*

$$a_{[ij]} = a_{ij} - a_{ji}. \tag{1.20}$$

Звертаємо увагу, що ми застосовуємо ці операції без ділення.

Нижче ми приведемо приклади відомих псевдоріманових просторів, необхідність вивчення властивостей яких виникала, в основному, з потреб загальної теорії відносності.

1. *Простір Шварцшильда*

$$\begin{aligned} g_{44} = -g_{11}^{-1} = 1 + \frac{c}{x^1}, &\quad g_{22} = -{x^1}^2, \\ g_{33} = -{x^1}^2 sin^2 x^2, &\qquad g_{ij} = 0 \;\; (i \neq j) \end{aligned} \tag{1.21}$$

де c довільна стала

2. *Простір Котлера*, який узагальнює простір Шварцшильда.

$$g_{44} = -g_{11}^{-1} = 1 + \frac{a}{3}x^{1^2} + \frac{c}{x^1}, \quad g_{22} = -x^{1^2},$$
$$g_{33} = -x^{1^2} sin^2 x^2, \qquad g_{ij} = 0 \ (i \neq j) \tag{1.22}$$

де a, c довільні сталі.

3. *Простір Велю-Леві-Чівіти* характеризується такими компонентами метричного тензора

$$g_{44} = -g_{11}^{-1} = -g_{22}^{-1} = e^{\mu}, \ g_{33} = -e^{\nu-\mu}, \ g_{ij} = 0 \, (i \neq j), \tag{1.23}$$

де функції μ та ν залежать лише від двох змінних: x^3 та $\rho = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2}}$ задовольняють системі рівнянь:

$$f_1 \equiv \frac{\partial^2 \mu}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \partial_{33}\mu = 0,$$
$$f_2 \equiv \frac{\partial \nu}{d\rho} - \frac{\rho}{2}[(\frac{\partial \mu}{\partial \rho})^2 - (\partial_3 \mu)^2] = 0,$$
$$f_3 \equiv \partial_3 \nu - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\partial_3 \mu = 0,$$
$$\partial_3 f_2 - \frac{\partial f_3}{\partial \rho} = \rho f_1 \partial_3 \mu. \tag{1.24}$$

4. *Простір Баха*

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \alpha & \omega & 0 & 0 \\ \omega & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}. \tag{1.25}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega$ - залежать лише від x^3, x^4

5. *Простір Брінкмана*

$$ds^2 = f g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} + f^{-1} dx^{n^2} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{1.26}$$

причому

$$f = \frac{1}{n(n-1)}(Rx^{n^2} + 2ax^n + b).$$

6. *Простір Казнера*

$$ds^2 = x^{1^{2a_1}} dx^{1^2} + x^{1^{2a_2}} dx^{2^2} + x^{1^{2a_3}} dx^{3^2} + x^{1^{2a_4}} dx^{4^2}, \tag{1.27}$$

де

$$-a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1, \ \ -(a_1+1)^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 0.$$

7. *Простір Міттера*

$$dS^2 = -e^{\lambda} dz^2 - e^{\mu}(dr^2 + r^2 d\theta^2) + e^{\nu} dt^2 \tag{1.28}$$

8. *Простір Шоу*

$$ds^2 = u^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j \ \ (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.29}$$

де u та g_{ij} не залежать від t. Причому

$$\begin{gathered} \partial_{ij} u = \frac{64}{c+u^2}(\partial_i u \partial_j u - \frac{1}{3}\Delta_1 u g_{ij}), \\ \Delta_1 u = g^{ij} \partial_i u \partial_j u \end{gathered} \tag{1.30}$$

та $g_{ij} dx^i dx^j$ — метрика тривимірного конформно-плаского простору.

9. *Звідні простори*

$$\begin{gathered} 1)\ ds^2 = -ch^2 \frac{x^2}{a} dx^{1^2} - dx^{2^2} - cos^2 \frac{x^4}{a} dx^{3^2} + dx^{4^2} \\ 2)\ ds^2 = -ch^2 \frac{x^2}{a} dx^{1^2} - dx^{2^2} + ch^2 \frac{x^4}{a} dx^{3^2} - dx^{4^2} \end{gathered} \tag{1.31}$$

якщо $k = \dfrac{1}{a^2} > 0$ де k гаусова кривина поверхонь сталої кривини, на які розшаровується простір, та

$$3)\ ds^2 = -cos^2\frac{x^2}{a}dx^{1^2} - dx^{2^2} - ch^2\frac{x^4}{a}dx^{3^2} + dx^{4^2}$$

$$4)\ ds^2 = -cos^2\frac{x^2}{a}dx^{1^2} - dx^{2^2} + cos^2\frac{x^4}{a}dx^{3^2} - dx^{4^2}, \tag{1.32}$$

якщо гаусова кривина $k = -\frac{1}{a^2} < 0$.

10. *Взаємний простір Шварцшильда*

$$ds^2 = -\gamma^2(\gamma^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\varphi^2) + \rho^{-1}dt^2 \ \ (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.33}$$

де $\rho = 1 - \frac{2m}{r}$

11. *Простір де-Сітера*

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\sqrt{\frac{\chi}{3}}t}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{1.34}$$

12. *Простір Шоу-Казнера*

$$ds^2 = -z^{-1}dt^2 + zdz^2 + z^2(dr^2 + r^2d\varphi^2), \ \ r > 0 \tag{1.35}$$

13. *Простір Фрідмана*

$$ds^2 = \frac{R^2(t)}{c^2}\left[c^2R^{-2}(t)dt^2 - \frac{dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\varphi^2}{(1 + \frac{kr}{4})^2}\right] \tag{1.36}$$

де $R = R(t)$ довільна функція, $k = const$.

14. *Субпроективний простір Кагана основного типу*

$$ds^2 = e^{-2\mu(z^1)}(e_1dz^{1^2} + e_2dz^{2^2} + \ldots + e_ndz^{n^2}) \tag{1.37}$$

$$ds^2 = e^{-2\mu(z)}(e_1dz^{1^2} + \ldots + e_ndz^{n^2})$$

$$z = \sqrt{e_1z^{1^2} + \ldots + e_nz^{n^2}} \tag{1.38}$$

15. *Субпроективний простір Кагана виключного типу*

$$ds^2 = e^{-2\mu(z^1)}(2dz^1dz^2 + e_3dz^{3^2} + \ldots + e_ndz^{n^2}). \tag{1.39}$$

Вправи

Для наведених вище просторів обчисліть такі об'єкти:

1) елементи g^{ij} — матриці оберненої до матриці матричного тензора;
2) символи Христофеля I - роду — Γ_{hij};
3) символи Христофеля II-роду — Γ^h_{ij};
4) тензори Рімана — R^h_{ijk} та R_{hijk};
5) тензор Річчі — R_{ij};
6) скалярну кривину — R;
7) тензор Вейля — W^h_{ijk};
8) тензор конформної кривини — C^h_{ijk};
9) тензор конциркулярної кривини — Y^h_{ijk}.

§ 2. Звідні псевдоріманові простори

Псевдоріманів простір V_n з метричним тензором g_{ij} називають *локально звідним*, якщо в деякому околі кожної його точки M є можливість вибрати таку систему координат $y^1, y^2, \ldots, y^n$, відносно якої основна матрична форма має вигляд

$$I = g_{pq}(y^r)dy^p dy^q + g_{\sigma\mu}(y^\nu)dy^\sigma dy^\mu, \tag{2.1}$$

$$(p, q, r = 1, 2, \ldots, m;\ \ \sigma, \mu, \nu = m+1, m+2, \ldots, n).$$

Тут g_{pq} залежать лише від $y^1, y^2, \ldots, y^m$, а $g_{\sigma\mu}$ — тільки від $y^{m+1}, y^{m+2}, \ldots, y^n$.

В подальшому, локально звідні простори будемо називати просто *звідними*.

Таким чином, звідний псевдоріманів простір $V_n(g_{ij})$, згідно з означенням, є добутком двох псевдоріманових просторів $\overset{1}{V}_m(g_{pq})$ та $\overset{2}{V}_{n-m}(g_{\sigma\mu})$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{pq} & | & 0 \\ - & & - \\ 0 & | & g_{\sigma\mu} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Кожен із просторів $\overset{1}{V}_m$ та $\overset{2}{V}_{n-m}$ може в свою чергу зводитись чи ні, і тому формулу (2.1) можна записать у вигляді

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{r} ds_k^2 \ \ (r > 1),$$

де ds_k^2 — квадратична форма простору V_{m_k} $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n = n)$.

Для заданого псевдоріманового простору V_n число r може набувати різних значень. Максимальне значення r називають *мобільністю* псевдоріманового простору відносно зведення.

Псевдоріманів простір V_n звідний тоді і тільки тоді, коли в ньому існує симетричний тензор $a_{ij} \neq c g_{ij}$ (для деякого сталого c), що задовольняє умовам

$$a_{i\alpha} a_j^\alpha = a_{ij}; \tag{2.3}$$

$$a_{ij,k} = 0, \tag{2.4}$$

де $a_j^i = a_{\alpha j} g^{\alpha i}$.

Рівняння (2.3) та (2.4) це інваріантна (відносно вибору системи координат) умова, необхідна та достатня для того, щоб псевдоріманів простір V_n був звідним.

В такому вигляді її сформулював П.А Широков.

Тензор a_{ij}, що задовольняє умові (2.3), називають *ідемпотентним*, а умові (2.4) — коваріантно сталим.

Вимогу ідемпотентності можна замінити умовою того, щоб матриця тензора a_{ij} мала прості елементарні дільники та дійсні корені (це довів Г. Кручкович). В такому вигляді ознака наводиться в якості вправи в книзі Л.П. Ейзенхарта "Ріманова геометрія", але без вимоги існування дійсних коренів. Як легко переконатись, без цього ознака є помилковою.

Умови інтегрованості для рівняння (2.4) з урахуванням тотожності Річчі будуть

$$a_{\alpha i}R^{\alpha}_{jkl} + a_{\alpha j}R^{\alpha}_{ikl} = 0. \tag{2.5}$$

Циклюючи останнє по $(i,\ k,\ l)$, отримаємо

$$a_{\alpha i}R^{\alpha}_{jkl} + a_{\alpha k}R^{\alpha}_{jli} + a_{\alpha l}R^{\alpha}_{jik} = 0. \tag{2.6}$$

Згортаючи по індексам $(j,\ k)$, будемо мати

$$a_{\alpha i}R^{\alpha}_{l} - a_{\alpha l}R^{\alpha}_{i} = 0. \tag{2.7}$$

Тут

$$R^{i}_{j} = R_{\alpha j}g^{\alpha i}. \tag{2.8}$$

Про тензори a_{ij} та b_{ij}, для яких виконуються умови

$$a^{\alpha}_{i}b_{\alpha j} = a^{\alpha}_{j}b_{\alpha i}, \tag{2.9}$$

кажуть, що вони *комутують*.

Теорема 1. *В звідних псевдоріманових просторах V_n, існує ідемпотентний тензор, що комутує з тензором Річчі V_n.*

Псевдоріманів простір V_n називають пласким (або локально евклідовим), якщо в деякому околі точки M може бути вибрана точка системи координат $y^1, y^2, \ldots, y^n$, яку називають *декартовою*, відносно якої основна матрична форма простору має вид

$$I = e_1(dy^1)^2 + e_2(dy^2)^2 + \ldots + e_n(dy^n)^2, \tag{2.10}$$

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ дорівнюють плюс або мінус одиниці.

Тензорною ознакою, необхідною і достатньою умовою, того щоб простір був пласким є вимога

$$R_{hijk} = 0. \tag{2.11}$$

Пласкі простори, як видно з означення (2.10), є граничнимй випадком звідності. З іншого боку, диференціальні рівняння (2.4) для пласких просторів завжди мають розв'язок, оскільки умови інтегрування (2.5) з урахуванням (2.11) виконуються тотожно.

Кількість розв'язків для системи (2.4) дорівнює $\frac{(n+1)n}{2}$.

Система (2.5) є перевизначеною алгебраїчною системою. Розв'язки системи a_{ij}, які не виражаються через інші компоненти тензора або через внутрішні об'єкти простору V_n називають *суттєвими*.Отже, максимальну кількість суттєвих компонент тензора a_{ij} допускають пласкі простори. В подальшому, при вивченні питання про кількість суттєвих компонент тензора a_{ij}, ми обмежимося розглядом просторів відмінних від пласких.

Оцінимо кількість незалежних компонент симетричного, невиродженого тензора a_{ij}, що задовольняє рівнянню

$$a_{\alpha i}K^{\alpha}_{j} + a_{\alpha j}K^{\alpha}_{i} = 0. \tag{2.12}$$

Тут K^{h}_{j} – деякий афінор, незалежний від a_{ij}, крім того припускаємо, що він задовольняє умові

$$g_{\alpha i}K^{\alpha}_{j} + g_{\alpha j}K^{\alpha}_{i} = 0. \tag{2.13}$$

Умова (2.13) означає, що тензор $K_{ij} \overset{def}{=} K^{\alpha}_{j} g_{\alpha i}$ є кососиметричним.

Нехай r^* — число, рівне $3n-5$ для псевдоріманових просторів V_n, $n \neq 4, 6$, а у випадку $n=4$ або 6 рівне $3n-6$.

Доведемо таку теорему

Теорема 2. *Якщо ранг матриці* $\left\|K^{i}_{j}\right\|$ *більше двох, то серед компонент тензора* a_{ij} *не менше ніж* r^* *залежить від інших компонент тензора* a_{ij} *і афінора* K^{i}_{j}.

Доведення цієї теореми проводитимемо в деякій фіксованій точці $M(x^h) \in V_n$. Розглянемо лінійне невироджене перетворення координат в цій точці

$$y^h = A^{h}_{\alpha} x^{\alpha},$$

де $det \left\|A^{h}_{i}\right\| \neq 0$.

Тензори a_{ij} та K^{i}_{h} перетворяться згідно із законом

$$a^{`}_{ij} = a_{\alpha\beta}B^{\alpha}_{i}B^{\beta}_{j}; \qquad K^{`h}_{i} = K^{\alpha}_{\beta}B^{\beta}_{i}B^{h}_{\alpha},$$

тут $\left\|B^{h}_{i}\right\| \overset{def}{=} \left\|A^{h}_{i}\right\|^{-1}$.

Очевидно, що ранг тензора K^{h}_{i}, а також число залежних компонент тензора a_{ij} в рівнянні (2.12) є інваріантними відносно перетворення координат. Останнє вірно і у тому випадку, коли $\left\|A^{h}_{i}\right\|$ є комплекснозначною невиродженою матрицею.

Для подальших досліджень зводимо афінор K_h^i за допомогою невиродженого перетворення (випадок комплексного перетворення не виключається) до канонічної форми Жордана. У нашому дослідженні ми обмежимося спрощенішим записом цієї матриці:

$$K_i^h = \begin{pmatrix} \omega_1 & K_2^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & K_3^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \omega_{n-1} & K_n^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \omega_n \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

де $K_{\alpha+1}^{\alpha} = 0$ або 1.

Останнє можна записати так:

$$K_\alpha^\alpha = \omega_\alpha; \qquad K_\alpha^{\alpha+1} = 0,1; \qquad K_b^a = 0 \qquad \text{для} \qquad b \neq a,\ a+1.$$

Тут $a, b = 1, 2, \dots, n$. В цій формулі, як і в усій роботі, за однаковими індексами сумування не робиться.

Природно, що в загальному випадку власні числа ω_α матриці K_i^h можуть бути комплексними. Систему координат y, в якій K_i^h має форму Жордана, назвемо канонічною.

Рівняння системи (2.12) з фіксованими індексами i і j позначимо через Ω_{ij}, оскільки рівняння Ω_{ji} збігається з рівнянням Ω_{ij}, система (2.12) еквівалентна системі рівнянь

$$\Omega : \qquad \Omega_{ij} (i \leq j;\ \ i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Рівняння (2.12) в канонічній системі координат y мають таку форму:

$$\Omega_{ij}(i, j < n) : \ \ a_{ij}(\omega_i + \omega_j) + a_{i+1\,j} K_i^{i+1} + a_{ij+1} K_j^{j+1} = 0 \tag{2.15}$$

$$\Omega_{in}(i < n) : \ \ a_{in}(\omega_i + \omega_n) + a_{i+1\,n} K_j^{i+1} = 0 \tag{2.16}$$

$$\Omega_{nn} : \ \ a_{nn}(\omega_n + \omega_n) = 0 \tag{2.17}$$

Нагадаємо, що у рівняннях (2.15) і (2.16) правило Ейнштейна не застосовується. Заздалегідь доведемо наступні леми:

Лема 1. *Компоненти симетричного тензора a_{ij}, для яких $(\omega_i + \omega_j) \neq 0$, залежать від інших компонент тензора a_{ij} і афінора K_j^i.*

Доведення. Множина впорядкованих пар індексів (i, j), де $i \leq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, позначимо через I. Через I_1 і I^* позначимо підмножини I такі, що

$$(i, j) \in I_1 \Leftrightarrow (\omega_i + \omega_j) \neq 0 \qquad i \qquad I^* = I \backslash I_1.$$

Кількість елементів I_1 позначимо через q. Нижче доведемо, що q компонент a_{ij}, де $(i, j) \in I_1$, явно виражаються через інші компоненти тензора a_{ij} і афінора K_i^h.

Крок 1. З множини пар I_1 виберемо пару (i_1, j_1) таку, що індекси i_1 і j_1 є "максимальними". Коректніше:

$$i_1 = \max_{\forall (i,j) \in I_1} i \qquad i \qquad j_1 = \max_{\forall (i,j) \in I_1} j\ .$$

Тоді неважко бачити, що аналізом рівняння $\Omega_{i_1 j_1}$ (див. (2.15), (2.16), (2.17)) можна явно виразити компоненту $a_{i_1 j_1}$ через компоненти $a_{ij} \in I^*$, і K_i^h.

Крок 2. Далі позначимо через $I_2 \stackrel{def}{=} I_1 \backslash \{(i_1, j_1)\}$. Аналогічно, з множини пар I_2 виберемо "максимальну" пару (i_2, j_2):

$$i_2 = \max_{\forall (i,j) \in I_2} i \qquad i \qquad j_2 = \max_{\forall (i,j) \in I_2} j\ .$$

Тоді неважко бачити, що аналізом рівняння $\Omega_{i_2 j_2}$ (див. (2.15), (2.16)) можна явно виразити компоненту $a_{i_2 j_2}$ через компоненту $a_{i_1 j_1}$ і компоненти a_{ij}, $(i, j) \in I^*$ і K_i^h. Але тоді на підставі 1-го кроку маємо, що і $a_{i_2 j_2}$ виражається явно тільки через компоненти a_{ij}, $(i, j) \in I^*$ і K_i^h.

Процес продовжуємо аналогічно. Після q кроків переконаємося, що усі компоненти a_{ij}, для яких $(i, j) \in I_1$, виражаються тільки через компоненти a_{ij}, $(i, j) \in I^*$ і афінора K_i^h.

Лема доведена. □

На підставі леми 1 можемо довести так лему, що дозволяє довести теорему:

Лема 2. *Якщо число залежних компонент тензора a_{ij} не перевершує числа r^*, то серед чисел ω_i не більше двох відмінних від нуля.*

Доведення. Застосуємо метод від протилежного. Припустимо, що існує принаймні три ненульові числа ω_a, ω_b, ω_c (тут a, b, c — взаємно відмінні індекси; після перенумерації індексів, можна вважати $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$). Покажемо, що при цьому припущенні хоч би $3n-5$, а у випадку $n = 4, 6$ хоч би $3n-6$ компонент тензора a_{ij} залежить від інших компонент цього тензора і афінора K_i^h (це число ми позначили через r^*). Враховуючи лему 1, для цього досить, щоб серед елементів трикутної матриці ω:

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 + \omega_1 & \omega_1 + \omega_2 & \ldots & \omega_1 + \omega_n \\ 0 & \omega_2 + \omega_2 & \ldots & \omega_2 + \omega_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \omega_n + \omega_n \end{pmatrix}$$

знайшлося, принаймні, r^* ненульових елементів.

1. Спочатку розглянемо випадок, коли ненульові власні числа ω_1, ω_2, ω_3 задовольняють умові

$$|\omega_1| \neq |\omega_2| \neq |\omega_3| .$$

Тоді не дорівнюють нулю числа

$$\omega_1+\omega_1, \qquad \omega_1+\omega_2, \qquad \omega_1+\omega_3, \qquad \omega_2+\omega_2, \qquad \omega_2+\omega_3, \qquad \omega_3+\omega_3,$$

а для $a > 3$:

а) якщо $\omega_a = \pm\omega_1$, то не дорівнюють нулю

$$\omega_2+\omega_a; \qquad \omega_3+\omega_a; \qquad \omega_a+\omega_a;$$

б) якщо $\omega_a = \pm\omega_2$, то не дорівнюють нулю

$$\omega_1+\omega_a; \qquad \omega_3+\omega_a; \qquad \omega_a+\omega_a;$$

в) якщо $\omega_a = \pm\omega_3$, то не дорівнюють нулю

$$\omega_1+\omega_a; \qquad \omega_2+\omega_a; \qquad \omega_a+\omega_a;$$

г) якщо $\omega_a \neq \pm\omega_1, \pm\omega_2, \pm\omega_3$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1+\omega_a; \qquad \omega_2+\omega_a; \qquad \omega_3+\omega_a;$$

Звідси на підставі леми 1 маємо, що серед компонент a_{ij} принаймні $3n-3$ компонент залежних, що суперечить умові $r^* \geq 3n-3$.

2. Розглянемо випадок, коли ненульові власні числа ω_1, ω_2, ω_3 задовольняють умові

$$\omega_1 = -\omega_2, \qquad \omega_3 \neq \pm\omega_1 \qquad \text{і} \quad \text{для } \forall a > 3: \ \omega_a = \pm\omega_1, \pm\omega_3, 0.$$

Інше значення ω_a нас приводить до розгляду п. 1.

В цьому випадку не дорівнюють нулю числа

$$\omega_1+\omega_1, \qquad \omega_1+\omega_3, \qquad \omega_2+\omega_2, \qquad \omega_2+\omega_3, \qquad \omega_3+\omega_3,$$

а для $a > 3$:

а) якщо $\omega_a = 0$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a;$$

б) якщо $\omega_a = \omega_1$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a;$$

в) якщо $\omega_a = -\omega_1$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a;$$

г) якщо $\omega_a = \pm\omega_3$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a;$$

Звідси на підставі леми 1 маємо, що серед компонент a_{ij} принаймні $3n-4$ компонент залежних, що суперечить умові $r^* \geq 3n - 4$

3. Розглянемо випадок, коли ненульові власні числа ω_1, ω_2, ω_3 задовольняють умові

$$\omega_1 = \omega_2, \qquad \omega_3 \neq \pm\omega_1 \qquad i \qquad \forall a > 3: \ \omega_a = \omega_1, \pm\omega_3, 0.$$

Значення $\omega_a \neq \pm\omega_1, \pm\omega_2$, нас приводить до розгляду п. 1., а значення $\omega_a = -\omega_1$ — приводить до п. 2.

В цьому випадку не дорівнюють нулю числа

$$\omega_1 + \omega_1, \qquad \omega_2 + \omega_3, \qquad \omega_1 + \omega_3, \qquad \omega_2 + \omega_2, \qquad \omega_2 + \omega_3, \qquad \omega_3 + \omega_3,$$

а для $a > 3$:

а) якщо $\omega_a = 0$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a;$$

б) якщо $\omega_a = \omega_1, \pm\omega_3$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a;$$

Звідси на підставі леми 1 маємо, що серед компонент a_{ij} принаймні $3n - 3$ компонент залежних, що суперечить умові $r^* \geq 3n - 3$.

4. Очевидно, залишилося розглянути випадок, коли

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_k = -\omega_{k+1} = -\omega_{k+2} = \ldots = -\omega_{k+l} \neq 0,$$

$$\omega_{k+l+1} = \ldots = \omega_n = 0.$$

В цьому випадку кількість ненульових чисел $\omega_i + \omega_j$ $(i \leq j)$ рівна

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{l(l+1)}{2} + (k+l)(n-k-l).$$

Безпосереднім аналізом можна встановити:

а) коли

$$\left\{ \begin{array}{lll} n=4 & i & \omega_1 = \omega_2 = -\omega_3 = -\omega_4 \neq 0, \\ n=6 & i & \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = -\omega_4 = -\omega_5 = -\omega_6 \neq 0 \end{array} \right\},$$

то принаймні $3n-6$ компонент a_{ij} залежних, що узгоджується із твердженням леми.

б) у інших випадках, коли $k+l > 2$, серед компонент a_{ij} принаймні $3n-5$ компонент залежних, що також узгоджується із твердженням леми.

У результаті, нами розглянуті усі можливі випадки і, таким чином, лема 2 доведена. □

На підставі попередніх лем доведемо раніше сформульовану нами теорему.

Доведення. Досить показати, що, якщо число залежних компонент тензора a_{ij} менше або рівне $3n-5$ для $n \neq 4,6$ і $3n-6$ для $n = 4,6$, то матриця тензора K^i_j має не більше двох лінійно незалежних рядків.

Доведення проведемо методом від протилежного. Надалі припускатимемо, що в матриці K^i_j, зведеній до форми Жордана (2.14), принаймні, три ненульові рядки. Враховуючи лему 2 і можливість перестановки клітин Жордана, досить розглянути наступних сім випадків:

1). $\omega_1, \omega_2 \neq 0$, $\omega_a = 0$, для $a = \overline{3,n}$, $K^4_3 = 1$;

2). $\omega_1 \neq 0$, $\omega_a = 0$, для $a = \overline{2,n}$, $K^3_2 = K^4_3 = 1$;

3). $\omega_1 \neq 0$, $\omega_a = 0$, для $a = \overline{2,n}$, $K^3_2 = 1$, $K^4_3 = 0$, $K^5_4 = 1$;

4). $\omega_a = 0$, для $a = \overline{1,n}$, $K^2_1 = K^3_2 = K^4_3 = 1$;

5). $\omega_a = 0$, для $a = \overline{1,n}$, $K^2_1 = K^3_2 = 1$, $K^4_3 = 0$, $K^5_4 = 1$;

6). $\omega_a = 0$, для $a = \overline{1,n}$, $K^2_1 = 1$, $K^3_2 = 0$, $K^4_3 = K^5_4 = 1$;

7). $\omega_a = 0$, для $a = \overline{1,n}$, $K^2_1 = 1$, $K^3_2 = 0$, $K^4_3 = 1$, $K^5_4 = 0$, $K^6_5 = 1$.

Нехай $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0$, i $\omega_a = 0$, для усіх $a = \overline{3,n}$, i $K^4_3 = 1$, тоді матриця K^i_j має вигляд

$$K^i_j = \begin{pmatrix} \omega_1 & K^2_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K^4_3 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & K^n_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, що числа $\omega_1 + \omega_a$, $\omega_2 + \omega_a$ (для $\forall a > 2$) відмінні від нуля і, отже, через лему 1 компонент a_{1a} $(a \neq 2)$, a_{2a} $(a \neq 1)$ залежать від інших компонент матриці a_{ij}.

Поклавши в (2.15) $i = j = 3$, знаходимо, що $a_{34} = 0$. З (2.16) при $i = 3$ маємо, що $a_{4n} = 0$.

Формула (2.15) при $i = 3,\ j = s \neq 1, 2, 3, n$ набуває вигляд

$$a_{4s} + a_{3\,s+1} K^{s+1}_s = 0.$$

Після неважкого аналізу переконаємося, що серед компонент тензора a_{ij} не менше ніж $3n-4$ залежних. Саме ними є компоненти $a_{1a}(a = 1, 3, 4, \dots, n)$, $a_{2a}(a = 2, 3, 4, \dots, n)$ і $a_{4a}\,(a = 3, 4, \dots, n)$.

2) Розглянемо другий випадок. Оскільки $\omega_1 + \omega_a\,(a = \overline{1, n})$ не дорівнюють нулю, то на підставі леми 1 компоненти $a_{1a}(a = \overline{1, n})$ виражаються через інші компоненти матриці a_{ij}.

З (2.16) при $i = 2, 3,$, випливає $a_{3n} = a_{4n} = 0$.

Формула (2.15) при $i = 2,\ j = s\,(s = \overline{2, n-1})$, дає

$$a_{3s} = -a_{2\,s+1} K^{s+1}_s, \tag{2.18}$$

а при $i = 3,\ j = s\,(s = \overline{3, n-1})$ дає

$$a_{4s} = -a_{3\,s+1} K^{s+1}_s. \tag{2.19}$$

Отже, $a_{1a}\,(a = 1, 2, \dots, n)$, $a_{3a}\,(a = 2, 3, \dots, n)$ i $a_{4a}\,(a = 4, 5, \dots, n)$ залежать від інших компонент тензора a_{ij}, тобто серед компонент a_{ij} не менше ніж $3n-4$ залежних.

3) Третій випадок аналогічний другому. Легко бачити, що компоненти $a_{1a}\,(a = \overline{1, n})$, виражаються через інші компоненти матриці a_{ij}.

З (2.16) при $i = 2, 4$, випливає, $a_{3n} = a_{5n} = 0$.

Формула (2.15) при $i = 2,\ j = s\,(s = \overline{2, n-1})$ дає

$$a_{3s} = -a_{2\,s+1} K^{s+1}_s, \tag{2.20}$$

а при $i = 4,\ j = s\,(s = \overline{4, n-1})$ дає

$$a_{5s} = -a_{4\,s+1} K^{s+1}_s, \tag{2.21}$$

Отже, a_{1a} $(a = 1, 2, \ldots, n)$, a_{3a} $(a = 2, 3, \ldots, n)$ *і* a_{5a} $(a = 4, 5, \ldots, n)$ залежать від інших компонент тензора aij, тобто серед компонент aij не менше ніж $3n - 4$ залежних.

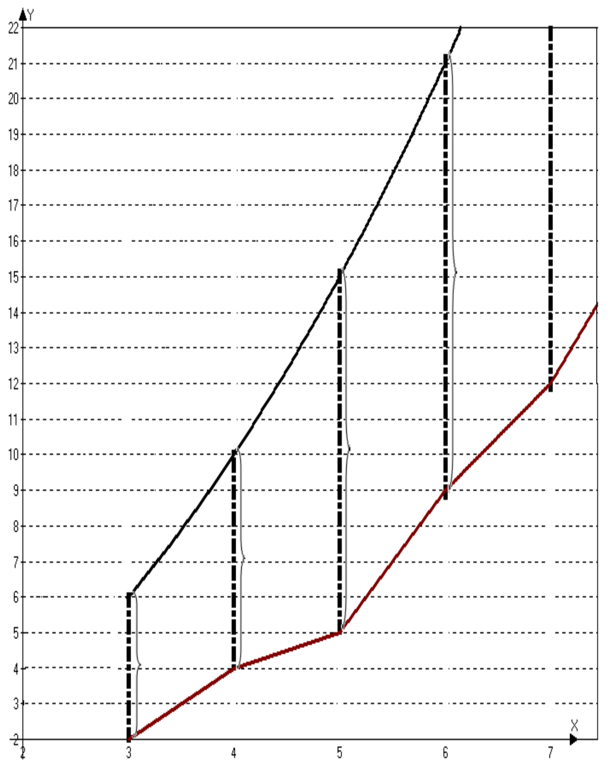
4, 5, 6 і 7 випадки подібним аналізом рівнянь (2.15) і (2.16) призводять до того, що серед компонент aij не менше ніж $3n - 5$ залежних. Обмежимося тільки розглядом рівнянь ((2.15) і (2.16), які призводять до такого висновку:

Випадок 4: при $i = 1, 2, 3$; випадок 5: при $i = 1, 2, 4$; випадок 6: при $i = 1, 3, 4$; випадок 7: при $i = 1, 3, 5$.

Таким чином, в усіх випадках нами отримано протиріччя, яке доводить справедливість теореми. □

Вивчивши в спеціальній системі координат кількість залежних компонент тензора a_{ij}, в відмінному від простору сталої кривини, псевдорімановому просторі нами доведена теорема, що має важливе значення для оцінки кількості суттєвих компонент коваріантно сталого тензора a_{ij}:

Кількість суттєвих компонент тензора a_{ij} в залежності від розмірності псевдоріманого простору V_n можна зобразити на схемі



Тут вісь X — це розмірність простору, вісь Y — кількість суттєвих компонент тензора a_{ij}, вертикальними пунктирними лініями відмічені лакуни (заборонені інтервали) в розподілі кількості суттєвих компонент.

Вправи

1. Для просторів із розділу 1, для яких обчислено внутрішні об'єкти, знайдіть коваріантно сталий двохвалентний тензор a_{ij} не пропорційний метричному, що задовольняє умовам (2.3), (2.4), користуючись рівнянням

$$a_{ij,k} = \partial_k a_{ij} - a_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{ik} - a_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{jk} = 0 \tag{2.22}$$

2. Виконайте те саме завдання користуючись тотожністю Річчі та розв'язуючи систему алгебраїчних рівнянь

$$a_{\alpha i}R^{\alpha}_{jkl} + a_{\alpha j}R^{\alpha}_{ikl} = 0 \tag{2.23}$$

3. Доведіть що для тензора a_{ij}, що задовольняє (2.3), (2.4), виконуються умови

$$a_{\alpha i}R^{\alpha}_{j} = a_{\alpha j}R^{\alpha}_{i} \tag{2.24}$$

4. Виконайте завдання (1.), використовуючи рівняння (2.24)

5. Доведіть, що для звідних просторів Ейнштейна тобто псевдоріманових просторів, в яких має місце $R_{ij} = \dfrac{R}{n}g_{ij}$, виконується рівняння

$$\frac{R}{n}a_{ij} = a_{\alpha\beta}R^{\alpha\ \beta}_{.ij.} \tag{2.25}$$

§ 3. Еквідістантні псевдоріманові простори

Псевдоріманів простір V_n з метричним тензором g_{ij} називається *еквідістантним*, якщо в ньому існує векторне поле $\varphi_i \neq 0$, що задовольняє рівнянням

$$\varphi_{i,j} = \tau g_{ij}, \tag{3.1}$$

де τ — деякий інваріант, а кома “,“ — знак коваріантної похідної в V_n . При $\tau \neq 0$ це — еквідістантний простір основного випадку, а при $\tau = 0$ — особливого [22].

Векторне поле, що задовольняє рівнянням (3.1), К. Яно називав *конциркулярним* [26]. Ми, слідуючи за Н.С. Сінюковим [22], називатимемо його *еквідістантним векторним полем.*

Умови інтегрованості основних рівнянь (3.1) мають вигляд

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = g_{ij}\tau_{,k} - g_{ik}\tau_{,j},$$

тут R^h_{ijk} — тензор Рімана V_n . З останнього неважко отримати

$$\tau_{,i} = \frac{1}{n-1}\varphi_\alpha R^\alpha_i. \tag{3.2}$$

де $R^h_i = g^{\alpha h}R_{\alpha i}$, R_{ij} — тензор Річчі, g^{ij} — елементи оберненої матриці до g_{ij}. Сукупність рівнянь (3.1) і (3.2) носить замкнутий характер. Вона є системою лінійних диференціальних рівнянь в коваріантних похідних першого порядку типу Коші з коефіцієнтами, однозначно визначеними простором V_n, відносно невідомого вектора φ_i і інваріанта τ.

Система рівнянь (3.1) і (3.2) в просторі V_n для будь-яких початкових значень шуканих функцій

$$\varphi_i(x_0) = \overset{o}{\varphi}_i; \qquad \tau(x_0) = \overset{o}{\tau},$$

заданих в точці $M_0(x_0)$, має не більше одного розв'язку. Отже, число довільних постійних в загальному розв'язкі системи не перевищує числа $\nu = n+1$.

Оскільки система (3.1) і (3.2) лінійна, то вона має не більше ніж ν лінійно незалежних розв'язків з постійними коефіцієнтами. Відомо, що $n+1$ лінійно незалежне еквідістантне векторне поле допускають простори сталої кривизни і тільки вони.

З умов інтегрованості (3.1) неважко отримати, що

$$\tau_{,k} = B\varphi_k, \tag{3.3}$$

тут B — деякий інваріант.

Доведемо наступну теорему:

Теорема 3. *Якщо псевдоріманoвий простір* V_n $(n > 2)$ *допускає принаймні два лінійно незалежних з сталими коефіцієнтами еквідістантних векторних поля, то в рівняннях (3.3) інваріант* B *— деяка стала, однозначно визначена для заданого простору* V_n.

Доведення. Нехай в V_n існують хоча б два лінійно незалежних з постійними коефіцієнтами еквідістантних векторних поля φ_i і $\tilde{\varphi}_i$. Тоді для них мають місце умови:

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = B(g_{ij}\varphi_k - g_{ik}\varphi_j), \tag{3.4}$$

$$\tilde{\varphi}_\alpha R^\alpha_{ijk} = \tilde{B}(g_{ij}\tilde{\varphi}_k - g_{ik}\tilde{\varphi}_j) \tag{3.5}$$

де B, $\tilde{B}$ — деякі інваріанти.

Помноживши (3.4) на $\tilde{\varphi}_k$ і згортаючи по k, з урахуванням (3.5), отримаємо

$$(B - \tilde{B})(g_{ij}\varphi_\alpha\tilde{\varphi}^\alpha - \tilde{\varphi}_i\varphi_j) = 0$$

Припустимо, що $B \neq \tilde{B}$, тоді

$$g_{ij}\varphi_\alpha\tilde{\varphi}^\alpha - \tilde{\varphi}_i\varphi_j = 0$$

З останнього видно, що: $\varphi_\alpha\tilde{\varphi}^\alpha = 0$ і $\tilde{\varphi}_i\varphi_j = 0$, а це суперечить нашому припущенню про те, що вектори ненульові. Отже, за необхідності має місце $B = \tilde{B}$.

Отже, інваріант B однозначно визначається для заданого V_n.

Коваріантно продиференціювавши (3.4), з урахуванням (3.1), отримаємо:

$$\tau R_{hijk} + \varphi_\alpha R^\alpha_{ijk,h} = (\varphi_k g_{ij} - \varphi_j g_{ik})B_{,h} + \tau B(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}) \tag{3.6}$$

Проциклюємо (3.6) по індексах h, j, k, а потім результат згорнемо з g^{ij}, будемо мати формулу

$$B_{,k}\varphi_h - B_{,h}\varphi_k = 0.$$

З останнього неважко переконатися, що

$$B_{,k} = \gamma\varphi_k, \tag{3.7}$$

де γ — деякий інваріант.

Аналогічна рівність має місце і для вектора $\tilde{\varphi}_k$:

$$B_{,k} = \tilde{\gamma}\tilde{\varphi}_k.$$

Тоді, порівнюючи останнє з (3.7), внаслідок того, що вектори φ_k і $\tilde{\varphi}_k$ неколінеарні, легко бачити, що $\tilde{\gamma} = \gamma = 0$. Отже, $B_{,k} = 0$ тобто $B - const$.

Отже, теорема 2 доведена.

□

Зауважимо, що наведена теорема аналогічна раніше доведеним результатам за деяких додаткових умов.

Теорема 4. *Не існує псевдоріманових просторів V_n, відмінних від просторів сталої кривини, що допускають більш ніж $n-2$ лінійно незалежних з сталими коефіцієнтами еквідістантних векторних полів.*

Доведення. Застосуємо методом від протилежного. Припустимо, що існує V_n відмінне від простору сталої кривини, що допускає більш ніж $(n-2)$ лінійно незалежних з сталими коефіцієнтами еквідістантних векторних полів. Це означає, що на компоненти вектора φ_i і інваріанта τ не повинні накладатися більш ніж 3 залежності.

Умови інтегрованості (3.1) запишемо у виді

$$\varphi_\alpha Z^\alpha_{ijk} = 0, \tag{3.8}$$

де $Z^\alpha_{ijk} \overset{def}{=} R^h_{ijk} - B(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik})$; δ^h_i — символи Кронекера.

Диференціюючи (3.8) і враховуючи (3.1), отримаємо

$$\tau Z_{hijk} + \varphi_\alpha Z^\alpha_{ijk,h} = 0.$$

Тут $Z_{hijk} = g_{\alpha h} Z^\alpha_{ijk}$.

Оскільки $Z_{hijk} \neq 0$, то аємо, що інваріант τ виражається через компоненти вектору φ_i і об'єкти, що визначаються метрикою V_n.

Тензор Z^h_{ijk} можна подати у виді

$$Z^h_{ijk} = \sum_{s=1}^{m} \underset{s}{b}{}^h \underset{s}{\Omega}{}_{ijk}, \tag{3.9}$$

де $\underset{s}{b}{}^h$ — лінійно незалежні вектори, а $\underset{s}{\Omega}{}_{ijk}$ — лінійно незалежні тензори. Оскільки V_n не є простором сталої кривини, то $m \geq 2$.

З умов (3.8), враховуючи представлення тензора (3.9), випливає:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \underset{1}{b}{}^\alpha &= 0 \\ \varphi_\alpha \underset{2}{b}{}^\alpha &= 0 \\ \dots \quad &\dots \quad \dots \\ \varphi_\alpha \underset{m}{b}{}^\alpha &= 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Внаслідок того, що $m \geq 2$, серед системи (3.10) знайдуться хоча б два істотні рівняння. Отже, на вектор φ_i і інваріант τ накладаються, принаймні, три залежності. А це суперечить припущенню.

Таким чином, теорема 4 доведена. □

Має місце

Теорема 5. *В псевдоріманових просторах* $V_n(n > 3)$ *, що допускають* $n-2$ *лінійно незалежних еквідистантних векторних поля і тільки в них, виконуються умови*

$$R_{hijk} = B(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}) + e(a_h b_i - a_i b_h)(a_j b_k - a_k b_j), \tag{3.11}$$

$$a_{i,\,j} = \overset{1}{\xi}_j a_i + \overset{2}{\xi}_j b_i + c_i a_j; \tag{3.12}$$

$$b_{i,\,j} = \overset{3}{\xi}_j a_i + \overset{4}{\xi}_j b_i + c_i b_j; \tag{3.13}$$

$$c_{i,\,j} = \overset{5}{\xi}_j a_i + \overset{6}{\xi}_j b_i + c_i c_j - B g_{ij}, \tag{3.14}$$

де a_i *і* b_i *— неколінеарні ортогональні вектори;* $c_i, \overset{s}{\xi}_j (s = 1, \ldots, 6)$ *— деякі вектори;* $e = \pm 1,\ B = const.$

Доведення. Необхідність. Нехай V_n $(n > 3)$ допускає $n-2$ лінійно незалежних еквідистантних векторних поля. Тоді має місце теорема 4, і можна використовувати хід її доведення. Аналізуючи систему рівнянь (3.10), легко бачити, що серед векторів $\underset{s}{b}^{i}$ існує не більше двох ненульових. Використовуючи те, що $Z^h_{ijk} \neq 0$, (3.9) і визначення тензора Z^h_{ijk} і його властивості, отримаємо умови (3.11):

Підставляючи (3.11) в (3.4), маємо:

$$\varphi^\alpha a_\alpha b_i - \varphi^\alpha b_\alpha a_i = 0.$$

Оскільки a_i і b_i – неколінеарні вектори, то звідси витікає

$$\varphi^\alpha a_\alpha = 0, \tag{3.15}$$

$$\varphi^\alpha b_\alpha = 0. \tag{3.16}$$

Коваріантно диференціюючи (3.15) з урахуванням рівнянь (3.1) отримаємо

$$\varphi^\alpha a_{\alpha,i} + \tau a_i = 0, \tag{3.17}$$

$$\varphi^\alpha b_{\alpha,i} + \tau b_i = 0. \tag{3.18}$$

Тензор a_{ij} можна подати у виді

$$a_{i,\,j} = c_i a_j + \sum_{s=1}^{m} \overset{s}{q}_i \overset{s}{\nu}_j \tag{3.19}$$

де a_j, $\overset{s}{\nu}_j$ $(s = 1, \ldots, m,\ m \leq n-1)$ — деякі неколінеарні вектори; c_i, $\overset{s}{q}_i$ — деякі вектори.

Підставляючи (3.19) в (3.17), неважко переконатися, що

$$(\varphi^\alpha c_\alpha + \tau)a_i + \sum_{s=1}^{m} \varphi^\alpha \overset{s}{q}_\alpha \overset{s}{\nu}_i = 0$$

З останнього випливає

$$\begin{gathered} \tau = -\varphi^\alpha c_\alpha, \\ \varphi^\alpha \overset{s}{q}_\alpha = 0. \end{gathered} \tag{3.20}$$

Але тоді, зважаючи на умови (3.15), (3.16), (3.20) і кількість $n-2$ незалежних еквідістантних векторів виходить, що усі вектори $\overset{s}{q}_i$ лінійно виражаються через вектори a_i і b_i. В цьому випадку формула (3.19) набуває вигляду (3.12). Аналогічно, можемо переконатися в справедливості формули (3.13).

Коваріантно продиференціюємо (3.20), на основі (3.1) і (3.3) можна записати результат таким чином:

$$\varphi^\alpha (c_{\alpha,i} + Bg_{\alpha i}) + \tau c_i = 0$$

Звідси, аналогічно, витікають формули (3.14). Отже, V_n є по необхідності простором, в якому виконуються умови (3.11), (3.12), (3.13), (3.14).

Достатність. Розглянемо в просторі V_n змішану систему диференціальних рівнянь (3.1) при додаткових умовах (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.15), (3.16) та (3.20).

Умови інтегрованості рівнянь (3.1) в таких просторах виконуються тотожно. Диференціальні продовження (3.20) також виконуються тотожно. Отже, система (3.1), (3.3) має в таких просторах розв'язки для усіх початкових значень $\overset{o}{\varphi}$, $\overset{o}{\tau}$, які задовольняють умовам (3.20).

Легко бачити, що для цих рівнянь в просторі V_n існує точно $n-2$ лінійно незалежних еквідістантних векторних полів.

Що і треба було довести.

□

Вправи

1. Покажіть, що псевдоріманів простір V_3, відмінний від простору сталої кривини, може допускати лише одне еквідістантне векторне поле.

2. Порівняйте символи Христофеля просторів

$$ds^2 = dx^1 + \rho(x_1) g_{\alpha\beta} dx^{\alpha^2} dx^{\beta^2};$$
$$\alpha, \beta = (2, 3)$$

та

$$ds^2 = g_{\gamma\eta} dx^{\gamma^2} dx^{\eta^2} + \rho(x^1, x^2) dx^{3^2};$$
$$\gamma, \eta = (1, 2).$$

3. Доведіть, що для просторів Ейнштейна, що допускають еквідістантні векторні поля виконуються умови

$$\varphi_\alpha Y^\alpha_{ijk} = 0,$$

тут Y^α_{ijk} — тензор конциркулярної кривини.

4. Доведіть, що, якщо еквідістантний вектор λ_i має стану довжину, тобто $\lambda_\alpha \lambda^\alpha = const$, то він коваріантно сталий вектор.

5. Доведіть, що в звідних псевдоріманових просторах еквідістантне векторне поле задовольняє умовам

$$\lambda_{i,\,jk} - \lambda_{i,\,kj} = 0.$$

6. Обчисліть тензор Річчі для простору

$$ds^2 = dx^{1^2} + \rho(x^1)(dx^{2^2} + \rho(x^2)(dx^{3^2} + dx^{4^2})).$$

7. Серед просторів, наведених в розділі 1, знайдіть ті, що допускають еквідістантне векторне поле.

§ 4. Півзвідні псевдоріманові простори V_n

Півзвідним розкладом метрики псевдоріманового простору V_n $(n > 2)$ називають її подання у вигляді

$$ds^2 = ds_1^2(x^1,\, x^2, \ldots,\, x^r) + \sigma(x^1,\, x^2, \ldots,\, x^r) ds_2^2(x^r,\, x^{r+1}, \ldots,\, x^n) \tag{4.1}$$

Тут ds_1^2 та ds_2^2 — самостійні метрики, що залежать від різних координат, а функція залежить лише від координат ds_1^2.

Простір V_n, що допускає хоча б один півзвідний розклад називають *півзвідним.*

Еквідістантні простори, що розглядались в попередньому параграфі, є одним з типів півзвідних просторів.

Інший граничний випадок півзвідної метрики

$$ds^2 = ds_1^2(x^1,\, x^2, \ldots,\, x^{n-1}) + \sigma(x^1,\, x^2, \ldots,\, x^{n-1})(dx^n)^2 \tag{4.2}$$

цікавий, як узагальнення статичної метрики в загальній теорії відносності.

Для того, щоб псевдоріманів простір V_n був півзвідним необхідно та достатньо, щоб у ньому існував симетричний ідемпотентний тензор, не пропорційний метричному, такий, що

$$b_{\alpha i} b_j^\alpha = b_{ij}, \tag{4.3}$$

$$b_{ij,k} = u_i b_{jk} + u_j b_{ik} \tag{4.4}$$

Тут $u_i = u_{,i} = \partial_i u$ — деякий градієнтний вектор.

Рівняння (4.3) та (4.4) називають тензорною ознакою півзвідних просторів.

Диференціюючи (4.3) з урахуванням (4.4), отримаємо

$$u_\alpha b_j^\alpha b_{ik} + u_\alpha b_i^\alpha b_{jk} = 0 \tag{4.5}$$

Альтернуючи за індексами $j,\ k$

$$u_\alpha b_j^\alpha b_{ik} - u_\alpha b_k^\alpha b_{ij} = 0 \tag{4.6}$$

Перепозначимо індекси i та k

$$u_\alpha b_j^\alpha b_{ki} - u_\alpha b_i^\alpha b_{kj} = 0 \tag{4.7}$$

Додаючи (4.7) та (4.5) переконаємось, що

$$u_\alpha b_j^\alpha = 0 \tag{4.8}$$

З останнього будемо мати

$$u_{\alpha,i} b^{\alpha}_{j} = -u_{\alpha} u^{\alpha} b_{ij} \tag{4.9}$$

Умови інтегрування (4.4), враховуючи тотожність Річчі, набудуть вигляду

$$\begin{gathered} b_{\alpha i} R^{\alpha}_{jkl} + b_{\alpha j} R^{\alpha}_{ikl} = (u_{l,i} - u_l u_i) b_{jk} + \\ +(u_{l,j} - u_l u_j) b_{ik} - (u_{k,i} - u_k u_i) b_{jl} - (u_{k,j} - u_k u_j) b_{il} \end{gathered} \tag{4.10}$$

Згортаючи (4.10) та підставляючи (4.8) і (4.9), отримаємо

$$\begin{gathered} (u_{l,i} - u_l u_i) b = (u_{\alpha,}{}^{\alpha} - u_{\alpha} u^{\alpha}) b_{il} + \\ + b_{\alpha i} R^{\alpha}_{l} - b_{\alpha\beta} R^{\alpha}_{.\,il\,.}{}^{\beta} \end{gathered} \tag{4.11}$$

Тут $b = b_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$, $u_{\alpha,}{}^{\alpha} = u_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta}$, $u^i = u_{\alpha} g^{\alpha i}$, $R^{h}{}_{il}{}^{j} = R^{h}{}_{il\beta} g^{\alpha j}$.

Таким чином, доведена

Теорема 6. *Вектор u_i в тензорній означі півзвідних просторів задовольняє умові* (4.8), (4.9), (4.11).

Крім того, згортаючи (4.4) за індексами i, j, з урахуванням (4.8) переконаємось, що

$$b_{,i} = 0 \tag{4.12}$$

Домножаючи (4.11) на b^i_j та згортаючи за i, з урахуванням теореми 6, отримаємо

$$0 = u_{\alpha,}{}^{\alpha} b_{ij} + b_{\alpha i} R^{\alpha}_{j} - b_{\alpha\beta} b^{\gamma}_{i} R^{\alpha}{}_{\gamma j}{}^{\beta} \tag{4.13}$$

Розглянемо псевдоріманів простір V_n сталої кривини, тобто простір в якому виконується умова

$$R_{hijk} = \frac{R}{n(n-1)} (g_{hk} g_{ij} - g_{hj} g_{ik}) \tag{4.14}$$

Підставляючи останнє в (4.13) , переконаємось, що

$$u_{\alpha,}{}^{\alpha} = \frac{R(b-n)}{n(n-1)} \tag{4.15}$$

Інваріант називають першим диференціальним параметром Бельтрамі і позначають $\Delta_1 u$.

Таким чином, доведена

Теорема 7. *В півзвідних псевдоріманових просторах V_n сталої кривини*

$$\Delta_1 u = const \tag{4.16}$$

З урахуванням (4.14), для просторів сталої кривини (4.12), можна записати в вигляді:

$$\begin{gathered}(u_{l,i} - u_l u_i)b = (u_{\alpha,}{}^{\alpha} - u_\alpha u^\alpha)b_{il} + \\ +\frac{R}{n}b_{\alpha i} - \frac{R}{n(n-1)}bg_{il} + \frac{R}{n(n-1)}b_{il}\end{gathered} \tag{4.17}$$

Виконаємо групування останнього та (4.15), що приведе до

$$\begin{gathered}(u_{l,i} - u_l u_i)b = \\ = b_{il}\left(\frac{R(b-n)}{n(n-1)} - u_\alpha u^\alpha + \frac{R}{n} + \frac{R}{n(n-1)}\right) - \\ -\frac{Rb}{n(n-1)}g_{il}\end{gathered} \tag{4.18}$$

або

$$\begin{gathered}(u_{l,i} - u_l u_i)b = \\ = \left(\frac{Rb}{n(n-1)} - u_\alpha u^\alpha\right) b_{il} - \frac{Rb}{n(n-1)}g_{il}\end{gathered} \tag{4.19}$$

Оскільки $b \neq 0$, то

$$\begin{gathered}u_{l,i} - u_l u_i = \\ = \left(\frac{R}{n(n-1)} - \frac{u_\alpha u^\alpha}{b}\right) b_{il} - \frac{R}{n(n-1)}g_{il}\end{gathered} \tag{4.20}$$

Зауважимо, що в правій частині рівняння (4.20) всі інваріанти — коваріантно сталі, тому

$$\begin{gathered}u_{l,\,ij} - u_{l,\,j}u_i - u_l u_{i,\,j} = -\frac{2}{b}u_{\alpha,\,j}u^\alpha b_{il} + \\ + \left(\frac{R}{n(n-1)} - \frac{u_\alpha u^\alpha}{b}\right) u_i b_{lj} + \left(\frac{R}{n(n-1)} - \frac{u_\alpha u^\alpha}{b}\right) u_l b_{ij}\end{gathered} \tag{4.21}$$

З урахуванням тотожності Річчі

$$
\begin{gathered}
u_\alpha R^\alpha_{lij} = \\
= u_i \left(u_{l,\,j} + \left(\frac{R}{n(n-1)} - \frac{u_\alpha u^\alpha}{b} \right) b_{lj} \right) - \\
-u_j \left(u_{l,i} + \left(\frac{R}{n(n-1)} - \frac{u_\alpha u^\alpha}{b} \right) b_{li} \right) - \\
-\frac{2}{b} u_{\alpha,\,j} u^\alpha b_{il} + \frac{2}{b} u_{\alpha,\,i} u^\alpha b_{jl}
\end{gathered}
\tag{4.22}
$$

Підставляючи (4.20) , (4.14) , переконаємось, що умови інтегрування рівнянь (4.11) для просторів сталої кривини виконуються тотожно.

Аналогічно можливо переконатись в тотожному виконанні для них рівнянь (4.10).

Таким чином, для просторів сталої кривини умови інтегрування тензорної ознаки півзвідності виконуються тотожно, це доводить, що всі простори сталої кривини є півзвідними.

Вправи

.

1. Наведіть приклад півзвідного псевдоріманового простору.

2. Знайдіть вид функції $\rho(x^1, x^2)$, якщо метрика простору Ейнштейна має вигляд
$$ds^2 = dx^{1^2} + dx^{2^2} + \rho(x^1, x^2)(dx^{3^2} + dx^{4^2}).$$

3. Який вигляд має тензор A^h_{ijk}, якщо
$$b_{\alpha i} A^\alpha_{jkl} + b_{\alpha j} A^\alpha_{ikl} = 0,$$
тут b_{ij} — тензор, що задовольняє умовам (4.3), (4.4).

4. Доведіть що в півзвідних просторах існує тензор a_{ij}, такий, що
$$a_{ij,k} - a_{ik,j} = 0.$$

5. Доведіть, що в півзвідних просторах існує тензор c_{ij}, такий, що
$$c_{ij,k} + c_{jk,i} + c_{ki,j} = 0.$$

§ 5. Конформно-звідні псевдоріманові простори

Конформним відображенням називають взаємно однозначну відповідність між точками псевдоріманових просторів V_n та $\bar{V}_n$ таку, що

$$\bar{g}_{ij}(x) = e^{2\sigma(x)} g_{ij}(x), \tag{5.1}$$

де σ – деяка функція.

Якщо σ – стала, то відображення називають *гомотетією*. Далі ми обмежимося розглядом відображень відмінних від гомотетичних. Із (5.1) отримаємо:

$$\bar{g}^{ij} = e^{-2\sigma} g^{ij} \tag{5.2}$$

$$\bar{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \delta^h_i \sigma_j + \delta^h_j \sigma_i - \sigma^h g_{ij} \tag{5.3}$$

$$\begin{gathered} \bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_k \sigma_{ij} - \delta^h_j \sigma_{ik} + g^{h\alpha}(\sigma_{\alpha k} g_{ij} - \sigma_{\alpha j} g_{ik} + \\ + \Delta_1 \sigma (\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}) \end{gathered} \tag{5.4}$$

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-2)\sigma_{ij} + (\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma) g_{ij} \tag{5.5}$$

$$\bar{R} = e^{-2\sigma}(R + 2(n-1)\Delta_2 \sigma + (n-1)(n-2)\Delta_1 \sigma) \tag{5.6}$$

Тут $\bar{\Gamma}^h_{ij}$ — символи Христофеля другого роду, R^h_{ijk} — тензор Рімана, δ^h_i — символи Кронекера, $R_{ij} \overset{def}{=} R^\alpha_{ij\alpha}$; $R \overset{def}{=} R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ — скалярна кривина, $\sigma_i \equiv \dfrac{\partial \sigma}{\partial x^i} \equiv \sigma_{,i}$; $\sigma^h = \sigma_\alpha g^{\alpha h}$.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{,ij} - \sigma_{,i} \sigma_{,j} \tag{5.7}$$

$\Delta_1 \sigma$ та $\Delta_2 \sigma$ — перший та другий параметри Бельтрамі, що визначаються як

$$\Delta_1 \sigma = g^{\alpha\beta} \sigma_{,\alpha} \sigma_{,\beta}; \;\; \Delta_2 \sigma = g^{\alpha\beta} \sigma_{,\alpha\beta}. \tag{5.8}$$

Об'єкти конформно відповідного даному псевдоріманового простору $\bar{V}_n$ будемо позначати рискою.

Розглянемо конформно-звідні псевдоріманові простори.

Простір V_n називають *конформно-звідним*, якщо його метрика в деякій голономній системі координат має вигляд

$$ds^2 = \sigma^2 \sum_{k=1}^{r} ds_k^2, \tag{5.9}$$

де ds_k^2 визначається як квадратична форма простору V_{m_k} $(m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n)$, $r > 1$, а $\sigma = \sigma(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — деякий інваріант. Для пошуку тензорної ознаки конформно-звідних просторів, розглянемо два випадки.

Перший випадок, коли $r = 2$, тобто

$$ds^2 = \sigma^2 (ds_1^2 + ds_2^2), \tag{5.10}$$

тут

$$\begin{gathered} ds_1^2 = g_{i_1 j_1}(x^1, x^2, \ldots, x^p) dx^{i_1} dx^{j_1} \ \ (i_1, j_1 = 1, 2, \ldots, p) \\ ds_2^2 = g_{i_2 j_2}(x^{p+1}, x^{p+2}, \ldots, x^n) dx^{i_2} dx^{j_2} \ \ (i_2, j_2 = p+1, p+2, \ldots, n) \end{gathered} \tag{5.11}$$

Цей випадок називають *основним типом*.

Для того, щоб псевдоріманів простір був конформно-звідним основного типу необхідно і достатньо, щоб в ньому існував симетричний (непропорційний метричному) тензор c_{ij}, що разом з деяким інваріантом σ задовольняє умовам

$$c_{i\alpha} c_j^\alpha = c_{ij} \tag{5.12}$$

$$c_{ij,k} = -(\sigma_i c_{jk} + \sigma_j c_{ik}) + \sigma_\alpha (c_i^\alpha g_{jk} + c_j^\alpha g_{ik}) \tag{5.13}$$

де $\sigma_i = \partial_i \sigma$; $c_j^i = g^{\alpha i} c_{\alpha j}$.

Умови інтегрування рівнянь (5.13) з урахуванням тотожності Річчі мають вигляд

$$\begin{gathered} c_{i\alpha} R^\alpha_{jkl} + c_{j\alpha} R^\alpha_{ikl} = \sigma_{jk} c_{li} - \sigma_{jl} c_{ki} + \sigma_{ik} c_{lj} - \sigma_{il} c_{kj} + \\ + \sigma_{\alpha l}(g_{ik} c_j^\alpha + g_{jk} c_i^\alpha) - \sigma_{\alpha k}(g_{il} c_j^\alpha + g_{jl} c_i^\alpha) + \\ + \Delta_1 \sigma (g_{jl} c_{ik} - g_{jk} c_{il} + g_{il} c_{jk} - g_{ik} c_{jl}) \end{gathered} \tag{5.14}$$

Псевдоріманів простір V_n буде конформно-звідним *спеціального типу*, коли його метрика може бути подана у вигляді

$$ds^2 = \sigma^2(e_1 dx^{1^2} + g_{ij}dx^i dx^j), \tag{5.15}$$

де $e_1 = \pm 1$, $g_{ij} = g_{ij}(x^2, x^3, \ldots, x^n)$, $i, j = 2, 3, \ldots, n$.

Для того, щоб V_n було конформно-звідним спеціального типу необхідно і достатньо, щоб в ньому існувало неізотропне векторне поле c_i, яке разом з інваріантом σ задовольняє умові

$$c_{i,\,j} = -(c_i\sigma_j + c_j\sigma_i) + c^\alpha \sigma_\alpha g_{ij}, \tag{5.16}$$

тут як і раніше $\sigma_i = \partial_i ln\sigma$; $c^i = g^{\alpha i}c_\alpha$.

Умови інтегрування останнього рівняння мають вигляд

$$\begin{gathered} c_\alpha R^\alpha_{ijk} = c_k\sigma_{ij} - c_j\sigma_{ik} + c^\alpha(g_{ij}\sigma_{\alpha k} - g_{ik}\sigma_{\alpha j}) + \\ +\Delta_1\sigma(c_j g_{ik} - c_k g_{ij}) \end{gathered} \tag{5.17}$$

Якщо псевдоріманів простір V_n допускає конформні відображення на плаский простір, то його називають *конформно-пласким.*

Такий простір характеризується умовами

$$R_{hijk} = P_{hk}g_{ij} - P_{hj}g_{ik} + P_{ij}g_{hk} - P_{ik}g_{hj}; \tag{5.18}$$

$$P_{ij,k} - P_{ik,j} = 0 \tag{5.19}$$

тут

$$P_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(R_{ij} - \frac{1}{2(n-1)}Rg_{ij}\right). \tag{5.20}$$

Умови (5.18) та (5.19) це необхідні та достатні умови того, щоб псевдоріманів простір V_n був конформно-пласким.

Зауважимо, що умові (5.18) задовольняють всі тривимірні псевдоріманові простори.

Конформно-пласкі простори належать до класу конформно звідних псевдоріманових просторів.

Розглянемо тензорну ознаку конформної звідності для конформно-пласких просторів, для цього підставимо (5.18) в (5.14), отримаємо

$$\underset{1}{\Omega}_{il}g_{jk} - \underset{1}{\Omega}_{ik}g_{jl} + \underset{1}{\Omega}_{jl}g_{ik} - \underset{1}{\Omega}_{jk}g_{il} +$$
$$+ \underset{2}{\Omega}_{il}c_{jk} - \underset{2}{\Omega}_{ik}c_{jl} + \underset{2}{\Omega}_{jl}c_{ik} - \underset{2}{\Omega}_{jk}c_{il} = 0, \tag{5.21}$$

тут

$$\underset{1}{\Omega}_{ij} = c_{\alpha i}P^{\alpha}_{j} - \sigma_{\alpha i}c^{\alpha}_{j} + \Delta_1 \sigma c_{ij} \tag{5.22}$$

$$\underset{2}{\Omega}_{ij} = P_{ij} + \sigma_{ij} \tag{5.23}$$

Альтернуючи (5.20) за індексами $[j\ l]$

$$\underset{1}{\Omega}_{il}g_{jk} - \underset{1}{\Omega}_{jk}g_{il} + \underset{2}{\Omega}_{il}c_{jk} - \underset{2}{\Omega}_{jk}c_{il} -$$
$$- \underset{1}{\Omega}_{ij}g_{lk} + \underset{1}{\Omega}_{lk}g_{ij} - \underset{2}{\Omega}_{ij}c_{lk} + \underset{2}{\Omega}_{lk}c_{ij} = 0 \tag{5.24}$$

Перепозначимо в останньому індекси i та l

$$\underset{1}{\Omega}_{li}g_{jk} - \underset{1}{\Omega}_{jk}g_{li} + \underset{2}{\Omega}_{li}c_{jk} - \underset{2}{\Omega}_{jk}c_{li} -$$
$$- \underset{1}{\Omega}_{lj}g_{ik} + \underset{1}{\Omega}_{ik}g_{lj} - \underset{2}{\Omega}_{lj}c_{ik} + \underset{2}{\Omega}_{ik}c_{lj} = 0 \tag{5.25}$$

Додамо отримане до (5.21), будемо мати

$$\underset{1}{\Omega}_{il}g_{jk} - \underset{1}{\Omega}_{jk}g_{il} + \underset{2}{\Omega}_{il}c_{jk} - \underset{2}{\Omega}_{jk}c_{il} = 0 \tag{5.26}$$

Згортаючи останнє, отримаємо

$$\underset{1}{\Omega}_{il} = \frac{\underset{1}{\Omega}}{n}g_{il} + \frac{\underset{2}{\Omega}}{n}c_{il} - \frac{c}{n}\underset{2}{\Omega}_{il} = 0, \tag{5.27}$$

тут

$$\underset{1}{\Omega} = \underset{1}{\Omega}_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}; \qquad \underset{2}{\Omega} = \underset{2}{\Omega}_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta};$$
$$c = c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} \tag{5.28}$$

Тоді (5.26) набуде вигляду

$$c_{il}\left(\frac{\underset{2}{\Omega}}{n}g_{jk}-\underset{2}{\Omega}_{jk}\right)-c_{jk}\left(\frac{\underset{2}{\Omega}}{n}g_{il}-\underset{2}{\Omega}_{il}\right)- \\ -\frac{c}{n}\underset{2}{\Omega}_{il}g_{jk}+\frac{c}{n}\underset{2}{\Omega}_{jk}g_{il}=0 \tag{5.29}$$

Перетворимо останній вираз

$$c_{il}\left(\frac{\underset{2}{\Omega}}{n}g_{jk}-\underset{2}{\Omega}_{jk}\right)-c_{jk}\left(\frac{\underset{2}{\Omega}}{n}g_{il}-\underset{2}{\Omega}_{il}\right)- \\ -\frac{c}{n}\underset{2}{\Omega}_{il}g_{jk}+\frac{c\underset{2}{\Omega}}{n\cdot n}g_{il}g_{jk}-\frac{c\underset{2}{\Omega}}{n\cdot n}g_{il}g_{jk}+ \\ +\frac{c}{n}\underset{2}{\Omega}_{jk}g_{il}-\frac{c\underset{2}{\Omega}}{n\cdot n}g_{il}g_{jk}+\frac{c\underset{2}{\Omega}}{n\cdot n}g_{il}g_{jk}=0 \tag{5.30}$$

Групуючи відповідним чином, отримаємо

$$\left(c_{il}-\frac{c}{n}g_{il}\right)\left(\frac{\underset{2}{\Omega}}{n}g_{jk}-\underset{2}{\Omega}_{jk}\right)- \\ -\left(c_{jk}-\frac{c}{n}g_{jk}\right)\left(\frac{\underset{2}{\Omega}}{n}g_{il}-\underset{2}{\Omega}_{il}\right)=0 \tag{5.31}$$

Оскільки $c_{il}\neq\frac{c}{n}g_{il}$, то можна підібрати тензор ξ^{ij} так, що

$$\left(c_{\alpha\beta}-\frac{c}{n}g_{\alpha\beta}\right)\xi^{\alpha\beta}=1 \tag{5.32}$$

Домножуючи (5.31) на ξ^{il}, та згортаючи за індексами i та l, переконаємось, що

$$\underset{2}{\Omega}_{ij}=\frac{\underset{2}{\Omega}}{n}g_{ij} \tag{5.33}$$

Врахуємо (5.23) та (5.7)

$$P_{ij}+\sigma_{,ij}-\sigma_{,i}\sigma_{,j}=\frac{\underset{2}{\Omega}}{n}g_{ij} \tag{5.34}$$

Таким чином,

Теорема 8. *Конформно-пласкі конформно звідні псевдоріманові простори характеризуються умовами*

$$R_{hijk} = \sigma_{hk}g_{ij} - \sigma_{hj}g_{ik} + \sigma_{ij}g_{hk} - $$
$$-\sigma_{ik}g_{hj} + \frac{2}{n}\underset{2}{\Omega}\left(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}\right) \tag{5.35}$$

Цікавим класом конформно-пласких конформно звідних псевдоріманових просторів є *субпроективні* простори. В деяких джерелах їх називають *просторами Кагана*. Субпроективні простори Кагана характеризуються умовами

$$R_{ijkl} = Q(v)(g_{ik}v_{,j}v_{,l} + g_{jl}v_{,i}v_{,k} - g_{il}v_{,j}v_{,k} - g_{jk}v_{,i}v_{,l}) - $$
$$-2S(v)(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) \tag{5.36}$$

$$P_{jk} = S(v)g_{jk} + Q(v)v_{,j}v_{,k} \tag{5.37}$$

Метрика субпроективного простору V_n може бути зведена в деякій системі координат до одного з трьох виглядів

1.
$$ds^2 = e^{-2\sigma(x^1)}(e_1 dx^{1^2} + e_2 dx^{2^2} + \ldots + e_n dx^{n^2}) \tag{5.38}$$

2.
$$ds^2 = e^{-2\sigma(x)}(e_1 dx^{1^2} + e_2 dx^{2^2} + \ldots + e_n dx^{n^2})$$
$$x = \sqrt{e_1 x^{1^2} + e_2 x^{2^2} + \ldots + e_n x^{n^2}} \tag{5.39}$$

3.
$$ds^2 = e^{-2\sigma(x^1)}(2dx^1 dx^2 + e_3 dx^{3^2} + \ldots + e_n dx^{n^2}) \tag{5.40}$$

Із будови метрики видно, що субпроективні простори належать до конформно звідних псевдоріманових просторів, причому множник конформності залежить від неізотропної в першому випадку, а в третьому — від ізотропної координати x^1 плаского простору, метрика якого наведена в дужках. В другому випадку цей множник залежить лише від віддалі від початку координат.

Вправи

1. За якої умови конформно звідні простори будуть звідними.

2. Скільки розв'язків має система рівнянь (5.12), (5.13) в просторах сталої кривини?

3. Чи існує зв'язок між кількістю коваріантно сталих тензорних полів в просторі, якому конформний даний конформно звідний простір та кількістю розв'язків в ньому рівнянь (5.12), (5.13)?

4. Серед метрик просторів, наведенних в § 1, знайдіть метрики конформно звідних просторів.

5. Для знайдених просторів розв'яжіть рівняння (5.12), (5.13).

6. Доведіть, що субпроективні простори належать до еквідістантних псевдоріманових просторів.

§ 6. Псевдоріманові простори $V(K)$

Якщо в деякій системі координат метрика V_n може бути записана в вигляді

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} \prod{}'_{\beta} |f_\beta - f_\alpha| \, ds^2_\alpha, \tag{6.1}$$

то метрику виду (6.1) називають *метрикою Леві-Чевіти*, а сам запис ds^2 записом в формі Леві-Чевіти.

Пояснимо позначення в останній формулі:

1. координати $x^1, x^2, \dots, x^n$ розбиті на групи $p > 1$ груп (x^i_α), $\alpha = 1, \dots, p$. Наприклад, якщо $p = 2$, то індекс i_1 пробігає номера координат першої групи $x^1, x^2, \dots, x^k$ $(k < n)$, а індекс i_2 — номери, що залишились $k+1, k+2, \dots, n$. При цьому одна або декілька груп можуть складатись всього лише з одної координати.

2. форма ds^2_0 додатньо знаковизначена від змінних x^i_α.

3. функція f_α залежить від однієї змінної, якщо група x^i_α складається з одної координати, та $f_\alpha = const$, якщо група x^i_α складається більше ніж з одної координати.

4. $\prod'_\beta |f_\beta - f_\alpha|$ — означає добуток множників $|f_\beta - f_\alpha|$ для всіх $\beta = 1, 2, \dots, p$, крім $\beta = \alpha$; $f_\beta \neq f_\alpha$ при $\beta \neq \alpha$.

   Наприклад,

$$\begin{gathered} ds^2 = |f_2(x^2) - f_1(x^1)| \, |f_3 - f_1(x^1)| \, dx^{1^2} + \\ + |f_1(x^1) - f_2(x^2)| \, |f_3 - f_2(x^2)| \, dx^{2^2} + \\ + |f_1(x^1) - f_3| \, |f_2(x^2) - f_3| \, ds^2_3, \end{gathered} \tag{6.2}$$

   тут $p = 3$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3, 4, \dots, n$, $f_3 = const$, ds^2_3 — метрична форма від змінних $x^3, x^4, \dots, x^n$.

Тензорною ознакою того, щоб метрика ріманового простору V_n допускала запис в формі Леві-Чевіти є існування в ньому тензора $a_{ij} (= a_{ji} \neq c g_{ij})$ та функції $\varphi \neq const$ таких, що

$$a_{ij,k} = 2\varphi_{,k} g_{ij} + \varphi_{,i} g_{jk} + \varphi_{,j} g_{ik} \tag{6.3}$$

Компоненти тензора a_{ij} та функція φ визначаються з умов

$$a_{ij}dx^i dx^j = \sum_{\alpha=1}^{p}(f_\alpha + \sum_{1}^{n} f_p)\Phi_\alpha \tag{6.4}$$

$$\Phi_\alpha = \prod\nolimits_\beta^{\prime} |f_\beta - f_\alpha| \, ds_\alpha^2 \tag{6.5}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_{1}^{p} f_\beta \tag{6.6}$$

Фубіні називав *приєднаним* лінійний елемент

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} \prod\nolimits_\beta^{\prime} |f_\beta - f_\alpha| \, (dy^\alpha)^2. \tag{6.7}$$

Тут $y^1, y^2, \ldots, y^p$ — нові змінні, при переході до яких всі неодномірні змінні форми Леві-Чевіти були замінені на одномірні. Це можливо зробить тому, що змінні з цих ds_α^2 в інші члени не входять: $f_\alpha = const$.

Приєднана метрика має сталу кривину K, якщо

$$\varphi_{,ij} = -Ka_{ij} + Lg_{ij}, \tag{6.8}$$

тут L — деяка стала.

Простір V_n з метрикою

$$ds^2 = ds_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{t} \overset{\alpha}{\sigma} ds_\alpha^2, \tag{6.9}$$

де $ds_0^2, ds_\alpha^2 (\alpha = 1, 2, \ldots, t)$ самостійні метрики, що залежать кожна від своєї змінної, причому всі ds_α^2 — неодномірні, $\overset{\alpha}{\sigma}$ — додатні функції;
називають *простором* $V(K)$, якщо приєднана метрика

$$\overset{*}{ds}{}^2 = ds_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{t} \overset{\alpha}{\sigma}(dy^{q+\alpha})^2 \tag{6.10}$$

має сталу кривину K.

Означення 1. *Взаємно однозначна відповідність між точками псевдоріманових просторів V_n та $\bar{V}_n$ називається геодезичним відображенням, якщо при ній кожна геодезична лінія V_n переходить в геодезичну лінію $\bar{V}_n$.*

Геодезичне відображення відмінне від гомотетії називають нетривіальним.

Необхідними и достатніми умовами того, щоб задані псевдоріманови простори V_n та $\bar{V}_n$ знаходились в геодезичній відповідності є виконання в них умов:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \varphi_i \delta_j^h + \varphi_j \delta_i^h, \tag{6.11}$$

$$\bar{g}_{ij},_k = 2\varphi_k \bar{g}_{ij} + \varphi_i \bar{g}_{jk} + \varphi_j \bar{g}_{ik}, \tag{6.12}$$

де Γ^h_{ij} $(\bar{\Gamma}^h_{ij})$ — об'єкти зв'язності V_n та $\bar{V}_n$ відповідно (об'єкти $\bar{V}_n$ геодезично відповідного даному будемо позначать риской), δ^h_i — символи Кронекера, кома "," — знак коваріантної похідної по зв'язності V_n, φ_i — деякий, градієнтний з необхідності вектор.

Для того, щоб заданне V_n допускало нетривіальне геодезичне відображення необхідно і достатньо, щоб в ньому існував розв'язок лінійної форми основних рівнянь відносно тензора $a_{ij} = a_{ji} \neq c g_{ij}$ та вектора $\lambda_i = \lambda_{,i} \neq 0$.

Лінійна форма основних рівнянь теорії геодезичних відображень має вигляд

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}. \tag{6.13}$$

Зауважимо, що рівняння (6.12) та (6.13) еквівалентні. Кожне з них є необхідною та достатньою умовою того, щоб псевдоріманів простір допускав нетривіальне геодезичне відображення. Але (6.12) це нелінійне рівняння, а (6.13) — лінійне. Рівняння (6.3) може бути зведене до виду (6.13) заміною, при цьому (6.3) є ознакою представлення в формі Леві-Чевіти лише для ріманових просторів, а (6.13) це ознака: допускає чи не допускає простір нетривіальні геодезичні відображення для псевдоріманових просторів, без обмежень на знак метрики.

Умови інтегрування рівнянь (6.13) —

$$a_{\alpha i} R^\alpha_{jkl} + a_{\alpha j} R^\alpha_{ikl} = \lambda_{li} g_{jk} + \lambda_{lj} g_{ik} - \lambda_{ki} g_{jl} - \lambda_{kj} g_{il}. \tag{6.14}$$

Згортаючи, отримаємо

$$n\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + a_{i\alpha} R^\alpha_j - a_{\alpha\beta} R^{\alpha\ \ \ \beta}_{\cdot\, ij\, \cdot}. \tag{6.15}$$

Вивчаючи умови інтегрування останнього, будемо мати

$$(n-1)\mu_{,i} = 2(n+1)\lambda_\alpha R^\alpha_i + a_{\alpha\beta}(2R^{\alpha\ \ \ \beta}_{\cdot\, ij\, \cdot} - R^{\alpha\beta}_{\cdot\ \cdot\ ,i}). \tag{6.16}$$

Тут

$$\mu = \lambda_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta}; \qquad R^i_j = R_{\alpha j} g^{\alpha i}; \quad R^{h\ \ \ k}_{\cdot\, ij\, \cdot} = R^h_{ij\alpha} g^{\alpha k};$$

$$R^{h\ k}_{\cdot\, i,} = R_{\alpha i,\beta} g^{\alpha h} g^{\beta k}; \quad R^{hk}_{\cdot\ \cdot\ ,i} = R_{\alpha\beta,i} g^{\alpha h} g^{\beta k}.$$

Приведена система рівнянь (6.13), (6.15), (6.16) дає принципову можливість відповісти на питання про те, чи допускає даний псевдоріманів простір V_n геодезичне відображення і на скільки різних просторів він його допускає. Задача зводиться до вивчення умов інтегрування цієї системи та їх диференціальних продовжень, що є системою лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих a_{ij}, λ_i та μ коефіцієнтами з простору V_n. При відомих розв'язках (6.13), (6.15), (6.16) можуть бути найдені і розв'язки (6.12) за формулами

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= e^{2\varphi} g^{\alpha\beta} \bar{g}_{\alpha i} g_{\beta j} \\
\lambda_i &= -e^{2\varphi} g^{\alpha\beta} \bar{g}_{\alpha i} \varphi_{.\beta}
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

Система (6.13), (6.15), (6.16) для початкових значень в точці $x_o \in V_n$

$$
a_{ij}(x_o) = \overset{o}{a}_{ij}; \quad \lambda_i(x_o) = \overset{o}{\lambda}_i; \quad \mu(x_o) = \overset{o}{\mu}
\tag{6.18}
$$

має не більше одного розв'язку, тому множина її розв'язків залежить від числа суттєвих параметрів r. А саме, для тензора — $\dfrac{n+1}{2} \cdot n$, для вектора n, для інваріанта від одного, разом

$$
r \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\tag{6.19}
$$

Множина псевдоріманових просторів $\bar{V}_n$, на які допускає геодезичне відображення даний псевдоріманів простір V_n, залежить від r параметрів. Число r Н.С. Синюков називав *степеню рухомості* псевдоріманового простору V_n відносно геодезичних відображень. Ми називаємо це число — степеню мобільності псевдоріманового простору V_n відносно геодезичних відображень.

Максимальну степінь мобільності $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ допускають простори сталої кривини і тільки вони.

Має місце теорема

Теорема 9. *Якщо степінь мобільності псевдоріманового простору V_n більше двох, то вектор λ_i та інваріант μ задовольняють умові*

$$
\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + B a_{ij}
\tag{6.20}
$$

$$
\mu_{,i} = 2B\lambda_i,
\tag{6.21}
$$

де B — деяка стала, що однозначно визначається для кожного V_n.

Враховуючи (6.20), з рівнянь (6.17) можна отримати

$$
\varphi_{,ij} - \varphi_i \varphi_j = \bar{B} \bar{g}_{ij} + B g_{ij}.
\tag{6.22}
$$

А це, в свою чергу, означає, що ріманові простори V_n, що мають степінь мобільності більше двох, належать до просторів $V(K)$.

Доведемо ще одну теорему, важливу для дослідження кількості суттєвих параметрів в загальному розв'язку системи (6.13).

Циклюючи (6.13) по індексам $(i\,k\,l)$, отримаємо

$$a_{\alpha i}R^{\alpha}_{jkl} + a_{\alpha k}R^{\alpha}_{jli} + a_{\alpha l}R^{\alpha}_{jik} = 0. \tag{6.23}$$

Згортаючи по індексам j та k, переконаємось, що

$$a_{\alpha i}R^{\alpha}_{l} - a_{\alpha l}R^{\alpha}_{i} = 0, \tag{6.24}$$

тут $R^{i}_{l} = R_{\alpha l}g^{\alpha i}$.

Таким чином,

Теорема 10. *Розв'язок системи* (6.13) a_{ij} *та тензор Річчі псевдоріманового простору* V_n *задовольняють умові* (6.24).

Доведемо деякі приклади застосування геодезичних відображень до вивчення геометричних властивостей псевдоріманових просторів, метрика яких допускає зведення до спеціального виду та навпаки, як вид метрики впливає на можливість допущення геодезичних відображень.

Зведені псевдоріманові простори допускають нетривіальні геодезичні відображення лише в випадку, коли вони еквідістантні.

Еквідістантні псевдоріманові простори основного випадку завжди допускають нетривіальні геодезичні відображення. Дійсно, тензор a_{ij}, побудований так, що

$$a_{ij} = \overset{1}{c} g_{ij} + \psi_i \psi_j, \tag{6.25}$$

де $\overset{1}{c}$ — деяка стала, а $\psi_i = \psi_{,i}$ — вектор, що задає еквідістантне векторне поле, задовольняє рівнянням (6.13), а, значить, псевдоріманів простір V_n допускає нетривіальні геодезичні відображення.

Вправи

.

1. Чи допускають геодезичні відображення псевдоріманові простори $V(K)$?

2. Знайдіть тензорну ознаку псевдоріманових просторів конформних $V(K)$.

3. Який вид має метрика просторів конформних $V(K)$?

4. Доведіть, що для конформно-пласких V_n розв'язок рівнянь (6.13) є комбінація метричного тензора та тензора Річчі.

§ 7. Геодезичні в ріманових просторах

Якщо метричний тензор g_{ij} є додатновизначеним (псевдоріманoвий простір є рімановим), то для регулярної кривої $x^i = x^i(t), t \in [a, b], i = 1, ..., n$, можна визначити її *довжину*

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt.$$

На регулярній кривій можна увести *природній параметр* s, що є довжиною дуги відкладеної від фіксованої точки на кривій.

Нагадаємо, що векторне (тензорне) поле є *паралельне* вздовж кривої, якщо його коваріантна похідна за дотичним вектором $\frac{dx^i}{dt}$ дорівнює нулю в кожній точці на кривій.

Крива $x^i = x^i(t), t \in [a, b], i = 1, ..., n$, називається *геодезичною*, якщо її дотичне векторне поле паралельне вздовж неї. З означення геодезичної маємо $\frac{dx^j}{dt}(\frac{dx^k}{dt})_{,j} = \frac{dx^j}{dt}\frac{\partial\frac{dx^k}{dt}}{\partial x^j} + \frac{dx^j}{dt}\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt} = 0$, що рівносильне

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0, k = 1, ..., n. \tag{7.1}$$

Ця система є системою диференціальних рівнянь геодезичної лінії.

Лема 3. *У рімановому просторі параметр геодезичної пропорційний її природньому параметру (довжині дуги).*

Оскільки система (7.1) є системою диференіальних рівнянь другого порядку, то задавши початкові умови $x^i_0 = x^i(0), X^i_0 = \frac{dx^i}{dt}(0)$, отримаємо, що існує її єдиний разв'язок з цими початковими умовами. Отже, виконується

Теорема 11. *Для кожної точки з координатами x^i_0 і напрямку X^i_0 в деякому околі цієї точки існує єдина геодезична, що проходить через дану точку в даному напрямку.*

В подальшому будемо вважати, що параметр на геодезичній є природній, що рівносильне тому, що дотичний вектор є одиничним.

Для досить малого дотичного вектора в даній точці проведемо відповідну геодезичну і відкладемо на ній дугу довжини рівній модулю дотичного вектора. *Експоненціальне* відображення, це відображення, яке кожному дотичному вектору ставить у відповідність кінець так побудованої дуги. Оскільки початкові умови системи диференціальних рівнянь другого порядку можна задати за допомогою двох досить близьких точок, то звідси випливає

Лема 4. *Експоненціальне відображення є дифеоморфізмом деякого околу нульового вектора в дотичному просторі на деякий окіл даної точки.*

Лема 5. *Для даної точки p існує окіл, що для довільної точки q із цього околу існує єдина геодезична, що проходить через ці точки і лежить в даному околі.*

Варіацією (з закріпленими кінцями) кривої $x = x(t), t \in [a,b]$, у рімановому просторі M називається відображення $F : [a,b] \times [-\epsilon, \epsilon] \to M,\ F(t,0) = x(t), t \in [a,b]$ для деякого $\epsilon > 0$. Позначивши $F(t,\tau) = x_\tau(t), t \in [a,b]$ знайдемо умови, за яких функціонал довжини $S(\tau) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\frac{dx_\tau^i}{dt}\frac{dx_\tau^j}{dt}}dt$ при $\tau = 0$ набуває свого екстремального значення. З теорії варіаційного числення відомо, що якщо функціонал $S(\tau) = \int_a^b L_\tau(x,X)dt$ досягає свого екстремального значення на деякій кривій ($\tau = 0$), то вздовж неї виконуються рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial X^i}) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, i = 1, ..., n,$$

де $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial X^i}) = \frac{\partial^2 L}{\partial X^i \partial X^j}\frac{d^2x^j}{dt^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial X^i \partial x^j}x^j|_{X=\frac{dx}{dt}}$. Застосувавши це рівняння до функціоналу довжини, отримаємо рівняння геодезичних ліній з природнім параметром. З цього можна зробити такі висновки:

Теорема 12. *1. Кожна найкоротша крива між двома фіксованими точками, параметрезована довжиною дуги, є геодезичною.*

2. Достатньо малий відрізок геодезичної є найкоротшою.

3. Для досить близьких точок існує єдина найкоротша, що їх з'єднує.

Простір будемо називати *геодезично повним*, якщо кожну його геодезичну можна продовжити для всіх параметрів на прямій.

Задамо відстань між точками ріманова многовида як інфінум довжин всіх кривих, що з'єднують ці дві точки. Отримаємо структуру метричного простору на рімановому просторі. Має місце

Теорема 13. *(Рінов,Хопф) Метрична повнота ріманового простору еквівалентна його геодезичній повноті.*

Вправи

1. Знайдіть геодезичні в евклідовому просторі.

2. Знайдіть геодезичні на круговому циліндрі.

3. Знайдіть геодезичні на сфері.

4. Доведіть, що геодезична довжини менше r, що виходить з точки p є найкоротшою, якщо експоненціальне відображення в цій точці ін'єктивне на кулі радіуса r.

5. Доведіть існування найкоротшою, що з'єднує дві дані точки, в геодезично повному рімановому просторі.

Література

[1] Абдуллин В.Н. n-мерные римановы пространства, допускающие поля ковариантно постоянных симметрических тензоров общего типа, I //Изв. вузов Матем.: 1970. — 5(96). — С. 3-13.

[2] Абдуллин В.Н. n-мерные римановы пространства, допускающие поля ковариантно постоянных симметрических тензоров общего типа, II //Изв. вузов Матем.: 1970. - 6(97). - С. 3-15.

[3] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М., Наука, 1979

[4] Каган В. Ф. Основы теории поверхностей. I, II. М.-Л.: ОГИЗ, 1948. -407 с.

[5] Каган В. Ф. Субпроективные пространства. - М.: Физматгиз, 1961. - 220с.

[6] Киосак В. А. Об эквидистантных римановых пространствах//Геометрия обобщенных пространств. - Пенза, 1992. - С. 60-65

[7] Kiosak V., Matveev V.S., Complete Einstein metrics are geodesically rigid, Comm. Math. Phys. 289(2009), no. 1, 383-400

[8] Kiosak V., Matveev V.S. Fubini Theorem for pseudo-Riemannian metrics. - Journal of the London Mathematical Society 80(2009) 2, P. 341–356

[9] Кіосак В. А. Про конформні відображення майже Ейнштейнових просторів. Математичні методи та фізико-механічні поля, 54, №2, 2011. – С. 17-22

[10] Кіосак В.А. Про еквідістантні псевдоріманові простори// Математичні студіі, Львов. — т.36, 1 — 2011. — С. 21–25

[11] Кіосак В.А. Про кількість розв'язків однієї системи алгебраїчних рівнянь// Proceedings international geometry center, Одеса. — т.5, 2 — 2012. — С. 43–52

[12] Кручкович Г. И. Римановы и псевдоримановы пространства//Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. 1966. - М., ВИНИТИ, 1968. - С. 191-220

[13] Кручкович Г. И. О пространствах $V(K)$ и их геодезических отображениях// Тр. Всес. заочн. энергетич. ин-та. Мат. - 1967. - 33. - С. 3-18

[14] Кузаконь В.М., Кириченко В.Ф., Пришляк О.О. Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти// Праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування. – 2013. – Т. 97. 500 с.

[15] Лейко С.Г.Ріманова геометрія: Навчальний посібник.- Одеса: Астропринт, 2000. - 212 с. - С. 3-18

[16] Mikes J., Kiosak V., Vanzurova A. Geodesic Mappings of Manifolds with Affine Connection. Olomouc.:UP, 2008. 220p.

[17] Милнор Дж. Теория Морса. - М.,Мир, 1965

[18] Норден А. П. Пространства аффинной связности. - М.; Наука, 1976. - 432 с.

[19] Петров А. 3. Новые методы в общей теории относительности. - М.: Наука, 1966. - 495 с.

[20] Пришляк О., Лукова-Чуйко Н. Диференціальна геометрія та топологія. Курс лекцій. - К. Зовнішня торгівля, 2012. 80 с.

[21] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. - М., Наука, 1967.

[22] Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. - М.: Наука, 1979. - 255 с.

[23] Солодовников А. С. Геометрическое описание всевозможных представлений римановой метрики в форме Леви-Чивита// Тр. семин. по вект. и тензорн. анализу. - 1963. - 12. - С. 131-173

[24] Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. - М.-Л.: Гостехиздат, 1939

[25] Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. - М.: ИИЛ, 1948

[26] Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957. - 159 с.

Предметний покажчик