Київський національний університет імені Тараса Шевченка

**О.Г.Ганюшкін, О.О.Безущак**

# ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З АЛГЕБРИ І ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ (***ТЕОРІЯ ГРУП***)

видання третє,
виправлене

для студентів механіко – математичного факультету

Київ
Видавничо–поліграфічний центр
"Київський університет"
2007

О.Г.Ганюшкін, О.О.Безущак. Завдання до практичних занять з алгебри і теорії чисел (теорія груп). – 3-є видання, виправлене: для студентів механіко – математичного факультету. – К.: Видавничо–поліграфічний центр "Київський університет", 2007. – 103 с.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. В.В.Кириченко
д-р фіз.-мат. наук, проф. М.П.Моклячук

Наведено завдання для практичних занять з алгебри і теорії чисел у третьому семестрі в обсязі, передбаченому навчальними планами механіко – математичного факультету. Посібник містить завдання для аудиторної роботи і задачі для домашніх завдань. Наявність великої кількості задач різної складності дозволяє використовувати посібник як збірник задач.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко – математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 3 від 25 жовтня 2006 року)

# Зміст

# Передмова

Навчальні завдання повністю охоплюють теми практичних занять, що проводяться у третьому семестрі при вивченні на механіко–математичному факультеті нормативного курсу алгебри й теорії чисел.

Кожне завдання складається з чотирьох частин. Спочатку наводяться приклади розв'язання типових задач. Друга й третя частини містять задачі, що розглядаються на практичних заняттях (задачі другої частини є обов'язковими, третьої — розраховані на сильніших студентів), а четверта — задачі для домашнього завдання. Важчі задачі позначено зірочками, причому кількість зірочок є мірою складності задачі. До задач наведено відповіді, а для багатьох з них — і вказівки до розв'язання.

При посиланні на задачу використовується подвійна нумерація: перша цифра — номер заняття, а друга — номер задачі.

Після кожного заняття наведено посилання на найбільш доступні підручники, у яких можна знайти необхідний теоретичний матеріал.

# Позначення

НСД$(a, b)$ — найбільший спільний дільник чисел $a$ та $b$;
НСК$(a, b)$ — найменше спільне кратне чисел $a$ та $b$;
$|A|$ — потужність множини $A$; $|a|$ — порядок елемента $a$;
$[a, b]$ — комутатор $a^{-1}b^{-1}ab$ елементів $a$ і $b$;
$\langle a, b, \ldots, c\rangle$ — група, породжена елементами $a, b, \ldots, c$;
$A_n$ — знакозмінна група всіх парних підстановок степеня $n$;
$\operatorname{Aut} G$ — група всіх автоморфізмів групи $G$;
$\mathbb{C}$ — множина, або адитивна група, або поле комплексних чисел;
$\mathbb{C}_n$ — група за множенням усіх комплексних коренів степеня $n$ з 1;
$\mathbb{C}^*$ — мультиплікативна група поля комплексних чисел;
$\mathbb{C}_\infty$ — група за множенням усіх комплексних коренів з 1 усіх можливих натуральних степенів;
$\mathbb{C}_{p^\infty}$ — група за множенням усіх комплексних коренів із 1 степеня $p^n$, де просте число $p$ — фіксоване, а натуральне число $n$ — довільне;
$C(a)$ — клас спряженості елемента $a$;
$C_n$ — абстрактна циклічна група порядку $n$;
$D_2(\mathbb{R})$ — група невироджених діагональних матриць порядку 2 з дійсними коефіцієнтами;
$D_n$ — група всіх рухів правильного $n$–кутника;
$\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ — діагональна матриця з елементами $d_1, \ldots, d_n$ по діагоналі;
$GL_n(P)$ — повна лінійна група — група за множенням усіх невироджених матриць порядку $n$ з коефіцієнтами з поля $P$;
$GL_n(\mathbb{Z})$ — група за множенням усіх цілочисельних матриць порядку $n$, обернені до яких також є цілочисельними;
$G/H$ — факторгрупа групи $G$ за нормальною підгрупою $H$;
$H \lhd G$ — $H$ є нормальною підгрупою групи $G$;
$\operatorname{Inn} G$ — група всіх внутрішніх автоморфізмів групи $G$;
$\operatorname{Im} \varphi$ — образ гомоморфізму $\varphi$;
$\operatorname{Ker} \varphi$ — ядро гомоморфізму $\varphi$;
$K_4$ — четверна група Кляйна — група підстановок $\{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$;
$M_n(P)$ — адитивна група матриць порядку $n$ з коефіцієнтами з поля $P$;
$\mathbb{Q}^*$ — мультиплікативна група поля раціональних чисел;
$\mathbb{Q}^+$ — мультиплікативна група всіх додатних раціональних чисел;

$Q_8$ — група кватерніонів;

$\mathbb{R}^*$ — мультиплікативна група поля дійсних чисел;

$\mathbb{R}^+$ — мультиплікативна група всіх додатних дійсних чисел;

$SL_n(P)$ — спеціальна лінійна група — підгрупа матриць із $GL_n(P)$, визначник яких дорівнює 1;

$S_n$ — симетрична група всіх підстановок степеня $n$;

$T$ — мультиплікативна група комплексних чисел, модуль яких дорівнює 1;

$T_n(P)$ — група за множенням усіх невироджених верхніх трикутних матриць порядку $n$ з коефіцієнтами з поля $P$;

$UT_n(P)$ — унітрикутна група — група за множенням усіх верхніх трикутних матриць порядку $n$ з коефіцієнтами з поля $P$ і з одиницями на головній діагоналі;

$UT_n(\mathbb{Z})$ — група за множенням усіх унітрикутних матриць порядку $n$ з коефіцієнтами з кільця $\mathbb{Z}$;

$\mathbb{Z}_n$— множина, або адитивна група, або кільце класів лишків за модулем числа $n$;

$\mathbb{Z}_n^*$ — мультиплікативна група оборотних класів лишків за модулем числа $n$;

$Z_G(a)$ (або $Z(a)$) — централізатор елемента $a$ в групі $G$;

$Z(G)$ — центр групи $G$;

$\varphi \circ \psi$ — композиція відображень $\varphi$ і $\psi$ (тобто $(\varphi \circ \psi)(x) = \psi(\varphi(x))$ ).

# Заняття 1. Множини з діями, напівгрупи та їх ізоморфізми

## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.** *Скільки є різних поворотів простору, які переводять у себе правильний тетраедр?*

*Розв'язання.* Тетраедр має 4 осі симетрії, які проходять через його вершини і центри протилежних граней. Навколо кожної осі крім тотожного повороту можливі ще два повороти на кути $120°$ та $240°$. До того ж, є три осі симетрії, що проходять через середини мимобіжних ребер, навколо яких можливі нетривіальні повороти на $180°$. Тим самим одержуємо, що всього різних поворотів простору, разом із тривіальним перетворенням, які переводять в себе правильний тетраедр, буде 12. □

**Задача 2.** *Скільки є невироджених квадратних матриць порядку $n$ над полем $\mathbb{Z}_p$?*

*Розв'язання.* Скористаємося одним із критеріїв невиродженості матриці, а саме: квадратна матриця є невиродженою тоді й тільки тоді, коли її вектор–рядки є лінійно незалежними. Тому підрахуємо, скількома способами можна вибрати рядки невиродженої квадратної матриці порядку $n$ над полем $\mathbb{Z}_p$ так, щоб кожен наступний не був лінійною комбінацією попередніх. Кожен елемент першого рядка можна вибрати $p$ способами, але перший рядок не має бути нульовим, оскільки він повинен утворювати лінійно незалежну систему. Тому його можна вибрати $p^n - 1$ способом. Другий рядок також можна вибрати $p^n$ способами, але для того, щоб одержати невироджену матрицю, необхідно відкинути всі рядки, які були б пропорційними першому. Коефіцієнтів пропорційності може бути $p$, оскільки поле $\mathbb{Z}_p$ складається з $p$ елементів. Отже, другий рядок невиродженої матриці можна вибрати $p^n - p$ способами. У свою чергу, третій рядок можна вибрати $p^n - p^2$ способами, оскільки він не має бути лінійною комбінацією двох попередніх. Продовжуючи аналогічні міркування, одержимо таку кількість невироджених квадратних матриць порядку $n$ над полем $\mathbb{Z}_p$: $(p^n - 1)(p^n - p)\dots(p^n - p^{n-1})$. □

**Задача 3.** *Побудувати таблицю множення для множини рухів прямокутника.*

*Розв'язання.* Множина рухів прямокутника складається з поворотів на кути $0°$ та $180°$ навколо центра прямокутника і двох симетрій відносно прямих $s_1$, $s_2$, що проходять через середини протилежних сторін прямокутника. На цій множині задана природна операція суперпозиції $\circ$, і легко бачити, що таблиця множення для цієї множини буде наступною:

| $\circ$ | $0°$ | $180°$ | $s_1$ | $s_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $0°$ | $0°$ | $180°$ | $s_1$ | $s_2$ |
| $180°$ | $180°$ | $0°$ | $s_2$ | $s_1$ |
| $s_1$ | $s_1$ | $s_2$ | $0°$ | $180°$ |
| $s_2$ | $s_2$ | $s_1$ | $180°$ | $0°$ |

$\square$

**Задача 4.** *Для яких значень параметрів* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *дія* $x * y = ax + by + c$ *на множині* $\mathbb{R}$ *буде асоціативною?*

*Розв'язання.* Асоціативність дії означає, що для довільних $x$, $y$, $z \in \mathbb{R}$ $(x * y) * z = x * (y * z)$. У нашому випадку $(x * y) * z = (ax + by + c) * z = a(ax + by + c) + bz + c$, $x * (y * z) = x * (ay + bz + c) = ax + b(ay + bz + c) + c$. Звідси $a^2x + ac + bz = ax + b^2z + bc$. Однак останнє співвідношення має виконуватися для довільних дійсних чисел $x$, $y$ та $z$, зокрема для $x = 0$, $z = 0$. Тому $c(a - b) = 0$. Якщо $x \neq 0$, $z = 0$, то або $a = 0$, або $a = 1$. Якщо $x = 0$, $z \neq 0$, то або $b = 0$, або $b = 1$. При $a = 0$, $b = 1$ матимемо, що $c = 0$; якщо $a = 1$, $b = 0$, то матимемо знову $c = 0$; при $a = 0 = b$ або $a = 1 = b$ число $c$ може бути довільним. Отже, указана дія буде асоціативною на $\mathbb{R}$ при $a, b \in \{0, 1\}$ і або $a = b$, або $c = 0$. $\square$

**Задача 5.** *Які серед даних напівгруп*: a) $((0, 1), \cdot)$; b) $((0, 1], \cdot)$; c) $((1, \infty), \cdot)$; d) $((2, \infty), \cdot)$ *є ізоморфними?*

*Розв'язання.* Напівгрупи a) та b) неізоморфні, оскільки друга містить нейтральний елемент для дії множення, а перша не містить. Легко перевірити, що відображення $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x}$ задає ізоморфізм напівгруп a) та c). Припустимо, що існує ізоморфізм $\varphi : (0, 1) \to (2, \infty)$. Оскільки кожен елемент $\alpha \in (0, 1)$ розкладається в добуток $\alpha = \sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha}$ елементів з $(0, 1)$, то й кожен елемент $\beta \in (2, \infty)$ ($\beta = \varphi(\alpha)$ унаслідок бієктивності відображення $\varphi$) розкладається в добуток $\beta = \varphi(\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha}) = \varphi(\sqrt{\alpha})\varphi(\sqrt{\alpha})$. Однак $\varphi(\sqrt{\alpha}) > 2$, тому $\varphi(\alpha) > 4$ і відображення $\varphi$ не є сюр'єктивним. Отже, напівгрупи a) та d) неізоморфні. Напівгрупи b) і d) також неізоморфні, оскільки b) містить нейтральний елемент, а d) не містить. $\square$

**Задача 6.** *Доведіть, що коли для елемента $a$ з напівгрупи $S$ лівий $x \mapsto ax$ та правий $x \mapsto xa$ зсуви за допомогою елемента $a$ є сюр'єктивними, то $S$ містить одиницю й елемент $a$ є оборотним.*

*Розв'язання.* Оскільки зсуви є сюр'єктивними, то існують $e_1, e_2 \in S$ такі, що $ae_1 = a$, $e_2a = a$. Легко бачити, що $e_1$ є правою одиницею, тому що для довільного $b \in S$ існує $y \in S$ таке, що $b = ya$. Тому $be_1 = (ya)e_1 = y(ae_1) = ya = b$. Аналогічно $e_2$ є лівою одиницею. Звідси $e_1 = e_2e_1 = e_2$, тобто одиниця в напівгрупі $S$ існує й дорівнює $e_1$. Оборотність елемента $a$ випливає з того, що внаслідок сюр'єктивності зсувів існують такі $a_1$, $a_2$, що $e_1 = aa_1$, $e_1 = a_2a$. Крім того, $a_1 = e_1a_1 = (a_2a)a_1 = a_2(aa_1) = a_2e_1 = a_2$. □

## Основні задачі

**7.** Скількома способами можна визначити бінарну дію на $n$–елементній множині? Скільки серед цих дій: a) будуть комутативними; b) матимуть нейтральний елемент?

**8.** Скільки є різних поворотів простору, які переводять у себе: a) куб; b) правильну $n$–кутну призму?

**9.** Скільки є різних рухів простору, які переводять у себе різносторонній прямокутний паралелепіпед?

**10.** Побудувати таблицю множення для множини рухів правильного трикутника.

**11.** Як за таблицею Келі для дії $*$ на множині $M$ з'ясувати: a) чи буде дія $*$ комутативною; b) чи є в $M$ ліві (праві) нулі; c) чи є в $M$ ліві (праві) одиниці; d) чи є даний елемент $a$ оборотним зліва (справа)?

**12.** У кожній із клітинок таблиці

| | $\cup$ | $\cap$ | $\setminus$ | $\triangle$ |
|---|---|---|---|---|
| асоціативність | | | | |
| комутативність | | | | |
| існування нейтрального елемента | | | | |
| існування обернених елементів | | | | |

поставте знак $+$ або $-$ залежно від того, має місце чи ні дана властивість для даної дії на множині $\Omega(M)$ усіх підмножин непорожньої множини $M$ (знаком $\triangle$ позначається симетрична різниця підмножин).

**13.** З'ясуйте, чи буде асоціативною на множині $\mathbb{N}$ дія $m*n = \max(m, n)$.

**14.** З'ясуйте, чи буде асоціативною на множині $\mathbb{R}$ дія $x*y = \ln(e^x + e^y)$.

**15.** Чи будуть ізоморфними напівгрупи $(\mathbb{N}, +)$ і $(-\mathbb{N}, +)$ ?

**16.** На множині $M^2$ визначено такі дії:
a) $(a,b) \circ_1 (c,d) = (a,c)$;  b) $(a,b) \circ_2 (c,d) = (a,d)$;
c) $(a,b) \circ_3 (c,d) = (b,c)$;  d) $(a,b) \circ_4 (c,d) = (b,d)$.
Які з множин з діями $(M^2, \circ_i), i = 1,2,3,4$, є ізоморфними? Чи є серед цих множин напівгрупи?

**17.** Які серед даних напівгруп: a) $((0,1),\cdot)$; b) $((0,1],\cdot)$; c) $([0,1),\cdot)$; d) $([0,1],\cdot)$; e) $((1,\infty),\cdot)$; f) $([1,\infty),\cdot)$; g) $((2,\infty),\cdot)$; h) $((3,\infty),\cdot)$ є ізоморфними?

**18.** Доведіть, що коли в напівгрупі $M$ для довільних $a, b \in M$ рівняння $ax = b$ (відповідно $ya = b$) має єдиний розв'язок, то $M$ містить ліві (праві) одиниці.

## Додаткові задачі

**19.** Нехай у множині $M$ з дією $*$ для довільних $a, b \in M$ кожне з рівнянь $a * x = b$ і $y * a = b$ має єдиний розв'язок. Тоді відображення $(a,b) \mapsto x$ (відповідно $(a,b) \mapsto y$ ) називається правою (лівою) оберненою до $*$ дією на $M$.
a) Опишіть ліву й праву обернені дії до дії $a * b = a^b$ на множині $\mathbb{R}^+$.
b) Доведіть, що коли права й ліва обернені до дії $*$ збігаються, то дія $*$ є комутативною.
c) Доведіть, що коли права й ліва обернені до $*$ дії існують, то вони, у свою чергу, також мають обернені. Чим є ці чотири обернені до обернених дії? Чи можуть усі вони збігатися?

**20.** Знайдіть кількість тих перетворень $\tau \in T_7$, які комутують з перетворенням $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

**21.** Які серед даних напівгруп: a) $(\mathbb{N},\cdot)$; b) $(2\mathbb{N},\cdot)$; c) $(\mathbb{N}\setminus 2\mathbb{N},\cdot)$; d) $(3\mathbb{N},\cdot)$; e) $(\mathbb{N}\setminus 3\mathbb{N},\cdot)$; f) $(4\mathbb{N},\cdot)$ є ізоморфними?

**22.** Чи є ізоморфні серед напівгруп $N_k = (\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots k\}, +)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ ?

**23.** Скількома способами можна визначити асоціативну дію на двоелементній множині?

**24.** Скільки існує неізоморфних між собою напівгруп порядку 2?

## Домашнє завдання

**25.** Скільки є різних поворотів простору, які переводять у себе правильний октаедр?

**26.** Побудувати таблицю множення для множини рухів різностороннього прямокутного паралелепіпеда.

**27.** З'ясуйте, які з дій на множині $\mathbb{N}$ є асоціативними:
a) $m*n = m^n$; b) $m*n = \text{НСК}(m,n)$; c) $m*n = 2mn$; d) $m*n = m^2+n^2$.

**28.** З'ясуйте, які з дій на множині $\mathbb{R}$ є асоціативними:
a) $x*y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$; b) $x*y = e^x e^y$; c) $m*n = m\cdot n^{m/|m|}$.

**29.** Для яких значень параметрів $a,b,c \in \mathbb{R}$ дія $x*y = ax+by+c$ на множині $\mathbb{R}$ матиме нейтральний елемент? Для яких значень параметрів усі елементи будуть оборотними?

**30.** Як за таблицею Келі для дії $*$ на множині $M$ з'ясувати, чи є даний елемент $a$: a) скоротним зліва (справа); b) ідемпотентом?

**31.** На множині $M$ визначена операція $\diamond$ за правилом $x\diamond y = x$. Довести, що $(M,\diamond)$ – напівгрупа. Що можна сказати про нейтральні та оборотні елементи цієї напівгрупи?

**32.** На множині $M^2$, де $M$ – деяка множина, визначена операція $\diamond$ за правилом $(x,y)\diamond(z,t) = (x,t)$. Чи є $M^2$ напівгрупою відносно цієї операції? Чи існує в $M^2$ нейтральний елемент?

**33.** Довести, що напівгрупи $(2^M,\cup)$ та $(2^M,\cap)$ ізоморфні.

*Література.* [1, c. 11–21], [4, c. 133–138], [7, c. 242–243], [2, c. 280–284], [5, c. 134–138].

# Заняття 2. Поняття групи

## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.** *Доведіть, що моноїд $M$, у якому для довільних елементів $a,b$ або рівняння* a) $ax=b$, *або* b) $ya=b$ *має принаймні один розв'язок, є групою.*

*Розв'язання.* а) Нехай $a_1$, $a_2$, $e_1$ – розв'язки рівнянь $ax = 1$, $a_1x = 1$, $a_2x = a$ відповідно. Тоді $a_2 = (aa_1)a_2 = ((a_2e_1)a_1)a_2 = (a_2e_1)(a_1a_2) = a_2e_1$ і для довільного елемента $c \in M$ матимемо $c = (a_1a_2)c = a_1(a_2e_1)c = (a_1a_2)(e_1c) = e_1c$, $c = c(a_1a_2) = ca_1(a_2e_1) = c(a_1a_2)e_1 = ce_1$, тобто $e_1 = 1$ і $a_2 = a$. b) Аналогічно. □

**Задача 2.** *Які умови мають задовольняти елементи $a$ і $b$ з напівгрупи $T_M$ усіх перетворень множини $M$, щоб у цій напівгрупі рівняння $ax = b$ мало хоча б один розв'язок?*

*Розв'язання.* Якщо елемент $a$ "склеює" дві різні точки $\lambda$ і $\mu$ із $M$, тобто $a(\lambda) = a(\mu)$, то для довільного елемента $x \in T_M$ $(ax)(\lambda) = x(a(\lambda)) = x(a(\mu)) = (ax)(\mu)$. Тому для існування розв'язку рівняння $ax = b$ необхідно, щоб виконувалась умова

$$a(\lambda) = a(\mu) \;\Rightarrow\; b(\lambda) = b(\mu)\ . \tag{1}$$

Доведемо, що умова (1) також є достатньою. Для цього для кожного $\mu$ з області значень $\operatorname{Im} a$ елемента $a$ виберемо довільно таку точку $\lambda \in M$, що $a(\lambda) = \mu$, і покладемо $x(\mu) = \gamma$, де $\gamma = b(\lambda)$. З умови (1) випливає, що значення $x$ у точці $\mu$ визначається однозначно. На точках із $M \diagdown \operatorname{Im} a$ значення елемента $x$ можна визначити довільно. Тоді для довільної точки $\lambda \in M$

$$(ax)(\lambda) = x(a(\lambda)) = x(\mu) = \gamma = b(\lambda),$$

тобто $x$ є розв'язком рівняння $ax = b$. □

**Задача 3.** *Чи утворює напівгрупу, моноїд або групу відносно композиції множина всіх осьових симетрій площини?*

*Розв'язання.* Композиція двох осьових симетрій є поворотом площини навколо точки перетину осей, якщо ці осі перетинаються, і паралельним переносом у протилежному випадку. Отже, множина всіх осьових симетрій площини не є замкненою відносно композиції, а тому жодної з указаних алгебричних структур не утворює. □

**Задача 4.** *Чи утворює групу множина симетричних (кососиметричних) матриць відносно множення?*

*Розв'язання.* Не утворює, оскільки добуток двох симетричних матриць не завжди є симетричною матрицею, наприклад, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Аналогічно — для кососиметричних матриць. □

## Основні задачі

**5.** Доведіть, що множина $T_M$ усіх перетворень множини $M$ (якщо $M = \{1, 2, \cdots, n\}$, то вживають також позначення $T_n$) утворює напівгрупу з одиницею відносно композиції перетворень, і знайдіть усі ліві й праві нулі цієї напівгрупи.

**6.** Які умови мають задовольняти елементи $a$ і $b$ з напівгрупи $T_M$, $|M| < \infty$, щоб у цій напівгрупі: a) рівняння $ax = b$ мало рівно один розв'язок; b) рівняння $ya = b$ мало хоча б один розв'язок; c) рівняння $ya = b$ мало рівно один розв'язок?

**7.** Знайдіть необхідні й достатні умови, за яких елемент $\tau$ напівгрупи $T_M$ буде ідемпотентом.

**8.** Чи утворює напівгрупу, моноїд або групу відносно якоїсь із дій:
1) додавання; 2) множення; 3) суперпозиція, така множина скрізь визначених дійсних функцій: a) множина всіх поліномів; b) множина всіх поліномів, які не містять непарних степенів змінної; c) множина всіх поліномів степеня 5; d) множина всіх періодичних функцій; e) множина всіх неперервних функцій; f) множина всіх функцій, диференційовних щонайменше $k$ разів; g) множина всіх обмежених функцій?

**9.** Чи утворює напівгрупу, моноїд або групу відносно композиції перетворень така множина перетворень площини: a) усі паралельні переноси; b) усі повороти навколо даної точки; c) усі повороти навколо довільних точок; d) усі центральні симетрії; e) усі паралельні переноси й осьові симетрії; f) усі паралельні переноси й повороти навколо довільних точок?

**10.** Чи утворює групу множина: a) симетричних матриць відносно додавання; b) кососиметричних матриць відносно додавання; c) невироджених матриць відносно додавання; d) невироджених матриць відносно множення; e) матриць із фіксованим визначником $d$ відносно множення; f) діагональних матриць відносно додавання; g) діагональних матриць відносно множення; h) верхніх трикутних матриць відносно множення; i) верхніх нільтрикутних матриць відносно множення; j) верхніх нільтрикутних матриць відносно додавання; k) верхніх унітрикутних матриць відносно множення; l) усіх ортогональних матриць відносно множення; m) верхніх нільтрикутних матриць відносно операції $X \circ Y = X + Y - XY$?

**11.** Чи утворює групу відносно множення підстановок множина всіх підстановок із $S_n$, які: a) парні; b) непарні; c) мають принаймні 1 нерухому точку; d) мають не більше $k$ інверсій (число $k > 0$ — фіксоване)?

**12.** Для яких натуральних $n$ множина $\mathbb{R}$ з дією $x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ буде групою?

**13.** Побудуйте таблицю Келі для групи $K_4$.

**14.** Доведіть, що множина функцій $\{x, 1-x, \frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}\ \frac{x-1}{x}, \frac{x}{x-1}\}$ утворює групу відносно суперпозиції функцій і побудуйте для цієї групи таблицю Келі.

**15.** Доведіть, що: a) множина $G = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ з дією $a * b = ab - a - b + 2$; b) множина $G = [0, 1)$ з дією $*$, де $a * b$ дорівнює дробовій частині числа $a + b$; c) множина $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ з дією $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ утворює групу.

## Додаткові задачі

**16.** Доведіть, що порядок групи поворотів правильного багатогранника дорівнює подвоєній кількості його ребер.

**17.** Полюсом правильного багатогранника $T$ називається точка його поверхні, яка лишається нерухомою при деякому нетривіальному повороті з групи $G$ поворотів цього багатогранника. Доведіть, що кількість полюсів правильного багатогранника $T$ дорівнює $|G| + 2$.

**18.** Підрахуйте кількість ідемпотентів у напівгрупі $T_n$.

**19.** Доведіть, що довільна скінченна напівгрупа $M$ містить ідемпотент.

## Домашнє завдання

**20.** Нехай $(M, \cdot)$ — напівгрупа і елемент $a \in M$ — фіксований. Визначимо на $M$ нову дію: $x * y = xay$. a) Доведіть, що $(M, *)$ також є напівгрупою. b) Чи буде напівгрупа $(M, *)$ моноїдом, якщо $(M, \cdot)$ — моноїд?

**21.** Нехай $a$ – фіксований елемент напівгрупи $S$. Укажіть усі можливі набори властивостей зі списку: a) $a$ – лівий нуль; b) $a$ – ліва одиниця; c) $a$ – правий нуль; d) $a$ – права одиниця, які можуть виконуватись для елемента $a$ одночасно.

**22.** Підрахуйте кількість ідемпотентів у напівгрупі: a) $T_4$; b) $T_5$.

**23.** Доведіть, що множина $\mathfrak{B}(M)$ усіх бінарних відношень на множині $M$ утворює напівгрупу з одиницею відносно дії $\varphi * \psi = \{(x,z) \ : \ \exists\, y \ (x,y) \in \varphi \ i \ (y,z) \in \psi\}$. Скільки оборотних елементів має ця напівгрупа, якщо $|M| = n$?

**24.** Чи утворює групу відносно множення підстановок множина тих підстановок із $S_n$, які: a) рухають не більше $k$ елементів (число $k > 0$ — фіксоване); b) є транспозиціями?

**25.** Побудуйте таблицю Келі для груп: a) $GL_2(\mathbb{Z}_2)$; b) $D_4$.

**26.** Доведіть, що: a) множина $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ з дією $x * y = x + y + xy$; b) множина $\mathbb{Z}$ з дією $m * n = m + n + 2007$; c) множина $\mathbb{Z}$ з дією $m \circ n = m + (-1)^m n$ утворює групу.

**27.** Доведіть, що $2^M$ є групою відносно операції симетричної різниці $\triangle$.

*Література.* [1, с. 21–25], [3, с. 101–105, 109–112], [4, с. 139–141], [7, с. 243–244], [2, с. 272–278, 309–320], [5, с. 139–141].

# Заняття 3. Підгрупи

## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.** *Знайдіть усі підгрупи групи $GL_2(\mathbb{Z}_2)$.*

*Розв'язання.* Кожна група містить лише одну підгрупу порядку 1 — одиничну. У нашому випадку це підгрупа $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$. Далі скористаємось таблицею Келі для групи $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ (див. зад. 2.19 a)). Для зручності позначимо $G = GL_2(\mathbb{Z}_2)$, $e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $x = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $y = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $z = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Підгрупа порядку 2 має вигляд $H = \{e, a\}$, де елемент $a$ задовольняє умову $a^2 = e$. З таблиці Келі видно, що в групі $G$ таких елементів 3. Тому $G$ містить 3 підгрупи порядку 2: $H_1 = \{e, x\}$, $H_2 = \{e, y\}$, $H_3 = \{e, z\}$. З тієї самої таблиці видно, що $G$ містить підгрупу $H_4 = \{e, u, v\}$ порядку 3.

Доведемо тепер, що коли підгрупа $H$ містить якусь відмінну від $u$, $v$ пару неодиничних елементів, то вона збігається з групою $G$. Справді, з рівностей $xy = v$, $v^2 = u$, $xu = z$ випливає, що $\langle x, y\rangle = G$. З рівностей

$xv = y$ і $vy = x$ випливає, що $\langle x, v\rangle = \langle y, v\rangle = \langle x, y\rangle = G$. Оскільки $u^2 = v$, то $\langle x, u\rangle = \langle x, v\rangle$ і $\langle y, u\rangle = \langle y, v\rangle$. З рівностей $x = zu^2$, $u = xz$ отримуємо, що $\langle z, u\rangle = \langle z, x\rangle = \langle x, u\rangle = G$. Нарешті, з рівностей $yz = v$ і $zv = x$ випливає, що $\langle y, z\rangle = \langle y, v\rangle$ і $\langle z, v\rangle = \langle v, x\rangle$. Таким чином, група $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ містить 6 підгруп: $E$, $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ і саму $GL_2(\mathbb{Z}_2)$. □

**Задача 2.** *Доведіть, що група $\mathbb{C}_{p^\infty}$ не має власних нескінченних підгруп.*

*Розв'язання.* Зауважимо, що коли $m < k$, то $\mathbb{C}_{p^m} < \mathbb{C}_{p^k}$ і для довільного $a \in \mathbb{C}_{p^k} \diagdown \mathbb{C}_{p^{k-1}}$ степенями елемента $a$ вичерпується вся група $\mathbb{C}_{p^k}$, тобто $\mathbb{C}_{p^k} \diagdown \mathbb{C}_{p^{k-1}}$ складається з первісних коренів степеня $p^k$ з 1.

Нехай тепер $H \le \mathbb{C}_{p^\infty}$. Розглянемо множину

$$M = \{k : H \cap (\mathbb{C}_{p^k} \diagdown \mathbb{C}_{p^{k-1}}) \neq \emptyset\} .$$

Можливі два випадки.

1) Множина $M$ — скінченна. Тоді серед її елементів є найбільший. Нехай це $m$. З означення $M$ випливає, що $H \le \mathbb{C}_{p^m}$. Отже, у цьому випадку підгрупа $H$ є скінченною.

2) Множина $M$ — нескінченна. Тоді для довільного натурального числа $k$ знайдеться таке $m \in M$, що $k < m$. Оскільки $H \cap (\mathbb{C}_{p^m} \diagdown \mathbb{C}_{p^{m-1}}) \neq \emptyset$, то із зауваження на початку розв'язання випливає, що $\mathbb{C}_{p^m} \le H$. Однак тоді і $\mathbb{C}_{p^k} \le H$. Отже, у цьому випадку всі групи $\mathbb{C}_{p^k}$ містяться в $H$, звідки

$$\mathbb{C}_{p^\infty} = \bigcup_k \mathbb{C}_{p^k} \le H.$$

Тому $H = \mathbb{C}_{p^\infty}$, тобто підгрупа $H$ не є власною. □

**Задача 3.** *Для полінома $f$ від змінних $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ позначимо символом $G_f$ множину тих підстановок, які не змінюють $f$, а саме $G_f = \{\sigma \in S_4 : f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$. Доведіть, що $G_f$ – підгрупа в $S_4$, і знайдіть цю підгрупу для полінома $f = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$.*

*Розв'язання.* Нехай підстановка $\pi$ не змінює полінома $f$. Оскільки $\pi \cdot \pi^{-1} = \varepsilon$ і очевидно, що $\varepsilon$ не змінює $f$, то $\pi^{-1}$ також не може змінювати $f$. Крім того, якщо кожна з підстановок $\pi$ і $\tau$ не змінює $f$, то їх послідовне виконання — добуток $\pi\tau$ — також не змінює $f$. Отже, множина $G_f$ замкнена відносно взяття оберненого елемента та множення, а тому є підгрупою групи $S_4$.

Зауважимо, що змінні $x_1$ і $x_4$ зустрічаються в даному поліномі $f$ по одному разу, а $x_2$ і $x_3$ — по два рази. Тому довільна підстановка з $G_f$ або лишає 1 і 4 на місці, або переставляє ці числа між собою. Аналогічне зауваження стосується й чисел 2 і 3. Отже, кандидатами в групу $G_f$ можуть бути лише 4 підстановки: $\varepsilon$, (14), (23) і (14)(23). Безпосередньо перевіряється, що поліном $f$ не змінюють лише $\varepsilon$ і (14)(23). $\square$

## Основні задачі

**4.** Доведіть, що коли скінченна підмножина $H$ групи $G$ замкнена відносно дії, що задана на $G$, то $H$ — підгрупа групи $G$.

**5.** Знайдіть кількість тих підстановок із групи $S_9$, які комутують із підстановкою $\pi$: a) $\pi = (123456789)$; b) $\pi = (123)(456789)$.

**6.** Доведіть, що підмножина $G \subseteq \mathbb{Z}$ буде підгрупою групи $\mathbb{Z}$ тоді й лише тоді, коли $G$ замкнена відносно віднімання.

**7.** У кожній із множин укажіть найменше додатне число і з'ясуйте, чи утворює ця множина підгрупу групи $\mathbb{Z}$: a) усі цілі числа, певний степінь яких ділиться на 32; b) усі цілі числа, взаємно прості з числом 5; c) усі цілі числа, на які ділиться число 24; d) усі цілі числа, які діляться на 10 і квадрат яких ділиться на 40; e) усі такі цілі числа $m$, що $10m$ ділиться на 8.

**8.** Чи буде підгрупою в групі $\mathbb{Q}^*$ підмножина всіх тих додатних раціональних чисел, у нескоротному записі яких знаменник є степенем числа 3?

**9.** Знайдіть усі підгрупи груп: a) $S_3$; b) $Q_8$.

**10.** Доведіть, що група $\mathbb{Z}$ не має власних неодиничних скінченних підгруп.

**11.** Знайдіть у групі $S_4$ підгрупу $G_f$ тих підстановок, які не змінюють поліном $f$, якщо: a) $f = x_1^2 + x_2x_3x_4$; b) $f = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

**12.** Сформулюйте необхідну й достатню умову для того, щоб об'єднання $A \cup B$ підгруп $A, B$ групи $G$ також було підгрупою групи $G$.

**13.** Доведіть, що для скінченних підгруп $A$ і $B$ групи $G$ виконується рівність $|A| \cdot |B| = |A \cap B| \cdot |AB|$.

## Додаткові задачі

**14.** Чи буде підгрупою групи $S_{\mathbb{N}}$ усіх взаємно однозначних перетворень множини $\mathbb{N}$ множина всіх тих перетворень $\sigma$, які задовольняють умову: $\sigma(k) = k$ майже для всіх натуральних чисел $k$ (тобто для всіх $k \in \mathbb{N}$, крім, можливо, скінченного їх числа)?

**15.** Доведіть, що коли для підгруп $A, B, A_1, B_1$ групи $G$ виконуються включення $A \leq A_1, B \leq B_1$, то має місце рівність $(A \cdot B) \cap A_1 \cap B_1 = (A \cap B_1) \cdot (A_1 \cap B)$.

**16.** Доведіть, що коли для підгруп $A, B, C$ групи $C$ виконуються включення $A \leq C \subseteq A \cdot B$, то мають місце рівності $C = (A \cdot B) \cap C = A \cdot (B \cap C)$.

**17.** Знайдіть кількість тих підстановок із групи $S_9$, які комутують із підстановкою $\pi$: a) $\pi = (123)(456)(789)$; b) $\pi = (1234)(5678)$.

## Домашнє завдання

**18.** Чи буде підгрупою групи $S_{\mathbb{N}}$ усіх взаємно однозначних перетворень множини $\mathbb{N}$ множина всіх тих перетворень $\sigma$, для яких $\sigma(k) \geq k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$?

**19.** Знайдіть усі підгрупи групи $D_4$.

**20.** Доведіть, що ортогональні матриці з групи $GL_n(\mathbb{Z})$ утворюють скінченну підгрупу і знайдіть порядок цієї підгрупи.

**21.** Доведіть, що в довільній групі: a) перетин довільного набору підгруп є підгрупою; b) якщо підгрупа $G$ міститься в об'єднанні двох підгруп $A$ та $B$, то або $C \subseteq A$, або $C \subseteq B$.

**22.** Доведіть, що скінченна піднапівгрупа довільної групи є підгрупою. Чи вірне це твердження, якщо піднапівгрупа нескінченна?

**23.** Знайдіть усі елементи групи $SL_2(\mathbb{R})$, що комутують з даним елементом $g = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$ (централізатор елемента $g$).

**24.** Знайдіть у групі $S_4$ підгрупу $G_f$ тих підстановок, які не змінюють поліном $f$, якщо: a) $f = x_1x_2 + x_3x_4$; b) $f = x_1x_2x_3x_4$.

*Література.* [1, с. 25–27], [3, с. 105–106], [7, с. 244–245], [2, с. 278–280].

# Заняття 4. Системи твірних та циклічні групи

## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.** *Доведіть, що кожна з наведених множин є системою твірних групи* $A_n$: a) *множина всіх циклів довжиною* 3 $(n \geq 3)$; b) $\{(123)$, $(124)$, $(125)$, $\ldots$, $(12n)\}$ $(n \geq 5)$.

*Розв'язання.* a) Оскільки кожну парну підстановку можна розкласти в добуток парної кількості транспозицій, то досить показати, що добуток двох транспозицій $(ab)(cd)$ можна записати у вигляді добутку циклів довжиною 3. Якщо $a$, $b$, $c$, $d$ – попарно різні, то $(ab)(cd) = (abc)(adc)$; якщо ж транспозиції $(ab)$ та $(cd)$ мають спільну точку (не обмежуючи загальності, можна вважати, що $a = c$), то $(ab)(ad) = (abd)$.

b) Згідно з п. a) множина всіх циклів довжиною 3 є системою твірних групи $A_n$. Тому покажемо, що довільний цикл довжиною 3 розкладається в добуток циклів із множини $\{(123), (124), (125), \ldots, (12n)\}$. Нехай елементи $i$, $j$, $k$ — попарно різні й відмінні від 1 та 2. Очевидно, що цикли вигляду $(12i)$ та $(21i)$ розкладаються в добуток циклів з даної множини. Крім того, $(12i)(12j)(12j) = (2ij)$. Аналогічно одержується розклад для циклу $(1ij)$. Нарешті, $(12i)(12j)(12j)(12k)(12i)(12i) = (ijk)$. □

**Задача 2.** *Доведіть, що група* $\mathbb{Q}^*$ *не має скінченних систем твірних. Укажіть яку–небудь незвідну систему твірних цієї групи.*

*Розв'язання.* Яку б скінченну систему $\{a_1, \ldots, a_k\}$ раціональних чисел ми не взяли, у нескоротних записах $a_1 = \frac{n_1}{m_1}, \ldots, a_k = \frac{n_k}{m_k}$ цих чисел буде зустрічатися лише скінченна кількість $p_1, \ldots, p_r$ простих чисел. Оскільки простих чисел нескінченно багато, то існує відмінне від $p_1, \ldots, p_r$ просте число $p$. Очевидно, що $p \in \mathbb{Q}^*$ і що записати $p$ у вигляді добутку чисел із множини $\{a_1, \ldots, a_k, a_1^{-1}, \ldots, a_k^{-1}\}$ не можна.

Доведемо, що поповнена числом $-1$ множина простих чисел $S = \{-1, 2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ є незвідною системою твірних групи $\mathbb{Q}^*$. Справді, з існування розкладу натурального числа в добуток простих випливає, що кожне число $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}^*$ можна подати у вигляді

$$\frac{n}{m} = (-1)^{\varepsilon} p_{l_1}^{k_1} \ldots p_{l_t}^{k_t} p_{r_1}^{-h_1} \ldots p_{r_j}^{-h_j},$$

де $(-1)^{\varepsilon} p_{l_1}^{k_1} \ldots p_{l_t}^{k_t}$ і $p_{r_1}^{h_1} \ldots p_{r_j}^{h_j}$ — канонічні розклади чисельника $n$ і знаменника $m$ відповідно. Отже, множина $S$ є системою твірних групи $\mathbb{Q}^*$.

Очевидно, що $S\diagdown\{-1\}$ не є системою твірних групи $\mathbb{Q}^*$. Крім того, з єдності розкладу натурального числа в добуток простих випливає, що жодне просте число $p$ не можна подати у вигляді добутку елементів з $S\diagdown\{p\}$ або їх обернених, тобто що $S\diagdown\{p\}$ також не є системою твірних. Це доводить незвідність системи $S$. $\square$

**Задача 3.** *Нехай $a$ — твірний елемент циклічної групи $C_n$. Доведіть, що $a^k$ буде твірним елементом групи $C_n$ тоді й лише тоді, коли числа $k$ і $n$ — взаємно прості.*

*Розв'язання.* Без обмеження загальності можна вважати, що циклічна група $C_n$ — це $\mathbb{C}_n$. Тоді наше твердження безпосередньо випливатиме з теореми про вигляд та кількість первісних коренів $n$–го степеня з 1. $\square$

**Задача 4.** *Яким може бути порядок циклічної групи, якщо твірний елемент у ній можна вибрати рівно*: a) 6; b) 7; c) 8 *способами*?

*Розв'язання.* З попередньої задачі випливає, що кількість твірних елементів у циклічній групі порядку $n$ дорівнює $\varphi(n)$, де $\varphi(n)$ – функція Ойлера. Те, що твірний елемент можна вибрати $k$ способами, означає, що $\varphi(n) = k$. Якщо $n = p_1^{k_1} \dots p_t^{k_t}$ – канонічний розклад числа $n$ у добуток попарно різних простих чисел, то $\varphi(n) = p_1^{k_1-1} \dots p_t^{k_t-1}(p_1 - 1) \dots (p_t - 1)$.

a) $\varphi(n) = 6 = 2 \cdot 3$. Тоді можливі такі випадки: $6 = 7 - 1$ і $n = 7$, $6 = 3 \cdot (3 - 1)$ і $n = 3^2$, $6 = (2 - 1)(7 - 1)$ і $n = 2 \cdot 7$, $6 = 3 \cdot (2 - 1) \cdot (3 - 1)$ і $n = 2 \cdot 3^2$. Отже, порядок циклічної групи може бути або 7, або 9, або 14, або 18.

b) $\varphi(n) = 7$. З формули для $\varphi(n)$ легко бачити, що жодне натуральне $n$ таку умову не задовольняє.

c) $\varphi(n) = 8 = 2 \cdot 4$. Оскільки $8 + 1 = 9$ не є простим числом, то простими дільниками числа $n$ можуть бути лише 2, $2+1 = 3$ і $4+1 = 5$. Отже, $n = 2^k 3^l 5^m$. Легко зрозуміти, що $k \leq 4$, $m \leq 1$, $l \leq 1$. Далі нескладним перебиранням переконуємося, що є лише такі можливості для $n$: 15, 16, 20, 24 або 30. $\square$

**Задача 5.** *Скільки різних циклічних підгруп містить група $D_4$?*

*Розв'язання.* Поворот на $0^\circ$ породжує циклічну підгрупу $\{0^\circ\}$ порядку 1. Кожна з осьових симетрій і поворот на $180^\circ$ породжують циклічну підгрупу порядку 2, причому ці 5 підгруп будуть попарно різними. Кожен з поворотів на $90^\circ$ і на $270^\circ$ породжує одну і ту ж циклічну підгрупу $\{0°, 90°, 180°, 270°\}$ порядку 4. Інших елементів група $D_4$ не містить. Таким чином, $D_4$ має 7 різних циклічних підгруп. $\square$

**Задача 6.** *Доведіть, що для кожного натурального числа $k$ група $\mathbb{Z}$ містить $k$–елементну незвідну систему твірних. Чи існують у групі $\mathbb{Z}$ нескінченні незвідні системи твірних?*

*Розв'язання.* Нехай $p_1, \ldots, p_k$ – попарно різні прості числа і для $i \in \{1, \ldots, k\}$ позначимо

$$n_i = \frac{p_1 \cdots p_k}{p_i} .$$

Покажемо, що множина $S = \{n_1, \ldots, n_k\}$ є незвідною системою твірних групи $\mathbb{Z}$. Легко бачити, що НСД$(n_1, \ldots, n_k) = 1$. Тоді з алгоритму Евкліда випливає, що число 1 можна зобразити у вигляді $1 = l_1 \cdot n_1 + \ldots + l_k \cdot n_k$, де $l_1, \ldots, l_k$ – цілі числа, тобто 1 виражається через елементи системи $S$ та протилежні їм. Однак $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$. Тому $S$ є системою твірних. Якщо з цієї системи викинути елемент $n_i$, то числа, що залишаться, будуть ділитися на $p_i$. Однак тоді кожне число вигляду $m_1 n_1 + \cdots + m_{i-1} n_{i-1} + m_{i+1} n_{i+1} + \cdots + m_k n_k$ також буде ділитися на $p_i$, а тому число 1 через систему $\{n_1, \ldots, n_{i-1}, n_{i+1}, \ldots, n_k\}$ не виражатиметься.

Нескінченних незвідних систем твірних для групи $\mathbb{Z}$ не існує. Справді, нехай $S$ — нескінченна система твірних групи $\mathbb{Z}$. Оскільки число 1 має через цю систему виражатись, то існують такі $a_1, \ldots, a_k \in S$ і цілі числа $l_1, \ldots, l_k$, що $1 = l_1 a_1 + \cdots + l_k a_k$. Однак тоді системою твірних групи $\mathbb{Z}$ буде і скінченна множина $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset S$. $\square$

## Основні задачі

**7.** Які з множин є системами твірних групи $S_n$: a) множина всіх транспозицій; b) множина всіх циклів довжиною 3 ($n \geq 3$); c) множина всіх циклів довжиною 4 ($n \geq 4$)?

**8.** Доведіть, що множина всіх осьових симетрій площини є системою твірних групи всіх рухів площини.

**9.** Доведіть, що група $\mathbb{Q}$ не має скінченних систем твірних.

**10.** Укажіть серед даних груп циклічні: a) $\mathbb{Z}_{10}^*$; b) $\mathbb{Z}_{11}^*$; c) $\mathbb{Z}_{12}^*$; d) $\mathbb{Z}_{14}^*$.

**11.** Скількома способами можна вибрати твірний елемент у циклічній групі порядку: a) 6120; b) 8700; c) 2820?

**12.** Скільки різних підгруп має циклічна група порядку: a) 6120; b) 8700; c) 2820?

**13.** Опишіть усі 2–елементні незвідні системи твірних групи $\mathbb{Z}$.

**14.** Скількома способами можна вибрати незвідну 2–елементну систему твірних у циклічній групі порядку: a) 15; b) 18; c) 25?

**15.** Опишіть ґратку підгруп груп: a) $C_4$; b) $C_6$; c) $C_{12}$; d) $C_{16}$.

**16.** Опишіть усі групи, які мають найбільшу власну підгрупу.

**17.** Опишіть усі групи, які мають рівно: a) 3; b) 4 підгрупи.

## Додаткові задачі

**18.** Скільки різних 2–елементних систем твірних має група: a) $S_3$; b) $D_5$; c) $Q_8$?

**19.** a) Доведіть, що в групі $S_5$ кожний неодиничний елемент можна доповнити до 2–елементної системи твірних. b) Доведіть, що жодна 2–елементна система твірних групи $S_4$ не містить підстановок вигляду $(ab)(cd)$.

**20.** Знайдіть необхідну й достатню умову того, що повний цикл $(a_1a_2\dots a_n)$ і транспозиція $(ij)$ породжують усю групу $S_n$.

**21.** Доведіть, що для кожного $n > 2$ у групі $S_n$ існує система твірних із трьох інволюцій.

**22.**** Доведіть, що група $\mathbb{Q}$ не має незвідних систем твірних.

**23.** Скільки різних 2–елементних систем твірних має група $A_4$?

**24.** Множина всіх підгруп групи $G$ утворює ланцюг, якщо для довільних двох її підгруп одна міститься в іншій. a) Доведіть, що підгрупи циклічної групи порядку $p^n$, де $p$ — просте число, утворюють ланцюг. b) Знайдіть усі скінченні групи, у яких підгрупи утворюють ланцюг. c) Знайдіть усі групи, у яких підгрупи утворюють ланцюг.

## Домашнє завдання

**25.** Які з множин є системами твірних групи $S_n$:
a) $\{(12), (23), (34), \dots, (n-1, n)\}$; b) $\{(12), (123\dots n)\}$?

**26.** Доведіть, що в групі $\mathbb{Q}$ кожна скінченно–породжена підгрупа є циклічною.

**27.** Скільки різних 2–елементних систем твірних має група $D_4$?

**28.** Доведіть, що в групі $\mathbb{C}_{p^\infty}$: a) кожна скінченно–породжена підгрупа є скінченною циклічною групою; b) кожна власна підгрупа є скінченною циклічною групою.

**29.** Яким може бути порядок циклічної групи, якщо твірний елемент у ній можна вибрати рівно: a) 10; b) 12 способами?

**30.** Опишіть ґратку підгруп груп: a) $C_{pq}$; b) $C_{pqr}$; c) $C_{p^2q}$, де $p, q, r$ — різні прості числа.

**31.** Скільки різних циклічних підгруп містить група $S_4$?

**32.** Скількома способами можна вибрати незвідну 2-елементну систему твірних у циклічній групі порядку: a) 20; b) 27?

**33.** Зобразіть групу $\mathbb{Q}$ у вигляді об'єднання зростаючого ланцюга циклічних підгруп.

**34.** Доведіть, що довільна скінченна підгрупа $H$ групи $\mathbb{C}^*$– циклічна.

*Література.* [1, с. 28–31], [3, с. 107–109, 431], [4, с. 142–146], [7, с. 246–247, 254–255, 277], [2, с. 278–280], [6, с. 22–23].

# Заняття 5. Порядок елемента

## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.** *Знайдіть порядки всіх елементів групи* $\mathbb{Z}_{11}^*$ *і з'ясуйте, які з елементів будуть її твірними.*

*Розв'язання.* Порядком елемента $a$ є таке найменше натуральне число $k$ (якщо воно існує), що $a^k = e$, де $e$ — нейтральний елемент групи. Обчислимо послідовні степені елемента $\bar{2}$: $\bar{2}^1 = \bar{2}$, $\bar{2}^2 = \bar{4}$, $\bar{2}^3 = \bar{8}$, $\bar{2}^4 = \bar{5}$, $\bar{2}^5 = \overline{10}$, $\bar{2}^6 = \bar{9}$, $\bar{2}^7 = \bar{7}$, $\bar{2}^8 = \bar{3}$, $\bar{2}^9 = \bar{6}$, $\bar{2}^{10} = \bar{1}$. Звідси випливає, що елементи $\bar{2} = \bar{2}^1$, $\bar{8} = \bar{2}^3$, $\bar{7} = \bar{2}^7$ і $\bar{6} = \bar{2}^9$ мають порядок 10, елементи $\bar{4} = \bar{2}^2$, $\bar{5} = \bar{2}^4$, $\bar{9} = \bar{2}^6$ і $\bar{3} = \bar{2}^8$ — порядок 5, елемент $\overline{10} = \bar{2}^5$ — порядок 2 і елемент $\bar{1}$ — порядок 1. $\square$

**Задача 2.** *Знайдіть кількість елементів кожного можливого порядку в групі $A_6$.*

*Розв'язання.* Можливими цикловими типами елементів симетричної групи $S_6$ є: $(abcdef)$, $(abcde)(f)$, $(abcd)(ef)$, $(abcd)(e)(f)$, $(abc)(def)$, $(abc)(de)(f)$, $(abc)(d)(e)(f)$, $(ab)(cd)(ef)$, $(ab)(cd)(e)(f)$, $(ab)(c)(d)(e)(f)$, $(a)(b)(c)(d)(e)(f)$. Оскільки підстановка є парною тоді й лише тоді, коли вона містить парну кількість циклів парної довжини, то парним підстановкам (тобто елементам з $A_6$) відповідають типи $(abcde)(f)$, $(abcd)(ef)$, $(abc)(def)$, $(abc)(d)(e)(f)$, $(ab)(cd)(e)(f)$ і $(a)(b)(c)(d)(e)(f)$. Крім того, порядок підстановки є найменшим спільним кратним довжин її незалежних циклів. Тому підстановки циклового типу $(abcde)(f)$ мають порядок 5 і їх буде $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2/5 = 144$. Аналогічно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2/(4 \cdot 2) = 90$ підстановок циклового типу $(abcd)(ef)$ мають порядок $\text{НСК}(4,2) = 4$; $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2/(3 \cdot 3 \cdot 2!) = 40$ підстановок циклового типу $(abc)(def)$ мають порядок $\text{НСК}(3,3) = 3$; $6 \cdot 5 \cdot 4/3 = 40$ підстановок циклового типу $(abc)(d)(e)(f)$ мають порядок 3; $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3/(2 \cdot 2 \cdot 2!) = 45$ підстановок циклового типу $(ab)(cd)(e)(f)$ мають порядок $\text{НСК}(2,2) = 2$. Єдина підстановка циклового типу $(a)(b)(c)(d)(e)(f)$ — тотожна — має порядок 1. Таким чином, $A_6$ містить 1 елемент порядку 1; 45 елементів порядку 2; 80 елементів порядку 3; 90 елементів порядку 4 і 144 елементи порядку 5. □

**Задача 3.** *Доведіть, що коли кожний елемент групи $G$ задовольняє рівність $x^2 = e$, то: a) група $G$ — комутативна; b) якщо $G$ — скінченна, то її порядок дорівнює $2^n$ для деякого натурального числа $n$.*

*Розв'язання.* a) Оскільки для $a, b \in G$ $(ab)^2 = abab = e$, і $a = a^{-1}$, $b = b^{-1}$, то домноживши перше співвідношення справа на $b^{-1}a^{-1}$, одержимо $ab = ba$.

b) Оскільки група $G$ — скінченна, то можна вибрати незвідну систему твірних $a_1, \ldots, a_n \in G$. З комутативності $G$ і того, що всі елементи мають порядок 2, випливає, що довільний елемент групи $G$ можна записати у вигляді $a = a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}$, де $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1\}$. Покажемо тепер, що кожен елемент із $G$ записується у такому вигляді однозначно. Справді, нехай

$$a_1^{\alpha_1} \cdots a_{k-1}^{\alpha_{k-1}} a_k^{\alpha_k} \cdots a_n^{\alpha_n} = a_1^{\beta_1} \cdots a_{k-1}^{\beta_{k-1}} a_k^{\beta_k} \cdots a_n^{\beta_n}, \tag{2}$$

де $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$, а $\alpha_k \neq \beta_k$. Можна вважати, що $\alpha_k = 1$, $\beta_k = 0$. Тоді з (2) одержуємо: $a_k = a_{k+1}^{\beta_{k+1}} \cdots a_n^{\beta_n} a_{k+1}^{-\alpha_{k+1}} \cdots a_n^{-\alpha_n}$, що суперечить незвідності системи $a_1, \ldots, a_n$. З того, що кількість записів $a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}$, де $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1\}$, дорівнює $2^n$, випливає, що $|G| = 2^n$. $\square$

**Задача 4.** *Знайдіть усі розв'язки рівняння* $x^6 = e$ *і всі елементи порядку* 6 *в циклічній групі* $C_{120} = \langle a \rangle$.

*Розв'язання.* Елемент $a^k$ буде розв'язком рівняння $x^6 = e$ тоді й лише тоді, коли $6k$ ділиться на 120, тобто коли $k$ ділиться на 20. Отже, маємо 6 розв'язків $a^{20}$, $a^{40}$, $a^{60}$, $a^{80}$, $a^{100}$ і $a^{120} = e$, серед яких шукаємо елементи порядку 6. Ними будуть $a^{20}$ і $a^{100}$. $\square$

**Задача 5.*** *Нехай* $G$ *— скінченна група,* $n$ *— найменше спільне кратне порядків елементів групи* $G$, *а число* $k$ *взаємно просте з* $n$. *Доведіть, що з рівності* $x^k = y^k$ *випливає рівність* $x = y$.

*Розв'язання.* Досить довести, що відображення $x \mapsto x^k$ групи $G$ у себе є сюр'єктивним. Нехай елемент $a \in G$ — довільний. Із взаємної простоти $n$ і $k$ випливає існування таких цілих чисел $m$ і $l$, що $1 = mn + lk$. Однак тоді з того, що $n$ ділиться на порядок елемента $a$, випливає, що $a = a^{mn+lk} = (a^n)^m \cdot (a^l)^k = (a^l)^k$. $\square$

## Основні задачі

**6.** Який порядок має елемент $a^k$, якщо $a$ має порядок $n$?

**7.** Знайдіть порядки всіх елементів даної групи і з'ясуйте, які з елементів будуть її твірними: a) група поворотів правильного 12–кутника; b) $\mathbb{Z}_{16}$; c) $\mathbb{Z}_{13}^*$.

**8.** Знайдіть порядки таких елементів групи $GL_2(\mathbb{C})$:

$$a)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad b)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad c)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad d)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**9.** Чи завжди 4 елементи $a + bi$, $a - bi$, $-a + bi$ та $-a - bi$ групи $\mathbb{C}^*$ мають однаковий порядок?

**10.** Скільки елементів порядку $k$ містить циклічна група $C_n$?

**11.** Знайдіть кількість елементів кожного можливого порядку в групах: a) $D_4$; b) $Q_8$; c) $S_4$.

**12.** Який порядок можуть мати елементи групи $S_6$?

**13.** Чи може добуток двох елементів: a) скінченного порядку мати нескінченний порядок; b) порядку 2 мати нескінченний порядок; c) нескінченного порядку мати скінченний порядок?

**14.** Доведіть, що кожна група $G$ парного порядку містить елемент порядку 2.

**15.** Чи правильно, що в довільній групі елементи: a) $ab$ і $ba$; b)$abc$ і $bca$; c) $abc$ і $cba$; d) $bab^{-1}$ і $b^{-1}ab$ завжди мають однаковий порядок?

**16.** Знайдіть усі розв'язки рівняння $x^k = e$ і всі елементи порядку $k$ у циклічній групі $C_{120} = \langle a \rangle$, якщо: a) $k = 5$; b) $k = 8$.

**17.** Доведіть, що підстановка непарного порядку завжди є парною.

## Додаткові задачі

**18.** Чи правда, що найменше спільне кратне порядків елементів $a$ і $b$ завжди ділиться на порядок елемента $ab$?

**19.** Нехай елемент $a$ має порядок $n$, $b$ — порядок $m$ і $ab = ba$. a) Доведіть, що коли числа $m$ і $n$ — взаємно прості, то порядок елемента $ab$ дорівнює $mn$, і що порядок елемента $ab$ завжди є дільником числа НСК$(m, n)$. b) Наведіть приклад, коли порядок елемента $ab$ не дорівнює НСК$(m, n)$. c)* Доведіть, що існують такі показники $k$ і $l$, що порядок елемента $a^k b^l$ дорівнює НСК$(m, n)$.

**20.** Доведіть, що коли $n = p^k$, де $p$ — просте число, то елементами порядку $n$ у групі $S_n$ будуть лише цикли довжиною $n$. Чи залишиться твердження правильним для чисел $n$ іншого вигляду?

**21.*** Знайдіть усі елементи скінченного порядку в групі $T_2(\mathbb{R})$ верхніх трикутних матриць порядку 2.

**22.*** Нехай $G$ — скінченна група, $n$ — найменше спільне кратне порядків елементів групи $G$, а число $k$ взаємно просте з $n$ . Доведіть, що для довільного $a \in G$ рівняння $x^k = a$ має єдиний розв'язок.

## Домашнє завдання

**23.** Знайдіть порядок елемента групи:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \; ; \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 8 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in S_8 \; .$$

**24.**$^{**}$ Доведіть, що елемент $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ групи $\mathbb{C}^*$ має нескінченний порядок.

**25.** Знайдіть кількість елементів кожного можливого порядку в групах: a) $D_6$; b) $A_5$.

**26.** Знайдіть максимальний порядок елемента в кожній із груп $A_n$, $S_n$ для $8 \le n \le 12$.

**27.** Знайдіть кількість елементів порядку $p^m$ у циклічній групі порядку $p^n$, якщо число $p$ — просте і $0 < m \le n$.

**28.** Доведіть, що в комутативній групі множина всіх елементів скінченного порядку утворює підгрупу. Чи залишиться це твердження правильним для некомутативних груп?

**29.** Доведіть, що коли в комутативній групі $G$ є елементи нескінченного порядку й підгрупа $H$ містить усі такі елементи, то $G = H$.

*Література.* [1, с. 30–31], [3, с. 107], [2, с. 278–280].

# Заняття 6. Ізоморфізм груп та теорема Келі

## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.** *Доведіть, що коли групи $(G, \circ)$ і $(H, *)$ ізоморфні, то рівняння $x \circ x = e_G$ і $y * y = e_H$ мають однакову кількість розв'язків у групах $G$ і $H$ відповідно.*

*Розв'язання.* Нехай $\varphi : G \to H$ — ізоморфізм. Тоді кожному розв'язку $x$ першого рівняння відповідає розв'язок $y = \varphi(x)$ другого, і навпаки, кожному розв'язку $y$ другого рівняння відповідає розв'язок $x = \varphi^{-1}(y)$ першого. Отже, $\varphi$ встановлює бієкцію між множинами розв'язків цих рівнянь. $\square$

**Задача 2.** *Доведіть, що група $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ і група $G = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$ з дією $x * y = xy - x - y + 2$ — ізоморфні.*

*Розв'язання.* Розглянемо відображення $\varphi : \mathbb{R}^+ \to G$, $x \mapsto x + 1$. Воно бієктивне і зберігає дію: $\varphi(x) * \varphi(y) = (x+1)*(y+1) = (x+1)(y+1) - (x+1) - (y+1) + 2 = xy + 1 = \varphi(xy)$ . Тому $\varphi$ є ізоморфізмом. $\square$

**Задача 3.** *З'ясуйте, чи будуть ізоморфними групи $S_3$ і $GL_2(\mathbb{Z}_2)$?*

*Розв'язання.* Якщо позначити елементи групи $S_3$ як $a_1 = e$, $a_2 = (12)$, $a_3 = (13)$, $a_4 = (23)$, $a_5 = (123)$, $a_6 = (132)$, а елементи групи $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ як $b_1 = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $b_2 = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $b_3 = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$, $b_4 = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $b_5 = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$, $b_6 = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, то таблиці Келі матимуть вигляд

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
| $a_2$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_3$ | $a_4$ |
| $a_3$ | $a_3$ | $a_6$ | $a_1$ | $a_5$ | $a_4$ | $a_2$ |
| $a_4$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
| $a_5$ | $a_5$ | $a_4$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_6$ | $a_1$ |
| $a_6$ | $a_6$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_5$ |

і

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | $b_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_1$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | $b_6$ |
| $b_2$ | $b_2$ | $b_1$ | $b_5$ | $b_6$ | $b_3$ | $b_4$ |
| $b_3$ | $b_3$ | $b_6$ | $b_1$ | $b_5$ | $b_4$ | $b_2$ |
| $b_4$ | $b_4$ | $b_5$ | $b_6$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
| $b_5$ | $b_5$ | $b_4$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_6$ | $b_1$ |
| $b_6$ | $b_6$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_2$ | $b_1$ | $b_5$ |

відповідно. Звідси видно, що відображення $a_i \mapsto b_i$, $i = 1, \ldots, 6$, є ізоморфізмом. □

**Задача 4.** *Доведіть, що групи не ізоморфні*: a) $D_6$ *і* $A_4$;
b) $(\mathbb{R}, +)$ *і* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

*Розв'язання.* a) В ізоморфних групах кількість елементів даного порядку однакова. Однак $D_6$ має сім елементів порядку 2: шість осьових симетрій і поворот на $180^\circ$, а $A_4$ — лише три: $(12)(34)$, $(13)(24)$ і $(14)(23)$.

b) У першій групі всі відмінні від нейтрального елементи мають нескінченний порядок, а в другій є елемент порядку 2 — число $-1$. □

**Задача 5.** *Розбийте групи* $C_6$, $\mathbb{C}_6$, $D_3$, $S_3$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_7^*$ *і* $\mathbb{Z}_9^*$ *на класи попарно ізоморфних.*

*Розв'язання.* Усі ці групи мають порядок 6, крім того, групи $C_6$, $\mathbb{C}_6$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_7^*$, $\mathbb{Z}_9^*$ — абелеві, а $D_3$ і $S_3$ — ні. Групи $C_6$, $\mathbb{C}_6$ і $\mathbb{Z}_6$ — циклічні. Підраховуючи порядки елементів груп $\mathbb{Z}_7^*$ і $\mathbb{Z}_9^*$, знаходимо, що $\mathbb{Z}_7^* = \langle \overline{3} \rangle$ і $\mathbb{Z}_9^* = \langle \overline{2} \rangle$, тобто ці групи теж циклічні. Однак циклічні групи однакових порядків ізоморфні. Далі, якщо занумерувати вершини правильного трикутника числами 1, 2, 3, то кожному рухові з $D_3$ природно зіставляється підстановка із $S_3$. Оскільки композиції рухів при цьому відповідає добуток підстановок, то це відображення з $D_3$ у $S_3$ є ізоморфізмом. Таким чином, $C_6 \simeq \mathbb{C}_6 \simeq \mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_7^* \simeq \mathbb{Z}_9^*$ і $D_3 \simeq S_3$. □

**Задача 6.** *Побудуйте зображення Келі групи* $GL_2(\mathbb{Z}_2)$.

*Розв'язання.* Занумеруємо елементи групи $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ так, як при розв'язанні зад. 6.3. Зі стовпчиків побудованої там таблиці Келі цієї групи одразу знаходимо підстановки, що відповідають елементам групи при зображенні Келі (нижній рядок підстановки утворюється індексами елементів відповідного стовпчика): $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = b_1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) = b_2 \mapsto \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&6&5&4&3\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right) = b_3 \mapsto \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&1&6&2&4\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) = b_4 \mapsto \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&6&5&1&3&2\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right) = b_5 \mapsto \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&3&4&2&6&1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) = b_6 \mapsto \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&2&3&1&5\end{smallmatrix}\right)$. $\square$

## Основні задачі

**7.** Доведіть, що якщо групи $(G, \circ)$ і $(H, *)$ ізоморфні, то рівняння $x \circ x = g$ має розв'язки в $G$ для довільного $g \in G$ тоді й лише тоді, коли рівняння $y * y = h$ має розв'язки в $H$ для довільного $h \in H$.

**8.** Чи можуть дві різні підгрупи циклічної групи бути ізоморфними?

**9.** Доведіть, що група $\mathbb{R}^*$ і група $G = \mathbb{R} \smallsetminus \{-1\}$ з дією $x * y = x + y + xy$ є ізоморфними.

**10.** Доведіть, що групи $(\mathbb{Q}, +)$ і $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ не ізоморфні.

**11.** Доведіть, що: a) група поворотів правильного тетраедра і група $A_4$ ізоморфні; b) групи симетрій правильного тетраедра, поворотів куба і поворотів правильного октаедра ізоморфні; c) групи симетрій куба і правильного октаедра ізоморфні; d) група поворотів куба і група $S_4$ ізоморфні; e) групи поворотів правильних додекаедра та ікосаедра ізоморфні; f) групи симетрій правильних додекаедра та ікосаедра ізоморфні.

**12.** Наведіть приклад геометричного тіла, група рухів якого ізоморфна: a) $\mathbb{Z}_2$; b) $S_3$; c) $K_4$; d) $D_4$.

**13.** З'ясуйте, чи будуть ізоморфними: a) група $S_3$ і група лінійних перетворень $x \mapsto ax + b, a \neq \bar{0}$, поля $\mathbb{Z}_3$; b) група $S_4$ і група $D_{12}$?

**14.** Доведіть, що групи не ізоморфні: a) $(\mathbb{Z}, +)$ і $(\mathbb{Q}, +)$; b) $(\mathbb{Q}, +)$ і $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

**15.** З'ясуйте, чи є серед груп $S_3$, $A_4$, $D_6$, $S_4$, $D_{12}$, $A_5$, $D_{30}$, $S_5$, $D_{60}$, $SL_2(\mathbb{Z}_2)$, $GL_2(\mathbb{Z}_3)$, $SL_3(\mathbb{Z}_2)$ ізоморфні.

**16.*** Розбийте дані групи на класи попарно ізоморфних: a) $\mathbb{Z}$; b) $7\mathbb{Z}$; c) $\mathbb{R}$; d) $\mathbb{Q}$; e) $\mathbb{C}$; f) $\mathbb{Q}^*$; g) $\mathbb{R}^*$; h) $\mathbb{C}^*$; i) $(\mathbb{R}^+, \cdot)$; j) $UT_2(\mathbb{Z})$; k) $UT_2(\mathbb{Q})$; l) $UT_2(\mathbb{R})$; m) $UT_2(\mathbb{C})$; n) група матриць $\{\left(\begin{smallmatrix}x&y\\-y&x\end{smallmatrix}\right) | x, y \in \mathbb{R}\}$ відносно додавання; o) група матриць $\{\left(\begin{smallmatrix}x&y\\-y&x\end{smallmatrix}\right) | x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0\}$ відносно множення; p)$(\{2^x | x \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ ; q) $(\{2^x | x \in \mathbb{Q}\}, \cdot)$; r) $(\{2^x | x \in \mathbb{R}\}, \cdot)$.

**17.** Побудуйте зображення Келі для груп a) $C_4$; b) $S_3$.

**18.** Скільки є різних ізоморфізмів: a) між групами $\mathbb{Z}$ і $UT_2(\mathbb{Z})$; b) між групами $(\mathbb{Z}_4, +)$ і $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$; c) між групами $(\mathbb{Z}_6, +)$ і $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$?

## Додаткові задачі

**19.** Нехай $a$ — фіксований елемент групи $(G, \cdot)$. Визначимо на $G$ дії $x * y = yx$ і $x \circ y = xay$. Доведіть, що $(G, *)$ і $(G, \circ)$ — групи, причому ізоморфні початковій групі $(G, \cdot)$.

**20.**$^{**}$ Доведіть, що група поворотів правильного додекаедра і група $A_5$ ізоморфні.

**21.**$^{**}$ Доведіть, що групи $S_4$ і $SL_2(\mathbb{Z}_3)$ не ізоморфні.

**22.**$^{*}$ Доведіть, що кожна скінченна група ізоморфна певній підгрупі деякої 2-породженої скінченної групи.

**23.**$^{*}$ Для кожного $n > 2$ наведіть приклад геометричного тіла, група рухів якого ізоморфна $\mathbb{Z}_n$.

**24.** Опишіть з точністю до ізоморфізму всі групи, у кожній з яких усі неодиничні підгрупи ізоморфні.

## Домашнє завдання

**25.** Опишіть з точністю до ізоморфізму всі групи порядку 4. Побудуйте їх таблиці Келі. Зобразіть ці групи як групи підстановок.

**26.** Побудуйте зображення Келі: a) групи $Q_8$; b) групи рухів прямокутника.

**27.** Доведіть, що група $D_4$ і група $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ з дією $(x_1, x_2, x_3) * (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1 + x_2 y_3, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ — ізоморфні.

**28.** З'ясуйте, чи ізоморфні група $(\mathbb{Z}, *)$, де $m * n = m + n + 2007$, і група $(\mathbb{Z}, \circ)$, де $m \circ n = m + (-1)^m n$.

**29.** Наведіть приклад плоскої геометричної фігури, група рухів якої ізоморфна: a) $\mathbb{Z}_2$; b) $\mathbb{Z}_3$; c) $\mathbb{Z}_4$; d) $K_4$.

**30.** Розбийте дані групи на класи попарно ізоморфних: a) $C_4$; b) $\mathbb{C}_4$; c) $K_4$; d) $\mathbb{Z}_4$; e) група симетрій прямокутника; f) група симетрій ромба; g) група підстановок $\{e, (12), (34), (12)(34)\}$; h) група підстановок $\{e, (1234), (13)(24), (1432)\}$; i) $\mathbb{Z}_5^*$; j) $\mathbb{Z}_8^*$; k) $\mathbb{Z}_{10}^*$; l) $\mathbb{Z}_{12}^*$; m) група поворотів квадрата.

**31.** Розбийте дані групи на класи попарно ізоморфних: a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}^*$; c) $(\mathbb{R}^+, \cdot)$; d) множина $\mathbb{R}$ з дією $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$; e) множина $\mathbb{R}$ з дією $x * y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$; f) множина $\mathbb{R}$ з дією $x * y = x + y + \pi\sqrt{12345}$; g) множина $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ з дією $x * y = xy/\sqrt{13}$.

*Література.* [1, с. 32–36], [3, с. 112–117], [4, с. 156–160], [2, с. 284–287], [5, с. 143–147].

# Заняття 7. Нормальні підгрупи. Теорема Лагранжа

## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.** *Доведіть, що в групі $D_6$ для кожного дільника $k$ порядку групи існує підгрупа порядку $k$.*

*Розв'язання.* $|D_6| = 12$, тому дільниками є числа 1,2,3,4,6 і 12. Порядки 1, 2, 3 і 6 мають відповідно підгрупи $E = \{0°\}$, $\{0°, 180°\}$, $\{0°, 120°, 240°\}$ і $\{0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°\}$. Порядок 12 має сама група $D_6$. Нарешті, порядок 4 має підгрупа $\{0°, 180°, s_1, s_2\}$, де $s_1$ і $s_2$ — будь–які дві осьові симетрії з $D_6$ із взаємно перпендикулярними осями. □

**Задача 2.** *З'ясуйте, чи буде нормальною в групі $G$ усіх лінійних перетворень $x \mapsto ax+b, a \neq 0$, поля $P$ :* a) *підгрупа $H_1$ усіх зсувів $x \mapsto x+b$;* b) *підгрупа $H_2$ усіх гомотетій $x \mapsto ax, a \neq 0$.*

*Розв'язання.* Нейтральним елементом групи $G$ є перетворення $\varepsilon : x \mapsto x$. Для перетворень $\varphi : x \mapsto ax + b$ і $\psi : x \mapsto cx + d$ маємо: $(\varphi \cdot \psi) : x \mapsto c(ax + b) + d = cax + (cb + d)$. Тому $\psi = \varphi^{-1}$ тоді й тільки тоді, коли $ca = 1$ і $cb + d = 0$, тобто коли $c = a^{-1}$ і $d = -a^{-1}b$.

a) Розглянемо довільні $\varphi : x \mapsto ax + b$ з $G$ і $\psi : x \mapsto x + d$ з $H_1$. Оскільки елемент $(\varphi^{-1} \cdot \psi \cdot \varphi) : x \mapsto a\big((a^{-1}x - a^{-1}b) + d\big) + b = x + ad$ також є зсувом, то підгрупа $H_1$ є нормальною.

b) Розглянемо довільні $\varphi : x \mapsto ax + b$ з $G$ і $\psi : x \mapsto cx$ з $H_2$. Якщо $c \neq 1$, то елемент $(\varphi^{-1}\cdot\psi\cdot\varphi) : x \mapsto a\big(c(a^{-1}x - a^{-1}b)\big) + b = cx + (b - cb)$ не є гомотетією. Отже, якщо поле $P$ має більше ніж 2 елементи (щоб можна було вибрати елемент $c \neq 0, 1$), то підгрупа $H_2$ не є нормальною. □

**Задача 3.** *Опишіть усі нормальні підгрупи групи $S_3$ і доведіть, що в цій групі властивість "бути нормальною підгрупою" є транзитивною.*

*Розв'язання.* Оскільки $|S_3| = 6$, то за наслідком з теореми Лагранжа порядок підгрупи може дорівнювати 1, 2, 3 або 6. Числа 2 і 3 є простими, тому кожна власна неодинична підгрупа групи $S_3$ є циклічною. Група $S_3$ містить три елементи (12), (23), (13) порядку 2 і два елементи (123), (132) порядку 3. Тому група $S_3$ має рівно шість різних підгруп: $E = \{\varepsilon\}$, $H_1 = \{\varepsilon, (12)\}$, $H_2 = \{\varepsilon, (23)\}$, $H_3 = \{\varepsilon, (13)\}$, $A_3 = \{\varepsilon, (123), (132)\}$ і $S_3$. Підгрупи $E$ і $S_3$ є нормальними. Підгрупа $A_3$ має індекс 2, а тому теж є нормальною. Лівий клас суміжності $(123) \cdot H_1 = \{(123), (23)\}$ не збігається з правим класом $H_1 \cdot (123) = \{(123), (13)\}$, тому підгрупа $H_1$ нормальною не є. Аналогічно перевіряється, що $H_2$ і $H_3$ також не є нормальними. Таким чином, нормальними підгрупами групи $S_3$ є $E$, $A_3$ і $S_3$.

Припустимо тепер, що в групі $S_3$ властивість "бути нормальною підгрупою" не є транзитивною. Тоді в $S_3$ існують три такі підгрупи $A, B, C$, що $A \lhd B, B \lhd C$, але $A \ntriangleleft C$. Якщо $A = B$, то маємо одночасно $A \lhd C$ і $A \ntriangleleft C$, що неможливо. Отже, $A \neq B$. Аналогічно доводиться, що $B \neq C$. Тому ланцюг $A \subset B \subset C$ є строго зростаючим і $A = E$, $C = S_3$. Але це суперечить припущенню, що $A \ntriangleleft C$, бо $E \lhd S_3$. Таким чином, припущення про нетранзитивність властивості "бути нормальною підгрупою" приводить до протиріччя, тому є хибним. □

**Задача 4.** *Доведіть, що кожна група $G$ порядку 6 або є циклічною, або ізоморфна групі $S_3$.*

*Розв'язання.* Припустимо, що група $G$ — не циклічна. За наслідком з теореми Лагранжа порядки її елементів можуть дорівнювати лише 2 або 3. Із зад. 5.3 b) випливає, що $G$ не може містити лише елементи порядку 2. Припустимо тепер, що $G$ містить лише елементи порядку 3. Нехай $a$ і $b$ — такі два елементи порядку 3 із $G$, що жоден з них не є степенем іншого. Тоді легко перевіряється, що 7 елементів: $e$, $a$, $a^2$, $b$, $b^2$, $ab$, $ab^2$ є попарно різними (для перших 5 елементів це очевидно, а припущення, що $ab$ або $ab^2$ збігається з якимось з попередніх елементів, одразу приводить до рівності двох елементів з першої п'ятірки). Однак група $G$ має лише 6 різних елементів. Тому вона має містити якийсь елемент $a$ порядку 3 і якийсь елемент $b$ порядку 2. Аналогічно попередньому перевіряємо, що елементи $e, a, a^2, b, ba, ba^2$ є попарно різними. Отже, $G = \{e, a, a^2, b, ba, ba^2\}$. Спробуємо побудувати таблицю Келі для

$G$. Частина таблиці заповнюється одразу:

| | $e$ | $a$ | $a^2$ | $b$ | $ba$ | $ba^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $a^2$ | $b$ | $ba$ | $ba^2$ |
| $a$ | $a$ | $a^2$ | $e$ | $*$ | | |
| $a^2$ | $a^2$ | $e$ | $a$ | | | |
| $b$ | $b$ | $ba$ | $ba^2$ | $e$ | $a$ | $a^2$ |
| $ba$ | $ba$ | $ba^2$ | $b$ | | | |
| $ba^2$ | $ba^2$ | $b$ | $ba$ | | | |

Із властивостей таблиці Келі випливає, що на місці зірочки може стояти лише $ba$ або $ba^2$. У першому випадку елементи $a$ і $b$ переставні, тому $(ba)^2 = ba \cdot ba = b^2 \cdot a^2 = a^2 \neq e$ і $(ba)^3 = ba \cdot ba \cdot ba = b^3 \cdot a^3 = b^3 = b \neq e$. Отже $|ba| \neq 2, 3$, що суперечить вибору групи $G$. Таким чином, на місці зірочки може стояти лише $ba^2$, тобто $ab = ba^2$. З урахуванням цього співвідношення вільні місця в таблиці заповнюються вже однозначно:

| | $e$ | $a$ | $a^2$ | $b$ | $ba$ | $ba^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $a^2$ | $b$ | $ba$ | $ba^2$ |
| $a$ | $a$ | $a^2$ | $e$ | $ba^2$ | $b$ | $ba$ |
| $a^2$ | $a^2$ | $e$ | $a$ | $ba$ | $ba^2$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $ba$ | $ba^2$ | $e$ | $a$ | $a^2$ |
| $ba$ | $ba$ | $ba^2$ | $b$ | $a^2$ | $e$ | $a$ |
| $ba^2$ | $ba^2$ | $b$ | $ba$ | $a$ | $a^2$ | $e$ |

Якщо тепер позначити $\varepsilon = e$, $(12) = b$, $(13) = ba$, $(23) = ba^2$, $(123) = a$, $(132) = a^2$, то одержимо таблицю Келі для групи $S_3$. Отже, групи $G$ і $S_3$ — ізоморфні. $\square$

**Задача 5.** a) *З'ясуйте, які порядки можуть мати підгрупи групи $A_4$, і знайдіть усі підгрупи кожного можливого порядку.* b) *З'ясуйте, які з цих підгруп є нормальними.* c) *Доведіть, що в групі $A_4$ властивість бути нормальною підгрупою не є транзитивною.*

*Розв'язання.* a) $|A_4| = 12$, тому за теоремою Лагранжа підгрупа може мати порядок 1, 2, 3, 4, 6 або 12. Маємо по одній підгрупі порядку 1 (це лише одинична підгрупа $E$) і порядку 12 (це сама група $A_4$). $A_4$ містить 3 елементи: (12)(34), (13)(24), (14)(23) порядку 2 і 8 елементів: (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243) порядку 3. Підгрупи порядків 2 і 3 можуть бути лише циклічними. Тому маємо 3 підгрупи: $H_1 =$

$\{\varepsilon,(12)(34)\}$, $H_2=\{\varepsilon,(13)(24)\}$, $H_3=\{\varepsilon,(14)(23)\}$ порядку 2 і 4 підгрупи: $T_1=\{\varepsilon,(123),(132)\}$, $T_2=\{\varepsilon,(124),(142)\}$, $T_3=\{\varepsilon,(134),(143)\}$, $T_4=\{\varepsilon,(234),(243)\}$ порядку 3. Підгрупа порядку 4 може містити лише елементи порядку 2 і 4. Тому єдиним кандидатом на таку підгрупу є підмножина $K_4=\{\varepsilon,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$. Легко перевіряється, що ця підмножина замкнена відносно множення, а тому справді є підгрупою. Елементів порядку 6 в $A_4$ немає. Тому, якщо $A_4$ містить підгрупу $H$ порядку 6, то із зад. 7.4 випливає, що $H\simeq S_3$. Оскільки $S_3$ містить 3 елементи порядку 2, то $H\supset K_4=\{\varepsilon,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$. Однак $K_4$ є підгрупою, а за теоремою Лагранжа група порядку 6 не може містити підгрупу порядку 4. Отже, підгруп порядку 6 в $A_4$ немає.

b) Підгрупи $E$ і $A_4$ є нормальними в $A_4$. Ліві й праві класи суміжності за підгрупою $K_4$ збігаються: $\varepsilon\cdot K_4=K_4=K_4\cdot\varepsilon$, $(123)\cdot K_4=\{(123),(243),(142),(134)\}=K_4\cdot(123)$, $(132)\cdot K_4=\{(132),(143),(234),(124)\}=K_4\cdot(132)$, тому ця підгрупа — нормальна. Для підгрупи $H_1$ маємо: $(123)\cdot H_1=\{(123),(243)\}\neq\{(123),(134)\}=H_1\cdot(123)$, тому вона не є нормальною. Аналогічно доводиться, що $H_2$ і $H_3$ також не є нормальними. Для підгрупи $T_1$ маємо: $(12)(34)\cdot T_1=\{(12)(34),(134),(234)\}\neq\{(12)(34),(243),(143)\}=T_1\cdot(12)(34)$, тому вона теж не є нормальною. Аналогічно доводиться, що і $T_2$, $T_3$, $T_4$ не є нормальними.

c) Підгрупа $H_1$ міститься в $K_4$ і є в ній нормальною як підгрупа індексу 2. У свою чергу, $K_4$ є нормальною підгрупою групи $A_4$. Однак ми пересвідчилися, що $H_1$ не є нормальною в $A_4$. Отже, у групі $A_4$ властивість бути нормальною підгрупою не є транзитивною. $\square$

**Задача 6.** *Доведіть, що будь–які дві нормальні підгрупи $A$ і $B$ групи комутують (тобто $AB=BA$), а якщо ще й $A\cap B=E$, то вони поелементно комутують (тобто $ab=ba$ для довільних $a\in A$, $b\in B$).*

*Розв'язання.* Доведемо спочатку, що $AB\subseteq BA$. Справді, для довільного елемента $ab$ з $AB$ маємо: $ab=b\cdot b^{-1}ab$. З нормальності $A$ випливає, що $b^{-1}ab\in A$. Однак тоді $ab=b\cdot b^{-1}ab\in BA$. Зворотне включення $BA\subseteq AB$ доводиться аналогічно.

Нехай тепер $a\in A$, $b\in B$. Рівність $ab=ba$ рівносильна рівності $a^{-1}b^{-1}ab=e$. Однак з нормальності $A$ і $B$ випливає, що $a^{-1}b^{-1}a\in B$ і $b^{-1}ab\in A$. Тому $a^{-1}b^{-1}ab=a^{-1}\cdot(b^{-1}ab)=(a^{-1}b^{-1}a)\cdot b\in A\cap B$. Якщо $A\cap B=E$, то $a^{-1}b^{-1}ab=e$, що й вимагалось довести. $\square$

## Основні задачі

**7.** Опишіть класи суміжності групи $G$ за підгрупою $H$, якщо: a) $G = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{Z}$; b) $G = \mathbb{C}$, $H = \mathbb{R}$; c) $G = \mathbb{C}^*$, $H = \mathbb{R}^*$; d) $G = GL_n(\mathbb{R})$, $H = SL_n(\mathbb{R})$; e) $G = \mathbb{C}^*$, $H = \mathbb{R}^+$; f) $G = \mathbb{C}^*$, $H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

**8.** Опишіть ліві й праві класи суміжності: a) циклічної групи $\langle a \rangle$ порядку 24 за підгрупою $\langle a^4 \rangle$; b) групи кватерніонів $Q_8$ за підгрупою $\{1, -1\}$.

**9.** Доведіть такі твердження: a) будь–які дві підгрупи групи $G$ взаємно простих порядків перетинаються по одиничній підгрупі; b) якщо порядок групи $G$ є добутком двох простих чисел, то будь-які дві різні власні підгрупи групи $G$ перетинаються по одиничній підгрупі.

**10.** Доведіть, що в групі $S_4$ для кожного дільника $k$ порядку групи існує підгрупа порядку $k$.

**11.** Наведіть приклад скінченної групи, у якій індекси всіх власних неодиничних підгруп: a) попарно різні; b) однакові.

**12.** Наведіть приклад нескінченної групи, у якій індекси власних неодиничних підгруп: a) попарно різні; b) однакові.

**13.** Наведіть приклад таких групи $G$ і підгрупи $H$, що: a) $|H| = \infty$, $|G : H| < \infty$; b) $1 < |H| < \infty, |G : H| = \infty$; c) $|H| = \infty, |G : H| = \infty$.

**14.** Чи буде нормальною підгрупою групи $GL_n(\mathbb{R})$ підгрупа: a) усіх невироджених матриць з раціональними коефіцієнтами; b) усіх скалярних матриць; c) усіх діагональних матриць; d) усіх верхніх трикутних матриць; e) усіх матриць з додатними визначниками; f) усіх ортогональних матриць?

**15.** a) Опишіть усі нормальні підгрупи групи $D_4$. b) Укажіть у групі $D_4$ такі три підгрупи $A, B, C$, що $A \lhd B, B \lhd C$, але $A \ntriangleleft C$.

**16.** Доведіть, що добуток $NH$ нормальної підгрупи $N \lhd G$ на довільну підгрупу $H \leq G$ теж буде підгрупою групи $G$.

## Додаткові задачі

**17.*** З'ясуйте, які порядки можуть мати підгрупи групи $A_5$.

**18.** Для кожного натурального числа $n$ опишіть у групі $\mathbb{C}^*$ усі підгрупи порядку $n$.

**19.** Нехай $p, q$ — прості числа і $p < q$. Доведіть, що кожна група порядку $pq$ містить підгрупу порядку $p$.

**20.**** Використовуючи лише розклад на класи суміжності, доведіть, що група $\mathbb{Q}$ не має власних підгруп скінченного індексу.

**21.*** Доведіть, що для довільних підгруп $A, B$ групи $G$ виконується нерівність $|A : A \cap B| \le |G : B|$.

**22.**** Доведіть, що перетин скінченної кількості підгруп скінченного індексу теж є підгрупою скінченного індексу.

**23.*** Нехай порядок $|N|$ нормальної підгрупи $N$ скінченної групи $G$ є взаємно простим з її індексом $|G : N|$. Доведіть, що: a) кожна підгрупа $H \le G$, порядок $|H|$ якої є дільником числа $|N|$, міститься в $N$; b) $N$ є єдиною підгрупою в $G$ порядку $|N|$.

**24.** Нехай $M$ — така підмножина групи $G$, що для довільних $x, y, z \in M$ елемент $xy^{-1}z$ також належить $M$. Доведіть, що $M$ є класом суміжності групи $G$ за певною підгрупою.

**25.**** Нехай $A$ і $B$ — підгрупи скінченних індексів групи $G$. Доведіть, що група $G$ розкладається в добуток $G = AB$ своїх підгруп $A$ і $B$ тоді й лише тоді, коли $|A : A \cap B| = |G : B|$.

## Домашнє завдання

**26.** Опишіть ліві й праві класи суміжності групи $D_4$ за підгрупою $H$, породженою: a) поворотом на $180^\circ$ навколо центра квадрата; b) осьовою симетрією, що проходить через протилежні вершини квадрата; c) осьовою симетрією, що проходить через середини двох протилежних сторін квадрата.

**27.** Доведіть, що в групі $D_{12}$ для кожного дільника $k$ порядку групи існує підгрупа порядку $k$.

**28.** З'ясуйте, скільки підгруп індексу 2 має група: a) $D_5$; b) $D_6$.

**29.** Чи буде нормальною підгрупою групи $GL_n(\mathbb{C})$ підгрупа: a) $GL_n(\mathbb{R})$; b) усіх матриць з дійсними визначниками; c) усіх матриць, визначники яких є коренями 13–го степеня з 1; d) усіх унітарних матриць?

**30.** Опишіть усі нормальні підгрупи групи $D_5$.

**31.** Доведіть, що в групі $Q_8$ кожна підгрупа є нормальною.

*Література.* [1, с. 39–45], [3, с. 117–120, 423–424], [4, с. 164–168, 319], [7, с. 245–246, 248–249], [2, с. 287–293], [6, с. 19–22, 50].

# Заняття 8. Гомоморфізми й факторгрупи

## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.** *Опишіть усі гомоморфізми* $\varphi : \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_{12}$ *і для кожного з них укажіть ядро та образ.*

*Розв'язання.* Зрозуміло, що гомоморфізм циклічної групи повністю визначається образом її твірного елемента. Нехай $\varphi(\overline{1}) = \overline{m}$. Тоді для довільного $\overline{k} \in \mathbb{Z}_9$ має бути $\varphi(\overline{k}) = \varphi(k \cdot \overline{1}) = k \cdot \varphi(\overline{1}) = k \cdot \overline{m} = \overline{km}$ . Оскільки у групі $\mathbb{Z}_9$ $\quad 9 \cdot \overline{1} = \overline{9} = \overline{0}$, то $\overline{9m} = \varphi(\overline{9}) = \varphi(\overline{0}) = \overline{0}$, звідки $12|9m$, тобто $4|m$ і $m = 0, 4, 8$. Таким чином, маємо 3 гомоморфізми: $\varphi_1 : \overline{k} \mapsto \overline{0k} = \overline{0}$; $\varphi_2 : \overline{k} \mapsto \overline{4k}$ і $\varphi_3 : \overline{k} \mapsto \overline{8k}$. Безпосередньо знаходимо, що $\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathbb{Z}_9$, $\mathrm{Im}(\varphi_1) = \{\overline{0}\}$, $\mathrm{Ker}(\varphi_2) = \mathrm{Ker}(\varphi_3) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}\}$, $\mathrm{Im}(\varphi_2) = \mathrm{Im}(\varphi_3) = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$. □

**Задача 2.** *Які умови має задовольняти група* $G$, *щоб відображення* $x \mapsto x^2$ *було ендоморфізмом*?

*Розв'язання.* Нехай $\varphi : x \mapsto x^2$ є ендоморфізмом. З означення гомоморфізму випливає, що для довільних $x$ і $y \in G$ виконується: $xyxy = (xy)^2 = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = x^2y^2 = xxyy$ . Звідки, після скорочення зліва на $x$ і справа на $y$, одержуємо $yx = xy$. Таким чином, група $G$ — абелева. З наших рівностей також випливає, що для довільної абелевої групи $G$ відображення $\varphi$ справді є ендоморфізмом. □

**Задача 3.** *З'ясуйте, чи існує епіморфізм вигляду*: a) $S_3 \to C_2$; b) $S_3 \to C_3$.

*Розв'язання.* a) Нехай $C_2 = \{e, a\}$. Визначимо відображення $\varphi : S_3 \to C_2$ правилом: $\varphi(\pi) = e$ тоді й лише тоді, коли $\pi$ — парна підстановка. З властивостей парності підстановки випливає, що $\varphi$ — епіморфізм.

b) Якби такий епіморфізм існував, то його ядро було б нормальною підгрупою індексу 3. Однак група $S_3$ не містить нормальних підгруп індексу 3. □

**Задача 4.** *Доведіть, що* $K_4$ *— нормальна підгрупа групи* $A_4$, *опишіть класи суміжності групи* $A_4$ *за підгрупою* $K_4$ *та побудуйте таблицю Келі для факторгрупи* $A_4/K_4$.

*Розв'язання.* Нормальність підгрупи $K_4$ доведено при розв'язанні зад. 7.5. Там само знайдено класи суміжності $A_4$ за підгрупою $K_4$: $\varepsilon \cdot K_4 = K_4$,

$(123)\cdot K_4=\{(123),\ (243),\ (142),\ (134)\}$, $(132)\cdot K_4=\{(132),\ (143),\ (234),\ (124)\}$. Таблицю Келі для факторгрупи $A_4/K_4$ знаходимо безпосереднім обчисленням:

| | $\varepsilon\cdot K_4$ | $(123)\cdot K_4$ | $(132)\cdot K_4$ |
|---|---|---|---|
| $\varepsilon\cdot K_4$ | $\varepsilon\cdot K_4$ | $(123)\cdot K_4$ | $(132)\cdot K_4$ |
| $(123)\cdot K_4$ | $(123)\cdot K_4$ | $(132)\cdot K_4$ | $\varepsilon\cdot K_4$ |
| $(132)\cdot K_4$ | $(132)\cdot K_4$ | $\varepsilon\cdot K_4$ | $(123)\cdot K_4$ |

**Задача 5.** *Доведіть, що фактор–група $G/H$ групи $G$ усіх лінійних перетворень $\varphi_{a,b}: x\mapsto ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0$, дійсної прямої за підгрупою $H$ усіх зсувів $x\mapsto x+b$ ізоморфна підгрупі $A$ всіх гомотетій $h_a: x\mapsto ax$, $a\neq 0$.*

*Розв'язання.* Нормальність підгрупи $H$ доведена при розв'язанні зад. 7.2. Там же показано, що оберненим до перетворення $\varphi_{a,b}$ є перетворення $\varphi^{-1}_{a,b}=\varphi_{a^{-1},-a^{-1}b}$. Два елементи $\varphi_{a,b}$ і $\varphi_{c,d}$ належать до одного класу суміжності за підгрупою $H$ тоді й лише тоді, коли $\varphi_{a,b}\circ\varphi^{-1}_{c,d}\in H$. Але

$$(\varphi_{a,b}\circ\varphi^{-1}_{c,d})(x)=c^{-1}(ax+b)-c^{-1}d=c^{-1}ax+(c^{-1}b-c^{-1}d)\ .$$

Тому елементи $\varphi_{a,b}$ і $\varphi_{c,d}$ належать до одного класу суміжності за підгрупою $H$ тоді й лише тоді, коли $c^{-1}a=1$, тобто коли $a=c$. Звідси випливає, що клас суміжності $\varphi_{a,b}\circ H$ групи $G$ за підгрупою $H$ містить єдину гомотетію $h_a=\varphi_{a,0}$, яку можна взяти представником цього класу. Отже, кожен елемент фактор–групи $G/H$ однозначно записується у вигляді $h_a\circ H$, і можна коректно визначити відображення $\mu: G/H\to A$, $h_a\circ H\mapsto h_a$. Легко бачити, що це відображення є бієктивним. Крім того,

$$\mu\big((h_a\circ H)\circ(h_c\circ H)\big)=\mu\big(h_c(h_a\circ H)\big)=\mu\big((h_a\circ h_c)\circ H\big)=$$
$$=h_a\circ h_c=\mu(h_a\circ H)\circ\mu(h_c\circ H)\ .$$

Отже, $\mu$ є ізоморфізмом фактор–групи $G/H$ та підгрупи $A$ всіх гомотетій. $\square$

**Задача 6.** *За допомогою основної теореми про гомоморфізм доведіть, що $\mathbb{Q}^*/H\simeq\mathbb{Z}$, де $H$ — підгрупа тих раціональних чисел, у яких чисельник і знаменник непарні.*

*Розв'язання.* Кожне ціле число однозначно записується у вигляді $m \cdot 2^n$, де число $m$ — непарне, а $n$ — невід'ємне ціле. Тому кожне число з $\mathbb{Q}^*$ можна однозначно записати у вигляді $\dfrac{m}{n} \cdot 2^k$, де $m$ і $n$ — непарні, а $k$ — ціле. Розглянемо відображення $\varphi : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z}$, $\dfrac{m}{n} \cdot 2^k \mapsto k$. Воно є сюр'єктивним. Крім того, $\varphi$ є гомоморфізмом, тому що

$$\varphi\Big(\frac{m}{n}2^k \cdot \frac{p}{q}2^r\Big) = \varphi\Big(\frac{mp}{nq}2^{k+r}\Big) = k + r = \varphi\Big(\frac{m}{n}2^k\Big) + \varphi\Big(\frac{p}{q}2^r\Big)\,.$$

Тоді за основною теоремою про гомоморфізм $\mathbb{Q}^*\big/\operatorname{Ker}\varphi \simeq \mathbb{Z}$. Однак $\operatorname{Ker}\varphi = \{\frac{m}{n}2^k \in \mathbb{Q}^* : k = 0\} = H$. Тому $\mathbb{Q}^*/H \simeq \mathbb{Z}$. □

**Задача 7.** *Доведіть, що для кожної власної підгрупи $H$ групи $\mathbb{C}_{p^\infty}$ факторгрупа $\mathbb{C}_{p^\infty}/H$ ізоморфна самій групі $\mathbb{C}_{p^\infty}$.*

*Розв'язання.* Група $\mathbb{C}_{p^\infty}$ є об'єднанням $\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{C}_{p^n}$ строго зростаючого ланцюга підгруп $E = \{1\} \subset \mathbb{C}_{p^1} \subset \mathbb{C}_{p^2} \subset \cdots \subset \mathbb{C}_{p^n} \subset \cdots$ . Зауважимо, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ кожний елемент із $\mathbb{C}_{p^n} \setminus \mathbb{C}_{p^{n-1}}$ є твірним елементом групи $\mathbb{C}_{p^n}$. Тому, коли підгрупа $H \le \mathbb{C}_{p^\infty}$ має непорожній перетин із множиною $A_n = \mathbb{C}_{p^n} \setminus \mathbb{C}_{p^{n-1}}$, то $H$ містить $\mathbb{C}_{p^n}$, а тим самим і всі $\mathbb{C}_{p^k}$ для $k < n$.

Нехай $H$ — довільна підгрупа із $\mathbb{C}_{p^\infty}$. Якщо множина $B_H = \{n | H \cap A_n \neq \varnothing\}$ нескінченна, то $H$ містить усі підгрупи $\mathbb{C}_{p^n}$ і збігається з $\mathbb{C}_{p^\infty}$. Тому для власної підгрупи $H$ множина $B_H$ має бути скінченною й містити найбільший елемент $n$. Однак тоді $H = \mathbb{C}_{p^n}$. Отже, підгрупами $\mathbb{C}_{p^n}$ вичерпуються всі власні підгрупи групи $\mathbb{C}_{p^\infty}$.

Візьмемо тепер довільну власну підгрупу $H = \mathbb{C}_{p^n}$ і розглянемо відображення $\varphi : \mathbb{C}_{p^\infty} \to \mathbb{C}_{p^\infty}$, $x \mapsto x^{p^n}$. Оскільки $(xy)^{p^n} = x^{p^n}y^{p^n}$, то $\varphi$ є гомоморфізмом. Крім того, для кожного елемента $a \in \mathbb{C}_{p^\infty}$ корінь $p^n$–го степеня з $a$ також належить $\mathbb{C}_{p^\infty}$, а тому відображення $\varphi$ є сюр'єктивним. За основною теоремою про гомоморфізм $\mathbb{C}_{p^\infty}\big/\operatorname{Ker}\varphi \simeq \mathbb{C}_{p^\infty}$. Однак $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in \mathbb{C}_{p^\infty} | x^{p^n} = 1\} = H$. Тому $\mathbb{C}_{p^\infty}/H \simeq \mathbb{C}_{p^\infty}$. □

## Основні задачі

**8.** Чи буде гомоморфізмом групи $\mathbb{Z}$ у себе відображення: a) $n \mapsto 3n$; b) $n \mapsto 5n + 1$; c) $n \mapsto n^2$; d) $n \mapsto 1$? Знайдіть усі гомоморфізми групи $\mathbb{Z}$ у себе. Які з них будуть ізоморфізмами?

**9.** Знайдіть ядро й образ гомоморфізму: a) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto e^x$; b) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto \cos x + i \sin x$.

**10.** Опишіть усі гомоморфізми $\varphi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{18}$ і для кожного з них укажіть ядро та образ.

**11.** Нехай $C_n$ — циклічна група порядку $n$, $k$ — фіксоване натуральне число, $d =$ НСД$(n, k)$. Доведіть, що: а) відображення $\varphi_k : x \mapsto x^k$ є ендоморфізмом групи $C_n$; b) Ker $\varphi_k \simeq C_d$; c) $\varphi_k(C_n) \simeq C_{n/d}$.

**12.** Які умови має задовольняти група $G$, щоб відображення $x \mapsto x^{-1}$ було ендоморфізмом?

**13.** Нехай $\varphi : A \to B$ — гомоморфізм груп. Які з імплікацій правильні: a) $C \leq A \Rightarrow \varphi(C) \leq B$; b) $C \lhd A \Rightarrow \varphi(C) \lhd B$; c) $D \leq B \Rightarrow \varphi^{-1}(D) \leq A$; d) $D \lhd B \Rightarrow \varphi^{-1}(D) \lhd A$ (тут через $\varphi^{-1}(X)$ позначається повний прообраз множини $X$)?

**14.** З'ясуйте, чи існує епіморфізм вигляду: a) $D_4 \to C_2$; b) $D_4 \to C_4$; c) $D_4 \to K_4$.

**15.** Доведіть, що $H$ — нормальна підгрупа групи $G$, опишіть класи суміжності групи $G$ за підгрупою $H$ та побудуйте таблицю Келі факторгрупи $G/H$, якщо: a) $G = 3\mathbb{Z}$, $H = 12\mathbb{Z}$; b) $G = D_4$, $H = \{0°, 180°\}$.

**16.** Нехай $H_1 \lhd G_1$, $H_2 \lhd G_2$. Доведіть, що жоден з ізоморфізмів $G_1 \simeq G_2$, $H_1 \simeq H_2$, $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$ не випливає з двох інших.

**17.** Нехай $H$ — нормальна підгрупа групи $G$ і $\varphi$ — епіморфізм групи $G$ на факторгрупу $G/H$. Чи випливає звідси, що Ker $\varphi = H$?

**18.** Нехай $H$ — нормальна підгрупа групи $G$ і $\varphi$ — епіморфізм групи $G$ на факторгрупу $G/H$, причому Ker $\varphi = H$. Чи випливає звідси, що $\varphi$ — канонічний епіморфізм?

**19.** За допомогою основної теореми про гомоморфізм доведіть, що:
a) $T/\mathbb{C}_n \simeq T$; b) $\mathbb{C}^*/\mathbb{C}_n \simeq \mathbb{C}^*$; c) $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$; d) $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{C}_{p^\infty}$, де $\mathbb{Z}[1/p]$ — підгрупа тих раціональних чисел, знаменник яких не ділиться на жодне просте число, відмінне від $p$.

## Додаткові задачі

**20.** Яку умову має задовольняти множина з дією $(M, \cdot)$, щоб для кожної множини з дією $(N, \cdot)$ існував гомоморфізм $(N, \cdot) \to (M, \cdot)$?

**21.**$^*$ З'ясуйте, чи існує епіморфізм вигляду: a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$; b) $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^*$; c) $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^+$; d) $\mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}$.

**22.** Доведіть, що існує нескінченно багато епіморфізмів групи $\mathbb{Q}^*$ на групу $\mathbb{Z}$.

**23.**** Які циклічні групи можуть бути гомоморфними образами групи $\mathbb{C}_\infty$ усіх комплексних коренів довільних натуральних степенів з 1?

**24.*** Доведіть, що: a) факторгрупа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ — періодична; b) для кожного натурального числа $n$ факторгрупа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ містить єдину підгрупу порядку $n$; c) усі скінченні підгрупи факторгрупи $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ — циклічні.

**25.** Доведіть, що кожна підгрупа індексу 2 групи $G$ містить множину $\{x^2 | x \in G\}$.

**26.** Доведіть, що факторгрупа групи $G$ усіх рухів площини за нормальною підгрупою всіх паралельних переносів ізоморфна групі $H$ тих рухів площини, які лишають нерухомою фіксовану точку.

**27.*** Доведіть, що група $\mathbb{C}^*$ не має власних підгруп скінченного індексу.

**28.*** Опишіть усі власні підгрупи скінченного індексу в групі $\mathbb{R}^*$.

**29.** a) Доведіть, що коли $H$ — нормальна підгрупа групи $G$, то кожний елемент $g \in G$, порядок якого взаємно простий з індексом підгрупи $H$, належить цій підгрупі.
b) Чи можна в попередньому пункті опустити слово "нормальна" ?

## Домашнє завдання

**30.** Чи буде гомоморфізмом групи $\mathbb{C}^*$ у себе відображення: a) $z \mapsto z/|z|$; b) $z \mapsto \overline{z}/z$; c) $z \mapsto |z|$?

**31.** Доведіть, що перетворення $\varphi$ групи $\mathbb{C}^*$ є ендоморфізмом, і знайдіть його ядро та образ: a) $\varphi(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$; b) $\varphi(z) = \cos(\arg z) + i\sin(\arg z)$; c) $\varphi(z) = z/|z|$; d) $\varphi(z) = z^{-1}\overline{z}$; e) $\varphi(z) = |z|$.

**32.** Опишіть усі гомоморфізми $\varphi : \mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_{12}$ і для кожного з них укажіть ядро та образ.

**33.** З'ясуйте, чи існує епіморфізм вигляду: a) $Q_8 \to C_2$; b) $Q_8 \to C_4$; c) $Q_8 \to K_4$.

**34.** Доведіть, що $H$ — нормальна підгрупа групи $G$, опишіть класи суміжності групи $G$ за підгрупою $H$ та побудуйте таблицю Келі для факторгрупи $G/H$, якщо: a) $G = Q_8$, $H = \{1, -1\}$; b) $G = \mathbb{C}_{16}$, $H = \mathbb{C}_4$.

**35.** Опишіть факторгрупу групи $\mathbb{C}^*$ за підгрупою $T = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$.

**36.*** Доведіть, що не існує епіморфізму $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$.

**37.** За допомогою основної теореми про гомоморфізм доведіть, що:
a) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq T$; b) $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \simeq T$; c) $\mathbb{C}^*/T \simeq \mathbb{R}^+$.

*Література.* [1, с. 36–38, 45–53], [3, с. 424–430], [4, с. 160–162, 312–316], [7, с. 249–254], [2, с. 293–295, 301–303], [5, с. 147–149], [6, с. 32–37].

# Заняття 9. Спряженість. Автоморфізми

## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.** *Знайдіть кількість класів спряжених елементів у групі* $S_5$.

*Розв'язання.* У симетричній групі $S_n$ дві підстановки спряжені тоді й лише тоді, коли вони мають однаковий цикловий тип. Тому треба підрахувати кількість різних циклових типів підстановок із $S_5$, тобто кількість розкладів числа 5 у суму натуральних доданків. Усі такі розклади легко виписуються: $5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$. Таким чином, група $S_5$ має 7 класів спряжених елементів. $\square$

**Задача 2.** *Нехай $K$ — клас спряжених елементів групи $G$. Доведіть, що для кожного натурального числа $n$ множина $\{g^n : g \in K\}$ також буде класом спряжених елементів групи $G$.*

*Розв'язання.* Якщо елементи $g$ і $h$ спряжені за допомогою елемента $a$, тобто $h = a^{-1}ga$, то $h^n = (a^{-1}ga)^n = a^{-1}ga \cdot a^{-1}ga \cdot \ldots \cdot a^{-1}ga = a^{-1}g^n a$. Тому $g^n$ і $h^n$ також спряжені за допомогою елемента $a$ і для $x \in K$ клас спряженості $C(x^n)$ елемента $x^n$ містить множину $\{g^n | g \in K\}$. З іншого боку, розглянемо довільний $y \in C(x^n)$. Тоді існує такий елемент $c$, що $y = c^{-1}x^n c = c^{-1}xc \cdot c^{-1}xc \cdot \ldots \cdot c^{-1}xc = (c^{-1}xc)^n$. Однак $c^{-1}xc \in K$, тому $y \in \{g^n | g \in K\}$. Оскільки $y \in C(x^n)$ — довільний, то $C(x^n) \subseteq \{g^n | g \in K\}$. Отже, $C(x^n) = \{g^n | g \in K\}$. $\square$

**Задача 3.** *Знайдіть усі внутрішні автоморфізми групи* $Q_8$.

*Розв'язання.* Легко перевіряється, що в групі $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ елемент $-1$ комутує з усіма елементами групи. Тому для довільних $x, y \in Q_8$ маємо: $(-x)^{-1} y(-x) = (-x^{-1}) y(-x) = x^{-1} yx$. Отже, елементи, що розрізняються за знаком, визначають один і той самий внутрішній автоморфізм, тому їх не більше 4. З іншого боку, спряження $\varphi_1$, $\varphi_i$, $\varphi_j$, $\varphi_k$ за допомогою елементів 1, $i$, $j$, $k$ відповідно є різними внутрішніми автоморфізмами, як це випливає з рівностей: $\varphi_i(i) = i$, $\varphi_i(j) = -j$, $\varphi_j(j) = j$, $\varphi_j(k) = -k$, $\varphi_k(k) = k$, $\varphi_k(i) = -i$. Таким чином, $\operatorname{Inn} Q_8 = \{\varphi_1, \varphi_i, \varphi_j, \varphi_k\}$. □

**Задача 4.** *Доведіть, що* $\operatorname{Aut} K_4 \simeq S_3$.

*Розв'язання.* При автоморфізмі одиничний елемент має переходити в одиничний, а неодиничні — у неодиничні. Зауважимо, що в групі $K_4$ квадрат кожного елемента дорівнює $\varepsilon$, а добуток будь–яких двох різних неодиничних елементів — третьому з них. Доведемо, що будь–яке бієктивне перетворення $\varphi$ групи $K_4$, яке одиничний елемент переводить у себе, є автоморфізмом. Для цього досить показати, що $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$. Можливі три випадки: 1) хоча б один із множників — одиничний (таким можна вважати $b$), тоді $\varphi(a \cdot \varepsilon) = \varphi(a) = \varphi(a) \cdot \varepsilon = \varphi(a) \cdot \varphi(\varepsilon)$; 2) $a = b$, тоді $\varphi(a \cdot a) = \varphi(\varepsilon) = \varepsilon = \varphi(a) \cdot \varphi(a)$; 3) $a$ і $b$ — різні неодиничні, тоді $c = a \cdot b$ — також неодиничний, $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(a \cdot b)$ — різні неодиничні елементи і $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Оскільки кожна підстановка 3–елементної множини неодиничних елементів із $K_4$ виявляється автоморфізмом, а добуток підстановок відповідає композиції автоморфізмів, то $\operatorname{Aut} K_4 \simeq S_3$. □

**Задача 5.** *Доведіть, що централізатор класу спряжених елементів є нормальною підгрупою.*

*Розв'язання.* Нехай $M$ — клас спряжених елементів групи $G$ і $Z(M)$ — його централізатор. Розглянемо довільні $g \in G$, $h \in Z(M)$ і $a \in M$. Тоді $gag^{-1} \in M$ і $h \cdot gag^{-1} = gag^{-1} \cdot h$, звідки $g^{-1}hg \cdot a = a \cdot g^{-1}hg$. Оскільки $a$ — довільний елемент із $M$, то $g^{-1}hg \in Z(M)$. За критерієм нормальності одержуємо, що $Z(M)$ є нормальною підгрупою $G$. □

**Задача 6.** *У групі* $GL_2(\mathbb{R})$ *знайдіть централізатор матриці* $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

*Розв'язання.* Зрозуміло, що матриця $X = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ d & b \end{smallmatrix}\right)$ належить централізатору $Z(A)$ матриці $A$ тоді й лише тоді, коли $\det(A) \neq 0$ і $XA = AX$. І оскільки

$$XA = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ d & -b \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -d & -b \end{pmatrix},$$

то $c = d = 0$. Крім того, $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$. Отже, $Z(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | ab \neq 0 \right\}$. $\square$

**Задача 7.** *Якщо група $G$ містить єдину підгрупу $H$ даного порядку, то підгрупа $H$ є нормальною.*

*Розв'язання.* Для довільного елемента $g \in G$ спряження $\varphi_g : x \mapsto g^{-1}xg$ є автоморфізмом групи $G$. При автоморфізмі порядок підгрупи зберігається, тому $\varphi_g(H) = H$. Отже, для довільного $g \in G$ маємо $g^{-1}Hg = H$ і $H$ є нормальною підгрупою $G$. $\square$

## Основні задачі

**8.** Знайдіть усі класи спряжених елементів у групах: a) $Q_8$; b) $GL_2(\mathbb{Z}_2)$; c) $S_4$; d) $A_4$.

**9.** Знайдіть кількість класів спряжених елементів у групі $S_6$.

**10.** Підрахуйте кількість елементів групи $S_6$, які спряжені з елементом: a) (123456); b) (123)(456).

**11.** Знайдіть з точністю до ізоморфізму всі скінченні групи, які містять не більше 3 класів спряжених елементів.

**12.** Доведіть, що перетин усіх підгруп, спряжених у групі $G$ з даною підгрупою $H < G$, є нормальною підгрупою в $G$.

**13.** Доведіть, що для кожної групи множина всіх лівих класів суміжності за всіма можливими підгрупами збігається з множиною всіх правих класів суміжності за всіма можливими підгрупами.

**14.** Доведіть, що $\operatorname{Aut} S_3 = \operatorname{Inn} S_3$.

**15.** Знайдіть усі внутрішні автоморфізми групи $D_4$.

**16.** Знайдіть порядок групи: a) $\operatorname{Aut} \operatorname{Aut} \operatorname{Aut} S_3$; b) $\operatorname{Aut} \operatorname{Aut} \operatorname{Aut} \mathbb{Z}_9$.

**17.** Доведіть, що: a) $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_n^*$; b) $\operatorname{Aut} D_4 \simeq D_4$.

**18.** Доведіть, що централізатор нормальної підгрупи також є нормальною підгрупою.

**19.** Доведіть, що $K_4$ є нормальною підгрупою групи $S_4$ і що фактор-група $S_4/K_4$ ізоморфна групі $S_3$.

## Додаткові задачі

**20.** Доведіть, що добуток $K_1 \cdot K_2$ двох класів $K_1$ і $K_2$ спряжених елементів групи $G$ є об'єднанням класів спряжених елементів групи $G$.

**21.** a) У групі всіх рухів площини опишіть усі елементи, спряжені з поворотом навколо даної точки на кут $\alpha$. b)** У групі всіх рухів простору опишіть усі елементи, спряжені з поворотом навколо даної осі на кут $\alpha$.

**22.**** Доведіть, що коли скінченна група $G$ має автоморфізм $\varphi$ другого порядку, який рухає всі неодиничні елементи групи $G$ (тобто $\varphi(g) \neq g$ для всіх $g \neq e$), то $G$ — абелева група непарного порядку.

**23.*** Доведіть, що кожна група порядку більшого ніж 2 має нетривіальний автоморфізм.

**24.*** Доведіть, що $\operatorname{Inn} Q_8 \simeq K_4$ і $\operatorname{Aut} Q_8/\operatorname{Inn} Q_8 \simeq S_3$.

**25.*** Доведіть, що для скінченної нормальної підгрупи $H$ групи $G$ індекс її централізатора $Z(H)$ також буде скінченним.

**26.** Доведіть, що у скінченній групі жодна підгрупа не може бути спряженою зі своєю власною підгрупою.

**27.*** У групі $G$ знайдіть підгрупу $H$, яка спряжена з деякою своєю власною підгрупою, якщо: a) $G = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\}$; b) $G$ — група всіх підстановок множини натуральних чисел.

**28.**** Доведіть, що коли група $G$ має власну підгрупу скінченного індексу, то $G$ має і власну нормальну підгрупу скінченного індексу.

**29.** Опишіть з точністю до ізоморфізму всі групи $G$, для яких виконується рівність $|\operatorname{Aut} G| = (|G| - 1)!$.

## Домашнє завдання

**30.** Знайдіть усі класи спряжених елементів у групі $D_4$.

**31.** Підрахуйте кількість елементів групи $S_6$, які спряжені з елементом $(12)(34)(56)$.

**32.** Доведіть, що група $\operatorname{Aut}(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ має континуум багато різних автоморфізмів.

**33.** Доведіть, що $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}_8 \simeq \operatorname{Aut} \mathbb{Z}_{12} \simeq K_4$.

**34.** Знайдіть порядок групи $\mathrm{Aut\,Aut\,Aut}\,\mathbb{Z}_8$.

**35.** У групі $GL_2(\mathbb{R})$ знайдіть централізатор матриці $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{smallmatrix}\right)$.

**36.** Знайдіть у групі $S_4$ нормалізатор підгрупи $\big\langle(12)(34)\big\rangle$.

*Література.* [1, с. 54–61, 75–78], [7, с. 247–248, 260–261, 265–266, 267–268], [2, с. 297–300].

# Заняття 10. Центр. Комутант. $p$–групи

## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.** *Доведіть, що*: a) $|Z(GL_n(\mathbb{Z}_p))| = p-1$; b) $|Z(SL_n(\mathbb{Z}_p))| =$ *НСД*$(n, p-1)$.

*Розв'язання.* a) Нехай $A = (a_{ij}) \in Z(GL_n(\mathbb{Z}_p))$. Для довільних $k \neq l$ розглянемо матрицю $E_{kl}(1)$, яка відрізняється від одиничної лише тим, що в $k$–му рядку на $l$–му місці стоїть 1. Очевидно, що $det\ E_{kl}(1) = 1$. Позначимо $E_{kl}(1)\cdot A = (b_{ij})$, $A \cdot E_{kl}(1) = (c_{ij})$. Тоді $b_{kk} = a_{kk} + a_{lk}$, $b_{kl} = a_{kl} + a_{ll}$, $b_{lk} = a_{lk}$, $b_{ll} = a_{ll}$, $c_{kk} = a_{kk}$, $c_{kl} = a_{kk} + a_{kl}$, $c_{lk} = a_{lk}$, $c_{ll} = a_{lk} + a_{ll}$. З рівності $E_{kl}(1)\cdot A = A\cdot E_{kl}(1)$ одержуємо: $a_{lk} = 0$, $a_{kk} = a_{ll}$. Помноживши $A$ зліва й справа на $E_{kl}^T$, одержимо також, що $a_{kl} = 0$.

З довільності $k$ і $l$ випливає, що матриця $A$ — скалярна, тобто має вигляд $A = \lambda E$, де $\lambda \in \mathbb{Z}_p \diagdown \{0\}$. З іншого боку, очевидно, що скалярна матриця комутує з довільною матрицею. Тому $Z(GL_n(\mathbb{Z}_p))$ — це множина ненульових скалярних матриць і $|Z(GL_n(\mathbb{Z}_p))| = p-1$.

b) Оскільки $E_{kl}(1) \in SL_n(\mathbb{Z}_p)$, то з розв'язання п. а) випливає, що $Z(SL_n(\mathbb{Z}_p))$ складається з тих і тільки тих скалярних матриць $\lambda E$, які містяться в $SL_n(\mathbb{Z}_p)$. Так як $\det(\lambda E) = \lambda^n$, то необхідно знайти кількість $\lambda$ таких, що $\lambda^n = 1$. Однак $\lambda^{p-1} = 1$, тому що $|\mathbb{Z}_p^*| = p-1$. Позначимо $d =$ НСД$(n, p-1)$. Тоді $|Z(SL_n(\mathbb{Z}_p))| = |\{\lambda \in \mathbb{Z}_p^* | \lambda^d = 1\}| = |\{\lambda \in \mathbb{Z}_p^* |$ порядок $\lambda$ є дільником числа $d\}|$. Отже, $|Z(SL_n(\mathbb{Z}_p))| = d$. $\square$

**Задача 2.** *Доведіть, що коли група $G$ містить єдиний елемент порядку 2, то цей елемент лежить у центрі групи $G$.*

*Розв'язання.* Нехай $a \in G$ – єдиний елемент порядку 2, тобто $a^2 = 1$. Тоді для довільного $g \in G$ матимемо $1 = (g^{-1}ag)(g^{-1}ag) = (g^{-1}ag)^2$. Однак у групі $G$ єдиним елементом порядку 2 є $a$. Тому $g^{-1}ag = a$ і $ag = ga$. $\square$

**Задача 3.** *Обчисліть комутант груп $S_n$ $(n \geq 3)$ і $A_n$ $(n \geq 5)$.*

*Розв'язання.* Покажемо, що в обох випадках комутант збігається з групою $A_n$. Дійсно, комутатор довільних двох підстановок із $S_n$ є парною підстановкою, оскільки $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$, а підстановки $a^{-1}$ та $a$ мають однакову парність (аналогічно $b^{-1}$ та $b$). З іншого боку, $(ijk) = [(ik),(ij)] = [(ikl),(ijm)]$, де $i$, $j$, $k$, $l$, $m$ — попарно різні елементи. І оскільки $A_n$ породжується циклами довжиною 3 (див. зад. 4.1), то все доведено. □

**Задача 4.** *Обчисліть комутант груп $GL_n(P)$ $(n > 2)$ і $SL_n(P)$ $(n > 2)$, де $P$ — поле.*

*Розв'язання.* Покажемо, що в обох випадках комутант збігається з групою $SL_n(P)$. Справді, комутант міститься в $SL_n(P)$, тому що визначник комутатора довільних двох матриць дорівнює 1. З іншого боку, указані групи породжуються елементарними матрицями: $SL_n(P) = \langle E_{ij}(\alpha), \alpha \in P, i \neq j \rangle$, $GL_n(P) = \langle E_{ij}(\alpha), E_i(\alpha), \alpha \in P, i \neq j \rangle$, де $E_{ij}(\alpha) = E + \alpha E_{ij}$, $E_i(\alpha) = E + (\alpha - 1)E_{ii}$. Оскільки для попарно різних $i, j, k$ має місце рівність $[E_{ik}(\alpha), E_{kj}(\beta)] = E_{ij}(\alpha\beta)$, а для діагональної матриці $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ — рівність $[E_{ij}(\alpha), D] = E_{ij}(\alpha(\frac{d_j}{d_i} - 1))$, то і зворотне включення також має місце. □

**Задача 5.** *Доведіть, що для кожної нормальної підгрупи $H$ групи $G$ її комутант $[H,H]$ також буде нормальною підгрупою групи $G$.*

*Розв'язання.* Для початку зауважимо, що кожен елемент $h \in [H,H]$ є добутком комутаторів, тобто $h = h_1 \ldots h_k$, де $h_i = [a_i, b_i]$. Тому для довільних $h \in [H,H]$ та $g \in G$ матимемо $g^{-1}hg = g^{-1}h_1 \ldots h_k g = g^{-1}h_1 g g^{-1} \ldots g g^{-1} h_k g$. Легко перевіряється, що $g^{-1}h_i g = g^{-1}[a_i, b_i]g = [g^{-1}a_i g, g^{-1}b_i g]$, а для всіх $t \in H$ $g^{-1}tg \in H$, тому що $H$ нормальна в $G$. Отже, $g^{-1}hg$ є добутком комутаторів елементів з $H$ і тому належить $[H,H]$. □

**Задача 6.** *Доведіть, що підгрупа $H$ $p$–групи $G$ порядку $p^n$ буде максимальною в $G$ тоді й лише тоді, коли порядок $H$ дорівнюватиме $p^{n-1}$.*

*Розв'язання.* Очевидно, що кожна підгрупа $H < G$ порядку $p^{n-1}$ є максимальною, тому що її індекс $|G : H| = p$ є простим числом. Зворотне твердження доведемо індукцією за $n$. При $n = 1$ група $G$ є циклічною простого порядку, і єдиною максимальною підгрупою є одинична. Припустимо тепер, що в групах порядку $p^n$ кожна максимальна підгрупа має порядок $p^{n-1}$, $G$ — група порядку $p^{n+1}$, а $H$ — її максимальна підгрупа.

Центр неодиничної $p$–групи також є $p$–групою, причому неодиничною й абелевою. Крім того, кожна підгрупа центра $Z(G)$ є нормальною в $G$, а неодинична абелева $p$–група завжди містить підгрупу порядку $p$. Тому в $G$ є нормальна підгрупа $N$ порядку $p$.

Якщо $N \nleq H$, то з нормальності $N$ випливає (див. зад. 7.16), що $NH$ буде підгрупою групи $G$. Оскільки $NH$ строго містить $H$, то $NH = G$ і $|NH| = p^{n+1}$. З іншого боку, згідно із зад. 3.12 $|NH| = \frac{|N|\cdot|H|}{|N\cap H|} = |N| \cdot |H| = p \cdot |H|$. Тому $|H| = p^n$. Нехай тепер $N \leq H$. За теоремою про відповідність підгруп факторгрупа $H_1 = H/N$ буде максимальною у факторгрупі $G_1 = G/N$. Оскільки $|G_1| = \frac{|G|}{|N|} = p^n$, то $|H_1| = \frac{|H|}{|N|} = p^{n-1}$, звідки $|H| = |N| \cdot p^{n-1} = p^n$. □

**Задача 7.** *Доведіть, що кожна нормальна підгрупа $H$ порядку $p$ скінченної $p$–групи $G$ лежить у центрі $Z(G)$.*

*Розв'язання.* Оскільки підгрупа $H$ є нормальною в $G$, то $H$ є об'єднанням класів спряженості, причому потужність кожного з цих класів є дільником порядку групи, тобто степенем числа $p$. Легко бачити, що серед цих класів є одноелементний, а саме клас спряженості нейтрального елемента $e$. Тому $|H| = 1 + \sum p^i = p$. Звідси маємо, що потужності всіх інших класів спряженості, що входять до $H$, також дорівнюють 1, тобто для довільних $h \in H$ та $g \in G$ $g^{-1}hg = h$ і, отже, $h \in Z(G)$. □

**Задача 8.** *Доведіть, що коли $G$ є групою без центра (тобто її центр $Z(G)$ збігається з одиничною підгрупою $E$), то і її група автоморфізмів $\operatorname{Aut} G$ є групою без центра.*

*Розв'язання.* Нехай $\varphi$ — нетотожний автоморфізм із $Z(\operatorname{Aut} G)$ і нехай $a$ — такий елемент $G$, що $\varphi(a) = \tilde{a} \neq a$. Тоді для довільних $\psi \in \operatorname{Aut} G$ і $x \in G$ буде $\psi(\varphi(x)) = \varphi(\psi(x))$. Зокрема, $\varphi$ комутує з індукованим елементом $a$ внутрішнім автоморфізмом $\psi_a(x) := a^{-1}xa$, тобто $a^{-1}\varphi(x)a = \varphi(a^{-1}xa) = \tilde{a}^{-1}\varphi(x)\tilde{a}$. Однак $\varphi(x)$ пробігає всю групу $G$, тому що $\varphi$ — автоморфізм $G$. Тому внутрішні автоморфізми $\psi_a$ та $\psi_{\tilde{a}}$ збігаються, і для всіх $x \in G$ буде $a^{-1}xa = \tilde{a}^{-1}x\tilde{a}$. Звідси, $\tilde{a}a^{-1}x = x\tilde{a}a^{-1}$ і $\tilde{a}a^{-1} \in Z(G)$, тобто, усупереч припущенню, $\tilde{a} = a$. Отже, $\operatorname{Aut} G$ також є групою без центра. □

## Основні задачі

**9.** Обчисліть центр групи: a) $S_3$; b) $D_4$; c) $D_5$; d) $A_4$; e) $T_3(\mathbb{Z}_2)$.

**10.** Нехай $\varphi : G \to H$ — гомоморфізм груп. З'ясуйте, які зі співвідношень є правильними: a) $\varphi(Z(G)) \le Z(\varphi(G))$; b) $\varphi(Z(G)) = Z(\varphi(G))$; c) $\varphi(Z(G)) \le Z(H)$.

**11.** Доведіть, що для комутаторів виконуються такі тотожності:
a) $[a,b]^{-1} = [b,a]$; b) $[a,b^{-1}] = b[b,a]b^{-1}$; c) $[ab,c] = [a,c]\big[[a,c],b\big][b,c]$;
d) $\big[[a,b^{-1}],c\big]^b\big[[b,c^{-1}],a\big]^c\big[[c,a^{-1}],b\big]^a = 1$.

**12.** Які з рівностей: 1) $[x^2,y^2] = 1$; 2) $\big[[x,y],z\big] = 1$ будуть тотожностями в групах: a) $S_3$; b) $D_4$; c) $Q_8$?

**13.** Обчисліть комутант групи: a) $D_4$; b) $A_4$; c) $GL_2(\mathbb{Z}_2)$; d) $T_3(\mathbb{Z}_2)$.

**14.** Доведіть, що в групі $G$ порядку $p^n$ існує така послідовність $E = G_0 < G_1 < G_2 < \cdots < G_n = G$ нормальних підгруп групи $G$, що всі факторгрупи $G_i/G_{i-1}, 0 < i \le n$, — циклічні порядку $p$.

**15.** Доведіть, що серед гомоморфних образів скінченної неабелевої $p$–групи $G$ є нециклічна абелева група.

**16.** Чи може центр некомутативної групи збігатися з її комутантом?

**17.** Доведіть, що кожна власна підгрупа скінченної $p$–групи міститься в якійсь підгрупі індексу $p$.

**18.** Доведіть, що група автоморфізмів $\operatorname{Aut} G$ некомутативної групи $G$ не може бути циклічною.

## Додаткові задачі

**19.** Обчисліть центр групи: a) $S_n$; b) $A_n$; c) $D_n$.

**20.** Обчисліть комутант групи $D_n$.

**21.** Доведіть, що кожна нетривіальна нормальна підгрупа $H$ скінченної $p$–групи $G$ перетинається з центром $Z(G)$ групи $G$ по підгрупі, відмінній від одиничної.

**22.**** Доведіть, що кожна некомутативна група порядку 8 ізоморфна або групі $D_4$, або групі $Q_8$.

**23.*** Опишіть усі скінченні групи, у яких усі власні підгрупи ізоморфні між собою.

**24.**** Доведіть, що кожна група порядку $p^4$ містить абелеву підгрупу порядку $p^3$.

### Домашнє завдання

**25.** Обчисліть центр і комутант групи: a) $Q_8$; b) $T_2(\mathbb{Z}_3)$.

**26.** Доведіть, що елементи $a^2$ і $b$ комутують тоді й тільки тоді, коли $[a,b]\big[[a,b],a\big][a,b]=1$.

**27.** Які з рівностей: 1) $[x,y^2]=1$; 2) $[x,y]^2=1$ будуть тотожностями в групах: a) $S_3$; b) $D_4$; c) $Q_8$?

**28.** Доведіть, що для комутаторів виконуються такі тотожності:
a) $[a,bc]=[a,c][a,b]^c=[a,c][a,b]\big[[a,b],c\big]$; b) $\big[[a,b],b^a\big]=\big[b,[b,a]\big]$.

**29.** Доведіть, що коли для нормальних підгруп $H_1$ і $H_2$ факторгрупи $G/H_1, G/H_2$ — комутативні, то факторгрупа $G/(H_1\cap H_2)$ також комутативна.

**30.** Доведіть, що для $p>2$ група $UT_3(\mathbb{Z}_p)$ є некомутативною $p$–групою, усі неодиничні елементи якої мають порядок $p$.

**31.** Доведіть, що комутант $[G,G]$ неодиничної скінченної $p$–групи $G$ завжди відмінний від групи $G$.

*Література.* [1, с. 56–57, 72–75], [7, с. 256–257, 266], [6, с. 37–39].

# Заняття 11. Прямий добуток груп

## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.** *Доведіть, що коли серед неодиничних нормальних підгруп групи $G$ є найменша, то $G$ не можна розкласти в нетривіальний прямий добуток.*

*Розв'язання.* Нехай $N$ — найменша серед неодиничних нормальних підгруп групи $G$. Припустимо, що є нетривіальний розклад $G=A\times B$. Оскільки $A$ і $B$ — неодиничні нормальні підгрупи, то $N\le A$, $N\le B$ і $N\le A\cap B$. З іншого боку, з рівності $G=A\times B$ випливає, що $A\cap B=E$. Таким чином, припущення про існування нетривіального розкладу $G=A\times B$ приводить до суперечності. $\square$

**Задача 2.** *З'ясуйте, чи розкладається група $A_4$ у прямий добуток своїх неодиничних підгруп.*

*Розв'язання.* Група $A_4$ має лише одну власну неодиничну нормальну підгрупу $K_4$ (див. зад. 7.5). Тому $K_4$ є найменшою серед неодиничних нормальних підгруп групи $A_4$ і, згідно із зад. 11.1, $A_4$ у нетривіальний прямий добуток не розкладається. $\square$

**Задача 3.** *Доведіть, що групу $\mathbb{C}_{p^\infty}$ не можна розкласти у прямий добуток своїх неодиничних підгруп.*

*Розв'язання.* Група $\mathbb{C}_{p^\infty}$ — комутативна, тому будь–яка її підгрупа є нормальною. Порядок кожного елемента із $\mathbb{C}_{p^\infty}$ є степенем числа $p$, тому кожна неодинична підгрупа містить елемент $b$ порядку $p$. Однак тоді $\langle b\rangle = \mathbb{C}_p$. Отже, $\mathbb{C}_p$ міститься в кожній неодиничній підгрупі, тобто є найменшою серед неодиничних нормальних підгруп. Тому згідно із зад. 11.1 група $\mathbb{C}_{p^\infty}$ у нетривіальний прямий добуток не розкладається. $\square$

**Задача 4.** *Скільки різних підгруп містить група $D_4 \times C_2$?*

*Розв'язання.* У задачі 3.18 показано, що група $D_4$ має 10 підгруп: $A_1 = \{0°\}$; $A_2 = \{0°, s_1\}$; $A_3 = \{0°, s_2\}$; $A_4 = \{0°, s_3\}$; $A_5 = \{0°, s_4\}$; $A_6 = \{0°, 180°\}$; $A_7 = \{0°, 90°, 180°, 270°\}$; $A_8 = \{0°, 180°, s_1, s_3\}$; $A_9 = \{0°, 180°, s_2, s_4\}$; $A_{10} = D_4$, де $s_1$, $s_3$ та $s_2$, $s_4$ — пари осьових симетрій із взаємно перпендикулярними осями. Група $C_2$ має 2 підгрупи: $B_1 = E$ і $B_2 = C_2$. Для довільної підгрупи $H \le D_4 \times C_2$ позначимо через $A$ її проекцію на перший множник $D_4$, а через $B$ — проекцію на другий множник $C_2$. Очевидно, що $A$ і $B$ є підгрупами груп $D_4$ і $C_2$ відповідно. Для підгрупи $H$ можливі 2 випадки: 1) $H = A \times B$; 2) $H$ є власною підгрупою добутку $A \times B$. У першому випадку маємо 20 підгруп вигляду $A_i \times B_j$, $i = 1, 2, \ldots, 10$, $j = 1, 2$.

У другому випадку $B = C_2$, тому що якщо $B = E$, то $H = A \times E$. Нехай $C_2 = \{e, a\}$. Розглянемо тепер множину $H_0$ елементів із $H$ з одиничною другою координатою і довільний елемент $(x, a) \in H \setminus H_0$. Очевидно, що $H_0$ є підгрупою групи $H$ індексу 2, причому класами суміжності $H$ за підгрупою $H_0$ є $H_0$ і $(x, a)H_0$. Позначимо через $P$ проекцію $H_0$ на перший множник. Тоді класи суміжності $P$ і $xP$ не перетинаються (у протилежному випадку було б $P = xP$, звідки $P = A$ і $H = A \times C_2$, що суперечить умові другого випадку). Таким чином, $P$ — підгрупа індексу 2 групи $A$ і $H_0 = \{(u, e) | u \in P\}$, $(x, a)H_0 = \{(v, a) | v \in A \setminus P\}$, тобто $H = \{(u, e) | u \in P\} \cup \{(v, a) | v \in A \setminus P\}$.

З іншого боку, з того, що кожна підгрупа індексу 2 є нормальною, випливає, що для кожної пари $P < A$ підгруп групи $D_4$ такої, що $|A : P| = 2$, множина $H = \{(u, e)|u \in P\} \cup \{(v, a)|v \in A \setminus P\}$ є підгрупою групи $D_4 \times C_2$, причому ця підгрупа задовольняє умову другого випадку. Тому в другому випадку маємо стільки підгруп, скільки є потрібних пар $P < A$. А таких пар маємо 15: $E < A_2$; $E < A_3$; $E < A_4$; $E < A_5$; $E < A_6$; $A_2 < A_8$; $A_3 < A_9$; $A_4 < A_8$; $A_5 < A_9$; $A_6 < A_7$; $A_6 < A_8$; $A_6 < A_9$; $A_7 < D_4$; $A_8 < D_4$; $A_9 < D_4$.

Таким чином, група $D_4 \times C_2$ має $20 + 15 = 35$ різних підгруп. □

**Задача 5.** *Доведіть, що центр прямого добутку груп дорівнює прямому добутку центрів множників.*

*Розв'язання.* Нехай $G = H_1 \times \cdots \times H_n$. Тоді для довільних $a = (a_1, \ldots, a_n) \in Z(G)$ та $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$ матимемо $ax = xa$, звідки випливає, що для довільних $i \in \{1, \ldots, n\}$ та $x_i \in H_i$ виконується рівність $a_i x_i = x_i a_i$, тобто $a_i \in Z(H_i)$. Отже, $a \in Z(H_1) \times \cdots \times Z(H_n)$ і $Z(G) \subseteq Z(H_1) \times \cdots \times Z(H_n)$. Навпаки, якщо $a = (a_1, \ldots, a_n) \in Z(H_1) \times \cdots \times Z(H_n)$, то для довільних $i \in \{1, \ldots, n\}$ та $x_i \in H_i$ матимемо $a_i x_i = x_i a_i$, а тому $ax = xa$ де $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Отже, $a \in Z(G)$ і $Z(H_1) \times \cdots \times Z(H_n) \subseteq Z(G)$. Таким чином, $Z(G) = Z(H_1) \times \cdots \times Z(H_n)$. □

**Задача 6.** *Доведіть, що множина $H = \{(g, g)|g \in G\}$ буде нормальною підгрупою групи $G \times G$ тоді й лише тоді, коли група $G$ є абелевою.*

*Розв'язання.* Очевидно, що $H$ є підгрупою групи $G$. Тому, якщо група $G$ є абелевою, то $H$ є її нормальною підгрупою. Навпаки, нехай $H$ є нормальною підгрупою групи $G$. Тоді для довільних $(g, g) \in H$ і $a \in G$ елемент $(a, e)^{-1}(g, g)(a, e) = (a^{-1}ga, g)$ належить $H$ і $a^{-1}ga = g$. Звідки $ga = ag$. Тому група $G$ є абелевою. □

**Задача 7.** *Доведіть, що* $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4) \simeq D_4$.

*Розв'язання.* Група $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ породжується елементами $g = (1, 0)$ і $h = (0, 1)$, тому кожний автоморфізм групи $G$ повністю визначається образами цих елементів. $G$ має 3 елементи: $g$; $(0, 2)$; $(1, 2)$ порядку 2 і 4 елементи: $h$; $(0, 3)$; $(1, 1)$; $(1, 3)$ порядку 4. При автоморфізмі порядок елемента зберігається. Тому для образу елемента $h$ маємо не більше 4 варіантів. Оскільки $g$ не є кратним елемента $h$, а елемент $(0, 2)$ є кратним кожного з елементів порядку 4, то $g$ може переходити лише в $(1, 0)$

або в $(1,2)$, тобто для образу елемента $g$ маємо не більше 2 варіантів. Тому $|\mathrm{Aut}\,(G)| \le 2 \cdot 4 = 8$.

Бієктивне відображення $\varphi : G \to G$, $(a,b) \mapsto (a+b,b)$, є автоморфізмом групи $G$, так як $\varphi\big((a,b)+(a',b')\big) = \varphi\big((a+a',b+b')\big) = (a+a'+b+b',b+b') = (a+b,b)+(a'+b',b') = \varphi\big((a,b)\big)+\varphi\big((a',b')\big)$. Аналогічно перевіряється, що відображення $\psi : (a,b) \mapsto (a+b,2a+b)$ також є автоморфізмом. Крім того, відображення $\psi^2 : (a,b) \mapsto (a,3b)$, $\psi^3 : (a,b) \mapsto (a+b,2a+3b)$, $\varphi \circ \psi : (a,b) \mapsto (a,2a+3b)$, $\varphi \circ \psi^2 : (a,b) \mapsto (a+b,3b)$, $\varphi \circ \psi^3 : (a,b) \mapsto (a,2a+b)$ є різними. Разом з тотожним відображенням $\varepsilon : (a,b) \mapsto (a,b)$ це дає нам 8 різних автоморфізмів групи $G$. Тому $|\mathrm{Aut}\,(G)| = 8$.

Позначимо через $x$ яку–небудь осьову симетрію з групи $D_4$, а через $y$ — поворот на $90°$. Тоді $D_4 = \{e,y,y^2,y^3,x,xy,xy^2,xy^3\}$. Крім того, $x^2 = e$, $y^4 = e$ і $yx = xy^3$. Оскільки $\varphi^2 = \varepsilon$, $\psi^4 = \varepsilon$ і $\psi \cdot \varphi = \varphi \cdot \psi^3$, то бієктивне відображення $\varphi^i \cdot \psi^j \mapsto x^i y^j$, $i = 0,1$, $j = 0,1,2,3$, буде ізоморфізмом групи $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$ на групу $D_4$. □

**Задача 8.** *Доведіть, що коли $G = A \times B$, то для довільних комутативної групи $H$ і гомоморфізмів $\varphi : A \to H$, $\psi : B \to H$ відображення $\mu : (a,b) \mapsto \varphi(a)\psi(b)$ групи $G$ у групу $H$ також буде гомоморфізмом.*

*Розв'язання.* Твердження задачі випливає з ланцюга рівностей:
$\mu\big((a_1,b_1)(a_2,b_2)\big) = \mu\big((a_1a_2,b_1b_2)\big) = \varphi(a_1a_2)\psi(b_1b_2) =$
$\varphi(a_1)\varphi(a_2)\psi(b_1)\psi(b_2) = \varphi(a_1)\psi(b_1)\varphi(a_2)\psi(b_2) = \mu\big((a_1,b_1)\big)\mu\big((a_2,b_2)\big)$. □

## Основні задачі

**9.** Знайдіть необхідну й достатню умову того, що прямий добуток $G_1 \times \cdots \times G_k$ груп $G_1,\ldots,G_k$ є: a) абелевою групою; b) $p$–групою; c) періодичною групою.

**10.** a) Укажіть такі групу $G$ порядку 8 і власні підгрупи $A,B$ групи $G$, що $A \cap B = E$, $AB = G$, але $G \ne A \times B$.
b) Укажіть такі групу $G$ порядку 8 і неодиничні нормальні підгрупи $A,B$ групи $G$, що $A \cap B = E$, але $G \ne A \times B$.
c) Укажіть такі групу $G$ порядку 8 і власні нормальні підгрупи $A,B$ групи $G$, що $AB = G$, але $G \ne A \times B$.

**11.** З'ясуйте, чи розкладається в нетривіальний прямий добуток своїх підгруп група: a) $S_3$; b) $T_3(\mathbb{Z}_2)$; c) $S_4$.

**12.** Доведіть, що групи a) $\mathbb{Z}$, b) $\mathbb{Q}$ не можна розкласти в пряму суму ненульових підгруп.

**13.** Доведіть, що група порядку $pq$, де $p$ і $q$ — різні прості числа, розкладається в прямий добуток своїх власних підгруп тоді й лише тоді, коли вона є абелевою.

**14.** Доведіть, що кожна група $G$ порядку $p^2$, де $p$ — просте число, або циклічна, або ізоморфна прямому добутку $C_p \times C_p$ двох циклічних груп порядку $p$.

**15.** Скількома способами можна розкласти в прямий добуток власних підгруп циклічну групу $G = \langle a \rangle$ порядку a) 12, b) 60, якщо розклади, які розрізняються лише порядком прямих множників, вважати однаковими? Випишіть усі ці розклади.

**16.** Знайдіть класи спряженості групи $G \times H$, якщо відомі класи спряженості груп $G$ і $H$. Скільки класів спряженості має група $G \times H$, якщо $G$ і $H$ мають відповідно $m$ і $n$ класів?

**17.** Нехай $G = G_1 \times \cdots \times G_n$, $H = H_1 \times \cdots \times H_n$ та $H_i \leq G_i$ для кожного $i = 1, \ldots, n$. Доведіть, що $H$ є нормальною підгрупою групи $G$ тоді й лише тоді, коли для кожного $i$ $H_i$ є нормальною підгрупою групи $G_i$.

**18.** Доведіть, що відображення $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ буде гомоморфізмом групи $G \times G$ у групу $G$ тоді й лише тоді, коли група $G$ є абелевою.

**19.** Доведіть, що: a) $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) \simeq S_3$; b) $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6) \simeq \mathbb{Z}_2 \times S_3$.

## Додаткові задачі

**20.** Чи випливає з ізоморфізму груп $A \times B$ і $A \times C$ ізоморфізм груп $B$ і $C$?

**21.**$^*$ Чи правильно, що кожну групу порядку: a) 33; b) 55; c) 91; d) 57 можна розкласти в прямий добуток своїх власних підгруп?

**22.**$^*$ Скільки різних підгруп містить група $D_6 \times C_2$?

**23.** Доведіть, що є континуум багато різних способів розкладу групи $\mathbb{Q}^*$ у прямий добуток двох своїх власних підгруп.

**24.** Доведіть, що кожна скінченна група ізоморфно занурюється в деяку знакозмінну групу $A_n$.

**25.** Доведіть, що існує мономорфізм групи $\mathbb{C}^*$ у прямий добуток $\mathbb{C}^*/\mathbb{C}_{p^\infty} \times \mathbb{C}^*/\mathbb{C}_{q^\infty}$ факторгруп $\mathbb{C}^*/\mathbb{C}_{p^\infty}$ і $\mathbb{C}^*/\mathbb{C}_{q^\infty}$, де $p$ і $q$ — різні прості числа.

**26.**[*] Доведіть, що існує мономорфізм групи $GL_n(\mathbb{Z})$ у декартовий добуток $\prod\limits_{k \in \mathbb{N}} GL_n(\mathbb{Z}_k)$ скінченних груп $GL_n(\mathbb{Z}_k)$.

## Домашнє завдання

**27.** Доведіть, що прямий добуток $G = H_1 \times \cdots \times H_k$ буде циклічною групою тоді й лише тоді, коли $H_1, \ldots, H_k$ — циклічні групи попарно взаємно простих порядків.

**28.** З'ясуйте, чи розкладаються в нетривіальний прямий добуток своїх підгруп групи: a) $C_8$; b) $Q_8$; c) $D_4$.

**29.** Скількома способами можна розкласти в прямий добуток власних підгруп циклічну групу $G = \langle a \rangle$ порядку a) 30, b) 210, якщо розклади, які розрізняються лише порядком прямих множників, вважати однаковими? Випишіть усі ці розклади.

**30.** Доведіть, що комутант прямого добутку довільної сім'ї груп збігається з прямим добутком комутантів співмножників.

**31.** Скільки різних підгруп містить група $Q_8 \times C_2$?

**32.** Доведіть, що відображення $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$ буде гомоморфізмом групи $G \times G$ у групу $G$ тоді й лише тоді, коли група $G$ є абелевою.

**33.** Доведіть, що $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

*Література.* [1, с. 95–102], [3, с. 431–435], [4, с. 321–324], [7, с. 257–259], [2, с. 295–297], [6, с. 39–41].

# Заняття 12. Дія групи на множині

## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.** a) *Доведіть, що кожна дія групи порядку* 9 *на* 13*–елементній множині має принаймні одну нерухому точку.*
b) *Наведіть приклад дії циклічної групи порядку* 12 *на* 13*–елементній множині, яка не має нерухомих точок.*

*Розв'язання.* a) Потужність орбіти є дільником порядку групи. Тому орбіти групи порядку 9 можуть містити 1, 3 або 9 точок. Якби одноелементних орбіт, тобто нерухомих точок, не було, то потужність кожної орбіти була б кратною 3. Оскільки 13 на 3 не ділиться, то є принаймні одна нерухома точка.

b) Досить указати в групі $S_{13}$ елемент порядку 12 (він і породжуватиме потрібну групу), який не має нерухомих точок. Оскільки порядок елемента є найменшим спільним кратним довжин його незалежних циклів, то 13 треба розкласти в суму неодиничних доданків, найменше спільне кратне яких дорівнює 12. Це можна зробити різними способами, хоча б так: $13 = 6 + 4 + 3$. Таким чином, можна взяти будь–яку підстановку із $S_{13}$ із циклами довжиною 6, 4 і 3 (напр., (1 2 3 4 5 6)(7 8 9 10) (11 12 13)). □

**Задача 2.** *Для груп*: a) $S_n$; b) $A_n$, *що природно діють на множині всіх підмножин множини* $\{1, 2, \ldots, n\}$, *опишіть усі орбіти та підрахуйте їх кількість і потужності.*

*Розв'язання.* a) Зрозуміло, що підмножини $A$ і $B$ можуть належати до однієї орбіти лише тоді, коли вони мають однакову кількість елементів. З іншого боку, якщо $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ і $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ — дві $k$–елементні підмножини, то будь–яка підстановка із $S_n$ вигляду

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_k & * & \cdots & * \end{pmatrix} \tag{3}$$

переводить $A$ у $B$. Отже, маємо $n + 1$ орбіту $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_n$, де орбіта $\Omega_k$ складається з усіх $k$–елементних підмножин множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, а тому має потужність $\binom{n}{k}$.

b) Оскільки $|A_1| = |A_2| = 1$, то для $n = 1$ і $n = 2$ усі орбіти групи $A_n$ 1–елементні і їх кількість дорівнює відповідно 2 і 4. Нехай тепер $n > 2$. Тоді в підстановці $\pi$ вигляду (3) або $k \geq 2$, або кількість зірочок $\geq 2$. Якщо $\pi$ є непарною, то $A_n$ належить добуток $(ij)\pi$, де $(ij)$ або транспозиція двох елементів із $b_1, \ldots, b_k$ при $k \geq 2$, або транспозиція двох елементів, позначених зірочками, при $k < 2$. Оскільки $(ij)\pi(A) = B$, то при $n > 2$ групи $S_n$ і $A_n$ мають однакові орбіти. □

**Задача 3.** *Знайдіть зображення групи* $Q_8$ *підстановками на множині правих класів суміжності за підгрупою* $H = \{1, -1\}$.

*Розв'язання.* Праві класи суміжності групи $Q_8$ за підгрупою $H$ мають вигляд $H_1 = H1 = H$, $H_2 = Hi = \{\pm i\}$, $H_3 = Hj = \{\pm j\}$, $H_4 = Hk = \{\pm k\}$ (див. зад. 7.8 b)). Безпосередньо перевіряємо, що $H_1 \cdot i = H(1 \cdot i) = Hi = H_2$, $H_2 \cdot i = H(i \cdot i) = H(-1) = H_1$, $H_3 \cdot i = H(j \cdot i) = H(-k) = H_4$, $H_4 \cdot i = H(k \cdot i) = Hj = H_3$. Тому підстановка на множині правих класів суміжності групи $Q_8$ за підгрупою $H$, яка відповідає елементу $i$, має вигляд $\pi_i = \left(\begin{smallmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \\ H_2 & H_1 & H_4 & H_3 \end{smallmatrix}\right)$. Аналогічно обчислюємо, що $\pi_{-i} = \pi_i$, $\pi_1 = \pi_{-1} = \left(\begin{smallmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \\ H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \end{smallmatrix}\right)$, $\pi_j = \pi_{-j} = \left(\begin{smallmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \\ H_3 & H_4 & H_1 & H_2 \end{smallmatrix}\right)$, $\pi_k = \pi_{-k} = \left(\begin{smallmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \\ H_4 & H_3 & H_2 & H_1 \end{smallmatrix}\right)$. □

**Задача 4.** *Доведіть, що кожна максимальна підгрупа скінченної $p$–групи $G$ є нормальною в $G$.*

*Розв'язання.* Згідно із зад. 10.6, кожна максимальна підгрупа $H$ скінченної $p$–групи $G$ має індекс $p$. Нехай $G = H \cup Hg_2 \cup \ldots \cup Hg_p$ — розбиття $G$ на праві класи суміжності за підгрупою $H$. Розглянемо дію групи $G$ правими зсувами $x : Hg \mapsto Hgx$ на множині цих класів. Вона є гомоморфізмом групи $G$ у групу підстановок цих класів. Оскільки для елемента $h \in H$ маємо $Hh = H$, то підстановка $\pi_h$, що відповідає елементу $h$, клас суміжності $H$ лишає на місці. Тому в розкладі $\pi_h$ у добуток незалежних циклів є принаймні один цикл довжиною 1, а тому довжини інших циклів менші за $p$. Оскільки порядок підстановки є найменшим спільним кратним довжин її циклів, то звідси випливає, що порядок підстановки $\pi_h$ на $p$ не ділиться. З іншого боку, $\pi_h$ є образом при гомоморфізмі елемента $h$, порядок якого є степенем числа $p$. Тому порядок $|\pi_h|$ як дільник степеня $p$ також має бути степенем $p$. Звідси випливає, що $|\pi_h| = 1$, тобто $\pi_h$ є тотожною підстановкою й лишає на місці всі класи суміжності за підгрупою $H$.

Таким чином, для довільних $g \in G$ і $h \in H$ маємо $Hgh = Hg$, звідки $e \cdot gh = h_1 g$ і $g^{-1}hg = h_1 \in H$. Остання рівність і означає, що підгрупа $H$ є нормальною. □

**Задача 5.** *Обчисліть, скільки істотно різних разків намиста можна скласти, якщо*: a) *є намистинки двох кольорів, і кожний разок має містити* 9 *намистинок*; b) *кожний разок має містити* 3 *жовтих і* 6 *зелених намистинок.*

*Розв'язання.* a) Можна вважати, що разок намиста є правильним дев'ятикутником, у вершинах якого знаходяться намистинки. Оскільки намисто можна повертати й перевертати, то ця задача еквівалентна задачі знаходження кількості $N$ істотно різних (геометрично різних) розфарбувань вершин правильного дев'ятикутника у два кольори (напр., жовтий і зелений), яким відповідатимуть орбіти природної дії групи рухів правильного дев'ятикутника $D_9$ на множині $M$ із $2^9$ розфарбувань жорстко закріпленого правильного дев'ятикутника. Занумеруємо вершини дев'ятикутника по колу. Тоді з кожним розфарбуванням множини $M$ зіставляється набір вигляду $(x_1, \ldots, x_9)$, де $x_r$ є однією з літер: *ж* чи *з*. Інтерпретуємо елементи $\pi$ групи $D_9$ як підстановки $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \ldots & 9 \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_9 \end{smallmatrix}\right)$ множини $\{1, \ldots, 9\}$ вершин дев'ятикутника, де $i_r$ є номером вершини, у яку переходить вершина з номером $r$ при перетворенні $\pi$. Тоді група $D_9$ діє на множині $M$ таким чином: нехай $\pi \in D_9$, $(x_1, \ldots, x_9) \in M$, тоді $(x_1, \ldots, x_9)^\pi = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(9)})$. Щоб скористатися лемою Коші — Фробеніуса — Бернсайда, потрібно підрахувати для кожного елемента групи $D_9$ кількість нерухомих точок. Зауважимо, що коли розкласти $\pi \in D_9$ у добуток незалежних циклів $\pi = (i_1 \ldots i_{k_1}) \ldots (j_1 \ldots j_{k_s})$, то розфарбування $(x_1, \ldots, x_9)$ буде нерухомою точкою для $\pi$ тоді й лише тоді, коли $x_{i_1} = \ldots = x_{i_{k_1}}, \ldots, x_{j_1} = \ldots = x_{j_{k_s}}$. Тому кількість нерухомих розфарбувань для $\pi$ дорівнюватиме $2^s$, де $s$ — кількість циклів у розкладі $\pi$ у добуток незалежних циклів. Для елементів із $D_9$ матимемо:

цикловий тип тотожного перетворення $(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)$, тому кількість нерухомих розфарбувань дорівнює $2^9$;

повороти на кути $120^\circ$ і $240^\circ$ мають цикловий тип $(\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot)$, тому кількість нерухомих розфарбувань дорівнює $2^3$;

повороти на кути $40^\circ$, $80^\circ$, $160^\circ$, $200^\circ$, $280^\circ$ і $320^\circ$ мають цикловий тип $(\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)$, тому кількість нерухомих розфарбувань дорівнює $2^1$;

9 осьових симетрій мають цикловий тип $(\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)$, тому кількість нерухомих розфарбувань дорівнює $2^5$.

Тоді за лемою Коші — Фробеніуса — Бернсайда кількість $N$ геометрично різних розфарбувань вершин правильного дев'ятикутника у два кольори дорівнює $N = \frac{1}{18}(1 \cdot 2^9 + 2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^1 + 9 \cdot 2^5) = 46$.

b) Ця задача відрізняється від попередньої лише тим, що кольори намистинок не можна вибирати незалежно. Для елементів із $D_9$ матимемо:

для тотожного перетворення $(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)$ треба вказати, які саме три цикли містять намистинки жовтого кольору, тому кількість нерухомих розфарбувань дорівнює $\binom{9}{3} = 84$;

для поворотів на кути $120^\circ$ і $240^\circ$ один із трьох циклів $(\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot)$ має містити жовті намистинки, а два інші — зелені, тому кількість нерухомих розфарбувань дорівнює $\binom{3}{1} = 3$;

для поворотів на кути $40^\circ$, $80^\circ$, $160^\circ$, $200^\circ$, $280^\circ$ і $320^\circ$ нерухомих розфарбувань не буде, тому що намистинок одного кольору на цикл $(\ldots\ldots\ldots)$ довжиною 9 не вистачає;

для кожної з 9 осьових симетрій циклового типу $(.)(..)(..)(..)(..)$ жовті намистинки має містити цикл довжиною 1 і один із циклів довжиною 2, тому кількість нерухомих розфарбувань дорівнює $\binom{4}{1} = 4$.

За лемою Коші — Фробеніуса — Бернсайда кількість істотно різних разків намиста дорівнює $\frac{1}{18}(84 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 0 + 9 \cdot 4) = \frac{126}{18} = 7$. □

**Задача 6.** *Скількома геометрично різними способами можна розфарбувати вершини куба, якщо є фарби $k$ кольорів?*

*Розв'язання.* Якщо куб жорстко закріплений, то його вершини можна розфарбувати $k^8$ способами (кожну з 8 вершин можна, незалежно від кольору інших вершин, пофарбувати в один із $k$ кольорів). Якщо куб обертати, то розфарбування починають переходити одне в одне. Геометрично різними будуть такі розфарбування, які не можна перевести одне в одне жодним поворотом куба, і їм відповідатимуть орбіти природної дії групи поворотів куба на множині з $k^8$ розфарбувань жорстко закріпленого куба.

Група $G$ поворотів куба містить: a) 1 поворот на нульовий кут (тотожне перетворення); b) 6 поворотів на кути $\pm 90^\circ$ навколо осей, що проходять через центри двох протилежних граней куба; c) 3 повороти на кут $180^\circ$ навколо тих самих осей; d) 6 поворотів на кут $180^\circ$ навколо осей, що проходять через середини двох протилежних ребер; e) 8 поворотів на кути $\pm 120^\circ$ навколо осей, що проходять через дві діаметрально протилежні вершини. Таким чином, група $G$ містить усього $1 + 6 + 3 + 6 + 8 = 24$ елементи.

Підрахуємо для кожного з поворотів кількість нерухомих точок при дії групи $G$ на розфарбуваннях жорстко закріпленого куба. Очевидно, що коли два повороти належать до того ж самого з перерахованих вище типів a) – e), то вони мають однакову кількість нерухомих розфарбувань. При тотожному перетворенні всі $k^8$ розфарбувань лишаються нерухомими. При повороті типу b) розфарбування буде переходити в себе тоді й лише тоді, коли в кожній із граней, через центри яких проходить вісь, усі 4 вершини пофарбовані в один колір. Оскільки кольори можна вибирати незалежно, то маємо $k^2$ нерухомих розфарбувань. При повороті типу c) розфарбування буде переходити в себе тоді й лише тоді, коли в кожній із 4 пар протилежних вершин граней, через які проходить вісь, обидві вершини матимуть однаковий колір. Тому при такому повороті маємо $k^4$ нерухомих розфарбувань. При повороті типу d) вершини знову розбиваються на 4 пари, які мають бути однакового кольору. Таким чином, і в цьому випадку маємо $k^4$ нерухомих розфарбувань. Нарешті, при повороті типу e) вершини, через які проходить вісь, переходять самі в себе, тому їх колір можна вибирати довільно. Решта 6 вершин розбиваються на 2 трійки (кінці ребер, що виходять із вершини, через яку проходить вісь), у кожній з яких вершини мають бути однакового кольору. Тому й у цьому випадку маємо $k^4$ нерухомих розфарбувань.

За лемою Коші — Фробеніуса — Бернсайда кількість $N$ орбіт природної дії групи поворотів куба на множині розфарбувань вершин жорстко закріпленого куба (тобто кількість геометрично різних розфарбувань вершин куба) дорівнює

$$N = \frac{1}{24}(1 \cdot k^8 + 6 \cdot k^2 + 3 \cdot k^4 + 6 \cdot k^4 + 8 \cdot k^4) = \frac{1}{24}(k^8 + 17k^4 + 6k^2) . \qquad \square$$

## Основні задачі

**7.** Укажіть у групі $S_6$: a) дві неподібні циклічні підгрупи порядку 4; b) дві неподібні циклічні підгрупи порядку 6.

**8.** З'ясуйте, чи існує дія групи: a) $D_6$; b) $A_4$ на 13–елементній множині, яка не має нерухомих точок.

**9.** Нехай абелева група $A$ діє на множині $M$. Доведіть, що коли елемент $a \in A$ лишає нерухомою якусь точку $x$ певної орбіти, то $a$ лишає нерухомими всі точки цієї орбіти.

**10.** Для кожного натурального числа $k$ із проміжку $2 \le k \le 4$ опишіть усі орбіти природної дії групи $S_n$ на $k$–му декартовому степені $N^k$ множини $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Знайдіть кількість і потужності цих орбіт.

**11.** Нехай $E_n$ — $n$–вимірний евклідів простір. Опишіть орбіти природної дії на просторі $E_n$ кожної з груп: a) $GL(E_n)$ — група всіх невироджених лінійних перетворень простору $E_n$; b) $O_n(E_n)$ — група всіх ортогональних перетворень цього простору; c) $D_n(E_n)$ — група тих перетворень із $GL(E_n)$, матриця яких у даній базі $e_1, \ldots, e_n$ є діагональною.

**12.** Знайдіть зображення групи $A_4$ підстановками на множині правих класів суміжності за підгрупою $K_4$.

**13.** Доведіть, що група $A_5$ не містить підгруп порядків 15, 20 і 30.

**14.** Скількома геометрично різними способами можна розфарбувати ребра: a) правильного тетраедра; b) куба; c) правильної $n$–кутної піраміди, якщо є фарби $k$ кольорів?

**15.** Обчисліть, скільки істотно різних разків намиста можна скласти, якщо кожний разок має містити 5 жовтих і 5 зелених намистинок.

## Додаткові задачі

**16.** Укажіть у групі $S_6$ три неподібні підгрупи, кожна з яких ізоморфна групі $S_3$.

**17.** Опишіть орбіти та підрахуйте їх кількість і потужності для природної дії групи $GL_n(\mathbb{Z}_p)$: a) на впорядкованих парах векторів із $n$–вимірного векторного простору $\mathbb{Z}_p^n$; b)$^*$ на впорядкованих трійках векторів цього ж простору.

**18.**$^{**}$ Опишіть орбіти та підрахуйте їх кількість і потужності для дії множенням $a : x \mapsto ax$ мультиплікативної групи $\mathbb{Z}_n^*$ на множині $\mathbb{Z}_n$ класів лишків за модулем $n$.

**19.**$^{**}$ Доведіть, що кожна підгрупа $H$ скінченного індексу $n$ групи $G$ містить нормальну підгрупу $N$, індекс якої $|G : N|$ ділить число $n!$ і ділиться на $n$.

**20.**$^{**}$ Доведіть, що коли $p$ — найменший простий дільник порядку $|G|$ скінченної групи $G$ і $H$ — підгрупа групи $G$ індексу $p$, то $H$ — нормальна підгрупа групи $G$.

**21.**$^*$ Нехай $\chi(g)$ — кількість нерухомих точок підстановки $g$. Доведіть, що: a) для кожного натурального числа $n > 3$ виконується рівність

$$\sum_{g \in A_n} \chi^2(g) = n! \ ;$$

b) для кожної двічі транзитивної групи підстановок $G$ виконується рівність

$$\sum_{g \in G} \chi^2(g) = 2 \cdot |G| \ .$$

**22.**$^*$ Доведіть, що множина $\{\pm i, \pm j, \pm k\}$ є орбітою природної дії групи $\operatorname{Aut} Q_8$ на групі $Q_8$ і що дія групи $\operatorname{Aut} Q_8$ на цій орбіті подібна до дії групи поворотів куба на множині його граней.

**23.** Доведіть, що $\operatorname{Aut} Q_8 \simeq S_4$.

**24.**** Доведіть, що факторгрупа групи $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ за її центром ізоморфна групі $S_4$.

### Домашнє завдання

**25.** З'ясуйте, чи буде точною і транзитивною дія групи $G$ усіх лінійних перетворень $x \mapsto ax + b$, $a, b \in P$, $a \neq 0$, поля $P$ на множині $P^{[2]}$ усіх 2–елементних підмножин поля $P$.

**26.** Знайдіть стабілізатор діагоналі куба при природній дії групи поворотів куба на діагоналях.

**27.** Для кожного натурального числа $k$ із проміжку $2 \leq k \leq 4$ опишіть усі орбіти природної дії групи $A_n$ на $k$–му декартовому степені $N^k$ множини $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Знайдіть кількість і потужності цих орбіт.

**28.** Знайдіть зображення групи $D_4$ підстановками на множині правих класів суміжності групи $D_4$ за підгрупою $H$, якщо: a) $H$ — підгрупа, породжена поворотом на $180°$; b) $H$ — підгрупа, породжена осьовою симетрією, що проходить через протилежні вершини квадрата; c) $H$ — підгрупа, породжена осьовою симетрією, що проходить через середини протилежних сторін квадрата.

**29.** Скількома геометрично різними способами можна розфарбувати грані: a) правильного тетраедра; b) куба; c) правильної $n$–кутної піраміди, якщо є фарби $k$ кольорів?

**30.** Обчисліть, скільки істотно різних разків намиста можна скласти, якщо кожний разок має містити 4 жовтих і 8 зелених намистинок.

*Література.* [1, с. 78–87], [4, с. 301–309], [7, с. 259–260, 261–264, 266–267], [6, с. 23–30].

## Заняття 13. Теореми Силова

### Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.** *Укажіть усі силовські 2–підгрупи групи $S_4$, які містять підстановку* $(1\,2\,3\,4)$.

*Розв'язання.* $|S_4| = 24 = 2^3 \cdot 3$, тому силовська 2–підгрупа групи $S_4$ має порядок $2^3 = 8$. Крім того, якщо занумерувати певним чином вершини квадрата й розглянути природну дію групи $D_4$ на множині вершин, то одержимо занурення $D_4$ у групу $S_4$. Оскільки $|D_4| = 8$, то образ $D_4$ при цьому зануренні буде силовською 2–підгрупою групи $S_4$. Підстановка $(1\,2\,3\,4)$ відповідає повороту на $90^\circ$ при послідовній нумерації вершин квадрата, тому при такій нумерації групі $D_4$ відповідатиме підгрупа $H = \{\varepsilon, (1\,2\,3\,4), (13)(24), (1\,4\,3\,2), (12)(34), (13), (14)(23), (24)\}$ групи $S_4$.

Кількість силовських 2–підгруп у $S_4$ має бути непарною і ділити 24 за теоремою Силова про кількість. Оскільки $H$ містить не всі елементи порядку 2 із $S_4$, то силовських 2–підгруп більше ніж 1. Отже, їх 3. Кожна з них є спряженою з $H$, а тому містить рівно 2 цикли довжиною 4. З іншого боку, $S_4$ містить 6 циклів довжиною 4. Тому жоден цикл довжиною 4 не може входити одночасно у дві силовські 2–підгрупи. Таким чином, єдиною силовською 2–підгрупою із $S_4$, яка містить цикл $(1\,2\,3\,4)$, є $H$. $\square$

**Задача 2.** *Знайдіть порядок силовської $p$–підгрупи в групі $S_{p^k}$.*

*Розв'язання.* Порядок $S_n$ дорівнює $n!$, тому порядок силовської $p$–підгрупи групи $S_n$ дорівнює $p^l$, де $l$ — показник, з яким просте число $p$ входить до канонічного розкладу числа $n!$. Доведемо, що $l$ дорівнює $\left[\dfrac{n}{p}\right] + \left[\dfrac{n}{p^2}\right] + \left[\dfrac{n}{p^3}\right] + \cdots$. Справді, $\left[\dfrac{n}{p}\right]$ дорівнює кількості тих чисел ряду 1, 2, …, $n$, які діляться на $p$, $\left[\dfrac{n}{p^2}\right]$ – кількості тих, які діляться на $p^2$, і т. д. Тому

$$l = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ p^j | m}}^{\infty} 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ p^j | m}}^{n} 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j}\right].$$

При $n = p^k$ порядок силовської $p$–підгрупи в $S_{p^k}$ дорівнює

$$p^{\left[\frac{p^k}{p}\right] + \left[\frac{p^k}{p^2}\right] + \left[\frac{p^k}{p^3}\right] + \cdots} = p^{p^{k-1} + p^{k-2} + \cdots + p + 1} = p^{\frac{p^k - 1}{p-1}}. \quad \square$$

**Задача 3.** *Доведіть, що нормальна $p$–підгрупа $H$ скінченної групи $G$ міститься в кожній силовській $p$–підгрупі групи $G$.*

*Розв'язання.* За теоремою Силова про існування $p$–підгрупа $H$ міститься принаймні в одній силовській $p$–підгрупі $P$ групи $G$. Нехай тепер

$P_1$ — інша силовська $p$–підгрупа. За теоремою Силова про спряженість існує такий елемент $g \in G$, що $g^{-1}Pg = P_1$. З іншого боку, з нормальності $H$ випливає, що $g^{-1}Hg = H$. Тому $H \leq P_1$. $\square$

**Задача 4.** *Доведіть, що кожна група $G$ порядку 185 є комутативною.*

*Розв'язання.* Дільниками числа 185 є 1, 5, 37 і 185. Оскільки жодне з чисел 5, 37 і 185 не конгруентне 1 ні за модулем числа 5, ні за модулем числа 37, то група $G$ має єдину силовську 5–підгрупу $P_1$ порядку 5 і єдину силовську 37–підгрупу $P_2$ порядку 37. З теореми Силова про спряженість випливає, що $P_1$ і $P_2$ є нормальними підгрупами. Крім того, $P_1 \cap P_2 = E$ і $|P_1P_2| = 5 \cdot 37 = 185$. Тому $G = P_1 \times P_2$. Оскільки $P_1$ і $P_2$ як групи простих порядків є циклічними, а тому комутативними, то й група $G$ є комутативною. $\square$

**Задача 5.** *Доведіть, що кожна група $G$ порядку 12 містить нетривіальну нормальну підгрупу.*

*Розв'язання.* За теоремою Силова про існування група $G$ містить силовську 2–підгрупу $P$ порядку 4. $|G : P| = 12/4 = 3$, тому є 3 правих класи суміжності $P, Pg_2, Pg_3$ групи $G$ за підгрупою $P$. Розглянемо зображення $\varphi : g \mapsto \left(\begin{smallmatrix} P & Pg_2 & Pg_3 \\ Pg & Pg_2g & Pg_3g \end{smallmatrix}\right)$ групи $G$ правими зсувами на класах суміжності за підгрупою $P$. Ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ цього зображення є нормальною підгрупою групи $G$. Елементу $g_2$ відповідає неодинична підстановка $\left(\begin{smallmatrix} P & Pg_2 & Pg_3 \\ Pg_2 & Pg_2^2 & Pg_3g_2 \end{smallmatrix}\right)$, тому $\operatorname{Ker}\varphi \neq G$. З іншого боку, відображення $\varphi$ не може бути ін'єктивним, тому що $|G| = 12$, а $|\operatorname{Im}\varphi| \leq 3! = 6$. Тому $\operatorname{Ker}\varphi \neq E$. Отже, $\operatorname{Ker}\varphi$ є нетривіальною нормальною підгрупою групи $G$. $\square$

**Задача 6.** *Доведіть, що кожна група $G$ порядку 200 містить нормальну силовську підгрупу.*

*Розв'язання.* Оскільки $200 = 2^3 5^2$, то $G$ містить силовську 5–підгрупу $P$ порядку $5^2 = 25$. За теоремою Силова про кількість кількість силовських 5–підгруп має ділити порядок групи й бути конгруентною 1 за модулем числа 5. Серед дільників числа 200 лише один конгруентний 1 за модулем числа 5 — це 1. Отже, група $G$ містить лише одну силовську 5–підгрупу. За теоремою Силова про спряженість ця підгрупа є нормальною. $\square$

**Задача 7.** *Знайдіть кількість силовських 2–підгруп і силовських 5– підгруп у некомутативній групі $G$ порядку 20.*

*Розв'язання.* У групі $G$ силовські підгрупи мають порядок 4 або 5, а тому є комутативними. Якби група $G$ містила тільки по одній 2– і 5–підгрупі, то з теореми Силова про спряженість випливала б нормальність цих підгруп. Далі аналогічно зад. 13.4 можна було б довести комутативність групи $G$. Тому кількість або 2–підгруп, або 5–підгруп має бути більше одиниці.

Оскільки серед дільників числа 20 тільки число 1 має вигляд $5k+1$, то $G$ містить лише одну силовську 5–підгрупу. Тому силовських 2–підгруп більше ніж одна. Однак серед неодиничних дільників числа 20 лише один є непарним — це 5. Отже, група $G$ має 5 силовських 2–підгруп і 1 силовську 5–підгрупу. □

## Основні задачі

**8.** Доведіть, що множина всіх $p$–елементів, де $p$ — просте число, скінченної групи $G$ підгрупу не утворює.

**9.** Доведіть, що група унітрикутних матриць $UT_n(\mathbb{Z}_p)$ буде силовською $p$–підгрупою в групах: a) $GL_n(\mathbb{Z}_p)$; b) $T_n(\mathbb{Z}_p)$; c) $SL_n(\mathbb{Z}_p)$.

**10.** Знайдіть усі силовські 2–підгрупи і 3–підгрупи в групі $A_4$. Для кожної пари силовських 3–підгруп укажіть такий елемент групи $A_4$, спряження за допомогою якого переводить одну з них в іншу.

**11.** Нехай $p > 2$ — просте число. Опишіть усі силовські 2–підгрупи й $p$–підгрупи груп: a) $D_p$; b) $D_{2p}$ та підрахуйте їх кількість.

**12.** Доведіть, що силовська 2–підгрупа групи $A_5$ ізоморфна групі $K_4$.

**13.** Укажіть усі силовські 2–підгрупи групи $S_4$, які містять транспозицію $(1\,3)$.

**14.** Скільки елементів порядку 7 містить проста група порядку 168?

**15.** Доведіть, що коли нормальна підгрупа $H$ групи $G$ містить хоча б одну силовську $p$–підгрупу групи $G$, то вона містить усі силовські $p$–підгрупи групи $G$.

**16.** Доведіть, що перетин усіх силовських $p$–підгруп групи $G$ є нормальною підгрупою в $G$.

**17.** Доведіть, що кожна група порядку: a) 35; b) 665 є комутативною.

**18.** Доведіть, що кожна група порядку: a) 24; b) 100 містить нетривіальну нормальну підгрупу.

**19.** Доведіть, що кожна група $G$ порядку: a) 196; b) 56 містить нормальну силовську підгрупу.

## Додаткові задачі

**20.**$^*$ Доведіть, що кожна група $G$ порядку 255 є комутативною.

**21.**$^{**}$ Знайдіть кількість силовських $p$–підгруп у групі $S_{2p}$.

**22.**$^{**}$ Доведіть, що кожна група порядку $p^2q$, де $p$ і $q$ — різні прості числа, містить нормальну силовську підгрупу.

**23.**$^{**}$ Доведіть, що кожна група порядку 36 містить нетривіальну нормальну підгрупу.

**24.**$^{***}$ Доведіть, що, за винятком значень 24 і 48, кожна група $G$ порядку менше 60 містить нормальну силовську підгрупу.

**25.**$^{***}$ Доведіть, що кожна проста група порядку менше 60 є абелевою.

**26.** Доведіть, що для кожного простого числа $p$ кожна група $G$ порядку $2p$ ізоморфна або циклічній групі $C_{2p}$, або групі діедра $D_p$.

**27.**$^{**}$ Доведіть, що з точністю до ізоморфізму існує рівно 5 груп порядку: a) 8; b) 12; c) 18; d) 20.

**28.** Доведіть, що скінченна група $G$ розкладається в прямий добуток своїх силовських підгруп тоді й лише тоді, коли вона для кожного простого дільника $p$ свого порядку містить єдину силовську $p$–підгрупу.

**29.**$^*$ Доведіть, що якщо в скінченній групі $G$ усі силовські підгрупи є нормальними, то й у будь–якій підгрупі $H$ групи $G$ усі силовські підгрупи є нормальними.

## Домашнє завдання

**30.** Для кожного простого числа $p$, яке ділить порядок групи: a) $SL_2(\mathbb{Z}_3)$; b) $A_5$, знайдіть кількість силовських $p$–підгруп цієї групи.

**31.** Укажіть усі силовські 2–підгрупи групи $S_4$, які містять підстановку $(1\,4)(2\,3)$.

**32.** Доведіть, що всі силовські підгрупи групи порядку: a) 36; b) 100; c) 196 є абелевими.

**33.** Доведіть, що кожна група порядку: a) 51; b) 145 є комутативною.

**34.** Наведіть приклад групи порядку 24, яка не має нормальної силовської підгрупи.

**35.** Доведіть, що кожна група порядку 80 містить нетривіальну нормальну підгрупу.

**36.** Доведіть, що коли для натурального числа $n$ і кожного елемента $g$ скінченної групи $G$ виконується рівність $g^n = e$, то деякий степінь числа $n$ ділиться на порядок групи $G$.

*Література.* [1, с. 91–95], [4, с. 332–338], [6, с. 54–59].

# Заняття 14. Абелеві групи I

## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.** *Розкладіть у прямий добуток примарних* (від латинського слова *prima*) *циклічних груп групу $C_{24} \times C_{72}$.*

*Розв'язання.* Маємо розклади $24 = 3 \cdot 8$ і $72 = 9 \cdot 8$, у кожному з яких множники взаємно прості. Тому $C_{24} \simeq C_3 \times C_8$ і $C_{72} \simeq C_9 \times C_8$, звідки $C_{24} \times C_{72} \simeq C_3 \times C_8 \times C_9 \times C_8$. В отриманому розкладі всі множники є примарними циклічними групами. □

**Задача 2.** *Опишіть з точністю до ізоморфізму всі абелеві групи порядку* 36.

*Розв'язання.* Нехай $G$ — група порядку $36 = 4 \cdot 9$. Тоді 2–компонента групи $G$ має порядок 4, а 3–компонента — порядок 9. Підгрупу порядку 4 можна побудувати з циклічних 2–груп двома способами: $C_4$ і $C_2 \times C_2$, а групу порядку 9 із циклічних 3–груп — також двома способами: $C_9$ і $C_3 \times C_3$. Вибираючи незалежно 2–компоненту і 3–компоненту групи $G$, одержимо 4 попарно неізоморфні абелеві групи порядку 36: 1) $C_4 \times C_9$; 2) $C_4 \times C_3 \times C_3$; 3) $C_2 \times C_2 \times C_9$; 4) $C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3$. □

**Задача 3.** *Скільки існує попарно неізоморфних абелевих груп порядку* 360?

*Розв'язання.* $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, тому абелева група $G$ порядку 360 містить 2–компоненту порядку $2^3 = 8$, 3–компоненту порядку $3^2 = 9$ і 5–компоненту порядку 5. Підгрупу порядку 8 можна побудувати з циклічних 2–груп трьома способами: $C_8$, $C_4 \times C_2$ і $C_2 \times C_2 \times C_2$, підгрупу порядку 9 із циклічних 3–груп — двома способами: $C_9$ і $C_3 \times C_3$, а підгрупу порядку 5 можна вибрати лише одним способом: це $C_5$. Вибираючи незалежно відповідні компоненти групи $G$, одержуємо $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ попарно неізоморфних абелевих груп порядку 360. $\square$

**Задача 4.** *З'ясуйте, чи ізоморфні групи*: a) $C_8 \times C_{45}$ *і* $C_{15} \times C_{24}$; b) $C_8 \times C_{20}$ *і* $C_4 \times C_{40}$.

*Розв'язання.* a) Використовуючи розклади $45 = 5 \cdot 9$, $15 = 3 \cdot 5$ і $24 = 3 \cdot 8$ у добуток взаємно простих множників, отримуємо такі розклади даних груп у прямий добуток примарних циклічних груп: $C_8 \times C_{45} \simeq C_8 \times C_5 \times C_9$, $C_{15} \times C_{24} \simeq C_3 \times C_5 \times C_3 \times C_8$. Оскільки розклад скінченної абелевої групи у прямий добуток примарних циклічних груп з точністю до порядку множників однозначний, а наші розклади розрізняються навіть кількістю множників, то дані групи не є ізоморфними.

b) Як і в попередньому пункті, отримуємо розклади: $C_8 \times C_{20} \simeq C_8 \times C_4 \times C_5$, $C_4 \times C_{40} \simeq C_4 \times C_8 \times C_5$. Одержані розклади у прямий добуток примарних циклічних груп розрізняються лише порядком множників, тому групи $C_8 \times C_{20}$ і $C_4 \times C_{40}$ є ізоморфними. $\square$

**Задача 5.** *Скільки елементів порядку $k$ містить група $G$, якщо*: a) $k = 4$, $G = C_6 \times C_{24}$; b) $k = 6$, $G = C_9 \times C_{24}$?

*Розв'язання.* a) Нехай $C_6 = \langle a \rangle$, $C_{24} = \langle b \rangle$. Тоді довільний елемент групи $C_6 \times C_{24}$ можна записати у вигляді $g = (a^m, b^n)$, де $0 \le m < 6$, $0 \le n < 24$. З означення порядку елемента випливає, що $|g| = 4$ тоді й лише тоді, коли $g$ є розв'язком рівняння $x^4 = e$, але не є розв'язком рівняння $x^r = e$ для жодного $1 \le r < 4$. Однак якщо $g$ є розв'язком рівняння $x^4 = e$ і має порядок менший ніж 4, то $g$ має порядок 1 або 2, а тому є розв'язком рівняння $x^2 = e$. Таким чином, кількість елементів порядку 4 дорівнює різниці між кількістю розв'язків рівняння $x^4 = e$ і рівняння $x^2 = e$.

Знайдемо кількість розв'язків рівняння $x^4 = e$. Оскільки $g^4 = e \Leftrightarrow (a^m, b^n)^4 = (e, e) \Leftrightarrow (a^{4m}, b^{4n}) = (e, e) \Leftrightarrow 4m \equiv 0 \pmod 6$ і $4n \equiv 0 \pmod{24} \Leftrightarrow m \equiv 0 \pmod 3$ і $n \equiv 0 \pmod 6$, то $m \in \{0, 3\}$, $n \in \{0, 6, 12, 18\}$. Значення $m$ і $n$ можна вибирати незалежно, тому рівняння $x^4 = e$ має $2 \cdot 4 = 8$ розв'язків.

Аналогічно отримуємо: $g^2 = e \Leftrightarrow (a^{2m}, b^{2n}) = (e, e) \Leftrightarrow 2m \equiv 0 \pmod 6$ і $2n \equiv 0 \pmod{24} \Leftrightarrow m \equiv 0 \pmod 3$ і $n \equiv 0 \pmod{12}$, звідки $m \in \{0, 3\}$, $n \in \{0, 12\}$. Тому рівняння $x^2 = e$ має $2 \cdot 2 = 4$ розв'язки.

Отже, група $C_6 \times C_{24}$ містить $8 - 4 = 4$ елементи порядку 4.

b) Нехай, як і у п. a), $C_9 = \langle a \rangle$, $C_{24} = \langle b \rangle$ і $g = (a^m, b^n)$, де $0 \le m < 9$, $0 \le n < 24$ — довільний елемент групи $C_9 \times C_{24}$. Шукаємо розв'язки рівняння $x^6 = e$. Матимемо: $g^6 = e \Leftrightarrow (a^{6m}, b^{6n}) = (e, e) \Leftrightarrow 6m \equiv 0 \pmod 9$ і $6n \equiv 0 \pmod{24} \Leftrightarrow m \equiv 0 \pmod 3$ і $n \equiv 0 \pmod 4$, звідки $m \in \{0, 3, 6\}$, $n \in \{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$. Тому в групі $C_9 \times C_{24}$ рівняння $x^6 = e$ має $3 \cdot 6 = 18$ розв'язків.

Розв'язками рівняння $x^6 = e$ будуть, крім елементів порядку 6, ще й елементи порядків 3, 2 і 1. Щоб виключити їх, знайдемо кількість розв'язків відповідних рівнянь.

$g^3 = e \Leftrightarrow (a^{3m}, b^{3n}) = (e, e) \Leftrightarrow 3m \equiv 0 \pmod 9$ і $3n \equiv 0 \pmod{24} \Leftrightarrow m \equiv 0 \pmod 3$ і $n \equiv 0 \pmod 8$, звідки $m \in \{0, 3, 6\}$, $n \in \{0, 8, 16\}$. Тому рівняння $x^3 = e$ має $3 \cdot 3 = 9$ розв'язків.

$g^2 = e \Leftrightarrow (a^{2m}, b^{2n}) = (e, e) \Leftrightarrow 2m \equiv 0 \pmod 9$ і $2n \equiv 0 \pmod{24} \Leftrightarrow m \equiv 0 \pmod 9$ і $n \equiv 0 \pmod{12}$, звідки $m = 0$, $n \in \{0, 12\}$. Тому рівняння $x^2 = e$ має $1 \cdot 2 = 2$ розв'язки.

Рівняння $x^1 = e$ має лише 1 розв'язок $e$.

Таким чином, група $C_9 \times C_{24}$ має $18 - 9 - 2 + 1 = 8$ елементів порядку 6 (кількість розв'язків рівняння $x^1 = e$ треба додавати, а не віднімати, тому що перед цим ми їх віднімали двічі — як розв'язки рівнянь $x^3 = e$ і $x^2 = e$). $\square$

**Задача 6.** *Розкладіть у прямий добуток примарних циклічних груп групу* $\mathbb{Z}_{35}^*$.

*Розв'язання.* Група $\mathbb{Z}_{35}^*$ має порядок $\varphi(35) = 24$, тому вона містить 2–компоненту порядку 8 і 3–компоненту порядку 3. Очевидно, що 3–компонента ізоморфна групі $C_3$. З'ясуємо, якій саме групі — $C_8$, $C_4 \times C_2$ чи $C_2 \times C_2 \times C_2$ — ізоморфна 2–компонента. Для цього спочатку обчислимо послідовні степені кількох елементів. Маємо: $\bar{2}^1 = \bar{2}$, $\bar{2}^2 = \bar{4}$, $\bar{2}^3 = \bar{8}$, $\bar{2}^4 = \overline{16}$, $\bar{2}^5 = \overline{32}$, $\bar{2}^6 = \overline{29}$, $\bar{2}^7 = \overline{23}$, $\bar{2}^8 = \overline{11}$, $\bar{2}^9 = \overline{22}$, $\bar{2}^{10} = \bar{9}$, $\bar{2}^{11} = \overline{18}$, $\bar{2}^{12} = \bar{1}$; $\bar{3}^1 = \bar{3}$, $\bar{3}^2 = \bar{9}$, $\bar{3}^3 = \overline{27}$, $\bar{3}^4 = \overline{11}$, $\bar{3}^5 = \overline{33}$, $\bar{3}^6 = \overline{29}$, $\bar{3}^7 = \overline{17}$, $\bar{3}^8 = \overline{16}$, $\bar{3}^9 = \overline{13}$, $\bar{3}^{10} = \bar{4}$, $\bar{3}^{11} = \overline{12}$, $\bar{3}^{12} = \bar{1}$. Таким чином, $\bar{2}$ і $\bar{3}$ мають порядок 12, а тому $\bar{2}^3 = \bar{8}$, $\bar{2}^9 = \overline{22}$, $\bar{3}^3 = \overline{27}$ і $\bar{3}^9 = \overline{13}$ мають порядок 4. Оскільки група $C_2 \times C_2 \times C_2$ узагалі не містить елементів порядку 4, а група $C_8$ містить лише 2 такі елементи, то 2–компонента ізоморфна групі $C_4 \times C_2$. Як $C_4$ можна взяти будь–яку підгрупу, породжену елементом порядку

4, наприклад, $\langle \bar{8} \rangle = \{\, \bar{1}, \bar{8}, \overline{29}, \overline{22}\, \}$. Тоді як $C_2$ можна брати будь–яку підгрупу порядку 2, що не міститься в $\langle \bar{8} \rangle$, наприклад, $\langle \bar{6} \rangle = \{\bar{1}, \bar{6}\}$. Множник $C_3$ визначається однозначно як підгрупа $\langle\, \overline{11}\, \rangle = \{\, \bar{1}, \overline{11}, \overline{16}\, \}$, породжена елементом $\bar{2}^8 = \overline{11}$ порядку 3. Таким чином, $\mathbb{Z}_{35}^* = \langle\, \bar{8}\, \rangle \times \langle\, \bar{6}\, \rangle \times \langle\, \overline{11}\, \rangle \simeq C_4 \times C_2 \times C_3$. $\square$

## Основні задачі

**7.** Наведіть приклад неабелевої групи порядку: a) 6; b) 8; c) 12, усі власні підгрупи якої є абелевими.

**8.** Доведіть, що коли абелева група $A$ містить елементи нескінченного порядку і множина елементів нескінченного порядку разом з одиничним утворює підгрупу групи $A$, то $A$ є групою без скруту.

**9.** Доведіть, що коли порядок елемента $a$ дорівнює $p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$, то існують такі натуральні числа $n_1, \ldots, n_m$, що $a = a^{n_1} \cdots a^{n_m}$ і $|a^{n_1}| = p_1^{k_1}$, $\ldots$, $|a^{n_m}| = p_m^{k_m}$.

**10.** Розкладіть у прямий добуток примарних циклічних груп групи:
a) $C_{60}$; b) $C_{720}$; c) $C_{30} \times C_{60}$.

**11.** Опишіть з точністю до ізоморфізму всі абелеві групи порядку:
a) 8; b) 72.

**12.** Нехай $p, q$ і $r$ — різні прості числа. Скільки існує попарно неізоморфних абелевих груп порядку: a) $p^2$; b) $p^3$; c) $p^5$; d) $pqr$; e) $p^3q^4$?

**13.** Скільки існує попарно неізоморфних абелевих груп порядку: a) 300; b) 150; c) 240; d) 1234; e) 12345?

**14.** Розкладіть у прямий добуток примарних циклічних груп групи:
a) $\mathbb{Z}_{15}^*$; b) $\mathbb{Z}_{16}^*$; c) $\mathbb{Z}_{24}^*$.

**15.** Розбийте групи на класи попарно ізоморфних: a) $\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_{225}$; b) $\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{400}$; c) $\mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_{144}$; d) $\mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{100}$; e) $\mathbb{Z}_{30} \oplus \mathbb{Z}_{120}$; f) $\mathbb{Z}_{60} \oplus \mathbb{Z}_{60}$; g) $\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{25}$; h) $\mathbb{Z}_{30} \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{12}$; i) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{20}$.

**16.** Нехай $p$ — просте число. Для кожного з можливих порядків знайдіть кількість елементів цього порядку в групах: a) $C_p \times C_{p^2}$; b) $C_{p^2} \times C_{p^3}$.

**17.** Скільки елементів порядку $k$ містить група $G$, якщо: a) $k = 8$, $G = C_{12} \times C_{24}$; b) $k = 6$, $G = C_{12} \times C_{15}$?

## Додаткові задачі

**18.** Розкладіть у прямий добуток примарних циклічних груп групу $\mathbb{Z}_{144}^*$.

**19.**$^*$ Наведіть приклад неабелевої групи порядку: a) 20; b) 24; c) 28, усі власні підгрупи якої є абелевими?

**20.**$^{**}$ Доведіть, що кожна неабелева група порядку 30 містить власну неабелеву підгрупу.

**21.** Нехай $p$ і $q$ — різні прості числа. Для кожного з можливих порядків знайдіть кількість елементів цього порядку в групах: a) $C_p \times C_{p^2} \times C_q \times C_{q^2}$; b) $C_{p^n} \times C_{p^n} \times C_{q^n} \times C_{q^n}$.

## Домашнє завдання

**22.** Нехай $H$ — довільна підгрупа скінченної абелевої групи $A$, а $P$ — силовська $p$–підгрупа з $A$. Доведіть, що перетин $H \cap P$ є силовською $p$–підгрупою з $H$.

**23.** Розкладіть у прямий добуток примарних циклічних груп групи:
a) $C_{45} \times C_{105}$; b) $C_{75} \times C_{90}$.

**24.** Опишіть з точністю до ізоморфізму всі абелеві групи порядку:
a) 30; b) 48.

**25.** Скільки існує попарно неізоморфних абелевих груп порядку: a) 288; b) 123456; c) 123123?

**26.** Розкладіть у прямий добуток примарних циклічних груп групи:
a) $\mathbb{Z}_{21}^*$; b) $\mathbb{Z}_{45}^*$; c) $\mathbb{Z}_{90}^*$; d) $\mathbb{Z}_{105}^*$.

**27.** З'ясуйте, чи ізоморфні групи: a) $C_{36} \times C_{10}$ і $C_{15} \times C_{24}$; b) $C_6 \times C_{15}$ і $C_{10} \times C_9$; c) $C_9 \times C_{15}$ і $C_{45} \times C_3$.

**28.** Для кожного з можливих порядків знайдіть кількість елементів цього порядку в групі $C_{15} \times C_{20}$.

*Література.* [1, с. 104–113], [3, с. 435–447], [4, с. 339–345], [7, с. 275–276, 278–283], [6, с. 71–74].

# Заняття 15. Абелеві групи II

## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.** *Опишіть з точністю до ізоморфізму всі підгрупи групи* $C_6 \times C_{12}$.

*Розв'язання.* Розкладемо спочатку групу $G = C_6 \times C_{12}$ у прямий добуток примарних циклічних підгруп: $G \simeq C_2 \times C_3 \times C_4 \times C_3$. Таким чином, 2–компонента $G_2$ групи $G$ ізоморфна $C_2 \times C_4$, а 3–компонента $G_3$ ізоморфна $C_3 \times C_3$. Тому кожна підгрупа 2–компоненти ізоморфна $E$, $C_2$, $C_4$, $C_2 \times C_2$ або $C_2 \times C_4$, а кожна підгрупа 3–компоненти ізоморфна $E$, $C_3$ або $C_3 \times C_3$.

З іншого боку, кожна підгрупа $H \leq G$ розкладається в прямий добуток $H_2 \times H_3$ своїх 2– і 3–компонент, причому $H_2$ може бути довільною підгрупою 2–компоненти $G_2$, а $H_3$ — довільною підгрупою 3–компоненти $G_3$. Оскільки 2– і 3–компоненти $H_2$ і $H_3$ підгрупи $H$ можна вибирати незалежно, то з точністю до ізоморфізму отримуємо 15 підгруп групи $G$, а саме: $E$; $C_2$; $C_4$; $C_2 \times C_2$; $C_2 \times C_4$; $C_3$; $C_2 \times C_3$; $C_4 \times C_3$; $C_2 \times C_2 \times C_3$; $C_2 \times C_4 \times C_3$; $C_3 \times C_3$; $C_2 \times C_3 \times C_3$; $C_4 \times C_3 \times C_3$; $C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3$; $G$. $\square$

**Задача 2.** *Скільки різних підгруп містить група* $G = \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p$, *якщо* $p$ *— просте число*?

*Розв'язання.* За теоремою Лагранжа порядок підгрупи $H \leq G$ може дорівнювати 1, $p$, $p^2$ або $p^3$. Очевидно, що порядок 1 має лише одинична підгрупа $E$, а порядок $p^3$ — лише сама група $G$. Оскільки кожна підгрупа порядку $p$ є циклічною й містить $p-1$ елемент порядку $p$, а всього в групі $G$ елементів такого порядку $p^2-1$ (див. зад. 14.16 а)), то маємо $\frac{p^2-1}{p-1} = p+1$ підгрупу порядку $p$. Підгрупа порядку $p^2$ може бути або нециклічною, або циклічною. У першому випадку вона ізоморфна $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ і містить $p^2-1$ елемент порядку $p$. Однак група $G$ містить усього $p^2-1$ елемент порядку $p$. Тому в $G$ є лише 1 нециклічна підгрупа порядку $p^2$. Кожна циклічна підгрупа порядку $p^2$ містить $p^2-p$ елементів порядку $p^2$, причому різні такі підгрупи спільних елементів порядку $p^2$ не мають. Оскільки у групі $G$ є всього $p^3-p^2$ елементів порядку $p^2$ (див. зад. 14.16 а)), то циклічних підгруп порядку $p^2$ буде $\frac{p^3-p^2}{p^2-p} = p$. Отже, загальна кількість підгруп дорівнює $1 + (p+1) + 1 + p + 1 = 2p + 4$. $\square$

**Задача 3.** *Підрахуйте з точністю до ізоморфізму кількість гомоморфних образів групи* $C_{18} \times C_{20}$.

*Розв'язання.* Розкладемо спочатку групу $G = C_{18} \times C_{20}$ у прямий добуток примарних циклічних підгруп: $G \simeq C_2 \times C_9 \times C_4 \times C_5$. Таким чином, 2–компонента $G_2$ групи $G$ ізоморфна $C_2 \times C_4$, 3–компонента $G_3$ ізоморфна $C_9$, а 5–компонента $G_5$ ізоморфна $C_5$.

Оскільки при гомоморфізмі $\varphi : G \to H$ порядок елемента $\varphi(g)$ ділить порядок елемента $g$, то $p$–компонента $G_p$ групи $G$ переходить у $p$–компоненту $H_p$ групи $H$. Крім того, для різних простих $p$ і $q$ $\varphi(G_p) \cap \varphi(G_q) = E$. Тому $\varphi(G) = \varphi(G_2) \times \varphi(G_3) \times \varphi(G_5)$. Із зад. 11.8 випливає, що гомоморфізм $\varphi : G \to H$ повністю визначається своїми значеннями на $p$–компонентах групи $G$, причому гомоморфізми $p$–компонент можна вибирати незалежно.

Легко бачити, що образ $\varphi(G_2)$ ізоморфний одній із груп $E$, $C_2$, $C_4$, $C_2 \times C_2$ або $C_2 \times C_4$; образ $\varphi(G_3)$ — $E$, $C_3$ або $C_9$; образ $\varphi(G_5)$ — $E$ або $C_5$. Таким чином, з точністю до ізоморфізму $\varphi(G_2)$ можна вибрати п'ятьма способами, $\varphi(G_3)$ — трьома і $\varphi(G_5)$ — двома. Тому з точністю до ізоморфізму група $C_{18} \times C_{20}$ має $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ гомоморфних образів. $\square$

**Задача 4.** *Знайдіть кількість різних ендоморфізмів групи* $C_8 \times C_{10}$. *Скільки з них є ізоморфізмами?*

*Розв'язання.* Розкладемо спочатку групу $G = C_8 \times C_{10}$ у прямий добуток примарних циклічних підгруп: $G = C_8 \times C_2 \times C_5$. Нехай $C_8 = \langle a \rangle$, $C_2 = \langle b \rangle$, $C_5 = \langle c \rangle$. Із зад. 11.8 випливає, що кожен ендоморфізм $\varphi : G \to G$ однозначно визначається трійкою гомоморфізмів $\varphi_1 : C_8 \to G$, $\varphi_2 : C_2 \to G$, $\varphi_3 : C_5 \to G$. Оскільки група $C_8 = \langle a \rangle$ циклічна, то гомоморфізм $\varphi_1$ повністю визначається образом $\varphi_1(a)$ елемента $a$. Легко бачити, що $\varphi_1(a)$ може бути довільним елементом групи $G$, який задовольняє рівняння $x^8 = e$. Оскільки довільний елемент $g \in G$ можна записати у вигляді $g = (a^k, b^l, c^m)$, де $0 \le k < 8$, $0 \le l < 2$, $0 \le m < 5$, то

$$g^8 = e \Leftrightarrow (a^k, b^l, c^m)^8 = e \Leftrightarrow (a^{8k}, b^{8l}, c^{8m}) = (e, e, e) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8|8k,\ 2|8l,\ 5|8m\,, \tag{4}$$

звідки випливає, що $k$ і $l$ можуть бути довільними, а $m = 0$. Таким чином, у групі $G$ рівняння $x^8 = e$ має $8 \cdot 2 \cdot 1 = 16$ розв'язків.

Аналогічно гомоморфізм $\varphi_2$ повністю визначається образом $\varphi_2(b)$ елемента $b$, і цей образ має задовольняти рівняння $x^2 = e$. Маємо:

$$g^2 = e \Leftrightarrow (a^k, b^l, c^m)^2 = e \Leftrightarrow (a^{2k}, b^{2l}, c^{2m}) = (e, e, e) \Leftrightarrow 8|2k,\ 2|2l,\ 5|2m\,.$$

Отже, $k$ кратне 4, тобто $k = 0$ або $k = 4$, $l$ — довільне, а $m = 0$. Тому в групі $G$ рівняння $x^2 = e$ має $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ розв'язки.

Гомоморфізм $\varphi_3$ повністю визначається елементом $\varphi_2(c)$, який є розв'язком рівняння $x^5 = e$. Маємо:

$$g^5 = e \Leftrightarrow (a^k, b^l, c^m)^5 = e \Leftrightarrow (a^{5k}, b^{5l}, c^{5m}) = (e, e, e) \Leftrightarrow 8|5k,\ 2|5l,\ 5|5m\,,$$

звідки $k = l = 0$, $m$ — довільне. Отже, рівняння $x^5 = e$ має $1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$ розв'язків.

Таким чином, кількість ендоморфізмів групи $C_8 \times C_{10}$ дорівнює $16 \cdot 4 \cdot 5 = 320$.

Для того, щоб ендоморфізм $\varphi : G \to G$ був ізоморфізмом, необхідно, щоб $|\varphi_1(a)| = |a| = 8$, $|\varphi_2(b)| = |b| = 2$, $|\varphi_3(c)| = |c| = 5$, $\varphi_2(b) \notin \langle \varphi_1(a) \rangle$ (остання умова випливає з того, що $b \notin \langle a \rangle$). Ці умови є достатніми, так як

$$|\varphi(G)| = |\langle \varphi_1(a), \varphi_2(b), \varphi_3(c) \rangle| = |\langle \varphi_1(a) \rangle| \cdot |\langle \varphi_2(b) \rangle| \cdot |\langle \varphi_3(c) \rangle| = 8 \cdot 2 \cdot 5 = |G|\,,$$

а тому $\varphi(G) = G$. Оскільки $G$ — скінченна, то $\varphi$ — ізоморфізм.

Очевидно, що елемент $g$ має порядок 8 тоді й лише тоді, коли $g^8 = e$, але $g^4 \neq e$. Це означає, що до обмежень на показники елемента $g = (a^k, b^l, c^m)$ із (4) треба долучити ще $8 \nmid 4k$, тобто $k$ має бути непарним. Це дає $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ можливостей для вибору елемента $\varphi_1(a)$.

Оскільки в групі $G$ рівняння $x^2 = e$ має 4 розв'язки, то $G$ містить 3 елементи порядку 2. З них у циклічну підгрупу $\langle \varphi_1(a) \rangle$ потрапляє лише 1. Тому елемент $\varphi_2(b)$ можна вибрати 2 способами. У групі $G$ рівняння $x^5 = e$ має 5 розв'язків, тому $G$ містить 4 елементи порядку 5, і елемент $\varphi_3(c)$ можна вибрати 4 способами.

Таким чином, кількість ізоморфізмів групи $C_8 \times C_{10}$ дорівнює $8 \cdot 2 \cdot 4 = 64$. □

**Задача 5.** *Нехай $B$ — циклічна підгрупа групи $A = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$, яка породжена елементом $(\bar{2}, \bar{4})$. Визначте тип факторгрупи $A/B$.*

*Розв'язання.* Оскільки $\langle (\bar{2}, \bar{4}) \rangle = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{4})\}$, то $|B| = 2$ і $\left|A/B\right| = \frac{32}{2} = 16$. Група $A$ елементів порядку 16 не містить, тому у факторгрупі $A/B$ таких елементів також немає. З іншого боку, $4(\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{4}) \notin B$. Тому елемент $(\bar{0}, \bar{1})B$ факторгрупи $A/B$ має порядок 8. Отже, у розкладі факторгрупи $A/B$ у пряму суму примарних циклічних груп один з доданків є циклічною групою порядку 8. Оскільки порядок факторгрупи $A/B$ дорівнює 16, то має бути ще один доданок порядку 2. Таким чином, $A/B \simeq \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$. □

**Задача 6.** *Скількома способами можна розкласти в пряму суму власних підгруп групу* $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ *($p$ — просте число), якщо порядок прямих доданків не є істотним?*

*Розв'язання.* Усі ненульові елементи групи $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ мають порядок $p$, тому вона містить $\frac{p^2-1}{p-1} = p+1$ циклічних підгруп порядку $p$, кожні дві з яких мають тривіальний перетин і породжують усю групу (останнє випливає з того, що $|G| = p^2$). Тому кількість способів розкладу $G$ у пряму суму дорівнює $\binom{p+1}{2} = \frac{(p+1)p}{2}$. □

## Основні задачі

**7.** Опишіть з точністю до ізоморфізму всі підгрупи групи $C_{14} \times C_{20}$.

**8.** Чи існують скінченні нециклічні абелеві групи, усі власні неодиничні підгрупи яких: a) є циклічними; b) мають прості порядки; c) мають попарно різні порядки?

**9.** Нехай $p$ і $q$ — різні прості числа. Скільки різних підгруп містять групи: a) $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$; b) $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$?

**10.** Доведіть, що для скінченних абелевих груп є правильною теорема, обернена до теореми Лагранжа: для кожного дільника $k$ порядку групи $G$ у групі $G$ існує підгрупа порядку $k$.

**11.** Скількома способами можна розкласти в пряму суму двох власних підгруп групу $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$, якщо: a) порядок прямих доданків є істотним; b) порядок прямих доданків не є істотним?

**12.** Підрахуйте з точністю до ізоморфізму кількість гомоморфних образів групи $C_{12} \times C_{15} \times C_{20}$.

**13.** Знайдіть кількість різних гомоморфізмів із групи $G$ у групу $H$, якщо: a) $G = \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{14}$, $H = \mathbb{Z}_{10}$; b) $G = \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{20}$, $H = \mathbb{Z}_6$; c) $G = \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{15}$, $H = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Скільки з них є епіморфізмами?

**14.** Знайдіть групи автоморфізмів груп: a) $\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{Z}^n$.

**15.** На множині $\mathrm{Hom}(A, B)$ усіх гомоморфізмів з абелевої групи $A$ в адитивну абелеву групу $B$ визначимо додавання правилом: $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. Доведіть, що відносно такого додавання $\mathrm{Hom}(A, B)$ утворює абелеву групу.

**16.** Доведіть, що: a) $\mathrm{Hom}(A_1 \oplus A_2, B) \simeq \mathrm{Hom}(A_1, B) \oplus \mathrm{Hom}(A_2, B)$;
b) $\mathrm{Hom}(A, B_1 \oplus B_2) \simeq \mathrm{Hom}(A, B_1) \oplus \mathrm{Hom}(A, B_2)$.

**17.** Знайдіть групи гомоморфізмів: a) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_6)$; b) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

**18.** З'ясуйте, чи ізоморфні факторгрупи $(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)/\langle(\bar{0}, \bar{2})\rangle$ і $(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)/\langle(\bar{1}, \bar{2})\rangle$.

## Додаткові задачі

**19.** Доведіть, що коли факторгрупа $A/B$ абелевої групи $A$ є нескінченною циклічною групою, то підгрупа $B$ виділяється прямим множником, тобто існує така підгрупа $C < A$, що $A = B \times C$.

**20.** Опишіть усі скінченні абелеві групи, у яких кожний ендоморфізм є або автоморфізмом, або відображає всі елементи в одиницю групи.

**21.*** Доведіть, що для скінченної абелевої групи $A$ кількість різних гомоморфізмів з $A$ в мультиплікативну групу $T = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$ дорівнює порядку групи $A$.

**22.** Доведіть, що $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A) \simeq A$ для довільної абелевої групи $A$.

**23.** Доведіть, що коли групи $A$ і $B$ — циклічні, то група $\mathrm{Hom}(A, B)$ — також циклічна.

**24.** Доведіть, що підгрупа $B$ абелевої групи $A$ виділяється в групі $A$ прямим доданком тоді й лише тоді, коли існує такий епіморфізм $\varphi : A \to B$, що $\varphi^2 = \varphi$.

## Домашнє завдання

**25.** Опишіть з точністю до ізоморфізму всі підгрупи групи $C_8 \times C_{12}$.

**26.** Скільки різних підгруп містить група $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$?

**27.** Підрахуйте з точністю до ізоморфізму кількість гомоморфних образів групи $C_{24} \times C_{20} \times C_{10}$.

**28.** Знайдіть кількість різних ендоморфізмів групи $C_{10} \times C_{25}$. Скільки з них є ізоморфізмами?

**29.** Знайдіть кількість різних гомоморфізмів із групи $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_8$ у групу $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Скільки з них є епіморфізмами?

**30.** Доведіть, що $\mathrm{Aut}\mathbb{Z}_{30} \simeq \mathrm{Aut}\mathbb{Z}_{15}$.

**31.** Знайдіть групи гомоморфізмів: a) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{12})$; b) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{18})$.

*Література.* [1, с. 104–113], [3, с. 435–447], [4, с. 339–345], [7, с. 275–276, 278–283], [6, с. 67–74].

# Заняття 16. Абелеві групи III

## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.** *Доведіть, що кожна скінченна нециклічна абелева група $G$ містить нециклічну підгрупу порядку $p^2$, де $p$ — деяке просте число.*

*Розв'язання.* Нехай $C_{p_1^{k_1}} \times \cdots \times C_{p_m^{k_m}}$ — розклад групи $G$ у прямий добуток примарних циклічних груп. Тоді серед простих чисел $p_1, p_2, \ldots, p_m$ мають бути однакові. Справді, якби вони були попарно різні, то для кожного $i < m$ числа $p_1^{k_1} \cdots p_i^{k_i}$ та $p_{i+1}^{k_{i+1}}$ були б взаємно простими. Однак для взаємно простих чисел $r$ і $s$ маємо: $C_r \times C_s \simeq C_{rs}$. Тому було б:

$$C_{p_1^{k_1}} \times C_{p_2^{k_2}} \times \cdots \times C_{p_m^{k_m}} \simeq C_{p_1^{k_1} p_2^{k_2}} \times C_{p_3^{k_3}} \times \cdots \times C_{p_m^{k_m}} \simeq$$

$$\simeq C_{p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}} \times C_{p_4^{k_4}} \times \cdots \times C_{p_m^{k_m}} \simeq \cdots \simeq C_{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}} ,$$

тобто, усупереч умові, група $G$ була б циклічною.

Отже, серед простих чисел $p_1, p_2, \ldots, p_m$ є однакові. Можна вважати, що $p_1 = p_2$. Нехай $C_{p_1^{k_1}} = \langle a \rangle$, $C_{p_2^{k_2}} = C_{p_1^{k_2}} = \langle b \rangle$. Тоді кожен з елементів $c = a^{p_1^{k_1-1}}$ і $d = b^{p_1^{k_2-1}}$ має порядок $p_1$, а породжена ними підгрупа $H = \langle c, d \rangle$ (як випливає із зад. 3.13) — порядок $p_1^2$. Для довільного елемента $x = c^u d^v \in H$ виконується $x^{p_1} = (c^u d^v)^{p_1} = c^{p_1 u} d^{p_1 v} = e$. Таким чином, підгрупа $H$ має порядок $p^2$ і містить лише елементи порядку $p_1$, а тому не є циклічною. □

**Задача 2.** *Доведіть, що*: *a) множина $H = \{2a : a \in \mathbb{Z}^n\}$ є підгрупою групи $\mathbb{Z}^n$; b) факторгрупа $\mathbb{Z}^n/H$ має порядок $2^n$ і розкладається у прямий добуток $n$ циклічних груп порядку* 2.

*Розв'язання.* a) Очевидно, що коли $x = 2a \in H$, $y = 2b \in H$, то $x + y = 2(a + b) \in H$ і $-x = -2a = 2(-a) \in H$. Тому $H$ є підгрупою.

b) Оскільки для довільного елемента $\overline{a} = a + H$ з $\mathbb{Z}^n/H$ маємо $2\overline{a} = 2(a + H) = 2a + H = H = \overline{0}$, то всі неодиничні елементи факторгрупи $\mathbb{Z}^n/H$ мають порядок 2. Крім того, для довільних елементів $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ із $\mathbb{Z}^n$ маємо:

$$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow a + H = b + H \Leftrightarrow a - b \in H \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 - b_1 \equiv 0 \pmod 2 \,, \ldots, \; a_n - b_n \equiv 0 \pmod 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 \equiv b_1 \pmod 2 \,, \ldots, \; a_n \equiv b_n \pmod 2 \,.$$

Таким чином, елемент $\overline{a} = a + H$ факторгрупи $\mathbb{Z}^n/H$ повністю визначається остачами від ділення своїх компонент $a_1, \dots, a_n$ на 2. Тому $\mathbb{Z}^n/H = \{(a_1 \bmod 2\ , \dots,\ a_n \bmod 2) + H, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$ і $|\mathbb{Z}^n/H| = 2^n$. Отже, у розкладі $\mathbb{Z}^n/H$ у прямий добуток циклічних груп усі множники повинні мати порядок 2, а кількість множників має дорівнювати $n$. $\square$

**Задача 3.** *Розкладіть у пряму суму циклічних груп факторгрупу* $\mathbb{Z}^3/H$, *якщо*: a) $H$ *— підгрупа, породжена елементами* $a = (2, 3, 3)$, $b = (-5, -3, 12)$, $c = (24, 27, -3)$; b) $H$ *— підгрупа, породжена елементами* $a = (3, 9, 9)$, $b = (9, -3, 9)$.

*Розв'язання.* Щоб розкласти у пряму суму циклічних груп факторгрупу $\mathbb{Z}^n/H$, виписуємо матрицю $A_H$, рядки якої утворені координатами твірних елементів підгрупи $H$, і зводимо цю матрицю перетвореннями рядків і стовпчиків до діагонального вигляду. Нагадаємо, що перетворення рядків матриці $A_H$ відповідають перетворенням системи твірних підгрупи $H$, а перетворення стовпчиків — перетворенням системи твірних вільної абелевої групи $\mathbb{Z}^n$. Елементарне перетворення рядків (стовпчиків) буде переводити систему твірних підгрупи $H$ у систему твірних $H$ (відповідно для групи $\mathbb{Z}^n$) тоді й лише тоді, коли воно є перетворенням одного з таких типів: I) зміна знаку на протилежний у всіх елементів певного рядка (стовпчика); II) перестановка двох рядків (стовпчиків); III) додавання до одного рядка (стовпчика) цілого кратного іншого рядка (стовпчика). На кожному кроці у *ще не зведеній до діагонального вигляду частині матриці* намагаємося (у порядку пріоритету):
— за допомогою перетворень типу II) поставити найменший за модулем ненульовий елемент на верхнє ліве місце;
— за допомогою перетворень типу III) замінити елементи верхнього рядка й лівого стовпчика їх остачами від ділення на верхній лівий елемент;
— за допомогою перетворень типу III) одержати нулі в лівому стовпчику.

У результаті таких перетворень матриця $A$ зведеться до діагонального вигляду. За допомогою перетворень типу I) діагональні елементи можна зробити невід'ємними. Остаточно одержимо матрицю
$\mathrm{diag}(k_1, \dots, k_n)$, де $k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0$. Тоді $\mathbb{Z}^n/H \simeq \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{k_n}$.

Зауважимо, що $\mathbb{Z}_0 \simeq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_1 \simeq E$. Зокрема, доданки вигляду $\mathbb{Z}_1$ можна опустити.

a) $\quad A_H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -5 & -3 & 12 \\ 24 & 27 & -3 \end{pmatrix}$.

Послідовність кроків при зведенні матриці $A$ до діагонального вигляду може бути такою:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -5 & -3 & 12 \\ 24 & 27 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 17 \\ 24 & 3 & -27 \end{pmatrix} \xrightarrow{2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 17 \\ 3 & 24 & -27 \end{pmatrix} \xrightarrow{3)}$$

$$\xrightarrow{3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -9 & 15 \\ 3 & 18 & -30 \end{pmatrix} \xrightarrow{4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 15 \\ 0 & 18 & -30 \end{pmatrix} \xrightarrow{5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -3 \\ 0 & 18 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{6)}$$

$$\xrightarrow{6)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 6 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{7)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{8)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) зменшуємо елементи першого рядка (віднімаємо від другого і третього стовпчиків перший);
2) ставимо найменший елемент на верхнє ліве місце (переставляємо перший і другий стовпчики);
3) робимо нулі в першому рядку (від другого і третього стовпчиків віднімаємо відповідні кратні першого стовпчика);
4) робимо нулі в першому стовпчику (від другого і третього рядків віднімаємо відповідні кратні першого рядка);
5) зменшуємо елементи другого рядка (до третього стовпчика додаємо подвоєний другий);
6) у не зведеній до діагонального вигляду частині матриці ставимо найменший елемент на верхнє ліве місце (переставляємо другий і третій стовпчики);
7) робимо нулі в другому рядку (від третього стовпчика віднімаємо потроєний другий);
8) робимо нулі в другому стовпчику (до третього рядка додаємо подвоєний другий) і робимо діагональні елементи невід'ємними (у другому рядку змінюємо знаки на протилежні).

Таким чином, $\mathbb{Z}^3/H \simeq \mathbb{Z}_1 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_0 \simeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}$.

b) $\quad A_H = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 \\ 9 & -3 & 9 \end{pmatrix}$. Послідовність кроків при зведенні матриці $A$ до діагонального вигляду може бути такою:

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 \\ 9 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{1)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 9 & -30 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{2)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{3)}$$

$$\xrightarrow{3)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & -30 \end{pmatrix} \xrightarrow{4)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{5)}$$

$$\xrightarrow{5)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{6)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

1) віднімаємо від другого і третього стовпчиків потроєний перший;
2) віднімаємо від другого рядка потроєний перший;
3) переставляємо другий і третій стовпчики;
4) віднімаємо від третього стовпчика подвоєний другий;
5) переставляємо другий і третій стовпчики;
6) додаємо до третього стовпчика потроєний другий.

Дописавши до матриці нульовий рядок (що відповідає долученню до твірних елементів підгрупи $H$ нейтрального елемента $e = (0, 0, 0)$, від чого, очевидно, підгрупа $H$ не зміниться), одержимо матрицю $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Тому $\mathbb{Z}^3/H \simeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_0 \simeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}$. □

**Задача 4.** *Нехай $H$ — підгрупа групи $\mathbb{Z}^n$, породжена елементами $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, a_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$. Доведіть, що факторгрупа $\mathbb{Z}^n/H$ буде скінченною тоді й лише тоді, коли визначник матриці $A_H = (a_{ij})$ відмінний від нуля.*

*Розв'язання.* Як і при розв'язуванні попередньої задачі, зведемо матрицю $A_H$ до діагонального вигляду $\operatorname{diag}(k_1, \dots, k_n)$. Оскільки $\mathbb{Z}^n/H \simeq \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{k_n}$, то факторгрупа $\mathbb{Z}^n/H$ буде скінченною тоді й лише тоді, коли серед прямих доданків немає нескінченної циклічної групи $\mathbb{Z}$, тобто тоді й лише тоді, коли серед чисел $k_1, \dots, k_n$ немає нулів, або, що те ж саме, коли $k_1 \cdots k_n \neq 0$. Однак числа $\det(a_{ij})$ і $k_1 \cdots k_n$ відрізняються щонайбільше знаком, так як при застосуванні до матриці одного з перетворень I) — III) її визначник щонайбільше змінює знак. Тому факторгрупа $\mathbb{Z}^n/H$ буде скінченною тоді й лише тоді, коли $\det(a_{ij}) \neq 0$. □

**Задача 5.** *Доведіть, що кожна підгрупа скінченно–породженої абелевої групи сама є скінченно–породженою.*

*Розв'язання.* Нехай $B$ — підгрупа скінченно–породженої абелевої групи $A$. Тоді існує епіморфізм $\varphi$ деякої вільної абелевої групи $\mathbb{Z}^n$ на групу $A$. Розглянемо повний прообраз $C = \varphi^{-1}(B)$ підгрупи $B$ при цьому епіморфізмі. Кожна підгрупа вільної абелевої групи $\mathbb{Z}^n$ має систему твірних, що містить не більше $n$ елементів. Нехай $c_1, \ldots, c_k$, $k \leq n$, — така система твірних для підгрупи $C$. Тоді кожний елемент $c \in C$ можна записати у вигляді $c = m_1 c_1 + \cdots + m_k c_k$, звідки $\varphi(c) = \varphi(c_1)^{m_1} \cdots \varphi(c_k)^{m_k}$. Крім того, $\varphi(C) = B$, тому $\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_k)$ є системою твірних підгрупи $B$. $\square$

**Задача 6.*** *Доведіть, що коли найменше спільне кратне порядків елементів скінченної абелевої групи $G$ дорівнює $n$, то в групі $G$ є елемент порядку $n$.*

*Розв'язання.* Оскільки $\text{НСК}(n_1, \ldots, n_k) = \text{НСК}(n_1, \text{НСК}(n_2, \ldots, n_k))$, то достатньо довести, що для довільних елементів $a$ і $b$ із $G$ існує такий елемент $c$, що $|c| =\text{НСК}(|a|, |b|)$.

Доведемо спочатку, що коли числа $|a| = m$ і $|b| = n$ взаємно прості, то таким елементом є $ab$. Справді, у цьому випадку $\text{НСК}(|a|, |b|) = |a| \cdot |b|$ і $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = E$. Якщо $(ab)^k = a^k b^k = e$, то $a^k = b^{-k}$. Отже, $a^k \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. Однак тоді $a^k = b^{-k} = e$ і $m|k$, $n|(-k)$. Оскільки $m$ і $n$ — взаємно прості, то $mn|k$ і $mn \leq k$. Тому $mn \leq |ab|$. З іншого боку, очевидно, що $(ab)^{mn} = a^{mn} b^{mn} = (a^m)^n (b^n)^m = e^n e^m = e$. Тому $mn \geq |ab|$. Разом з попередньою нерівністю це дає $mn = |ab|$.

Загальний випадок зводиться до попереднього. Справді, нехай $|a| = m = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} q_{r+1}^{k_{r+1}} \cdots q_{r+t}^{k_{r+t}}$ і $|b| = n = p_1^{l_1} \cdots p_r^{l_r} q_{r+1}^{l_{r+1}} \cdots q_{r+t}^{l_{r+t}}$, причому $k_1 \geq l_1, \ldots, k_r \geq l_r$, $k_{r+1} < l_{r+1}, \ldots, k_{r+t} < l_{r+t}$. Тоді елемент $a_1 = a^{q_{r+1}^{k_{r+1}} \cdots q_{r+t}^{k_{r+t}}}$ має порядок $p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$, а елемент $b_1 = b^{p_1^{l_1} \cdots p_r^{l_r}}$ — порядок $q_{r+1}^{l_{r+1}} \cdots q_{r+t}^{l_{r+t}}$. Оскільки $|a_1|$ і $|b_1|$ — взаємно прості, то $|a_1 b_1| = |a_1| \cdot |b_1| = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} \cdot q_{r+1}^{l_{r+1}} \cdots q_{r+t}^{l_{r+t}} =\text{НСК}(|a|, |b|)$. $\square$

**Зауваження 1.** *Для неабелевих груп твердження задачі не є правильним. Наприклад, у групі $S_3$ є елементи порядків 2 і 3, але немає елемента порядку 6.*

## Основні задачі

**7.** Доведіть, що скінченна абелева група є циклічною тоді й лише тоді, коли кожна її силовська підгрупа є циклічною.

**8.** Доведіть, що кожний зростаючий ланцюг $H_1 \leq H_2 \leq \cdots \leq$ $\leq H_n \leq \cdots$ підгруп $H_1$, $H_2$, ..., $H_n$, ... скінченно–породженої абелевої групи обривається, тобто що $H_k = H_{k+1} = \cdots$ для деякого номера $k$.

**9.** Розкладіть у пряму суму циклічних груп факторгрупу $\mathbb{Z}^3/H$, де $H$ — підгрупа, породжена елементами $a = (3, 6, 6)$ і $b = (6, 13, 5)$.

**10.** У факторгрупі $\mathbb{Z}^3/H$, де $H$ — підгрупа, породжена елементами $a = (1, 2, 4)$ і $b = (1, -1, 1)$, знайдіть порядок елемента $(3, 1, 7) + H$.

**11.** Розкладіть у пряму суму циклічних груп факторгрупу $\mathbb{Z}^3/H$, де $H$ — підгрупа, породжена елементами $a, b, c$, якщо: a) $a = (7, 3, 1), b = (5, 9, -1), c = (7, 1, 3)$; b) $a = (1, 2, -1), b = (4, 5, -2), c = (9, 2, 3)$; c) $a = (3, 1, 2), b = (9, 10, 8), c = (12, 11, 10)$; d) $a = (1, -2, 4), b = (2, -3, 7), c = (5, 7, 3)$.

**12.** Нехай $H$ — підгрупа групи $\mathbb{Z}^n$, породжена елементами $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$, ..., $a_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$. Доведіть, що коли факторгрупа $\mathbb{Z}^n/H$ скінченна, то її порядок дорівнює модулю визначника матриці $(a_{ij})$.

**13.** Доведіть, що множина всіх цілочисельних розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь зі змінними $x_1, \ldots, x_n$ із раціональними коефіцієнтами є підгрупою групи $\mathbb{Z}^n$.

**14.** З'ясуйте, чи кожну підгрупу групи $\mathbb{Z}^n$ можна подати у вигляді множини всіх цілочисельних розв'язків деякої однорідної системи лінійних рівнянь зі змінними $x_1, \ldots, x_n$ із раціональними коефіцієнтами.

**15.** Знайдіть необхідні й достатні умови для того, щоб перетворення $(m, n) \mapsto (am + bn, cm + dn)$ групи $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ було її автоморфізмом.

## Додаткові задачі

**16.** Доведіть, що кожний сюр'єктивний ендоморфізм скінченно–породженої абелевої групи є автоморфізмом.

**17.** Нехай $A$ — скінченна абелева група. Доведіть, що коли індекс $|A : H|$ підгрупи $H$ не ділиться на просте число $p$, то кожна $p$–підгрупа $P$ групи $A$ міститься в $H$.

**18.** Доведіть, що в скінченній абелевій $p$–групі $G$ кожна циклічна підгрупа $H$ максимального порядку виділяється прямим множником (тобто знайдеться така підгрупа $F \leq G$, що $G = H \times G$).

**19.** Доведіть, що для довільної силовської $p$–підгрупи $H_p$ скінченної абелевої групи $G$ і довільного елемента $a \in G$ максимального порядку перетин $\langle a \rangle \cap H_p$ є максимальною циклічною підгрупою в $H_p$.

## Домашнє завдання

**20.** Доведіть, що елементи $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$, …, $a_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$ утворюють систему твірних групи $\mathbb{Z}^n$ тоді й лише тоді, коли визначник матриці $(a_{ij})$ дорівнює $\pm 1$.

**21.** Розкладіть у пряму суму циклічних груп факторгрупу $\mathbb{Z}^3/H$, де $H$ — підгрупа, породжена елементами $a = (2, 3, -2)$ і $b = (6, -2, -3)$.

**22.** Розкладіть у пряму суму циклічних груп факторгрупу $(\mathbb{Z}^3)/H$, де $H$ — підгрупа, породжена елементами $a, b, c$, якщо: a) $a = (-1, 5, 5)$, $b = (-2, 6, 1), c = (1, 9, -5)$; b) $a = (2, -2, 4), b = (-1, 7, -5), c = (5, 1, 7)$; c) $a = (8, 7, 2), b = (5, 4, -1), c = (4, 4, 3)$; d) $a = (4, 2, -1), b = (5, 3, -2)$, $c = (3, 2, -1)$.

**23.** У факторгрупі $\mathbb{Z}^3/H$, де $H$ — підгрупа, породжена елементами $a = (4, 7, 3)$ і $b = (3, 4, 1)$, знайдіть порядок елемента $(5, 8, 3) + H$.

*Література.* [1, с. 104–113], [3, с. 435–447], [4, с. 339–345], [7, с. 275–276, 278–283], [6, с. 64–67].

# Відповіді та вказівки

**Заняття 1. 7.** $n^{n^2}$; a) $n^{\frac{n^2+n}{2}}$; b) $n^{(n-1)^2+1}$. **8.** a) 24; b) $2n$. **9.** 8. **11.** Таблиця Келі: a) симетрична відносно головної діагоналі; b) містить рядок (стовпчик) однакових елементів; c) містить рядок (стовпчик), який збігається з першим рядком (стовпчиком); d) у рядку (стовпчику) елемента $a$ містить нейтральний елемент. **12.**

| | $\cup$ | $\cap$ | $\setminus$ | $\triangle$ |
|---|---|---|---|---|
| асоціативність | $+$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| комутативність | $+$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| існування нейтрального елемента | $+$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| існування обернених елементів | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |

**13.** Так. **14.** Так. **15.** Так. **16.** При $|M| = 1$ — ізоморфні, при $|M| > 1$ — попарно неізоморфні. Напівгрупою є $(M^2, \circ_2)$. **17.** $a) \simeq e)$, $b) \simeq f)$, $g) \simeq h)$. Інших ізоморфізмів немає. **18.** *Вказ.* Розв'язок $e_a$ рівняння $ax = a$ є лівою одиницею, так як для всіх $b \in M$ буде $ab = (ae_a)b = a(e_a b)$, а рівняння $ax = ab$ має єдиний розв'язок $x = b$. **19.** a) Правою оберненою є дія $(a, b) \mapsto \log_a b$, лівою оберненою є дія $(a, b) \mapsto \sqrt[a]{b}$. c) Правою оберненою до правої оберненої є дія $*$, а лівою оберненою до неї є дія $(a, b) \mapsto y$, де $y * b = a$; правою оберненою до лівої оберненої є дія $(a, b) \mapsto b * a$, а лівою оберненою до неї є дія $(a, b) \mapsto y$, де $b * y = a$. Ці 4 дії можуть збігатися, наприклад, у випадку, коли $(M, *)$ є групою, кожен елемент якої у квадраті дорівнює 1 (такою є $(\{1, -1\}, \cdot)$). **20.** 86. *Вказ.* Якщо $\tau(1) = \tau(2) = 1$, то кожне зі значень $\tau(3), \cdots, \tau(7)$ можна вибирати незалежно двома способами. Якщо $\tau(1) = 1, \tau(2) = 2$, то $\tau(3) = 3$, $\tau(4)$ можна вибирати довільно з $\{3, 4\}$, а $\tau(5), \tau(6)$, $\tau(7)$ — довільно з $\{5, 6, 7\}$. Інших значень $\tau(1)$ і $\tau(2)$ набувати не можуть. **21.** $a) \simeq c) \simeq e)$, $b) \simeq d)$. Інших ізоморфізмів немає. *Вказ.* Напівгрупи $a), c), e)$ є вільними зліченно–породженими комутативними моноїдами; у напівгрупах $b)$ і $d)$ розклад елемента в добуток нерозкладних не є однозначним, але всі розклади даного елемента мають однакову довжину; у напівгрупі $f)$ розклад елемента в добуток нерозкладних може мати різну довжину, наприклад, $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 8 \cdot 8$. **22.** Ні. *Вказ.* Обчисліть $|N_k \setminus \{a + b : a, b \in N_k\}|$. **23.** 8. **24.** 5. *Вказ.* Такими напівгрупами є: добуток дорівнює правому співмножнику; добуток дорівнює лівому співмножнику; $\{0, a\}$, $a^2 = 0$; $\{0, 1\}$; $\{1, a\}$, $a^2 = 1$. **25.** 24. **26.** *Вказ.* Множина рухів різностороннього прямокутного паралелепіпеда складається з тотожного перетворення, трьох поворотів на $180°$ відносно осей, що проходять через середини протилежних граней, трьох дзеркальних симетрій відносно площин, що проходять через середини паралельних ребер та центральної симетрії відносно центра симетрії паралелепіпеда. **27.** a) Ні; b) так; c) так; d) ні. **28.** a) Так; b) ні; c) так. **29.** При $a = b = 1$ та довільному $c$ дія має нейтральний елемент $e = -c$. Усі елементи будуть оборотними за цих умов. **30.** a) Є, якщо в рядку (стовпчику) елемента $a$ таблиці Келі не має однакових елементів; b) елемент $a$ в таблиці Келі має бути на перетині свого рядка і свого стовпчика. **31.** Довільний елемент нейтральний справа; відносно довільного нейтрального $x$ кожний елемент оборотний зліва й лише сам $x$ оборотний справа при $|M| = 1$. **32.** Так; не існує, якщо $|M| > 1$. **33.** *Вказ.* Відображення $A \to \bar{A}$ є ізоморфізмом.

**Заняття 2.** **5.** Правими нулями є такі $\tau$, що для всіх $a \in M$ $\tau(a) = i$ для фіксованого $i \in M$. Лівих нулів немає. **6.** Для a) елемент $a$ має бути оборотним; b) $Im\ b \subseteq Im\ a$; c) $Im\ b \subseteq Im\ a$ і для довільного $x \in Im\ b$ виконується $|a^{-1}(x)| = 1$. **7.** $\tau(a) = a$ для кожного $a \in \tau(M)$. **8.**

| | a | b | c | d | e | f | g |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| додавання | г | г | – | – | г | г | г |
| множення | м | м | – | – | м | м | м |
| суперпозиція | м | н | – | н | м | м | н |

**9.** a), b), f) — група, c), d), e) — не замкнені відносно композиції. **10.** a), b), d), e) при $d = 1$, f), j), k), l), m) — так, c), g), h), i) — ні. **11.** a) так; b), c) ні; d) ні для $0 < k < n(n-1)/2$. **12.** $n$ — непарне. **14.**

| $\circ$ | $x$ | $1-x$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{1-x}$ | $\frac{x-1}{x}$ | $\frac{x}{x-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $1-x$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{1-x}$ | $\frac{x-1}{x}$ | $\frac{x}{x-1}$ |
| $1-x$ | $1-x$ | $x$ | $\frac{x-1}{x}$ | $\frac{x}{x-1}$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{1-x}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{1-x}$ | $x$ | $1-x$ | $\frac{x}{x-1}$ | $\frac{x-1}{x}$ |
| $\frac{1}{1-x}$ | $\frac{1}{1-x}$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{x}{x-1}$ | $\frac{x-1}{x}$ | $x$ | $1-x$ |
| $\frac{x-1}{x}$ | $\frac{x-1}{x}$ | $\frac{x}{x-1}$ | $1-x$ | $x$ | $\frac{1}{1-x}$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\frac{x}{x-1}$ | $\frac{x}{x-1}$ | $\frac{x-1}{x}$ | $\frac{1}{1-x}$ | $\frac{1}{x}$ | $1-x$ | $x$ |

**15.** *Вказ.* a) Нейтральним елементом є 2, оберненим до $a$ є $\frac{a}{a-1}$; b) нейтральним елементом є 0, оберненим до $a$, де $a \neq 0$, є $1 - a$; c) нейтральним елементом є $(1, 0)$, оберненим до $(x, y)$ є $(x, -y)$. **16.** *Вказ.* Задане ребро правильного багатогранника можна перевести в будь–яке інше ребро рівно двома способами. **17.** *Вказ.* Використайте попередню задачу й теорему Ойлера про кількість вершин, ребер і граней опуклого багатогранника. **18.** $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^{n-k}$. *Вказ.* Перетворення $\varphi \in T_n$ буде ідемпотентом тоді й лише тоді, коли $\varphi(x) = x$ для кожного $x$ з області значень $\varphi$. **19.** *Вказ.* Виходячи з припущення, що $M$ не містить ідемпотента, показати, що для $a \in M$ елементи з $\{a, a^2, a^4, \ldots, a^{2^n}\}$ – попарно різні, де $n = |M|$. **20.** b) буде моноїдом тоді й лише тоді, коли $a$ — оборотний елемент. **21.** $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c, d\}$. **22.** a) 41; b) 196. **23.** $n!$. **24.** a) Ні для $1 < k < n$; b) ні.

**Заняття 3.** **5.** a) 9; b) $3 \cdot 6 = 18$. **6.** *Вказ.* Скористайтеся тим, що $H$ – підгрупа $(G, *)$ $\Leftrightarrow$ для довільних $g, h \in H$ $g * h^{-1} \in H$. **7.** a) 2, так; b) 1, ні; c) 1, ні; d) 20, так; e) 4, так. **8.** Ні. **9.** a) $\{\varepsilon\}$, $\langle(12)\rangle$, $\langle(13)\rangle$, $\langle(23)\rangle$, $\langle(123)\rangle$, $S_3$. b) $\{1\}$, $\{\pm 1\}$, $\langle i\rangle$, $\langle j\rangle$, $\langle k\rangle$, $Q_8$. **10.** *Вказ.* Кожен ненульовий елемент групи $\mathbb{Z}$ має нескінченний порядок. **11.** a) $G_f = \{\varepsilon, (23), (24), (34), (234), (243)\}$; b) $G_f = \{\varepsilon, (1234), (13)(24), (1432), (13), (14)(23), (24), (12)(34)\}$. **12.** $A \cup B$ є підгрупою тоді й лише тоді, коли одна з підгруп міститься в іншій. *Вказ.* Якщо $A \cup B$ – підгрупа, то розгляньте $xy$, де $x \in A \setminus B$, $y \in B \setminus A$. **13.** *Вказ.* Скористайтеся тим, що $|A| \cdot |B|$ дорівнює кількості наборів $(a, b)$, де $a \in A$, $b \in B$, а $|AB|$ дорівнює кількості різних елементів групи $G$ вигляду $ab$. Крім того, $ab = a_1 b_1$ тоді й лише тоді, коли $a_1^{-1}a = b_1 b^{-1}$, тобто коли $a_1^{-1}a,\ b_1 b^{-1} \in A \cap B$. **14.** Так. **15.** *Вказ.* Скористайтеся тим, що елемент $a \cdot b \in A \cdot B$ належить $A_1$ (відповідно $B_1$) тоді й лише тоді, коли $b \in A_1$ (відповідно $a \in B_1$). **16.** *Вказ.* Для доведення рівності $C = A \cdot (B \cap C)$ скористайтеся тим, що $ab$ з $A \cdot B$ належить $C$ тоді й лише тоді, коли $b \in B \cap C$. **17.** a) $3!3^3 = 162$; b) $2!4^2 = 32$. **18.** Так. *Вказ.* Умову задовольняє тільки тотожна підстановка. **19.** $\{0°\}$, $\langle 180°\rangle$, $\langle s_1\rangle$, $\langle s_2\rangle$, $\langle s_3\rangle$, $\langle s_4\rangle$, $\langle 90°\rangle$, $\{0°, 180°, s_1, s_3\}$, $\{0°, 180°, s_2, s_4\}$, $D_4$, де $s_1$, $s_3$ та $s_2$, $s_4$ — пари симетрій із взаємно перпендикулярними осями. **20.** $2^n n!$. **21.** b) *Вказ.* Розгляньте елементи з добутку $(C \setminus A) \cdot (C \setminus B)$. **22.** *Вказ.* Для довільного елемента $a$ піднапівгрупи знайдуться такі різні $k$ і $l$, що $a^k = a^l$, звідки $a \cdot a^{k-l-1} = a^{k-l} = e$, тобто елемент $a$ є оборотним у піднапівгрупі; твердження невірне для $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. **23.** $D_2(\mathbb{R})$ при $a \neq b$, $SL_2(\mathbb{R})$ при $a = b$. **24.** a) $G_f = \{\varepsilon, (12), (34), (12)(34), (1423), (14)(23), (1324), (13)(24)\}$; b) $G_f = S_4$.

**Заняття 4.** **7.** a), c) Так. b) Ні. *Вказ.* c) Виразіть через цикли довжини 4 транспозиції. **8.** *Вказ.* Покажіть, що поворот і паралельний перенос є суперпозицією двох осьових симетрій. **9.** *Вказ.* Через скінченну систему $\{\frac{n_1}{m_1}, \ldots, \frac{n_k}{m_k}\}$ не можна зобразити $\frac{1}{m_1 \ldots m_k + 1}$. **10.** Циклічними будуть a),b),d). **11.** a) $\varphi(6120) = \varphi(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17) = 1536$; b) $\varphi(8700) =$

$= \varphi(2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 29) = 2240$; c) $\varphi(2820) = \varphi(2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 47) = 736$. **12.** a) 48; b) 36; c) 24. **13.** $\{a, b\}$, де $a$, $b$ – взаємно прості цілі числа, не рівні $\pm 1$. **14.** a) 8; b) 18; c) 0. **15.**

$$\text{a)}\ \begin{tikzcd}[arrows=dash] C_4 \arrow[d] \\ C_2 \arrow[d] \\ \{e\} \end{tikzcd};\quad \text{b)}\ \begin{tikzcd}[arrows=dash] & C_6 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ C_3 \arrow[dr] & & C_2 \arrow[dl] \\ & \{e\} & \end{tikzcd};\quad \text{c)}\ \begin{tikzcd}[arrows=dash] & C_{12} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ C_4 \arrow[dr] & & C_6 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & C_2 \arrow[dr] & & C_3 \arrow[dl] \\ & & \{e\} & \end{tikzcd};$$

d) $\{e\} < C_2 < C_4 < C_8 < C_{16}$. **16.** $C_{p^k}$ ($p$ – просте число). *Вказ.* Розгляньте елемент, який не належить найбільшій власній підгрупі, і породіть ним циклічну підгрупу. **17.** a) $C_{p^2}$; b) $C_{p^3}$, $C_{pq}$ ($p$, $q$ – прості числа). *Вказ.* a) Скористайтеся зад. 4.16; b) Скористайтеся зад. 3.13. **18.** a) 9: дві довільні транспозиції або транспозиція і цикл довжиною 3; b) 30: дві довільні осьові симетрії або поворот і осьова симетрія; c) 12: $\{\pm i, \pm j\}$, $\{\pm i, \pm k\}$, $\{\pm j, \pm k\}$. **19.** a) *Вказ.* Доведіть, що кожна з множин $\{(12), (12345)\}$, $\{(12)(34), (123)(24)\}$, $\{(123), (1245)\}$ є системою твірних групи $S_5$. **20.** $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ та $(ij)$ породжують $S_n$ тоді й лише тоді, коли $i - j$ взаємно просте з $n$. **21.** *Вказ.* Доведіть, що добутки $\{(12)(34) \cdots (2k{-}1, 2k) \cdot (23)(45) \cdots (2k{-}2, 2k{-}1)$ і $\{(12)(34) \cdots (2k{-}1, 2k) \cdot (23)(45) \cdots (2k, 2k+1)$ будуть циклами довжиною $2k$ і $2k+1$ відповідно, і скористайтеся зад. 4.19. **22.** *Вказ.* Із зад. 4.9 випливає, що в $\mathbb{Q}$ існують лише нескінченні системи твірних. Нехай $S$ — незвідна система твірних групи $\mathbb{Q}$ і нехай $1 = k_1 \frac{m_1}{n_1} + \cdots + k_r \frac{m_r}{n_r}$ — зображення числа 1 через $S$. Тоді для довільного $\frac{m}{n} \in S \diagdown \{\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_r}{n_r}\}$ множина $S' = S \diagdown \{\frac{m}{n}\}$ також буде системою твірних $\mathbb{Q}$. Справді, нехай $\frac{1}{n^2} = k \cdot \frac{m}{n} + a$, де $a \in \langle S' \rangle$. Звідси $\frac{1}{n} = km + na \in \langle S' \rangle$, так як $1 \in \langle S' \rangle$. Однак тоді $\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$ також належить $\langle S' \rangle$. **23.** 48: довільні цикл довжиною 3 і інволюція або два цикли довжиною 3 такі, що жоден з них не є квадратом іншого. **24.** b) $\mathbb{C}_{p^n}$, де $p$ — просте число; c) групи з п. b) та $\mathbb{C}_{p^\infty}$. *Вказ.* b) Скористайтесь зад. 4.16. c) Доведіть, що кожна циклічна підгрупа є скінченною і використайте п. b). **25.** a), b) Так. **26.** *Вказ.* Кожен елемент множини $\{\frac{n_1}{m_1}, \ldots, \frac{n_k}{m_k}\}$ є кратним елемента $\frac{1}{m_1 \ldots m_k}$. **27.** a) 12: поворот на кут $\pm 90°$ і довільна осьова симетрія або дві симетрії, сума індексів яких є непарним числом: $\{s_1, s_2\}$, $\{s_1, s_4\}$, $\{s_2, s_3\}$, $\{s_3, s_4\}$. **28.** *Вказ.* Скористайтеся тим, що підгрупи групи $\mathbb{C}_{p^\infty}$ утворюють ланцюг. **29.** a) 11, 22; b) 13, 21, 26, 28, 36, 42. **30.**

a) $\begin{tikzcd}[column sep=small] & C_{pq} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ C_p \arrow[dr, dash] & & C_q \arrow[dl, dash] \\ & \{e\} & \end{tikzcd}$; b) $\begin{tikzcd}[column sep=small] & C_{pqr} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\ C_{pq} \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & C_{pr} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & C_{qr} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\ C_p \arrow[dr, dash] & C_q \arrow[d, dash] & C_r \arrow[dl, dash] \\ & \{e\} & \end{tikzcd}$; c) $\begin{tikzcd}[column sep=small] & C_{p^2q} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\ C_{p^2} \arrow[dr, dash] & & C_{pq} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & C_p \arrow[dr, dash] & & C_q \arrow[dl, dash] \\ & & \{e\} & \end{tikzcd}$.

**31.** 17. **32.** a) 16; b) 0. **33.** $\cup_{n\in\mathbb{N}}\langle\frac{1}{n!}\rangle$. **34.** *Вказ.* Якщо $|H| = n$, то $x^n = e$ для довільного $x \in H$, звідки $H \subseteq \mathbb{C}_n$.

**Заняття 5.** **6**. $n/\text{НСД}(n, k)$. **7**. Твірними будуть: a) повороти на $30°, 150°, 210°, 330°$; b) усі непарні класи лишків; c) класи лишків $\bar{2}$, $\bar{6}$, $\bar{7}$, $\overline{11}$. **8**. a) 4; b) 8; c) $\infty$; d) 6. **9**. Ні. **10**. $\varphi(k)$, якщо $k|n$, і 0, якщо $k \nmid n$. **11**. a) 1, 5 і 2 елементів порядків 1, 2 і 4 відповідно; b) 1, 1 і 6 елементів порядків 1, 2 і 4 відповідно; c) 1, 9, 8 і 6 елементів порядків 1, 2, 3 і 4 відповідно. **12**. 1, 2, 3, 4, 5, 6. **13**. a) Так; b) так; c) так. **14**. *Вказ.* Розбийте $G$ на підмножини вигляду $\{a, a^{-1}\}$. **15**. a), b), d) Так; c) ні. **16**. a) Розв'язки $e, a^{24}, a^{48}, a^{72}, a^{96}$, елементи порядку 5: $a^{24}, a^{48}, a^{72}, a^{96}$; b) розв'язки $e, a^{15}, a^{30}, a^{45}, a^{60}, a^{75}, a^{90}, a^{105}$, елементи порядку 8: $a^{15}, a^{45}, a^{75}, a^{105}$. **17**. *Вказ.* Підстановка непарного порядку містить лише цикли непарної довжини, а такі цикли є парними підстановками. **18**. Ні. *Вказ.* Розгляньте добуток $(12) \cdot (234)$. **19**. b) *Вказ.* Візьміть $b = a^2$, де $a$ — елемент порядку 6. c) *Вказ.* Нехай $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, $m = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$. Для $i = 1, \ldots, r$ покладемо $\gamma_i = \alpha_i$, якщо $\alpha_i \geq \beta_i$, і $\gamma_i = 0$ у протилежному випадку. Нехай $t = p_1^{\gamma_1} \cdots p_r^{\gamma_r}$, $k = n/t$, $l = mt/\text{НСК}(m, n)$. Тоді числа $t$ і $\text{НСК}(m, n)/t$ — взаємно прості і $|a^k| = t$, $|b^l| = \text{НСК}(m, n)/t$. Далі використайте п. a). **20**. *Вказ.* Порядок підстановки дорівнює НСК довжин її циклів. **21**. $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$, де $a, b \in \{1, -1\}$. *Вказ.* Якщо $a \neq b$, то $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)^n = \left(\begin{smallmatrix} a^n & c\frac{a^n - b^n}{a-b} \\ 0 & a^n \end{smallmatrix}\right)$. Крім того, $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)^n = \left(\begin{smallmatrix} a^n & na^{n-1}c \\ 0 & b^n \end{smallmatrix}\right)$. **22**. *Вказ.* Використайте зад. 5.5. **23**. a) 8; b) 6. **24**. *Вказ.* I *спосіб.* Нехай $z = 3/5 + (4/5)i = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Якщо $z$ має скінченний порядок, то $\alpha$ є раціональним кратним числа $\pi$ і серед чисел $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}2\alpha, \operatorname{tg}3\alpha, \ldots$ є лише скінченна кількість різних. Однак коли $\operatorname{tg}\psi = (2^k m)/n$, де $k > 0$ і $m, n$ — непарні, то $\operatorname{tg}2\psi = (2^{k+1}mn)/(n^2 + 2^k m^2)$, де числа $mn$ і $n^2 + 2^k m^2$ — теж непарні. Тому числа $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}2\alpha, \ldots, \operatorname{tg}2^l\alpha, \ldots$ — усі різні. II *спосіб.* Доведіть за допомогою індукції, що $(3+4i)^n = (3+5m) + (4+5k)i$, де $m$ і $k$ — цілі числа. **25.** a) порядку 1 — 1 елемент, порядку 2 — 7 елементів, порядку 3 — 2 елементи, порядку 6 — 2 елементи; b) порядку 1 — 1 елемент, порядку 2 — 15 елементів, порядку 3 — 20 елементів, порядку 5 — 24 елементи. **26.** Максимальний порядок елемента групи $A_8$ — це

15, $S_8$ — 15, $A_9$ — 15, $S_9$ — 20, $A_{10}$ — 21, $S_{10}$ — 30, $A_{11}$ — 21, $S_{11}$ — 30, $A_{12}$ — 35, $S_{12}$ — 60. **27.** $p^m - p^{m-1}$. **28.** Ні.

**Заняття 6.** **7**. *Вказ.* Якщо для деякого $g \in G$ існує такий $x \in G$, що $x \circ x = g$, то для $h = \varphi(g) \in H$ матимемо $h = \varphi(x \circ x) = \varphi(x) * \varphi(x)$, де $\varphi : G \to H$ — ізоморфізм. **8**. Ні — для скінченної циклічної групи, так — для нескінченної. **9**. *Вказ.* Розгляньте відображення $\mathbb{R}^* \to G, x \mapsto x - 1$. **10**. *Вказ.* Використайте зад. 6.7. **11**. *Вказ.* a) Розгляньте дію групи поворотів тетраедра на його вершинах. b), c) Центри граней куба є вершинами правильного октаедра і, навпаки, центри граней правильного октаедра є вершинами куба. d) Розгляньте дію групи поворотів куба на його діагоналях. e), f) Центри граней додекаедра є вершинами ікосаедра і, навпаки, центри граней ікосаедра є вершинами додекаедра. **12**. a) Дві трикутні піраміди з попарно різними ребрами, склеєні основами; b) правильна трикутна піраміда; c) трикутна піраміда, у якої рівно 5 однакових ребер; d) правильна чотирикутна піраміда. **13**. a) Так; b) ні. *Вказ.* Підрахуйте кількість елементів порядку 2. **14**. *Вказ.* a) Група $(\mathbb{Q}, +)$ — не циклічна; b) у групі $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ є елемент порядку 2. **15**. Ізоморфні тільки $S_3$ і $SL_2(\mathbb{Z}_2)$. *Вказ.* У всіх інших випадках групи розрізняються або порядком, або кількістю елементів порядку 2. **16**. $a) \simeq b) \simeq j) \simeq p)$, $c) \simeq e) \simeq i) \simeq l) \simeq m) \simeq n) \simeq r)$, $d) \simeq k) \simeq q)$, $h) \simeq o)$, f), g). **17**. a) Якщо $C_4 = \langle a \rangle$ і $a_1 = e, a_2 = a, a_3 = a^2, a_4 = a^3$, то $a_1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&2&3&4 \end{smallmatrix}\right)$, $a_2 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&3&4&1 \end{smallmatrix}\right)$ $a_3 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&4&1&2 \end{smallmatrix}\right)$ $a_4 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&1&2&3 \end{smallmatrix}\right)$; b) якщо $a_1 = e$, $a_2 = (12)$, $a_3 = (13)$, $a_4 = (23)$, $a_5 = (123)$, $a_6 = (132)$, то $a_1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 1&2&3&4&5&6 \end{smallmatrix}\right)$, $a_2 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 2&1&6&5&4&3 \end{smallmatrix}\right)$, $a_3 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 3&5&1&6&2&4 \end{smallmatrix}\right)$, $a_4 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 4&6&5&1&3&2 \end{smallmatrix}\right)$, $a_5 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 5&3&4&2&6&1 \end{smallmatrix}\right)$, $a_6 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 6&4&2&3&1&5 \end{smallmatrix}\right)$. **18**. a), b), c) 2. **19**. *Вказ.* Відображення $x \mapsto x^{-1}$ і $x \mapsto xa^{-1}$ є ізоморфізмами $(G, \cdot)$ на $(G, *)$ і $(G, \circ)$ відповідно. **20**. *Вказ.* Впишіть у додекаедр 5 правильних тетраедрів так, щоб були використані всі вершини додекаедра, і розгляньте дію групи поворотів додекаедра на цих тетраедрах. **21**. *Вказ.* Група $SL_2(\mathbb{Z}_3)$ містить єдиний елемент $\left(\begin{smallmatrix} 2&0 \\ 0&2 \end{smallmatrix}\right)$ порядку 2. **22**. *Вказ.* Використайте теорему Келі і рівність $S_n = \langle (12), (123\ldots n) \rangle$. **23**. *Вказ.* Нехай $SA_1A_2\ldots A_n$ — правильна $n$–кутна піраміда, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — середини ребер $A_1A_2$, $A_2A_3$, $\ldots$, $A_nA_1$, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ділять ребра $A_1A_2$, $A_2A_3$, $\ldots$, $A_nA_1$ у відношенні $1 : 3$, $D_1, D_2, \ldots, D_n$ — середини ребер $A_1S$, $A_2S$, $\ldots$, $A_nS$. Відріжте від $SA_1A_2\ldots A_n$ маленькі піраміди $A_1B_nC_1D_1$, $A_2B_1C_2D_2$, $\ldots$, $A_nB_{n-1}C_nD_n$. **24**. $\mathbb{Z}_p$ ($p$ — просте число) і $\mathbb{Z}$. *Вказ.* Група має бути циклічною. **25.** $K_4$, $C_4$. **28.** Ні. **30.** Два класи попарно ізоморфних груп: $\{a), b), d), h), i), k), m)\}$ та $\{c), e), f), g), j), l)\}$. **31.** Два класи попарно ізоморфних груп: $\{a), c), d), e), f)\}$ та $\{b), g)\}$.

**Заняття 7.** **7**. a) Числа з однаковою дробовою частиною; b) горизонтальні прямі на комплексній площині; c) прямі, що проходять через початок координат, з виколотим початком координат; d) матриці з однаковим визначником. **8**. a) $\{e, a^4, a^8, a^{12}, a^{16}, a^{20}\}$, $\{a, a^5, a^9, a^{13}, a^{17}, a^{21}\}$, $\{a^2, a^6, a^{10}, a^{14}, a^{18}, a^{22}\}$, $\{a^3, a^7, a^{11}, a^{15}, a^{19}, a^{23}\}$; b) $\{\pm 1\}$, $\{\pm i\}$, $\{\pm j\}$, $\{\pm k\}$. **9**. *Вказ.* Скористайтесь теоремою Лагранжа. **10**. $|\{\varepsilon\}| = 1$, $|\langle(12)\rangle| = 2$, $|\langle(123)\rangle| = 3$, $|\langle(1234)\rangle| = 4$, $|\{\pi \in S_4 | \pi(1) = 1\}| = 6$, $|\{\varepsilon, (1234), (13)(24), (1432), (12)(34), (13), (14)(23), (24)\}| = 8$ (ця група з'являється, якщо групу рухів квадрата примусити діяти на множині його вершин, занумерованих проти годинникової стрілки), $|A_4| = 12$, $|S_4| = 24$. **11**. a) $C_6$; b) $K_4$. **12**. a) $\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{C}_{p^\infty}$. **13**. a) $G = \mathbb{Z}$, $H = n\mathbb{Z}$, $n > 1$; b) $G = \mathbb{Q}^*$, $H = \{1, -1\}$; c) $G = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{Z}$. **14**. b), e) Так; a), c), d), f) ні. **15**. a) $\{0^\circ, \}$ $\{0^\circ, 180^\circ\}$, $\{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\}$, $\{0^\circ, 180^\circ, s_1, s_3\}$, $\{0^\circ, 180^\circ, s_2, s_4\}$, $D_4$, де $s_1, s_3$ та $s_2, s_4$ — дві пари взаємно перпендикулярних осьових симетрій квадрата; b) $A = \{0^\circ, s_1\}$, $B = \{0^\circ, 180^\circ, s_1, s_2\}$, $C = D_4$, де $s_1, s_2$ — пара взаємно перпендикулярних осьових симетрій квадрата. **16**. *Вказ.* Скористайтеся рівностями $a_1b_1 \cdot a_2b_2 = a_1b_1a_2b_1^{-1} \cdot b_1b_2$ і $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}b \cdot b^{-1}$. **17**. 1,2,3,4,5,6,10,12,60. **18**. Тільки $\mathbb{C}_n$. *Вказ.* Порядок елемента підгрупи має ділити число $n$, тому він є коренем степеня $n$ з 1. **19**. *Вказ.* У протилежному випадку всі елементи мають порядок $q$. Оскільки дві різні підгрупи порядку $q$ перетинаються по одиничній підгрупі, то число $pq - 1 = p(q-1) + (p-1)$ має ділитися на $q - 1$. **20**. *Вказ.* Зауважте, що для довільних підгрупи $\{0\} \subsetneqq H \subsetneqq \mathbb{Q}$ і елемента $a \in \mathbb{Q}$ існує таке натуральне число $n$, що $an \in H$. Далі виберіть $b \notin H$ так, щоб найменше $p \in \mathbb{N}$, для якого $pb \in H$, було простим. Тоді всі класи суміжності вигляду $b(k/p^r) + H$, де $p \nmid k$ і $0 < k < p^r$, будуть різними. **21**. *Вказ.* Нехай $G = \bigcup\limits_{b \in K} bB$ — розклад групи $G$ на класи суміжності за підгрупою $B$. Тоді $A = A \cap G = \bigcup\limits_{b \in K} (A \cap bB)$. Якщо $A \cap bB \neq \varnothing$, то для $a \in A \cap bB$ маємо: $aA = A, aB = bB$ і $A \cap bB = aA \cap aB = a(A \cap B)$, тобто $A \cap bB$ — клас суміжності групи $A$ за підгрупою $A \cap B$. **22**. *Вказ.* Зведіть задачу до перетину тільки двох груп. Далі використайте зад. 7.21 і той факт, що коли $G > A > B$ і обидва індекси $|G : A|$, $|A : B|$ скінченні, то $|G : B| = |G : A| \cdot |A : B|$. **23**. *Вказ.* a) Згідно із зад. 7.16 $NH$ є підгрупою групи $H$, а із зад. 3.13 випливає, що її порядок $|NH|$ є взаємно простим із числом $|G : N|$. b) Випливає з п. a). **24**. *Вказ.* Множина $H = \{ab^{-1} : a, b \in M\}$ є підгрупою, так як $(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1}$, $ab^{-1} \cdot cd^{-1} = ab^{-1}x \cdot (dc^{-1}x)^{-1}$, де $x$ — довільний з $M$. Тоді з рівності $x = xa^{-1} \cdot a$ випливає, що $M \subseteq Ha$. Включення $M \supseteq Ha$ очевидне. *За-*

*уважс.* Аналогічно можна розглянути ліві класи суміжності. **25**. *Вказ.* З вказівки до зад. 7.21 випливає, що коли $|A : A \cap B| = |G : B|$ і $G = \bigcup\limits_{b \in K} bB$, то для кожного $b \in K$ множина $A \cap bB$ є класом суміжності $A$ за $A \cap B$. Однак тоді представника $b$ класу $bB$ можна вибирати з підгрупи $A$ і $G = AB$. Навпаки, якщо $G = AB$, то в розкладі $G = \bigcup\limits_{b \in K} bB$ представники класів суміжності можна вибирати з $A$, і тому $A \cap bB \neq \varnothing$ для кожного $b \in K$. **26.** Нехай $s_1, s_3$ — осьові симетрії, що проходять через вершини квадрата, $s_2, s_4$ — осьові симетрії, що проходять через середини протилежних сторін. a) Для $H =< 180° >$ ліві класи $\{0°, 180°\}$, $\{90°, 270°\}$, $\{s_1, s_3\}$, $\{s_2, s_4\}$, праві класи такі самі. b) Для $H =< s_1 >$ ліві класи $\{0°, s_1\}$, $\{90°, s_4\}$, $\{180°, s_3\}$, $\{270°, s_2\}$, праві класи $\{0°, s_1\}$, $\{90°, s_2\}$, $\{180°, s_3\}$, $\{270°, s_4\}$. c) Для $H =< s_2 >$ ліві класи $\{0°, s_2\}$, $\{90°, s_1\}$, $\{180°, s_4\}$, $\{270°, s_3\}$, праві класи $\{0°, s_2\}$, $\{90°, s_3\}$, $\{180°, s_4\}$, $\{270°, s_1\}$. **27.** *Вказ.* Підгрупа порядку 2 групи $D_{12}$ ізоморфна $C_2$, порядку 3 — $C_3$, порядку 4 — $C_4$, порядку 6 — $C_6$, порядку 8 — $D_4$, порядку 12 — $C_{12}$. **28.** a) Одна, b) три. **29.** a) Ні, b) так, c) так, d) ні. **30.** Власна нормальна лише одна $< 72° > \simeq C_5$. **31.** $< i >$, $< j >$, $< k >$ — як підгрупи індексу 2; підгрупа $\{\pm 1\}$ містить елементи, які комутують з усіма елементами із $Q_8$.

**Заняття 8.** **8**. a) Так; b), c), d) ні. Гомоморфізмами будуть $\varphi_k(n) = kn$. Ізоморфізмами будуть $\varphi_1(n)$ і $\varphi_{-1}(n)$. **9**. a) $\mathrm{Ker}\ \varphi = \{0\}$, $\mathrm{Im}\ \varphi = \mathbb{R}^+$; b) $\mathrm{Ker}\ \varphi = \{2\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathrm{Im}\ \varphi = T$. **10**. 6 гомоморфізмів: $\varphi_1(\overline{k}) = \overline{0}$, $\varphi_2(\overline{k}) = \overline{3k}$, $\varphi_3(\overline{k}) = \overline{6k}$, $\varphi_4(\overline{k}) = \overline{9k}$, $\varphi_5(\overline{k}) = \overline{12k}$, $\varphi_6(\overline{k}) = \overline{15k}$. $\mathrm{Ker}\ \varphi_1 = \mathbb{Z}_6$, $\mathrm{Im}\ \varphi_1 = \{\overline{0}\}$; $\mathrm{Ker}\ \varphi_2 = \mathrm{Ker}\ \varphi_6 = \{\overline{0}\}$, $\mathrm{Im}\ \varphi_2 = \mathrm{Im}\ \varphi_6 = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}\}$; $\mathrm{Ker}\ \varphi_3 = \mathrm{Ker}\ \varphi_5 = \{\overline{0}, \overline{3}\}$, $\mathrm{Im}\ \varphi_3 = \mathrm{Im}\ \varphi_5 = \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}\}$; $\mathrm{Ker}\ \varphi_4 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$, $\mathrm{Im}\ \varphi_4 = \{\overline{0}, \overline{9}, \}$. **11**. *Вказ.* Якщо $C_n = \langle a \rangle$, то $|a^k| = n/d$ (див. зад. 5.6), тому $\varphi_k(C_n) = \langle a^k \rangle \simeq C_{n/d}$. $\mathrm{Ker}\ \varphi_k = \{a^m | n | mk\} = \{a^m | (n/d) | m\} = \langle a^{n/d} \rangle \simeq C_d$. **12**. Бути абелевою. **13**. a), c), d) так; b) ні. **14**. a), c) існує; b) не існує. **15**. a) Класи суміжності $H_1 = 12\mathbb{Z}$, $H_2 = 3 + 12\mathbb{Z}$, $H_2 = 6 + 12\mathbb{Z}$, $H_4 = 9 + 12\mathbb{Z}$. b) Класи суміжності $H_1 = \{0°, 180°\}$, $H_2 = \{90°, 270°\}$, $H_3 = \{s_1, s_3\}$, $H_4 = \{s_2, s_4\}$, де $s_1, s_3$ та $s_2, s_4$ — пари взаємно перпендикулярних осьових симетрій квадрата.

a)

| | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $H_1$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ |
| $H_2$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | $H_1$ |
| $H_3$ | $H_3$ | $H_4$ | $H_1$ | $H_2$ |
| $H_4$ | $H_4$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ |

b)

| | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $H_1$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ |
| $H_2$ | $H_2$ | $H_1$ | $H_4$ | $H_3$ |
| $H_3$ | $H_3$ | $H_4$ | $H_1$ | $H_2$ |
| $H_4$ | $H_4$ | $H_3$ | $H_2$ | $H_1$ |

**16**. *Вказ.* Розгляньте такі приклади: 1) $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}$, $H_1 = 2\mathbb{Z}$, $H_2 = 3\mathbb{Z}$; 2) $G_1 = G_2 = D_4$, $H_1 = \{0°, 90°, 180°, 270°\}$, $H_2 = \{0°, 180°, s_1, s_2\}$, де $s_1, s_2$ — пара взаємно перпендикулярних осьових симетрій квадрата; 3) $G_1 = \mathbb{Z}_4$, $G_2 = K_4$, $H_1 = \{\overline{0}, \overline{2}\}$, $H_2 = \{\varepsilon, (12)(34)\}$. **17**. Ні. *Вказ.* Розгляньте в $K_4$ підгрупу $H$ порядку 2. **18**. Ні. *Вказ.* Розгляньте в $Q_8$ підгрупу $H = \{1, -1\}$. **19**. *Вказ.* Розгляньте такі відображення: a) $\varphi(z) = z^n$; b) $\varphi(z) = z^n$; c) $\varphi(A) = \det A$; d) $\varphi(a) = \cos 2\pi a + i \sin 2\pi a$. **20**. Містити ідемпотент. **21**. a), b), c) ні; d) так. *Вказ.* a) $\mathbb{Q}$ — не циклічна; b), c) усі нетривіальні гомоморфні образи групи $\mathbb{Q}$ — періодичні; d) побудуйте гомоморфізм $\mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}$, при якому $n$–те просте число переходить у дріб $1/n$. **22**. *Вказ.* Нехай $P$ — множина всіх простих чисел. Користуючись основною теоремою арифметики, покажіть, що кожне ненульове відображення $P \mapsto \{0, 1\}$ можна продовжити до епіморфізму $\mathbb{Q}^*$ на $\mathbb{Z}$. **23**. Тільки $C_1$. *Вказ.* Нескінченна циклічна група $\mathbb{C}_\infty$ гомоморфним образом бути не може, тому що вона — періодична. Якщо серед гомоморфних образів є $C_n$, $n > 1$, то є і $C_p$, де $p$ — якесь просте число. Тоді ядро $H$ гомоморфізму — максимальна підгрупа в $\mathbb{C}_\infty$. Нехай $a \in \mathbb{C}_\infty \setminus H$, $b$ — довільний корінь степеня $p$ з $a$. Тоді $\mathbb{C}_\infty = \langle H, a\rangle$ і $b = h \cdot a^k$, де $h \in H$. Звідси $a = b^p = h^p \cdot a^{pk} \in H$, усупереч припущенню. **24**. *Вказ.* Покажіть, що образом гомоморфізму $\mathbb{Q} \to \mathbb{C}^*$, $a \mapsto \cos 2\pi a + i \sin 2\pi a$, є група $\mathbb{C}_\infty$. **25**. *Вказ.* Для кожної підгрупи $H$ індексу 2 множина $\{x^2 | x \in G\}$ лежить в ядрі канонічного епіморфізму $G \to G/H$. **26**. *Вказ.* Для довільних точок $A$ і $B$ площини нехай $\nu_{A,B}$ — паралельний перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$. Зафіксуйте точку $M$ площини і розгляньте ядро та образ гомоморфізму $G \to G$, $\varphi \mapsto \varphi \circ \nu_{\varphi(M),M}$. **27**. *Вказ.* Нехай $H$ — власна підгрупа скінченного індексу. Тоді у факторгрупі $A = \mathbb{C}^*/H$ можна вибрати елемент $aH$ порядку $p^k$, де $p$ — деяке просте число. Якщо тепер $z \neq 1$ — комплексний корінь степеня $p$ з $a$, то $(zH)^p = aH$, тобто $zH$ — елемент з $A$ порядку $p^{k+1}$. **28**. *Вказ.* Якщо $H$ — підгрупа скінченного індексу з $\mathbb{R}^*$, то $H \cap \mathbb{R}^+$ — підгрупа скінченного індексу з $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Далі аналогічно зад. 8.27. **29**. a) *Вказ.* Порядок елемента $gH$ факторгрупи $G/H$ має бути спільним дільником порядків елемента $g$ і факторгрупи $G/H$. b) Ні. *Вказ.* Розгляньте в $S_3$ підгрупу порядку 2. **30.** a), b), c) так. **31.** a) $\operatorname{Ker} \varphi = \{\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, k = 0, \ldots, n-1\}$, $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{C}^*$; b), c) $\operatorname{Ker} \varphi = \mathbb{R}^+$, $\operatorname{Im} \varphi = \{z : |z| = 1\}$; d) $\operatorname{Ker} \varphi = \mathbb{R}^+$, $\operatorname{Im} \varphi = \{z : |z| = 1\}$; e) $\operatorname{Ker} \varphi = \{z : |z| = 1\}$, $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^+$. **32.** $\varphi_1(\overline{1}) = \overline{0}$, $\operatorname{Ker} \varphi_1 = \mathbb{Z}_{18}$, $\operatorname{Im} \varphi_1 = \{\overline{0}\}$; $\varphi_2(\overline{1}) = \overline{2}$, $\operatorname{Ker} \varphi_2 = \langle\overline{6}\rangle$, $\operatorname{Im} \varphi_2 = \langle\overline{2}\rangle$; $\varphi_3(\overline{1}) = \overline{4}$, $\operatorname{Ker} \varphi_3 = \langle\overline{3}\rangle$, $\operatorname{Im} \varphi_3 = \langle\overline{4}\rangle$; $\varphi_4(\overline{1}) = \overline{6}$, $\operatorname{Ker} \varphi_4 = \langle\overline{2}\rangle$, $\operatorname{Im} \varphi_4 = \langle\overline{6}\rangle$; $\varphi_5(\overline{1}) = \overline{8}$, $\operatorname{Ker} \varphi_5 = \langle\overline{3}\rangle$, $\operatorname{Im} \varphi_5 = \langle\overline{4}\rangle$; $\varphi_6(\overline{1}) = \overline{10}$, $\operatorname{Ker} \varphi_6 = \langle\overline{6}\rangle$,

$\mathrm{Im}\,\varphi_6 = \langle \overline{2} \rangle$. **33.** a), c) — існує, b) — не існує. **34.** a) Класи суміжності: $\{\pm 1\}$, $\{\pm i\}$, $\{\pm j\}$, $\{\pm k\}$. b) Нехай $\mathbb{C}_{16} = \langle \xi_1 \rangle$, тоді $H = \langle \xi_1^4 \rangle$ і класи суміжності: $\mathbb{C}_4$, $\xi_1 \mathbb{C}_4$, $\xi_1^2 \mathbb{C}_4$, $\xi_1^3 \mathbb{C}_4$. **35.** Елементами факторгрупи є класи $\{z \in \mathbb{C}^* \,:\, |z| = r\}$ для всіх додатних дійсних $r$. **36.** *Вказ.* Припустимо, що такий епіморфізм $\varphi$ існує, і нехай $\varphi(\frac{m}{n}) = 1$. Чому тоді дорівнює $\varphi(\frac{m}{2n})$? **37.** *Вказ.* Розгляньте гомоморфізми: a) $\varphi(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$; b) $\varphi(z) = \frac{z}{|z|}$; c) $\varphi(z) = |z|$.

**Заняття 9.** **8**. a) $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{\pm i\}$, $\{\pm j\}$, $\{\pm k\}$; b) $\{E\}$, $\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$, $\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$; c) клас спряженості визначається цикловим типом підстановки; d) $\{\varepsilon\}$, $\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, $\{(123), (142), (134), (243)\}$, $\{(132), (124), (143), (234)\}$. **9**. 11. **10**. a) 120; b) 40. **11**. $\{e\}$, $C_2$, $C_3$, $S_3$. **12**. *Вказ.* При спряженні довільним елементом групи підгрупи з множини $\{g^{-1}Hg | g \in G\}$ переставляються. **13**. *Вказ.* $Hg = g \cdot g^{-1}Hg$. **14**. *Вказ.* Автоморфізм групи $S_3$ однозначно визначається своєю дією на транспозиції. **15**. Поворот на $90^\circ$ і фіксована осьова симетрія $s$ утворюють систему твірних групи $D_4$. Тому вказуємо лише дію внутрішніх автоморфізмів на твірні елементи: $\varphi_1$ — тотожний; $\varphi_2 : 90^\circ \mapsto 90^\circ$, $s \mapsto s'$; $\varphi_3 : 90^\circ \mapsto 270^\circ$, $s \mapsto s$; $\varphi_4 : 90^\circ \mapsto 270^\circ$, $s \mapsto s'$, де $s'$ — симетрія відносно осі, перпендикулярної до осі симетрії $s$. **16**. a) 6, b) 1. *Вказ.* a) Використайте зад. 9.14; b) $\mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}_9 \simeq C_6$, $\mathrm{Aut}\,C_6 \simeq C_2$. **17**. *Вказ.* a) Автоморфізм групи $\mathbb{Z}_n$ повністю визначається образом елемента $\overline{1}$. b) При автоморфізмі групи $D_4$ поворот на $90^\circ$ може переходити лише в поворот на $90^\circ$ або $270^\circ$, а осьова симетрія — лише в осьову симетрію. Тому $\mathrm{Aut}\,D_4 \leq 8$. Відображення, при якому повороти лишаються на місці, а дана осьова симетрія $s$ переходить у симетрію відносно осі, повернутої на $45^\circ$, продовжується до автоморфізму $\varphi \in \mathrm{Aut}\,D_4$. Щоб побудувати ізоморфізм $\mathrm{Aut}\,D_4 \to D_4$, зіставте автоморфізму $\varphi$ поворот на $90^\circ$, а спряженню за допомогою даної осьової симетрії $s$ — цю осьову симетрію. **18**. *Вказ.* Скористайтесь зад. 9.5 і тим, що нормальна підгрупа є об'єднанням класів спряжених елементів. **19**. *Вказ.* $K_4$ є об'єднанням двох класів спряжених елементів. Факторгрупа $S_4/K_4$ має порядок 6 і некомутативна. **20**. *Вказ.* Скористайтеся рівністю $g^{-1}abg = g^{-1}ag \cdot g^{-1}bg$. **21**. a) Повороти на кут $\alpha$ навколо довільної точки площини; b) повороти на кут $\alpha$ навколо довільної осі. **22**. *Вказ.* Відображення $x \mapsto \varphi(x)x^{-1}$ — ін'єктивне, так як з рівності $\varphi(x)x^{-1} = \varphi(y)y^{-1}$ матимемо: $(\varphi(y))^{-1}\varphi(x) = y^{-1}x$, $\varphi(y^{-1}x) = y^{-1}x$, $y^{-1}x = e$, $y = x$. Отже, відображення $x \mapsto \varphi(x)x^{-1}$ є підстановкою на $G$. Тому для кожного $a \in G$ знайдеться такий елемент $b$, що $a = \varphi(b)b^{-1}$.

Однак тоді $\varphi(a) = b\varphi(b^{-1}) = b\varphi(b)^{-1} = b \cdot (ab)^{-1} = a^{-1}$ і із зад. 8.12 випливає, що група $G$ — абелева. Якби група $G$ мала парний порядок, то вона б містила елемент $c$ порядку 2 (див. зад. 5.14), який залишався б нерухомим під дією $\varphi$, тому що $c^{-1} = c$. **23**. *Вказ.* Некомутативна група $G$ має нетривіальні внутрішні автоморфізми. Якщо $G$ — комутативна, то або відображення $x \mapsto x^{-1}$ є нетривіальним автоморфізмом, або всі елементи групи $G$ мають порядок 2. В останньому випадку $G$ ізоморфна адитивній групі векторного простору над полем $\mathbb{Z}_2$ і кожне невироджене лінійне перетворення цього простору є автоморфізмом. **24**. *Вказ.* Зауважте, що $\operatorname{Inn} Q_8 \simeq Q_8/Z(Q_8)$ і $|\operatorname{Aut} Q_8| = 24$. Потім доведіть, що факторгрупа $\operatorname{Aut} Q_8/\operatorname{Inn} Q_8$ — некомутативна. **25**. *Вказ.* $Z(H)$ буде нормальною підгрупою $G$ (див. зад. 9.18), і різні класи суміжності групи $G$ за підгрупою $Z(H)$ індукуватимуть різні автоморфізми $H$. **26**. *Вказ.* Спряження є автоморфізмом, а тому переводить підгрупу в підгрупу такого самого порядку. **27**. a) $H = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) | n \in \mathbb{Z}\}$; b) $H$ — підгрупа, що лишає нерухомими всі парні числа. *Вказ.* a) Розгляньте спряження за допомогою $\left(\begin{smallmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. **28**. *Вказ.* Якщо $|G : H| = n$, то в $G$ існує не більше ніж $n$ підгруп, спряжених з $H$. Їх перетин $N = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$ є нормальною підгрупою і, згідно із зад. 7.22, має скінченний індекс. **29**. $C_1, C_2, C_3, K_4$. **30.** a) $\{0°\}$, $\{90°, 270°\}$, $\{180°\}$, $\{s_1, s_3\}$, $\{s_2, s_4\}$; b) $\{e\}$, $\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, $\{(123), (134), (142), (243)\}$, $\{(132), (143), (124), (234)\}$. **31.** 15. **32**. *Вказ.* Довільна перестановка простих чисел продовжується до автоморфізму всієї групи. **33.** *Вказ.* Скористайтеся тим, що $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}_8 \simeq \mathbb{Z}_8^* \simeq K_4 \simeq \mathbb{Z}_{12}^* \simeq \operatorname{Aut} \mathbb{Z}_{12}$. **34.** 6. **35**. $\left\{\left(\begin{smallmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{R}) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\right\}$. **36.** $N(< (12)(34) >) = \{e, (12), (34), (1423), (1324), (13)(24), (12)(34), (14)(23)\}$.

**Заняття 10.** **9.** a) $\{\varepsilon\}$; b) $\{0°, 180°\}$; c) $\{0°\}$; d) $\{e\}$; e) $\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$. *Вказ.* e) $T_3(\mathbb{Z}_2) \cong D_4$. **10.** a) Так; b), c) ні. *Вказ.* b) Розгляньте канонічний епіморфізм $Q_8 \to Q_8/Z(Q_8)$; c) розгляньте мономорфізм $C_3 \to S_3$. **12.** 1) у кожній із груп, 2) в b) і c). **13.** a) $\{0°, 180°\}$; b) $K_4$; c) $\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$; d) $\{\varepsilon\}$; e) $\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$. *Вказ.*: b) скористайтеся співвідношеннями $[(ijk), (ijl)] = (ij)(kl)$, $[(ijk), (ilj)] = (il)(jk)$, де $i, j, k, l$ – попарно різні; c) $GL_2(\mathbb{Z}_2) \cong S_3$; e) $T_3(\mathbb{Z}_2) \cong D_4$. **14.** *Вказ.* Центр скінченної $p$–групи $G$ нетривіальний, і згідно з лемою Коші в $Z(G)$ існує підгрупа $P$ порядку $p$. Тоді $P$ нормальна в $G$. Далі перейдіть до факторгрупи $G/P$ і застосуйте індукцію за $n$. **15.** *Вказ.* Якщо $G/Z(G)$ комутативна, то вона нециклічна, інакше перейдіть до факторгрупи $G/Z(G)$ і застосуйте індукцію. **16.** Так, наприклад, у групі $Q_8$. **17.** *Вказ.* Випливає із зад. 10.6. **18.** *Вказ.* Якщо $G$ — некомутативна, то $\operatorname{Inn} G$ — неодинична підгрупа $\operatorname{Aut} G$. Однак $\operatorname{Inn} G \simeq G/Z(G)$. **19.** a) $S_2$ при $n=2$ і $\{\varepsilon\}$ при $n \neq 2$; b) $A_3$ при $n=3$ і $\{\varepsilon\}$ при $n \neq 3$; c) $\{0^\circ\}$ при $n$ – непарних і $\{0^\circ, 180^\circ\}$ при $n$ – парних. *Вказ.* a), b) довільна нетотожна підстановка $(ij\ldots)(k\ldots)\ldots$, яка розкладена в добуток незалежних циклів, не комутує з транспозицією $(jk)$ і циклом $(ijk\ldots)$; c) скористайтеся тим, що елемент належить центру тоді й тільки тоді, коли він спряжений лише із собою. **20.** Підгрупа всіх поворотів, якщо $n$ непарне, і поворотів на кути $\frac{2\pi m}{k}$, якщо $n=2k$. **21.** *Вказ.* Аналогічно зад. 10.7 покажіть, що $H$ містить відмінні від $\{e\}$ одноелементні класи спряженості. **22.** *Вказ.* Некомутативна група $G$ порядку 8 не може містити елементів порядку 8, і всі її неодиничні елементи не можуть мати порядок 2. Тому вона має містити елементи порядку 4. Крім того, факторгрупа за центром не може бути циклічною. Тому $Z(G) = \langle a \rangle$ , де $a$ — елемент порядку 2, і $G/Z(G) \simeq K_4$. Візьміть тепер елементи $b$ порядку 4 і $c \notin \langle b \rangle$ і розгляньте підгрупу, породжену цими елементами. **23.** Групи порядку $p$ або $p^2$. *Вказ.* Група має бути $p$–групою. **24.** *Вказ.* Для абелевих груп це випливає із зад. 10.6. Нехай $G$ неабелева. Зауважимо, що для довільного $a \in G \setminus Z(G)$ нормалізатор $N(a)$ строго менший за $G$ і строго більший за $Z(G)$. Якщо існує такий $a \in G \setminus Z(G)$, що $|N(a)| = p^3$, то цей нормалізатор є комутативною групою. Справді, у цьому випадку $Z(N(a))$ містить $a$ і всі елементи із $Z(G)$, тому $|Z(N(a))| > p$. Далі скористайтесь тим, що факторгрупа некомутативної групи за центром не може бути циклічною. Тоді $|G/Z(G)| \geq p^2$, а тому $|Z(G)| \leq p^2$. Якщо $|Z(G)| = p^2$, то для довільного $a \in G \setminus Z(G)$ буде $|N(a)| = p^3$. Отже, лишився лише випадок, коли $|Z(G)| = p$ і для довільного $a \in G \setminus Z(G)$ виконуватиметься $|N(a)| = p^2$. Однак тоді з розбиття $G$ на класи спряжених елементів випливало б $p^4 = |Z(G)| + \sum_i |G : N(a_i)| = p + kp^2$, що неможливо. **25.** a) $Z(Q_8) = [Q_8, Q_8] = \{\pm 1\}$; b) $Z(T_2(\mathbb{Z}_3)) = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)\}$, $[T_2(\mathbb{Z}_3), T_2(\mathbb{Z}_3)] = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$. **26.** *Вказ.* Покажіть, що $[a,b]\big[[a,b],a\big][a,b] = [a^2, b]$. **27.** Обидві рівності є тотожностями в b) і c). *Вказ.* Для рівності 1) це випливає з того, що квадрат довільного елемента кожної з груп належить центру групи. Для 2) це випливає з $[D_4, D_4] = \{0^\circ, 180^\circ\}$, а $[Q_8, Q_8] = \{\pm 1\}$. **29.** *Вказ.* Скористайтеся тим, що факторгрупа $G/H$ є абелевою тоді й тільки тоді, коли $H$ містить комутант $[G,G]$. **30.** *Вказ.* Доведіть, що кожний елемент групи $UT_3(\mathbb{Z}_p)$ спряжений з елементом вигляду $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **31.** *Вказ.* Розгляньте циклічну факторгрупу $H = G/G_{n-1}$ із зад. 10.14 і скористайтеся вказівкою до зад. 10.29.

**Заняття 11.** **9**. Необхідно й достатньо, щоб усі множники були: a) абелевими групами; b) $p$–групами; c) періодичними групами. **10**. a) $G = D_4$, $A$ — підгрупа всіх поворотів з $D_4$, $B$ — підгрупа порядку 2, породжена осьовою симетрією; b) $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $A = \{(0,0,0),(1,0,0)\}$, $B = \{(0,0,0),(0,1,0)\}$; c) $G = Q_8$, $A = \langle i\rangle$, $B = \langle j\rangle$. **11**. a), b), c) Ні. *Вказ.* a), b) Якщо група порядку $\leq 10$ розкладається в прямий добуток, то вона комутативна; c) серед неодиничних нормальних підгруп в $S_4$ є найменша $K_4$ (див. зад. 7.15). **12**. *Вказ.* a) Якщо $A, B \leq \mathbb{Z}$ — ненульові підгрупи і $0 \neq m \in A$, $0 \neq n \in B$, то $0 \neq mn \in A \cap B$. b) Якщо $A \leq \mathbb{Q}$ — ненульова підгрупа, то $A \cap \mathbb{Z} \neq 0$. Далі використайте вказ. до п. a). **13**. *Вказ.* Власні неодиничні підгрупи мають порядок $p$ або $q$, а тому є абелевими. **14**. *Вказ.* $G$ — абелева, тому коли $G$ не є циклічною, то вона містить принаймні 2 нормальні підгрупи порядку $p$. **15**. a) 1; $G = \langle a^4\rangle \times \langle a^3\rangle$; b) 4; $G = \langle a^4\rangle \times \langle a^{15}\rangle = \langle a^3\rangle \times \langle a^{20}\rangle = \langle a^5\rangle \times \langle a^{12}\rangle = \langle a^3\rangle \times \langle a^4\rangle \times \langle a^5\rangle$. **16**. Кожен клас спряженості групи $G \times H$ є добутком класу спряженості з $G$ на клас спряженості з $H$. $G \times H$ має $mn$ класів спряженості. **18**. *Вказ.* $g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2 \cdot h_1h_2 \Leftrightarrow h_1g_2 = g_2h_1$. **19**. *Вказ.* a) Будь–яка перестановка ненульових елементів є автоморфізмом; b) $\mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$, тому $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3) \simeq (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) \oplus \mathbb{Z}_3$. Далі використайте п. a). **20**. Ні. *Вказ.* Розгляньте $A = \mathbb{Z}_2[x]$, $B = E$, $C = \mathbb{Z}_2$. **21**. a), c) Так; b), d) ні. *Вказ.* Якщо $p < q$ — прості числа, то некомутативна група порядку $pq$ існує тоді й лише тоді, коли $p|(q-1)$. **22**. 54. **23**. *Вказ.* Є континуум багато розбиттів множини простих чисел на 2 підмножини. **24**. *Вказ.* Якщо $\varphi : G \to S_n$ — зображення Келі, то відображення $\psi : g \mapsto (\varphi(g), \varphi(g))$ є зануренням $G$ у пряму суму груп підстановок $S_n \oplus S_n$. Далі ототожніть $S_n \oplus S_n$ із підгрупою групи $S_{2n}$. **25**. *Вказ.* Мономорфізмом буде відображення $z \mapsto (z\mathbb{C}_{p^\infty}, z\mathbb{C}_{q^\infty})$. **26**. *Вказ.* Доведіть, що множина $N_k = \{E + A \in GL_n(\mathbb{Z})$ : усі коефіцієнти матриці $A$ діляться на $k\}$ є нормальною підгрупою $GL_n(\mathbb{Z})$, і що $GL_n(\mathbb{Z})/N_k \simeq GL_n(\mathbb{Z}_k)$. Далі доведіть, що відображення $A \mapsto (A \cdot N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є мономорфізмом. **28**. Ні. *Вказ.* Серед неодиничних нормальних підгруп із $C_8$ є найменша, а $Q_8$ і $D_4$ — некомутативні. **29**. a) 4; b) 14. **31**. 19.

**Заняття 12.** **7**. a) $\langle(1234)\rangle$ і $\langle(1234)(56)\rangle$; b) $\langle(123456)\rangle$ і $\langle(123)(45)\rangle$. **8**. a), b) Існує. *Вказ.* Доведіть існування підгруп індексів 3, 4 і 6 і розгляньте дію на правих класах суміжності за цими підгрупами. **9**. *Вказ.* Якщо $y = x^b$ і $x^a = x$, то $y^a = (x^b)^a = (x^a)^b = x^b = y$. **10**. Для $k = 2$ є 2 орбіти: $\{(a,a)|a \in N\}$ потужністю $n$ і $\{(a,b)|a \neq b\}$ потужністю $n(n-1)$; для $k = 3$ є 5 орбіт: $\{(a,a,a)|a \in N\}$ потужністю $n$, 3 орбіти типу $\{(a,a,b)|a \neq b\}$ потужністю $n(n-1)$ і $\{(a,b,c)|a,b,c$ — попарно різні$\}$ потужністю $n(n-1)(n-2)$; для $k = 4$ є 15 орбіт: $\{(a,a,a,a)|a \in N\}$ потужністю $n$, 4 орбіти типу $\{(a,a,a,b)|a \neq b\}$ потужністю $n(n-1)$, 3 орбіти типу $\{(a,a,b,b)|a \neq b\}$ потужністю $n(n-1)$, 6 орбіт типу $\{(a,a,b,c)|a,b,c$— попарно різні$\}$ потужністю $n(n-1)(n-2)$ і $\{(a,b,c,d)|a,b,c,d$ — попарно різні$\}$ потужністю $n(n-1)(n-2)(n-3)$. **11**. a) 2 орбіти: нульовий вектор і множина всіх ненульових векторів; b) орбіти — множини всіх векторів фіксованої довжини; c) $2^n$ орбіт: кожна орбіта визначається деякою підмножиною $M \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ і має вигляд $O_M = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in E_n | x_i = 0 \Leftrightarrow i \in M\}$. **12**. Якщо $H_1 = K_4$, $H_2 = K_4(123)$, $H_3 = K_4(132)$, то елементам із $H_1$ відповідає підстановка $\left(\begin{smallmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{smallmatrix}\right)$, елементам із $H_2$ — підстановка $\left(\begin{smallmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ H_2 & H_3 & H_1 \end{smallmatrix}\right)$, а елементам із $H_3$ — підстановка $\left(\begin{smallmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ H_3 & H_1 & H_2 \end{smallmatrix}\right)$. **13**. *Вказ.* Група $A_5$ — проста, а зображення $A_5$ підстановками на класах суміжності за такими підгрупами мали б нетривіальні ядра дій. **14**. a) $\frac{1}{12}(k^6 + 3k^4 + 8k^2)$; b) $\frac{1}{24}(k^{12} + 6k^7 + 3k^6 + 8k^4 + 6k^3)$; c) $\left(\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(n/d)k^d\right)^2$. **15**. 16. **16**. $G_1 = \langle(123),(12)\rangle$ — стабілізатор множини $\{4,5,6\}$, $G_2 = \langle(123)(456),(12)(45)\rangle$ — діагональне занурення групи $S_3$ у групу $S_6$, $G_3 = \langle(123)(456),(14)(26)(35)\rangle$ — зображення Келі групи $S_3$. **17**. a) 1 орбіта $\{(u,v)|u,v$ — лінійно незалежні$\}$ потужністю $(p^n - 1)(p^n - p)$, $p+1$ орбіта $\{(u,\alpha u)|u \neq 0, \alpha \in \mathbb{Z}_p$ — фіксований$\}$ і $\{(0,v)|v \neq 0\}$ потужністю $p^n - 1$ та 1 орбіта $\{(0,0)\}$ потужністю 1. b) 1 орбіта $\{(u,v,w)|u,v,w$ — лінійно незалежні$\}$ потужністю $(p^n-1)(p^n-p)(p^n-p^2)$, $(p-1)^2$ орбіт вигляду $\{(u,v,\alpha u+\beta v)|u,v$ — лінійно незалежні, $\alpha,\beta \neq 0, \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_p$ — фіксовані$\}$ потужністю $(p^n-1)(p^n-p)$, $3(p-1)$ орбіт вигляду $\{(u,v,\alpha u)|u,v$ — лінійно незалежні, $0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_p$ — фіксоване$\}$ потужністю $(p^n-1)(p^n-p)$, 3 орбіти вигляду $\{(u,v,0)|u,v$ — лінійно незалежні$\}$ потужністю $(p^n-1)(p^n-p)$, $(p-1)^2$ орбіт вигляду $\{(u,\alpha u,\beta u)|u \neq 0, \alpha,\beta \neq 0, \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_p$ — фіксовані$\}$ потужністю $p^n - 1$, $3(p-1)$ орбіти вигляду $\{(u,\alpha u,0)|u \neq 0, 0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_p$ — фіксоване$\}$ потужністю $p^n - 1$, 3 орбіти вигляду $\{(u,0,0)|u \neq 0,\}$ потужністю $p^n-1$ і 1 орбіта $\{(0,0,0)\}$ потужністю 1. **18**. Орбіти знаходяться у взаємно однозначній відповідності з дільниками числа $n$, причому орбіта, що відповідає дільнику $d$, складається з усіх таких класів лишків $x$, що НСД$(n,x) = d$, і містить $\varphi(n/d)$ елементів. **19**. *Вказ.* Розгляньте ядро $N$ дії групи $G$ зсувами на правих класах суміжності групи $G$ за підгрупою $H$. **20**. *Вказ.* Використайте зад. 12.19. **21**. *Вказ.* a) Випливає з п. b), тому що при $n > 3$ група $A_n$ двічі транзитивна; b) якщо група підстановок $(G, M)$ двічі транзитивна, то $G$ діє транзитивно на множині $M^{[2]} = \{(m,n)|m,n \in M, m \neq n\}$. Кількість $\nu(g)$ нерухомих точок при дії елемента $g$ на множині $M^{[2]}$ дорівнює $\nu(g) = \chi(g)(\chi(g)-1)$. Із транзитивності дії $G$ на $M$ і $M^{[2]}$ за лемою Коші — Фробеніуса — Бернсайда $\sum_{g\in G}\nu(g) = \sum_{g\in G}\chi(g)(\chi(g)-1) = |G|$ та $\sum_{g\in G}\chi(g) = |G|$. **22**. *Вказ.* Занумеруйте грані куба елементами множини $\{\pm i, \pm j, \pm k\}$ таким чином, щоб протилежні грані нумерувалися елементами, що розрізняються знаком. **23**. *Вказ.* Використайте зад. 12.22. **24**. *Вказ.* Доведіть, що двовимірний простір $\mathbb{Z}_3^2$ містить 4 одновимірні підпростори і що ядром природної дії групи $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ на множині цих підпросторів є центр групи $GL_2(\mathbb{Z}_3)$. **25**. Дія є транзитивною для всіх $P$ і точною для $|P| > 2$. **26**. Повороти на $0°$, $120°$, $240°$ навколо цієї діагоналі і 3 повороти на $180°$ навколо прямих, що проходять через середини тих протилежних ребер, які не мають спільних кінців з даною діагоналлю. **29**. a) $(k^4 + 11k^2)/12$; b) $(k^6 + 3k^4 + 12k^3 + 8k^2)/24$; c) $(k/n)\sum_{d|n}\varphi(n/d)k^d$. **30**. 29.

**Заняття 13.** **8**. *Вказ.* Розгляньте множину $p$–елементів групи $S_p$. **9**. *Вказ.* a) Доведіть, що порядок $UT_n(\mathbb{Z}_p)$ дорівнює $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ і порядку силовської $p$–підгрупи; b) скористайтесь п. a) і тим, що $UT_n(\mathbb{Z}_p) \leq T_n(\mathbb{Z}_p) \leq GL_n(\mathbb{Z}_p)$; c) аналогічно п. a). **10**. Одна силовська 2–підгрупа $K_4$ і чотири силовські 3–підгрупи $P_1 = \langle(1\,2\;3)\rangle$, $P_2 = \langle(1\,2\;4)\rangle$, $P_3 = \langle(1\,3\,4)\rangle$, $P_4 = \langle(2\;3\;4)\rangle$. $P_1$ спряжена з $P_2$, $P_3$, $P_4$ за допомогою $(1\,2)(3\,4)$, $(1\,3)(2\,4)$, $(1\,4)(2\,3)$ відповідно, $P_2$ спряжена з $P_3$, $P_4$ за допомогою $(1\,4)(2\,3)$, $(1\,3)(2\,4)$ відповідно, $P_3$ спряжена з $P_4$ за допомогою $(1\,2)(3\,4)$. **11**. a) $p$ силовських 2–підгруп порядку 2, кожна з яких породжується осьовою симетрією, і 1 силовська $p$–підгрупа порядку $p$, яка складається з усіх поворотів; b) $p$ силовських 2–підгруп порядку 4, кожна з яких породжується двома осьовими симетріями із взаємно перпендикулярними осями, і 1 силовська $p$–підгрупа порядку $p$, яка складається з поворотів. **12**. *Вказ.* Силовська 2–підгрупа групи $A_5$ має порядок 4. **13**. $\{\varepsilon$, $(1234)$, $(13)(24)$, $(1432)$, $(12)(34)$, $(13)$, $(14)(23)$, $(24)\}$. **14**. 48. *Вказ.* Число вигляду $7k+1$ ділить 168 лише для $k=0$ і $k=1$. Однак при $k=0$ силовська 7–підгрупа була б нормальною. Тому група містить 8 силовських 7–підгруп порядку 7. **15**. *Вказ.* Усі силовські $p$–підгрупи спряжені, а нормальна підгрупа при спряженні переходить у себе. **16**. *Вказ.* При спряженні силовські $p$–підгрупи переставляються, а тому їх перетин переходить у себе. **17**. *Вказ.* Доведіть, що всі силовські підгрупи є комутативними, нормальними й поелементно переставними. **18**. *Вказ.* Розгляньте зображення групи правими зсувами на правих класах суміжності за тією із силовських підгруп, яка має менший індекс. **19**. *Вказ.* a) $G$ містить лише 1 силовську 7–підгрупу. b) Якщо силовська 7–підгрупа не є нормальною, то $G$ містить 8 силовських 7–підгруп і 48 елементів порядку 7. Елементів, що лишаються, вистачає лише на одну 2–підгрупу порядку 8, тому 2–підгрупа є нормальною. **20**. *Вказ.* $G$ містить тільки 1 силовську 17–підгрупу $P$, тому $P$ є нормальною. При канонічному епіморфізмі $G \to G/P$ елемент порядку 5 має переходити в елемент порядку 5. Оскільки $G/P$ має порядок 15 і містить лише одну 5–підгрупу, то $G/P$ має 4 елементи порядку 5, а тому $G$ може містити не більше $4 \cdot 17 = 68$ елементів порядку 5. Якби силовська 5–підгрупа не була нормальною, то $G$ містила б 51 силовську 5–підгрупу і $4 \cdot 51 = 204$ елементи порядку 5. Аналогічно доводиться нормальність силовської 3–підгрупи. Далі доведіть, що силовські підгрупи є поелементно переставними й комутативними. **21**. $\frac{(2p)!}{2p^2(p-1)^2}$. **22**. *Вказ.* Якщо $p > q$, то силовська $p$–підгрупа $P$ буде нормальною як ядро зображення групи $G$ правими зсувами на правих класах суміжності за підгрупою $P$. Якщо ж $p < q$ і $q$–підгрупа не є нормальною, то існує таке $k > 0$, що $kq + 1$ є дільником числа $p^2q$. Однак тоді $kq + 1 = p^2$ і $G$ містить $(q - 1)p^2$ елементів порядку $q$. Елементів, що лишились, вистачає рівно на одну $p$–підгрупу. **23**. *Вказ.* Якщо силовська 3–підгрупа $P$ не є нормальною в $G$, то розгляньте дію $G$ правими зсувами на правих класах суміжності за підгрупою $P$ і факторгрупу групи $G$ за ядром цієї дії. **25**. *Вказ.* Треба показати, що кожна група $G$ непростого порядку $k < 60$ містить неодиничну власну нормальну підгрупу. Розгляньте спочатку групи порядків $p^n$, $pq$ і $p^2q$. Існування неодиничних власних нормальних підгруп у групах порядків 24, 36, 48 і 54 доводиться, якщо розглянути зображення $G$ правими зсувами на правих класах суміжності за тією силовською підгрупою, яка має менший індекс. Оскільки $5k + 1$ не ділить 40 для $k > 0$, то силовська 5–підгрупа буде нормальною в групі порядку 40. Аналогічно силовська 7–підгрупа буде нормальною в групі порядку 42. Якщо в групі порядку 30 силовські 3–підгрупи і 5–підгрупи не є нормальними, то $G$ має містити 10 силовських 3–підгруп і 6 силовських 5–підгруп, для чого не вистачає елементів. Групи порядку 56 розглянуто в зад. 13.19. **26**. *Вказ.* Якщо $p > 2$, то $G$ містить одну циклічну $p$–підгрупу порядку $p$ і 1 або $p$ підгруп порядку 2. В обох випадках $G$ містить елемент $a$ порядку 2 і елемент $b$ порядку $p$. У першому випадку елемент $ab$ має порядок $2p$, тому $G \simeq C_{2p}$. У другому випадку $ab \neq ba$. Однак підгрупа $\langle b \rangle$ — нормальна, тому $a^{-1}ba = aba = b^k$, де $k \neq 1$. Звідси одержуємо: $b = a^2ba^2 = ab^kab^{k^2}$, $k^2 \equiv 1 \pmod p$ і $k = -1$. Якщо тепер зіставити елементу $a$ деяку осьову симетрію, а $b$ — поворот на $360°/p$, то це відображення продовжується до ізоморфізму $G$ на $D_p$. **27**. *Вказ.* b) Якщо група порядку 12 не містить нормальної підгрупи порядку 3, то вона містить нормальну підгрупу порядку 4, причому в останньому випадку в групі має бути 8 елементів порядку 3. c) Група порядку 18 містить нормальну підгрупу порядку 9. d) У групі порядку 20 силовські підгрупи є комутативними. Якби і 2–, і 5–підгрупа були нормальними, то група була б комутативною. Далі розгляньте дільники числа 20 вигляду $2k+1$ і $5k+1$. **28**. *Вказ.* Для доведення достатності покажіть, що елемент $g$ порядку $p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$ розкладається в добуток $g_1 \cdots g_n$ елементів порядків $p_1^{k_1}, \ldots, p_n^{k_n}$ відповідно, і скористайтеся тим, що силовська $p$–підгрупа єдина тоді й лише тоді, коли вона нормальна. **30**. a) 1 силовська 2–підгрупа і 4 силовських 3–підгрупи; b) 5 силовських 2–підгруп, 10 силовських 3–підгруп, 6 силовських 5–підгруп. **31**. Усі три силовські 2–підгрупи. **32**. *Вказ.* Якщо $p$ — просте, то група порядку $p^2$ є абелевою. **33**. *Вказ.* Доведіть, що всі силовські підгрупи є нормальними й комутативними. **34**. $S_4$. **36**. *Вказ.* Якщо $p\big||G|$, то в $G$ є елемент порядку $p$, а тому $p|n$.

**Заняття 14.** **7**. a) $S_3$; b) $Q_8$ або $D_4$; c) $A_4$. **8**. *Вказ.* Якщо в $A$ існує елемент $a \neq e$ скінченного порядку, то для довільного елемента $b$ нескінченного порядку $|ab| = |b^{-1}| = \infty$ і $|ab \cdot b^{-1}| = |a| < \infty$. **9**. *Вказ.* Нехай $\langle a \rangle = C_{p_1^{k_1}} \times \cdots \times C_{p_m^{k_m}}$ — розклад групи $\langle a \rangle$ в прямий добуток примарних циклічних підгруп. Кожний множник $C_{p_i^{k_i}}$ породжується деяким степенем елемента $a$, тому $a = a^{n_1} \cdots a^{n_m}$, де $a^{n_i} \in C_{p_i^{k_i}}$. Далі порівняйте $|a|$ з числом $|a^{n_1} \cdots a^{n_m}| = |a^{n_1}| \cdots |a^{n_m}|$. **10**. a) $C_3 \times C_4 \times C_5$; b) $C_5 \times C_9 \times C_{16}$; c) $C_2 \times C_4 \times C_3 \times C_3 \times C_5 \times C_5$. **11**. a) $C_8$, $C_4 \times C_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2$; b) $C_8 \times C_9$, $C_8 \times C_3 \times C_3$, $C_4 \times C_2 \times C_9$, $C_4 \times C_2 \times C_3 \times C_3$, $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_9$, $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3$. **12**. a) 2; b) 3; c) 7; d) 1; e) 15. **13**. a) 4; b) 2; c) 5; d) 1; e) 1. **14**. a) $\langle \bar{2} \rangle \times \langle \overline{11} \rangle \simeq C_4 \times C_2$; b) $\langle \bar{3} \rangle \times \langle \bar{7} \rangle \simeq C_4 \times C_2$; c) $\langle \bar{5} \rangle \times \langle \bar{7} \rangle \times \langle \overline{13} \rangle \simeq C_2 \times C_2 \times C_2$. **15**. {a,b,c,g}, {f,i}, {d}, {e}, {h}. **16**. a) 1 елемент порядку 1, $p^2-1$ елементів порядку $p$ і $p^3-p^2$ елементів порядку $p^2$; b) 1 елемент порядку 1, $p^2-1$ елементів порядку $p$, $p^4-p^2$ елементів порядку $p^2$ і $p^5-p^4$ елементів порядку $p^3$. **17**. a) 16; b) 8. **18**. $\langle \overline{17} \rangle \times \langle \overline{55} \rangle \times \langle \overline{53} \rangle \times \langle \overline{49} \rangle \simeq C_2 \times C_2 \times C_4 \times C_3$. **19**. *Вказ.* Розгляньте групу: a) $G = \langle a, b \mid a^5 = b^4 = e, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$; b) $G = \langle a, b \mid a^3 = b^8 = e, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$; c) $G = \langle a, b \mid a^7 = b^4 = e, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. **21**. a) Кількість елементів порядків 1, $p$, $p^2$, $q$, $pq$, $p^2q$, $q^2$, $pq^2$, $p^2q^2$, дорівнює відповідно 1, $p^2-1$, $p^3-p^2$, $q^2-1$, $(p^2-1)(q^2-1)$, $(p^3-p^2)(q^2-1)$, $q^3-q^2$, $(p^2-1)(q^3-q^2)$, $(p^3-p^2)(q^3-q^2)$. b) Кількість елементів порядку $p^kq^l$, $p^k$, $q^l$, де $1\le k\le n$, $1\le l\le n$, дорівнює відповідно $(p^{2k}-p^{2k-2})(q^{2l}-q^{2l-2})$, $p^{2k}-p^{2k-2}$, $q^{2l}-q^{2l-2}$. **22**. *Вказ.* Якщо $Q$ — силовська $p$–підгрупа з $A$, то $H\cap P\le Q$. Обчисліть $|PQ|$. **23**. a) $C_3\times C_9\times C_5\times C_5\times C_7$; b) $C_2\times C_3\times C_9\times C_5\times C_{25}$. **24**. a) $C_2\times C_3\times C_5$; b) $C_3\times C_{16}$, $C_3\times C_2\times C_8$, $C_3\times C_4\times C_4$, $C_3\times C_4\times C_2\times C_2$, $C_3\times C_2\times C_2\times C_2\times C_2$. **25**. a) 14; b) 11; c) 1. **26**. a) $C_2\times C_2\times C_3$, b) $C_2\times C_3\times C_4$, c) $C_2\times C_3\times C_4$, d) $C_2\times C_2\times C_3\times C_4$. **28.** a) Ні, b) ні, c) так.

**Заняття 15.** **7**. $E$, $C_2$, $C_4$, $C_5$, $C_7$, $C_2\times C_2$, $C_2\times C_4$, $C_2\times C_5$, $C_2\times C_7$, $C_4\times C_5$, $C_4\times C_7$, $C_5\times C_7$, $C_2\times C_2\times C_5$, $C_2\times C_2\times C_7$, $C_2\times C_4\times C_5$, $C_2\times C_4\times C_7$, $C_2\times C_5\times C_7$, $C_4\times C_5\times C_7$, $C_2\times C_2\times C_5\times C_7$, $C_2\times C_4\times C_5\times C_7$. **8**. a), b) Так; c) ні. *Вказ.* a), b) Розгляньте групу $C_p\times C_p$. c) Якщо $A$ — нециклічна, то її розклад у прямий добуток примарних циклічних груп має містити принаймні два множники, що відповідають одному й тому простому числу $p$. Однак тоді $A$ містить 2 різні циклічні підгрупи порядку $p$. **9**. a) $p+3$, b) $2p+6$. **10**. *Вказ.* Зведіть до випадку $p$–груп і скористайтесь основною теоремою про будову скінченних абелевих груп. **11**. a) 8, b) 4. **12**. 54. **13**. a) 20 (12), b) 12 (6), c) 4 (0) (у дужках указано кількість епіморфізмів). **14**. a) $\mathbb{Z}_2$, b) $\mathbb{Q}^*$, c) група цілочисельних матриць порядку $n$ з визначником $\pm1$. *Вказ.* b) Автоморфізм $\varphi:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ повністю визначається числом $\varphi(1)$. **16**. *Вказ.* a) Використайте зад. 11.8. b) Для довільних гомоморфізмів $\varphi:A\to B_1$, $\psi:A\to B_2$ відображення $x\mapsto(\varphi(x),\psi(x))$ є гомоморфізмом $A$ у $B_1\oplus B_2$. **17**. a) $\mathbb{Z}_6$, b) $\mathbb{Z}$. **18**. Ні. *Вказ.* У першій факторгрупі немає елементів порядку 4, а в другій — є. **19**. *Вказ.* Нехай $A/B=\langle aB\rangle$. Тоді $\langle a\rangle\cap B=E$ і можна взяти $C=\langle a\rangle$. **20**. Циклічні групи простих порядків і тільки вони. **21**. *Вказ.* Доведіть спочатку для скінченної циклічної групи, а потім використайте зад. 15.16 a). **22**. *Вказ.* Доведіть, що для довільного $a\in A$ існує єдиний гомоморфізм $\varphi_a:\mathbb{Z}\to A$, для якого $\varphi_a(1)=a$, і що відображення $a\mapsto\varphi_a$ є ізоморфізмом $A$ на $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},A)$. **23**. *Вказ.* Доведіть, що $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_m)\simeq\mathbb{Z}_{\text{НСД}(n,m)}$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})\simeq E$ і використайте зад. 15.22. **24**. *Вказ.* $A=B\oplus\operatorname{Ker}\varphi$. **25**. $E$, $C_2$, $C_4$, $C_8$, $C_3$, $C_2\times C_2$, $C_2\times C_4$, $C_2\times C_8$, $C_4\times C_4$, $C_4\times C_8$, $C_2\times C_3$, $C_4\times C_3$, $C_8\times C_3$, $C_2\times C_2\times C_3$, $C_2\times C_4\times C_3$, $C_2\times C_8\times C_3$, $C_4\times C_4\times C_3$, $C_4\times C_8\times C_3$. **26**. 16. **27**. 84. **28**. Ендоморфізмів 6250, ізоморфізмів 2000. **29**. Гомоморфізмів 16, епіморфізмів 6. **30**. *Вказ.* $\mathbb{Z}_{30}$ містить єдиний елемент порядку 2 (тому при всіх автоморфізмах він лишається нерухомим) і єдину підгрупу порядку 15 (тому кожний автоморфізм групи $\mathbb{Z}_{30}$ індукує автоморфізм цієї підгрупи). Крім того, $\mathbb{Z}_{30} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{15}$. **31**. a), b) $\mathbb{Z}_6$.

**Заняття 16.** **7.** *Вказ.* Усі підгрупи циклічної групи є циклічними. Достатність випливає з того, що коли $r$ і $s$ взаємно прості, то $C_r \times C_s \simeq C_{rs}$. **8.** *Вказ.* Згідно із зад. 16.5 підгрупа $H = \bigcup_i H_i$ має скінченну систему твірних $a_1, \dots, a_m$. Якщо $a_1 \in H_{i_1}, \dots, a_m \in H_{i_m}$ і $k = \max(i_1, \dots, i_m)$, то $H = H_k$ і $H_k = H_{k+1} = H_{k+2} = \cdots$. **9.** $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$. **10.** 3. **11.** a) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9$; b) $\mathbb{Z}_4$; c) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$; d) $\mathbb{Z}$. **12.** *Вказ.* Скористайтеся розв'язанням зад. 16.4. **13.** *Вказ.* Множина всіх розв'язків такої системи є підпростором простору $\mathbb{Q}^n$, а тому замкнена відносно додавання і взяття протилежного елемента. **14.** *Вказ.* Множина всіх розв'язків такої системи замкнена відносно множення на раціональні числа, тому підгрупа $(k\mathbb{Z})^n$ для $k > 1$ у такому вигляді не зображується. **15.** $|ad - bc| = 1$. **16.** *Вказ.* Якщо $\varphi$ — сюр'єктивний ендоморфізм і $\operatorname{Ker} \varphi \neq E$, то ланцюг $E < H_1 < H_2 < \cdots$, де $H_{i+1} = \varphi^{-1}(H_i)$, нескінченно зростає, що суперечить зад. 16.8. **17.** *Вказ.* Порівняйте порядки силовських $p$–підгруп в $A$ і $H$ і врахуйте, що в абелевій групі силовська $p$–підгрупа — єдина. **18.** *Вказ.* Нехай $G = C_{p^{k_1}} \times \cdots \times C_{p^{k_m}}$, де $k_1 \geq \cdots \geq k_m$. Твірний елемент $a = a_1 \cdots a_m$ підгрупи $H$ є в $G$ елементом максимального порядку, тому $|a| = p^{k_1} = \max(|a_1|, \dots, |a_m|)$. Можна вважати, що $|a_1| = p^{k_1}$. Тоді $C_{p^{k_1}} = \langle a_1 \rangle$ і кожний елемент $g \in G$ можна записати у вигляді $g = a_1^r b_2 \cdots b_m$, де $b_2 \in C_{p^{k_2}}$, …, $b_m \in C_{p^{k_m}}$. Однак $a_1 = a a_2^{-1} \cdots a_m^{-1}$, тому $g = a^r \cdot b$, де $b \in C_{p^{k_2}} \times \cdots \times C_{p^{k_m}}$. Отже, $G = H \cdot (C_{p^{k_2}} \times \cdots \times C_{p^{k_m}})$. З порівняння чисел $|G|$, $|H|$ і $|C_{p^{k_2}} \times \cdots \times C_{p^{k_m}}|$ випливає, що $G = H \times C_{p^{k_2}} \times \cdots \times C_{p^{k_m}}$. **19.** *Вказ.* Розгляньте розклад $G = H_{p_1} \times \cdots \times H_{p_k 1}$ у прямий добуток силовських $p$–підгруп і елементи $b_1 \in H_{p_1}, \dots, b_k \in H_{p_k}$ максимально можливих порядків. Тоді $b = b_1 \cdots b_k$ має порядок $|b_1| \cdots |b_k|$. З іншого боку, згідно із зад. 14.9 існує розклад $b = a^{n_1} \cdots a^{n_k}$, де $a^{n_i} \in H_{p_i}$. Тоді $|a^{n_i}| \leq |b_i|$ і $|a| = |a^{n_1}| \cdots |a^{n_k}| \leq |b_1| \cdots |b_k| = |b|$. Оскільки $a$ — елемент максимального порядку, то $|a| = |b|$ і $|a^{n_i}| = |b_i|$ для всіх $i$. Тому $\langle a \rangle \cap H_{p_i} = \langle a^{n_i} \rangle$ — максимальна циклічна підгрупа в $H_{p_i}$. **21.** $\mathbb{Z}$. **22.** a) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$; b) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$; c) $\mathbb{Z}_3$; d) $E$. **23.** 5.

## Література


1. *Ганюшкін О.Г.*, *Безущак О.О.* Теорія груп. — К.: ВПЦ Київський університет, 2005.

2. *Головина Л.И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. 3-е изд. — М.: Наука, 1979.

3. *Завало С.Т.* Курс алгебри. — К.: Вища щкола, 1985.

4. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.

5. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч. I: Основы алгебры. — М.: Физматлит, 2001.

6. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч. III: Основные структуры. — М.: Физматлит, 2001.

7. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. — М.: Наука, 1984.