Диференціальні рівняння
Задачі підвищеної складності

1. Диференціальні рівняння першого порядку

1.1. Рівняння з відокремлюваними змінними

1. Намалювати графік функції $y(t)$, якщо $y(0) = 0$, $\dot{y}(t) = 1 + \sin^2 y(t)$, $t \geq 0$.

2. Накресліть інтегральні лінії рівнянь:
а) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{|xy|}$; б) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{|x+y|}{x+y}$; в) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x+|x|}{y+|y|}$;

г) $\dfrac{dy}{dx} = \begin{cases} 0, & \text{при } y \neq x, \\ 1, & \text{при } y = x; \end{cases}$ д) $\dfrac{dy}{dx} = \begin{cases} 1, & \text{при } y \neq x, \\ 0, & \text{при } y = x; \end{cases}$

3. Знайти рівняння геометричного місця точок, яке заздалегідь містить всі точки максимуму і мінімуму розв'язків рівняння $y' = f(x,y)$. Те ж питання для точок перегину, якщо функція $f(x,y)$ диференційовна.

4. Зобразіть картину поведінки інтегральних кривих рівнянь:
а) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}$; б) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; в) $\dfrac{dy}{dx} = e^{\frac{1}{x}}$; г) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

д) $\dfrac{dy}{dx} = e^{\frac{1}{x}} \sin \dfrac{1}{x}$; е) $\dfrac{dy}{dx} = x^a \sin \dfrac{1}{x}$ – при різних значеннях a.
З'ясуйте картину поведінки цих інтегральних кривих при $x \to 0$.

5. Показати, що кожна інтегральна крива рівняння

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y^2+1}{x^4+1}}$$

має дві горизонтальні асимптоти.

6. Дослідити поведінку інтегральних кривих рівняння
$$y' = \sqrt{\frac{\ln(1+y)}{\sin x}}$$
в околі початку координат. Показати, що з кожної точки границі першого координатного кута виходить одна інтегральна крива, яка проходить всередині цього кута.

7. Нехай $f(y)$ неперервна при $a < y < b$ та $\varphi(x) \to c$ при $x \to +\infty$ $(a < < c < b)$ для деякого розв'язку $y = \varphi(x)$ рівняння $y' = f(y)$. Доведіть, що тоді $y = c$ є розв'язком цього рівняння.

8. Нехай $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\rho \in C(\mathbb{R})$, $\rho(x) \neq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Довести, що якщо $y(x)$ та $z(x)$ є непродовжуваними розв'язками задач Коші
$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = a; \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} z' = f(z)\rho(z), \\ z(0) = a; \end{cases}$$
відповідно, то $\bigcup\limits_{x \in D(y)} \{y(x)\} = \bigcup\limits_{x \in D(z)} \{z(x)\}$, де $D(y)$ - область визначення функції y.

9. Довести, що інтегральні криві рівняння
$$\left(2x\left(x^2 - axy + y^2\right) - y^2\sqrt{x^2+y^2}\right)dx +$$
$$+y\left(2\left(x^2 - axy + y^2\right) + x\sqrt{x^2+y^2}\right)dy = 0 \quad (|a| < 2)$$
є замкненими лініями, які охоплюють початок координат.

10. З'ясувати, при яких p, q рівняння $y' = ax^p + by^q$ є квазіоднорідним.

11. З'ясувати, під яким кутом інтегральні криві рівняння $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ перетинають промінь $y = kx$.

12. * Наближено побудувати інтегральні криві наступних рівнянь:

 а) $xyy' + x^2 = 2y^2$, б) $xy' = y + \sqrt{y^2 + \frac{y^3}{x}}$.

13. * Нехай $f(x) = \dfrac{4x}{3 - y(x)}$, де $y(x)$ – розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y'(1+x^2)(1-y) = 2xy(x^2+2), \\ y(1) = -2. \end{cases}$$

 Знайти найбільше значення $f(x)$.

14. При яких умовах на $a \in \mathbb{R}$, $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ для диференціального рівняння $\dot{x} = ax^{1/3} + f(x)$ має місце єдиність розв'язку задачі Коші?

15. Доведіть, що всі розв'язки рівняння $y' = f(y)$ з неперервною правою частиною монотонні.

16. Нехай f - неперервна в околі точки $y = c$, $f(c) = 0$ та як завгодно близько від $y = c$, як при $y < c$, так і при $y > c$, знайдуться значення y, при яких $f(y) > 0$, і знайдуться значення y, при яких $f(y) < 0$. Доведіть, що тоді через будь-яку точку (x_0, c) проходить єдиний розв'язок $y = c$ рівняння $y' = f(y)$. Навести приклад такої функції f.

17. ** Побудувати приклад неперервної на площині функції $f(x, y)$ такої, що будь-яка точка (x_0, y_0) є точкою неєдиності задачі Коші

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

18. ** Наведіть приклад рівняння $y' = f(y)$ з неперервною правою частиною, серед розв'язків якого знайдуться два, що володіють наступними властивостями: вони визначені для всіх x, монотонно зростають, а їх графіки мають єдину спільну точку.

19. ** Побудуйте приклад двох рівнянь $y' = f_1(y)$ і $y' = f_2(y)$ з неперервними невід'ємними правими частинами, для яких через кожну точку площини проходить єдина інтегральна крива і притому таких, що для рівняння $y' = \max\{f_1(y), f_2(y)\}$ ця єдиність не гарантується.

20. Нехай в рівнянні $xy' + ay = f(x)$ маємо $a = const > 0$, $f(x) \to b$ при $x \to 0$. Показати, що лише один розв'язок рівняння залишається обмеженим при $x \to 0$ і знайти границю цього розв'язку при $x \to 0$.

21. Нехай в рівнянні попередньої задачі $a = const < 0$, $f(x) \to b$ при $x \to 0$. Показати, що всі розв'язки цього рівняння мають одну і ту ж скінчену границю при $x \to 0$. Знайти цю границю.

22. Показати, що рівняння $\dfrac{dx}{dt} + ax = f(t)$, де $a > 0$, $|f(t)| \leq M$ при $-\infty < t < +\infty$ має єдиний обмежений при $-\infty < t < +\infty$ розв'язок. Показати,що знайдений розв'язок є періодичним, якщо функція $f(t)$ періодична.

23. Показати, що лише один розв'язок рівняння $xy' - (2x^2+1)y = x^2$ прямує до скінченої границі при $x \to \infty$ і знайти цю границю.

24. Нехай в рівнянні $\dfrac{dx}{dt} + a(t)x = f(t)$, $a(t) \geq c > 0$. Довести, що з обмеженості функції f на $[0; +\infty)$ випливає обмеженість будь-якого розв'язку цього рівняння на $[0; +\infty)$. Показати також, що якщо $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то кожний розв'язок цього рівняння прямує до нуля при $t \to \infty$.

25. Нехай в рівнянні попередньої задачі маємо $a(t) \geq c > 0$ і нехай $x_0(t)$ розв'язок з початковою умовою $x_0(0) = b$. Показати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\xi > 0$, що якщо змінити функцію $f(t)$ та число b менше ніж на ξ (тобто замінити їх на таку функцію $f_1(t)$ і число b_1, що $|f_1(t) - f(t)| < \xi$, $|b_1 - b| < \xi$), то розв'язок $x_0(t)$ зміниться при

$t \geq 0$ менше ніж на ε. Ця властивість називається стійкістю за постійно діючим збуренням.

26. Нехай $a(x)$, $f(x) \in C(\mathbb{R})$, $a(x) \geq 0$, $f(x) = o(a(x))$ при $x \to +\infty$ та $\int\limits_0^\infty a(x)dx = \infty$. Довести, що для кожного розв'язку $y(x)$ рівняння $y' + a(x)y = f(x)$ виконується $\lim\limits_{y\to+\infty} y(x) = 0$.

27. Нехай функції $p, q, r \in C([a,b])$, $p(a) = p(b) = 0$, $\forall\, x \in (a,b)$ $p(x) > 0$, $\forall\, x \in [a,b]$ $q(x) > 0$,
$$\int\limits_a^{a+\epsilon} \frac{ds}{p(s)} = \int\limits_{b-\epsilon}^{b} \frac{ds}{p(s)} = +\infty.$$
Довести:

1) всі розв'язки рівняння $p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x)$, що існують на (a,b), прямують до $\dfrac{r(b)}{q(b)}$ при $x \to b$;

2) серед цих розв'язків один прямує до $\dfrac{r(a)}{q(a)}$ при $x \to a$, інші при $x \to a$ необмежені.

28. Знайти періодичний розв'язок рівняння $y' = 2y\cos^2 x - \sin x$.

29. Нехай функції $a, b, f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняють умови $f \geq 0, f' \geq$ ≥ 0, $g > 0$, $g' > 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} a(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\infty} b(x) = B$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ $= \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ та справедлива рівність
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} + a(x)\frac{f(x)}{g(x)} = b(x).$$
Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

30. Розв'язати рівнянняМіндінга-Дарбу
$$M(x,y)dx + N(x,y)dy + R(x,y)(xdy - ydx) = 0,$$

де M, N – однорідні функції ступеня m, R – однорідна функція ступеня n.

31. Нехай $y_1(x)$, $y_2(x)$ – T-періодичні розв'язки рівняння $y' = y^2 + f(x)$, $f \in C(\mathbb{R})$. Довести, що $\int\limits_0^T (y_1(x) + y_2(x))dx = 0$.

32. Довести, що для будь-яких чотирьох часткових розв'язків рівняння Ріккаті має місце тотожність
$$\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} \equiv const.$$

33. Довести, що рівняння Ріккаті $y' = y^2 + p(x)y + q(x)$ з T-періодичними неперервними коефіцієнтами не може мати більше двох T-періодичних розв'язків. Навести приклад рівняння Ріккаті, що має рівно два періодичні розв'язки.

34. Знайти максимальний інтервал існування розв'язку задачі Коші

$$\begin{cases} y' = (x^2+y^2)e^{1-x^2-y^2}, \\ y(0)=0; \end{cases}$$

і збіжності пікарівських наближень, який гарантується теоремою Пікара.

35. Нехай

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 0, \ -\infty < y < +\infty, \\ 2x, \text{ якщо } 0 < x \le 1, \ -\infty < y < 0, \\ 2x - \dfrac{4y}{x}, \text{ якщо } 0 < x \le 1, \ 0 \le y \le x^2, \\ -2x, \text{ якщо } 0 < x \le 1, \ x^2 < y < +\infty. \end{cases}$$

Довести, що пікарівські наближення, побудовані для задачі Коші $\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(0)=0; \end{cases}$ не збігаються на жодному проміжку $[0,\epsilon]$.

36. Довести, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = \sin(xy)y - y^3, \\ y(0)=1; \end{cases}$$

існує для всіх $x \ge 0$.

37. Чи існує розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = x^2+y^2, \\ y(0)=0; \end{cases}$$

а) на $[-1;1]$?

б)* на $[-2;2]$?

38. Довести, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = x^3 - y^3, \\ y(x_0) = y_0; \end{cases}$$

існує на $[x_0; +\infty)$.

39. Показати, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \sin^2(y - x), \\ y(x_0) = y_0; \end{cases}$$

існує на $\mathbb{R}$.

40. Визначити максимальний інтервал існування розв'язку задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 4t^2, \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

41. Довести, що кожний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2 + t^4 + \cos x}$$

існує та обмежений на $\mathbb{R}$.

42. * При яких a кожний розв'язок наступних рівнянь продовжується на нескінченний інтервал $-\infty < x < +\infty$:

а) $y' = |y|^a$; б) $y' = (y^2 + e^x)^a$; в) $y' = |y|^{a-1} + \left(x|\sqrt[3]{y}|\right)^{2a}$?

43. * Нехай функція $f(k)$ неперервно диференційовна в околі точки k_0 і $y = k_0 x$ – розв'язок рівняння $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Показати, що:

1) якщо $f'(k_0) < 1$, то жодний з інших розв'язків не дотикається до прямої $y = k_0 x$ в початку координат;

2) якщо $f'(k_0) > 1$, то до цієї прямої дотикається нескінченно багато розв'язків.

44. а) Довести, що розв'язок рівняння $y' = xy + e^{-y}$ з довільною початковою умовою $y(x_0) = y_0$ існує при $x_0 \le x < +\infty$.

б)* Нехай на всій площині x, y функції $f(x, y)$ та $f'_y(x, y)$ неперервні і $f'_y(x, y) \le k(x)$, функція $k(x)$ неперервна. Довести, що розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$ з будь-якою початковою умовою $y(x_0) = y_0$ існує при $x_0 \le x < +\infty$.

45. Нехай $f(x, t) \in C(\mathbb{R}^2)$ періодична по t з періодом $T > 0$ функція. Довести, що якщо існує єдиний розв'язок рівняння $\dot{x} = f(x, t)$, що обмежений на всій осі, то він періодичний з періодом T.

46. Нехай $f(x, y)$ неперервна по x, y і при кожному x не зростає при зростанні y. Довести, що якщо два розв'язки рівняння $y' = f(x, y)$ задовольняють одній і тій самій початковій умові $y(x_0) = y_0$, то вони співпадають при $x \ge x_0$.

47. * (О.А. Олейник) Нехай $f(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$, існує $T > 0$ таке, що $f(x + T, y) \equiv f(x, y)$ та існують $y_1, \; y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 \neq y_2$ такі, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ $f(x, y_1) f(x, y_2) < 0$, функція f ліпшицева по y. Довести, що існує T-періодичний розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$.

48. * Довести твердження попередньої задачі без умови Ліпшиця.

49. * Довести теорему Осгуда: нехай функція $f(x, y)$ для будь-якої пари точок (x, y_1), (x, y_2) області G задовольняє умову

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le \Phi(|y_1 - y_2|),$$

де $\Phi(u) > 0$ при $0 < u \le c$, неперервна і така, що $\int\limits_{\varepsilon}^{c} \dfrac{du}{\Phi(u)} \to \infty$, коли $\varepsilon \to 0$. Довести, що через кожну точку (x_0, y_0) області G проходить не більше однієї інтегральної кривої рівняння $y' = f(x, y)$.

50. * Нехай в рівнянні $\dot{x} = f(t, x)$ $f \in C([a, +\infty) \times (c, d))$ і $\forall\ \xi \in (c, d)$ (можливо за виключенням зліченої кількості точок) $\exists\ t_\xi : \forall\ t \ge t_\xi$ або $f(t, \xi) > 0$, або $f(t, \xi) < 0$. Довести, що якщо функція $x : [a, +\infty) \to (c, d)$ є розв'язком цього рівняння, то існує границя $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$.

51. Нехай функція $f \in C([0; +\infty)$ і $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$. Визначимо

$$z(t) = \frac{e^{\int_0^t f(s)ds}}{\int\limits_0^t e^{\int_0^s f(\tau)d\tau} ds}\ .$$

Знайти $\lim\limits_{t\to\infty} z(t)$.

52. * Довести, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = x - y^2, \\ y(x_0) = y_0; \end{cases}$$

де $x_0,\ y_0 > 0$, існує на $[x_0; +\infty)$ і задовольняє умову $\lim\limits_{x\to\infty} (y(x) - \sqrt{x}) =$ $= 0$.

53. Нехай $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ і $\dfrac{\partial f}{\partial x} + f\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Довести, що f стала.

54. Нехай $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(x) > 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R}$ така, що при всіх $x \quad f'(x) > f(x)$. Для яких k існує N таке, що $f(x) > e^{kx}$ при $x > N$?

55. Нехай $f \in C^1([a;b])$, $f(a) = 0$ та, крім того, існує $\lambda > 0$ таке, що для всіх $x \in [a;b] \quad |f'(x)| \le \lambda |f(x)|$. Чи вірно, що $f(x) \equiv 0$ на $[a;b]$?

56. Довести нерівність Гронуолла-Беллмана: нехай $u(t) \ge 0$ та $f(t) \ge 0$ при $t \ge t_0$ та $u(t), f(t) \in C([t_0;+\infty))$, причому при $t \ge t_0$ виконується нерівність $u(t) \le C + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)u(\tau)d\tau$, де C – додатна стала. В такому випадку при $t \ge t_0$ маємо $u(t) \le C \exp \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau$.

57. Довести аналог леми Гронуолла-Беллмана: нехай $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t) \in C([a;b])$ та $\chi(t) > 0$ при $a \le t \le b$, причому $\varphi(t) \le \psi(t) + \int\limits_{a}^{t} \varphi(s)\chi(s)ds$, $a \le t < b$. Тоді $\varphi(t) \le \psi(t) + \int\limits_{a}^{t} \psi(s) \exp\left[\int\limits_{s}^{t} \chi(\tau)d\tau\right] \chi(s)ds$ при $a \le t \le b$.

58. Довести лему Біхарі: нехай $u(t) \ge 0$ і $f(t) \ge 0$ при $t \ge t_0$, причому $u(t), f(t) \in C([t_0, \infty))$ та має місце нерівність

$$u(t) \le c + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\Phi(u(s))ds,$$

де c – додатна стала та $\Phi(u)$ – додатна неперервна неспадна функція при $0 < u < \overline{u} \le \infty$, і нехай

$$\Psi(u) = \int\limits_{c}^{u} \frac{dv}{\Phi(v)} \quad (0 < u < \overline{u}).$$

Тоді, якщо

$$\int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds < \Psi(\overline{u}-0) \quad (t_0 \leq t \leq \infty),$$

то при $t_0 \leq t \leq \infty$ справедлива нерівність

$$u(t) \leq \Psi^{-1}\left[\int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds\right],$$

де $\Psi^{-1}(u)$ – функція, обернена до $\Psi(u)$.

59. Нехай задано функції $y, z, u \in C^1([x_0, b])$, причому $y(x_0) = z(x_0) = u(x_0) = y_0$, де точка (x_0, y_0) належить деякій області, в якій означена і неперервна функція $f = f(x, y)$. Нехай $\forall\ x \in [x_0, b)$

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad z'(x) > f(x, z(x)), \quad u'(x) \geq f(x, u(x)).$$

Довести, що $\forall\ x \in (x_0, b)$ $z(x) > y(x)$. Якщо, крім того, через будь-яку точку $(x, y(x))$ проходить єдина інтегральна крива $y(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$, то $\forall\ x \in [x_0, b)$ $u(x) \geq y(x)$. Показати, що умова єдиності істотна.

60. Нехай $a(t), b(t) > 0$ – неперервні на $[0; +\infty)$ функції, $u(t)$ – неперервна і $u^2(t) \leq a(t) + 2\int\limits_0^t b(s)u(s)ds,\ t \geq 0$. Показати, що $u(t) \leq \sqrt{\sup\limits_{s\in[0.t]} a(s)} + \int\limits_0^t b(s)ds, \quad t \geq 0.$

61. Знайдіть інтегруючий множник для лінійного рівняння, що записано у вигляді $dy - [a(x)y + b(x)]dx = 0$.

62. Нехай рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ має інтегруючий множник $\mu(x,y)$, після множення на який його ліва частина обертається у повний диференціал деякої функції $z(x,y)$. Доведіть, що за цих умов функція $\mu(x,y) \cdot f(z(x,y))$, де $f(z)$ довільна неперервна функція від z, що не обертається в 0, буде також інтегруючим множником цього рівняння.

63. Нехай $M(x,y)$ та $N(x,y)$ двічі неперервно диференційовані в прямокутнику $Q = \{(x,y) : a < x < b,\ c < y < d\}$, причому $N \neq 0$. Доведіть, що при цій умові для існування в Q неперервного інтегруючого множника $\mu \neq 0$ для рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, що залежить лише від x, необхідно і достатньо, аби в Q
$$N\Big(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\Big) \equiv \frac{\partial N}{\partial y}\Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big).$$

64. Доведіть, що якщо рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ з неперервно диференційованими коефіцієнтами $M(x,y)$, $N(x,y)$, які задовольняють умові $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$ і задані в однозв'язній області, володіє замкнутою інтегральною кривою, то всередині цієї кривої знайдеться принаймні одна точка (x_0, y_0), для якої $M(x_0,y_0) = N(x_0,y_0) = 0$.

65. Знайти інтегруючий множник рівняння $yg(xy)dx + xh(xy)dy = 0$.

66. При яких умовах рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ має інтегруючий множник у формі $\mu(x,y) = h(xy)$?

1.6. Різні задачі

67. Знайти всі $f \in C^2(\mathbb{R})$ такі, що для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$(f(x))^2 = \int\limits_0^x \big(f^2(t) + (f'(t))^2\big)dt + 2009.$$

68. Знайти найбільшу можливу кількість періодичних розв'язків, відмінних від константи, з попарно неспіввимірними періодами, яку може мати рівняння $y' + a(x)y = f(x)$, де $a(\cdot)$, $f(\cdot) \in C(\mathbb{R})$.

69. Довести, що рівняння Абеля $y' = y^3 + p_1(x)y^2 + p_2(x)y + p_3(x)$ з T-періодичними неперервними коефіцієнтами не може мати більше трьох T-періодичних розв'язків. Навести приклад рівняння Абеля, що має рівно три T-періодичних розв'язки.

70. (І. Фещенко) Чи може рівняння $y' = y^3 + f(x)$, де $f \in C(\mathbb{R})$, T-періодична, мати два різні T-періодичні розв'язки?

71. Нехай $f(x)$ – дійсна неперервна періодична функція, що визначена на всій числовій прямій. Чи вірно, що диференціальне рівняння $y' = (y^2 - 1)(y - f(x))$ має періодичний розв'язок, відмінний від сталої?

72. * Нехай $x = \varphi(t)$ – обмежений при $t \geq 0$ $(t \leq 0)$ розв'язок рівняння $\dfrac{dx}{dt} = f(x,t)$, де $f \in C(\mathbb{R}^2)$, $f(x, t+T) \equiv f(x,t)$ і задовольняє умови, що забезпечують єдиність розв'язку задачі Коші в $\mathbb{R}^2$. Довести, що тоді або $\varphi(\cdot)$ – T-періодичний, або $\varphi(\cdot)$ асимптотично наближається до деякого T-періодичного розв'язку при $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$.

73. Нехай $f, f'_y \in C(\mathbb{R}^2)$, $f'_y(x,y) > 0$ і $f(x+T,y) \equiv f(x,y)$. Довести, що

тоді рівняння $y' = f(x,y)$ не може мати більше одного T-періодичного розв'язку.

74. Знайти розв'язки рівняння $f'(x) + xf(-x) = P$, $P \in \mathbb{R}$.

75. * Нехай K – компактна підмножина півплощини $\{(x,y)|\ y > 0\}$. Довести, що існує точка $A \in \{(x,y)|\ y > 0\}$, яка володіє властивістю: будь-яку точку K можна з'єднати з A інтегральною кривою рівняння $y' = e^{x^2}\sqrt{\ln(1+|y|)}$, $x \in \mathbb{R}$.

76. * Задане рівняння $\dot{x} = f(x),\ f \in C(\mathbb{R})$. Довести, що для того, щоб для всіх $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ мала місце гранична рівність $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t,x_0) - x(t,y_0)| = 0$, достатньо виконання однієї з трьох умов:

1) $\exists\ a^* \in \mathbb{R}\ f(a^*) = 0$ та $f(a) > 0\ \forall\ a \in (-\infty, a^*)$, $f(a) < 0\ \forall\ a \in (a^*, +\infty)$;

2) $\forall\ a \in \mathbb{R}\ f(a) > 0,\ \lim\limits_{a\to+\infty} f(a) = 0$;

3) $\forall\ a \in \mathbb{R}\ f(a) < 0,\ \lim\limits_{a\to-\infty} f(a) = 0$.

Чи будуть ці умови і необхідними?

77. * Задане рівняння $\dot{x} = f(x),\ f \in C(\mathbb{R}_+)$. Довести, що для того, щоб для всіх $x_0, y_0 \in \mathbb{R}_+$ мала місце гранична рівність $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{x(t,x_0)}{x(t,y_0)} = 1$, достатньо виконання однієї з трьох умов:

1) $\exists\ a^* > 0\ f(a^*) = 0$ та $f(a) > 0\ \forall\ a \in (0, a^*)$, $f(a) < 0\ \forall\ a \in (a^*, +\infty)$;

2) $\forall\ a > 0\ f(a) > 0,\ \lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{f(a)}{a} = 0$;

3) $\forall\ a > 0\ f(a) < 0,\ \lim\limits_{a\to 0+} \dfrac{f(a)}{a} = 0$.

Чи будуть ці умови і необхідними?

78. Нехай $f \in C^{(1)}([0,\pi])$, $f(0) = f(\pi)$. Довести нерівність Віртінгера

$\int\limits_0^\pi f^2(x)dx \leq \int\limits_0^\pi (f'(x))^2 dx.$

79. Нехай $P(x,y), Q(x,y)$ – алгебраїчні многочлени степеня не більше ніж n і $y = \varphi(x)$ – розв'язок рівняння $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ на $[a,b]$, причому $Q(x,\varphi(x)) \neq 0$. Довести, що довільна пряма або дотикається до графіка функції $y = \varphi(x)$, або має з ним не більше ніж $n+1$ точку перетину.

80. Нехай $K(x,y) \in C([a,b]\times[a,b])$, $f,g \in C([a,b])$, $K,f,g > 0$. Припустимо, що

$$f(x) = \int\limits_a^b K(x,y)g(y)dy, \qquad g(x) = \int\limits_a^b K(x,y)f(y)dy.$$

Показати, що $f(x) = g(x),\ x \in [a,b]$.

2. Диференціальні рівняння вищих порядків та системи звичайних диференціальних рівнянь

2.1. Фазові портрети

81. Довести, що якщо особлива точка рівняння

$$(ax + by)dx + (mx + ny)dy = 0, \quad an \neq bm.$$

є центром, то це рівняння в повних диференціалах. Показати, що обернене твердження не вірне.

82. Довести, що якщо рівняння попередньої задачі не є рівнянням в повних диференціалах, але має інтегруючий множник, який неперервний в околі початку координат, то особлива точка – фокус (якщо $an \neq bm$).

83. * Намалювати розташування інтегральних кривих в околі початку координат для наступних рівнянь:

$$y' = \frac{xy}{x+y}; \qquad y' = \frac{xy}{y - x^2}; \qquad y' = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y};$$

$$y' = \frac{2xy}{y + x^2}; \qquad y' = \frac{y^2}{y + x^2}.$$

84. Нехай в рівнянні

$$y' = \frac{ax + by + p(x, y)}{cx + dy + q(x, y)}$$

функції p і q неперервно диференційовні в деякому околі точки $(0, 0)$, $p(0, 0) = p'_x(0, 0) = p'_y(0, 0) = q(0, 0) = q'_x(0, 0) = q'_y(0, 0) = 0$, рівняння не змінюється при заміні x на $-x$ (або y на $-y$), і корені характеристичного рівняння є суто уявними. Довести, що особлива точка $(0, 0)$ є центром.

85. * Намалювати розташування інтегральних кривих в околі особливих точок для наступних рівнянь:

$$y' = \frac{y(1-x)}{x(x+y-2)}; \qquad y' = \frac{1+y-x^2+y^2}{2xy};$$

$$y' = \frac{x^2+y^2-1}{-2xy}; \qquad y' = \frac{-\sin x}{\sin y}.$$

86. * Дослідити поведінку фазових траєкторій систем

1) $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - 3x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - x^2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 4x - 4x^3; \end{cases}$

в околі положень рівноваги, а також у всій фазовій площині.

87. Зобразити лінії рівня енергії рівняння Ньютона для даних потенціалів:

а) $\Pi(x) = \dfrac{kx^2}{2}$; б) $\Pi(x) = x^3 - x$.

88. Рівняння Ньютона з потенціалом $\Pi(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{c}{x^2}$, $c > 0$, $x > 0$ описує зміну відстані планет і комет від Сонця (задача Кеплера). Зобразити лінії рівня енергії для цієї задачі.

89. Дослідити фазові траєкторії системи $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^2 - x^4. \end{cases}$

90. В фазовій площині $(x, \dot{x})$ дослідити фазові траєкторії рівняння маятника $\ddot{x} + \sin x = 0$.

2.2. Існування, єдиність та продовжуваність розв'язків, їх обмеженість та періодичність

91. При яких $n \geq 1$ рівняння $y^{(n)} = f(x, y)$, де $f, f'_y \in C(\mathbb{R}^2)$, може мати серед своїх розв'язків дві функції: $y_1 = x$ та $y_2 = x^4$?

92. Чи може функція $x(t) = e^{-1/t}$ при $t > 0$, $x(0) = 0$ бути розв'язком диференціального рівняння $x^{(2008)} + a(t)x = 0$ при $t \geq 0$, де $a(t)$ – неперервна функція на $[0, +\infty)$?

93. При яких a кожний розв'язок системи

$$\begin{cases} y' = (y^2 + z^2 + 2)^{-a}, \\ z' = y(1 + z^2)^a; \end{cases}$$

продовжується на нескінченний інтервал $(-\infty, +\infty)$?

94. Дана система у векторному записі $y' = f(x, y)$, $f \in C(\mathbb{R}^{n+1})$. Нехай в області $|y| > b$ при всіх x виконується нерівність $(y, f(x, y)) \leq k(x)|y|^2$, де функція $k(x)$ неперервна. Довести, що розв'язок з будь-якою початковою умовою $y(x_0) = y_0$ існує при $x_0 \leq x < +\infty$.

95. Доведіть, що будь-який розв'язок рівняння $\ddot{x} + e^t x = 0$ обмежений на $\mathbb{R}_+$.

96. Нехай $y \in C^2(\mathbb{R}_+)$ задовольняє рівняння $y'' + y = -xg(x)y'$, де функція g невід'ємна та $g \in C(\mathbb{R}_+)$. Довести, що тоді $y(x)$ обмежена на $\mathbb{R}_+$.

97. Нехай $a(t)$, $f(t) \in C(\mathbb{R})$, $a \geq 1$, $f > 0$, $\int\limits_0^\infty f(\xi)d\xi = \infty$. Довести, що кожний розв'язок рівняння $\ddot{x}(t) + a(t)f(x(t)) = 0$ обмежений зверху при $t \to +\infty$.

98. Нехай $\dot{x} = f(t,x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $f(t,0) \equiv 0$ і відомо, що $\exists\, L > 0$ таке, що $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$: $\|x-y\| \geq 2 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$ $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq$ $\leq L\|x-y\| \ln \|x-y\|$. Чи буде розв'язок $x(t)$ продовжуваним на $[0;+\infty)$?

99. Розглянемо систему $\begin{cases} \dot{x} = xy - y, \\ \dot{y} = x^3 - x^2. \end{cases}$ Вказати всі початкові умови, для яких відповідні розв'язки обмежені.

100. Розглянемо рівняння $(p(x)y'')'' - (q(x)y')' + r(x)y = 0$. Нехай p, q, r додатні періодичні по x функції з періодом T. Скільки T-періодичних по x розв'язків може мати це рівняння?

101. Що можна сказати, якщо в умовах попередньої задачі ми маємо неоднорідне рівняння $(p(x)y'')'' - (q(x)y')' + r(x)y = f(x)$?

102. Знайти всі розв'язки $y = y(x)$ рівняння руху маятника $y'' + \sin y = 0$ такі, що $y(x) \to \pi$ при $x \to +\infty$.

103. Нехай для системи $\dot{x}(t) = f(t,x)$, $f \in C([0,+\infty) \times \mathbb{R}^n)$ існують функції $V = V(t,x)$ і $W = W(x)$ такі, що

1) $V(t,x) \geq W(x)$, $W(x) \to \infty$, $\|x\| \to \infty$;

2) для кожного розв'язку системи $x = x(t)$ функція $t \mapsto V(t, x(t))$ є незростаючою.

Довести, що тоді кожен розв'язок системи існує і обмежений на $[0,+\infty)$.

104. Нехай для рівняння $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)f(x) = 0$ з $p, q \in C^1([0,+\infty))$, $f \in C(\mathbb{R})$ виконані умови:

1) $\exists\, M > 0$ $\forall\, t \geq 0$ $0 < q(t) \leq M$;

2) $\forall\, t \geq 0\ p(t) \geq -\dfrac{\dot{q}(t)}{2q(t)}$;

3) $\int\limits_0^{\pm\infty} f(s)ds = +\infty$.

Тоді всі розв'язки рівняння існують і обмежені на $[0, +\infty)$ разом зі своїми похідними.

105. Нехай для рівняння $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$ з неперервними на $\mathbb{R}$ функціями f, g виконані умови:

1) $\forall\, x, y\ \ f(x, y) \geq 0$;

2) $G(x) := \int\limits_0^x g(s)ds > 0\ \forall\, x \neq 0$;

3) $G(x) \to \infty,\ \ |x| \to \infty$.

Тоді всі розв'язки рівняння існують і обмежені на $[0, +\infty)$ разом зі своїми похідними.

106. * Довести твердження (теорема Осгуда, див. задачу 49). Нехай функції $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$ в області G задовольняють співвідношенням

$$\left| f_i(x, \widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n) - f_i(x, \widetilde{\widetilde{y}}_1, \ldots, \widetilde{\widetilde{y}}_n) \right| \leq \varphi\left(\sum_{k=1}^n |\widetilde{y}_k - \widetilde{\widetilde{y}}_k| \right), \quad i = \overline{1, n},$$

де $\varphi(u)$ неперервна функція, яка приймає лише додатні значення при додатних u і, крім того,

$$\int\limits_\varepsilon^c \frac{du}{\varphi(u)} \to \infty,\ \varepsilon \to 0 \quad (c > 0).$$

Тоді існує не більше однієї інтегральної лінії системи

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = \overline{1, n};$$

що проходить через будь-яку точку області G.

107. Нехай функції $\varphi(\cdot)$ і $\psi(\cdot)$ неперервно диференційовні і лінійно незалежні на $I = (a, b)$, причому $W(x) = W[\varphi, \psi] \equiv 0$ на I. Довести:

а) існують $x_1, x_1' \in I$ такі, що $\varphi(x_1) = \psi(x_1') = 0$;

б) існує інтервал $I_0 \subset I$, на якому функції φ, ψ є лінійно залежними;

в)* існує $\alpha \in I$ така, що $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \psi(\alpha) = \psi'(\alpha) = 0$.

Навести приклад таких функцій.

108. Нехай $f_1, ..., f_n \in C^{(n-1)}(a, b)$ і $W[f_1, ..., f_n] = 0$ на (a, b). Довести, що існує підінтервал $(a_1, b_1) \subset (a, b)$, на якому ці функції є лінійно залежними.

109. Довести, що якщо лінійне однорідне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною незалежної змінної, то лише за формулою $t = c \int p_n(x)^{\frac{1}{n}} dx$.

110. Відомо, що два часткові розв'язки $u(x)$ і $v(x)$ рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ задовольняють умові $u(x)v(x) \equiv 1$. Знайти рівняння, що пов'язує коефіцієнти $p(x)$ та $q(x)$.

111. При якому μ частковий розв'язок рівняння $\dfrac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx}\right] + \mu y = 0$ є поліномом третього степеня?

112. При яких a і b кожний розв'язок рівняння $y'' + ay' + by = 0$ задовольняє співвідношенню $y = o(e^{-x})$ при $x \to +\infty$?

113. Для заданого $b > 0$ підібрати таке a, при якому розв'язок рівняння $y'' + ay' + by = 0$ з початковими умовами $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ якомога швидше прямує до нуля при $x \to +\infty$.

114. * Нехай y та z розв'язки рівнянь $y'' + q(x)y = 0$ та $z'' + Q(x)z = 0$ зі співпадаючими початковими умовами $y(x_0) = z(x_0)$, $y'(x_0) = z'(x_0)$, і на інтервалі (x_0, x_1) маємо $Q(x) > q(x)$, $y(x) > 0$, $z(x) > 0$. Довести, що на цьому інтервалі відношення $z(x)/y(x)$ спадає.

115. * Дано рівняння $y'' + ay' + by = f(x)$, причому $|f(x)| \le m$, $x \in \mathbb{R}$, а корені характеристичного рівняння $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Знайти розв'язок, обмежений при $-\infty < x < \infty$. Показати, що:

    а) всі інші розв'язки наближаються до цього розв'язку при $x \to +\infty$;

    б) якщо $f(x)$ періодична, то знайдений розв'язок також періодичний.

116. Нехай на деякому інтервалі $I \subset \mathbb{R}$ $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння $y'' = f(x)y$, де $f(x) \in C(\mathbb{R})$. Припустимо, що $y_1(x) > 0$, $y_2(x) > 0$ $\forall\, x \in I$. Довести, що існує така додатна константа C, що на I функція $z(x) = C\sqrt{y_1(x)y_2(x)}$ задовольняє рівнянню $z'' + \dfrac{1}{z^3} = f(x)z$.

117. Знайти всі розв'язки лінійного однорідного рівняння

$$(3x^2 + x - 1)y'' - (9x^2 + 9x - 2)y' + (18x + 3)y = 0.$$

118. Нехай $y = y(x)$ є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння

$$(3x^2 + x - 1)y'' - (9x^2 + 9x - 2)y' + (18x + 3)y = 6(6x + 1)$$

причому $y(0) = 1$ та $(y(-1)-2)(y(1)-6) = 1$. Знайти такі a, b, $c \in \mathbb{Z}$, що $(y(-2)-a)(y(2)-b) = c$.

119. Знайти всі розв'язки рівняння $y'(x) = ay(x) + by(c-x)$, що існують при $-\infty < x < +\infty$ (a, b і c - сталі).

120. (І. Фещенко) Нехай f – многочлен, причому для довільних x справедлива нерівність $f^{(n)}(x) + a_1 f^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}f'(x) + a_n f(x) \geq 0$. Довести, що якщо всі корені рівняння $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ дійсні, то $f(x) \geq 0$.

121. * Заміною незалежної змінної $t = \varphi(x)$ звести рівняння $\dfrac{d^2y}{dx^2} \pm \dfrac{y}{(\psi(x))^4} = 0$ до вигляду $\dfrac{d^2y}{dt^2} + b(t)\dfrac{dy}{dt} \pm y = 0$, потім позбавитися від першої похідної заміною $y = a(t)u$. (Це перетворення називається перетворенням Ліувілля. В багатьох випадках воно дозволяє звести рівняння $y'' + q(x)y = 0$ до рівняння аналогічного виду, але з "майже постійним"на $(t_0, +\infty)$ коефіцієнтом при y. Це полегшує дослідження асимптотичної поведінки розв'язку при $x \to \infty$.)

122. ** Нехай $|f(t)| \leq \dfrac{c}{t^{1+\alpha}}$ при $t \in [t_0, +\infty)$, де константи $c, \alpha > 0$. Тоді

1) рівняння $u'' + (1 + f(t))u = 0$ має два таких лінійно незалежних розв'язки, що при $t \to +\infty$

$$u_1(t) = \cos t + O\Big(\frac{1}{t^\alpha}\Big), \quad u_2(t) = \sin t + O\Big(\frac{1}{t^\alpha}\Big);$$

2) рівняння $u'' - (1 - f(t))u = 0$ має два таких лінійно незалежних розв'язка, що при $t \to +\infty$

$$u_1(t) = e^t\Big(1 + O\Big(\frac{1}{t^\alpha}\Big)\Big), \quad u_2(t) = e^{-t}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{t^\alpha}\Big)\Big).$$

123. Користуючись перетворенням Ліувілля, дослідити асимптотичну поведінку розв'язків рівнянь при $x \to +\infty$

1) $y'' + x^4 y = 0$; 2) $y'' - x^2 y = 0$; 3) $y'' + x^2 y = 0$;

4) $y'' + e^{2x} y = 0$; 5) $xy'' - y = 0$; 6) $y'' - xy = 0$;

7) $xy'' + 2y' + y = 0$; 8) $y'' - 2(x-1)y' + x^2 y = 0$;

9)* $y'' + (x^4+1)y = 0$; 10)* $(x^2+1)y'' - y = 0$; 11)* $x^2 y'' + y \ln^2 x = 0$.

124. * Доведіть, що існує єдине значення параметру a, при якому розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - e^t x(t) = 0, \\ x(0) = 1, \ \dot{x}(0) = a; \end{cases}$$

прямує до нуля при $t \to +\infty$.

125. Розв'язати рівняння

$$(2x^2 - x - 1)y'' - (4x^3 + x - 2)y' + (4x^3 + 2x^2 - 2x + 2)y = 0.$$

126. * (І. Фещенко) Показати, що рівняння

$$y - f(x)y' + \left(\frac{1}{n}\, xf(x) - \frac{x^2}{n(n+1)}\right) y'' = 0$$

інтегрується в квадратурах.

127. Нехай A – множина чисел $a \in \mathbb{R}$, при яких система $\begin{cases} \dot{x} = x + ay, \\ \dot{y} = ay; \end{cases}$ має розв'язок $(x(t), y(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$. Знайти A і для кожного $a \in A$ вказати множину початкових умов, для яких $(x(t), y(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$.

128. Нехай $x_1(t)$, $x_2(t)$ – розв'язки системи диференціальних рівнянь $\begin{cases} \dot{x}_1 = (t\cos t + \sin t)x_1, \\ \dot{x}_2 = -(t\cos t + \sin t)x_2. \end{cases}$

Позначимо $\omega(x) = \varlimsup\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln\|x(t)\|}{t}$, де $\|x(t)\| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$.

Знайти множину значень функції $\omega(x)$.

129. Нехай $X(t)$ – фундаментальна матриця розв'язків системи $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x$ (де матриця $A(t)$ неперервно залежить від t). Довести, що матриця $X(t)$ є ортогональною в будь-який момент часу тоді і тільки тоді, коли матриця $A(t)$ є кососиметричною в будь-який момент часу.

130. Оцінити зверху і знизу відстань між двома сусідніми нулями будь-якого тотожно не рівного нулеві розв'язку наступних рівнянь на заданому відрізку:

а) $y'' + 2xy = 0, \quad 20 \le x \le 45;$

б) $xy'' + y = 0, \quad 25 \le x \le 100;$

в) $y'' - 2xy' + (x+1)^2 y = 0, \quad 4 \le x \le 19;$

г) $y'' - 2e^x a y' + e^{2x} y = 0, \quad 2 \le x \le 6.$

131. Довести, що будь-який розв'язок рівняння $y'' + xy = 0$ на відрізку $-25 \le x \le 25$ має не менше

а) 15 нулів;

б)* 21 нуля.

132. Покажіть, що при необмеженому зростанні x послідовні нулі будь-якого ненульового розв'язку рівняння $y'' + xy = 0$ необмежено зближуються.

133. Нехай x_1, x_2, ... – розташовані в порядку зростання послідовні нулі розв'язку рівняння $y'' + q(x)y = 0$, де $q(x) > 0$; при $x_1 \le x < \infty$ функція $q(x)$ неперервна і зростає. Довести, що $x_{n+1} - x_n < x_n - x_{n-1}$ (тобто відстань між сусідніми нулями спадає).

134. Нехай в рівнянні $y'' + q(x)y = 0$ функція $q(x) > 0$ і x_1, x_2 – послідовні нулі розв'язку $y = y(x)$ цього рівняння. Нехай також функція $q(x)$ зростає на $[x_1, x_2]$. Довести, що $|y'(x_2)| \ge |y'(x_1)|$.

135. Довести, що якщо в умовах задачі 129 $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = C$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}- -x_n) = \dfrac{\pi}{\sqrt{C}}$.

136. Нехай виконані умови задачі 129 і нехай $b_n = \max\limits_{x_n \le x \le x_{n+1}} |y(x)|$. Довести, що $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$.

137. Нехай в задачі 131 границя C скінчена. Довести, що $b_n \to B > 0$ при $n \to \infty$ (в позначеннях задачі 132).

138. * Нехай $q(t) \in C((0;+\infty) \to \mathbb{R})$. Довести, що коли $\varliminf\limits_{t\to\infty} t^2 q(t) > 1/4$, то кожен розв'язок рівняння $\ddot{x} + q(t)x = 0$ має безліч нулів на $(0;+\infty)$. Якщо ж $\varlimsup\limits_{t\to\infty} t^2 q(t) < 1/4$, то на півосі $(0;+\infty)$ множина нулів кожного розв'язку рівняння обмежена (теорема Кнезера).

139. ** Нехай крайова задача

$$\begin{cases} y'' + q(t)y = 0, \\ y(0) = y(1) = 0; \end{cases}$$

де $q \in C([0;1])$, $q(t) > 0$ на $[0,1]$ має нетривіальний розв'язок. Довести, що:

а) $\int\limits_0^1 q(t)dt > 4$;

б) $\max\limits_{x\in[0.1]} q(x) \geq \pi^2$;

в) $\displaystyle\int\limits_0^1 q(t)dt \geq \pi\sqrt{\min\limits_{x\in[0.1]} q(x)}.$

140. Нехай x_1, x_2, a, $b \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, $q \in C([x_1, x_2])$, $q(x) \leq 0$, $x \in [x_1, x_2]$. Довести, що існує єдиний розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} y'' + q(t)y = 0, \\ y(x_1) = a, \ y(x_2) = b. \end{cases}$$

141. Довести, що в умовах попередньої задачі розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} y'' + q(t)y = 0, \\ y(x_1) = a, \ y(x_2) = 0. \end{cases}$$

монотонний.

142. Функція $f(x) \in C^2((a;b)) \cap C([a;b])$ задовольняє рівнянню $f'' = e^x f$ і умовам $f(a) = f(b) = 0$. Знайти $f(x)$.

143. При яких a крайова задача $y'' + ay = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ не має розв'язків, крім тривіального?

144. * Побудувати функції Гріна для наступних крайових задач:

1) $y'' + y = f(x)$, $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$;

2) $y'' = f(x)$, $y(0) = 0$, $y(x)$ обмежене при $x \to +\infty$;

3) $y'' + y' = f(x)$, $y'(0) = 0$, $y(+\infty) = 0$;

4) $xy'' + y' = f(x)$, $y(1) = 0$, $y(x)$ обмежене при $x \to +\infty$;

5) $y'' + 4y' + 3y = f(x)$, $y(0) = 0$, $y(x) = O(e^{-2x})$, $x \to +\infty$;

6) $x^2y'' + xy' - y = f(x)$, $y(1) = 0$, $y(x)$ обмежене при $x \to +\infty$;

7) $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x)$, $y(0)$ обмежене, $y(1) = 0$;

8) $y'' - y = f(x)$, $y(x)$ обмежене при $x \to \pm\infty$;

9) $x^2y'' - 2y = f(x)$, $y(x)$ обмежене при $x \to 0$ і при $x \to +\infty$.

145. При яких a існує функція Гріна крайової задачі $y''+ay = f(x)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

146. Оцінити знизу і зверху розв'язок задачі $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x)$, $y(x)$ обмежений при $x \to 0$ та $x \to \infty$ і його першу похідну, якщо відомо, що $0 \le f(x) \le m$.

2.6. Стійкість

147. Нехай для розв'язку $\eta(t)$, $t \in (a, +\infty)$ системи диференціальних рівнянь з неперервною правою частиною і властивістю єдиності розв'язку задачі Коші, виконується означення стійкості для фіксованого $t_0 \in (a, +\infty)$. Довести, що $\eta(\cdot)$ – стійкий.

148. Довести, що для скалярного рівняння $\dot{x} = f(t, x)$, $f(t, 0) = 0$ з неперервною на $(a, +\infty) \times \mathbb{R}$ правою частиною і властивістю єдиності розв'язку задачі Коші з того, що

$$\forall\, t_0 > a\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x_0 \in B_\delta(0)\ \ \lim_{t\to\infty} x(t, t_0, x_0) = 0$$

випливає стійкість нульового розв'язку.

На прикладі системи

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{t} - t^2 x y^2, \\ \dot{y} = -\dfrac{y}{t}, \quad t \geq 1; \end{cases}$$

показати, що для систем це твердження не має місця.

149. Нехай для скалярного рівняння $\dot{x} = f(t, x)$ з неперервною правою частиною і властивістю єдиності розв'язку задачі Коші для двох його розв'язків $x = x_1(t)$, $t \geq 0$ і $x = x_2(t)$, $t \geq 0$ існує одна і та сама скінчена границя при $t \to +\infty$. Довести, що будь-який розв'язок $x = x(t)$ цього рівняння з $x(0) \in (x_1(0), x_2(0))$ є стійким.

150. Покажіть, що якщо всі розв'язки системи $\dot{x} = f(t, x)$ з неперервною правою частиною і властивістю єдиності розв'язку задачі Коші, для яких $\|x(t_0)\| < M$, рівномірно прямують до нуля при $t \to +\infty$, то всі розв'язки, для яких виконана нерівність $\|x(t_0)\| < M$, є стійкими.

151. Визначити область асимптотичної стійкості для систем:

$$1)\ \begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y, \\ \dot{y} = \beta x - y + \alpha z, \\ \dot{z} = \beta y - z; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y + \beta z, \\ \dot{y} = -\alpha x - y + \alpha z, \\ \dot{z} = -\beta x - \alpha y - z; \end{cases}$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

152. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи, залежної від параметра λ, при $\lambda \leq 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - z + \lambda \sin x, \\ \dot{y} = z - x + \lambda(\sqrt[3]{1 + 3y} - \cos z), \\ \dot{z} = y - z + \ln(1 + \lambda z). \end{cases}$$

153. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок наступних систем

$$1)\ \begin{cases} \dot{x} = -x(y^2 + z^2), \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \dot{x} = y^2 + z^2, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y. \end{cases}$$

154. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^3 + by, \\ \dot{y} = cx + dy^5; \end{cases}$$

в залежності від значень параметрів a, b, c, d.

155. Знайти положення рівноваги рівняння $\ddot{x} + \dot{x}^3 \sin x = 0$ і визначити, чи є вони стійкими.

156. Довести, що коли в системі рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f(x); \end{cases}$$

функція f така, що $f(0) = 0$, $xf(x) > 0$, $x \neq 0$, то положення рівноваги цієї системи стійке.

157. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок наступних систем

$$1) \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = y - x^3; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2, \\ \dot{y} = 2xy. \end{cases}$$

158. Довести стійкість нульового розв'язку системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -f_1(x) - f_2(y), \\ \dot{y} = f_3(x) - f_4(y); \end{cases}$$

де $\mathrm{sign} f_i(z) = \mathrm{sign} z$, $i = \overline{1,4}$.

159. Нехай положення рівноваги системи $\dot{x} = Ax$ та $\dot{y} = By$, де A, B - сталі матриці, стійке за Ляпуновим. Чи можна стверджувати те саме відносно системи $\dot{z} = (A + B)z$?

160. * Довести, що якщо $y \equiv 0$ асимптотично стійкий за Ляпуновим розв'язок лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$, то тоді $a_k a_{k+3} < a_{k+1} a_{k+2}$, $k = \overline{0, n-3}$.

161. Нехай $x \in \mathbb{R}^n$, A стала матриця $n \times n$. Довести, що із стійкості системи $\dot{x} = Ax$ випливає стійкість системи $\dot{y} = [A + B(t)]y$ при $B(t) \in C([t_0; +\infty))$ і $\int\limits_{t_0}^{\infty} \|B(\tau)\| d\tau < \infty$.

162. * Нехай $x \in \mathbb{R}^n$, A стала матриця $n \times n$. Довести, що із асимптотичної стійкості системи $\dot{x} = Ax$ випливає асимптотична стійкість системи $\dot{y} = [A + B(t)]y$ при $B(t) \in C([t_0; +\infty))$ і $B(t) \to 0$, $t \to \infty$.

163. Нехай $x \in \mathbb{R}^n$, A стала $n \times n$ матриця, система $\dot{x} = Ax$ асимптотично стійка, а система $\dot{y} = (A+B(t))y+f(t)$ така, що $B(\cdot), f(\cdot) \in C([t_0, +\infty))$ і виконується одна з двох умов:

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \|B(t)\|dt < \infty, \quad f(t) \to 0, \ t \to \infty$$

$$B(t) \to 0, \ t \to \infty, \quad \int\limits_{t_0}^{\infty} \|f(t)\|dt < \infty$$

Довести, що тоді всі розв'язки $y(t)$ мають границю $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = 0$.

164. Довести, що система з поліноміальними коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + ... + A_m)x$$

де A_k, $k = 0, 1, ..., m$ - постійні $n \times n$ матриці, є асимптотично стійкою, якщо всі корені рівняння $det(A_0 - \lambda E) = 0$ мають від'ємні дійсні частини.

165. Вказати достатні умови асимптотичної стійкості системи

$$\begin{cases} \dot{x} = (a + \alpha t)x + (b + \beta t)y, \\ \dot{y} = (c + \gamma t)x + (d + \delta t)y. \end{cases}$$

166. Довести, що якщо $a > 0$ і $\int\limits_0^\infty |b(t)|dt < \infty$, то всі розв'язки рівняння $\ddot{x} + (a + b(t))x = 0$ обмежені на $[0, +\infty)$ разом зі своїми похідними.

167. Нехай система $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$ стійка. Довести стійкість тривіального розв'язку системи $\dot{x} = Ax + f(t, x)$ у випадку, коли $f(t, x) \in$ $\in C([0; +\infty) \times B_r^n(0) \to \mathbb{R}^n)$, $\|f(t, x)\| \le g(t)\|x\|$, $\int\limits_0^\infty g(t)dt < \infty$.

168. * Довести, що для будь-якого розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь $\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \in C([t_0, \infty))$ при $t_0 \le t \le \infty$ справедливі нерівності:

$$\|x(t_0)\| e^{-\int\limits_{t_0}^{t} \|A(s)\| ds} \le \|x(t)\| \le \|x(t_0)\| e^{\int\limits_{t_0}^{t} \|A(s)\| ds}.$$

Якщо, крім того, $\int\limits_{t_0}^{\infty} \|A(s)\| ds < \infty$, то для кожного розв'язку $x(t)$ існує $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$.

169. Довести, що якщо $\int\limits_{t_0}^{\infty} \|A(s) + A^T(s)\| ds < \infty$, то всі розв'язки лінійної системи диференціальних рівнянь $\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \in C([t_0, \infty))$ є обмеженими на $[t_0, +\infty)$.

170. Нехай $A(t)$ – неперервна матриця, $\lambda(t)$ і $\Lambda(t)$ – найменше та найбільше власне число симетричної матриці $\dfrac{1}{2}\,(A(t) + A^T(t))$. Показати, що $\lambda(t)$ і $\Lambda(t)$ неперервні.

171. Довести нерівність Важевського: для будь-якого розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь $\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \in C([t_0, \infty))$ при $t_0 \le t \le \infty$ справедлива нерівність

$$\|x(t_0)\| e^{\int\limits_{t_0}^{t} \lambda(s) ds} \le \|x(t)\| \le \|x(t_0)\| e^{\int\limits_{t_0}^{t} \Lambda(s) ds},$$

де $\|x(t)\|$ – норма вектора $x(t)$, $\lambda(t)$ і $\Lambda(t)$ – найменше та найбільше власне число симетричної матриці $A^H(t) = \dfrac{1}{2}\,(A(t) + A^T(t))$.

172. Довести, що для будь-якого розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь $\dot{x} = A(t)x, \quad A(\cdot) = ((a_{ij}(\cdot))) \in C([t_0, \infty))$, при $t_0 \le t \le \infty$ справедлива нерівність

$$\|x(t_0)\| e^{\int\limits_{t_0}^{t} r(s) ds} \le \|x(t)\| \le \|x(t_0)\| e^{\int\limits_{t_0}^{t} R(s) ds},$$

де

$$r(t) = \min_{1\le i\le n}\Big(a_{ii}(t) - \sum_{j\ne i}\frac{|a_{ij}(t)| + |a_{ji}(t)|}{2}\Big)$$

$$R(t) = \max_{1\le i\le n}\Big(a_{ii}(t) + \sum_{j\ne i}\frac{|a_{ij}(t)| + |a_{ji}(t)|}{2}\Big)$$

173. Дослідити на стійкість систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -x\sin^2 t + (a + 2b/t)y, \\ \dot{y} = -ax - y\cos^2 t; \end{cases}$$

де $a, b \in \mathbb{R}$.

174. Нехай для системи $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$ існує функція $V \in C^1(\|x\| < r)$ така, що для її похідної в силу системи справедлива рівність

$$\dot{V}(x) = \alpha V(x) + W(x),$$

де $\alpha > 0$, W – знакостала і для будь-якого $\delta > 0$ існує точка x_0, $\|x_0\| < \delta$ така, що $V(x_0)W(x_0) > 0$. Довести, що тоді тривіальний розв'язок системи є нестійким.

175. Довести, що періодичний відмінний від константи розв'язок автономної системи диференціальних рівнянь не може бути асимптотично стійким.

176. Побудувати приклад системи $\dot{y} = f(x, y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ лише з одним стійким розв'язком, для якої, проте, розв'язок з будь-якою початковою умовою існує, єдиний і обмежений для всіх x.

177. Нехай диференціальне рівняння $y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$ має розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, визначені на $\mathbb{R}$ і такі, що $y_1^2(x) + y_2^2(x) + y_3^2(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$. Нехай $f(x) = (y_1'(x))^2 + (y_2'(x))^2 + (y_3'(x))^2$. Знайти константи A та B такі, щоб $f(x)$ була розв'язком наступного диференціального рівняння $y' + Ap(x)y = Br(x)$.

178. Нехай $f \in C^{(2)}([0, +\infty))$ і $|f''(x) + 2xf'(x) + (x^2 + 1)f(x)| \leq 1,\ x \geq 0$. Довести, що $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

179. Довести, що рівняння $y'' + (xe^{-x} + 1)y' + e^{-x}y = 0$, $y'' + e^x y' + xy = 1$ не мають спільних розв'язків.

180. Чи може функція $x^2 \sin x$ на інтервалі $(-a, a)$ бути розв'язком рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ з коефіцієнтами, неперервними на цьому інтервалі?

181. Знайти всі розв'язки систем диференціальних рівнянь

$$1)\ \begin{cases} \ddot{y} + \dfrac{\dot{y}^2}{y} = \dot{x} + \dfrac{x\dot{y}}{y}, \\ \dot{x}y + x\dot{y} = 1; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \ddot{x} - \dfrac{2}{y}\ \dot{x}\ \dot{y} = 0, \\ \dot{y} + \dfrac{1}{y}\ (\dot{y}^2 - \dot{x}^2) = 0. \end{cases}$$

182. При яких n існує рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, у якого $f \in C(\mathbb{R}^{n+1})$ і будь-який його розв'язок $y(x)$, визначений на інтервалі I, задовольняє нерівності $y\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \dfrac{y(x_1) + y(x_2)}{2}$ при всіх $x_1, x_2 \in I$.

183. Чи існує функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, що має неперервні часткові похідні першого порядку, але не має жодної часткової похідної другого порядку?

184. Нехай $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, причому в довільній точці $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ функція f має часткові похідні всіх порядків. Чи вірно, що f неперервна на $\mathbb{R}^2$?

185. Знайти похідні від повних еліптичних інтегралів

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\, d\varphi \quad (0 < k < 1).$$

Виразити їх через функції $E(k)$ і $F(K)$, довести формули

а) $\int_0^k F(s) s ds = E(k) - (1 - k^2) F(k)$;

б) $\displaystyle\int_0^k E(s) s ds = \frac{1}{3}\left[(1 + k^2) E(k) - (1 - k^2) F(k)\right].$

Показати, що $E(k)$ задовольняє диференціальному рівнянню

$$E''(k) + \frac{1}{k}\, E'(k) + \frac{E(k)}{1 - k^2} = 0.$$

186. Довести, що функція Бесселя цілого індексу n

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

задовольняє рівняння Бесселя

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

187. Довести, що многочлен Ерміта $H_m(t) = (-1)^m e^{t^2} \dfrac{d^m e^{-t^2}}{dt^m}$, $m \in \mathbb{N}$ є розв'язком рівняння $\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2mx = 0$.

188. Довести, що многочлен Лежандра $P_m(t) = \dfrac{1}{2^m m!} \dfrac{d^m (t^2 - 1)^m}{dt^m}$ є розв'язком рівняння $(1 - t^2)\ddot{x} - 2t\dot{x} + m(m + 1)x = 0$.

189. Довести, що многочлен Чебишева $T_m(t) = \cos(m \cdot \arccos\ t)$ є розв'язком рівняння $(1-t^2)\ddot{x} - t\dot{x} + m^2 x = 0$.

190. ** Знайти всі послідовності $a_0, a_1, \ldots, a_n$ дійсних чисел таких, що $a_0 \neq 0$ і якщо $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n разів диференційовна і $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n) = 0$ при $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, то існує точка $\xi \in (x_0, x_n)$ така, що $a_0 f(\xi) + a_1 f'(\xi) + \ldots a_n f^{(n)}(\xi) = 0$.

191. ** Навести приклад того, що теорема Пікара не має місця для нескінченної (зліченної) системи диференціальних рівнянь. Запропонувати якісь достатні умови для існування і для єдиності розв'язку задачі Коші для нескінченної системи рівнянь з нескінченним числом шуканих функцій $\dfrac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, ...)$, $i = 1, 2, ...$.

192. Нехай $f \in C^1(\mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto (0, +\infty))$ і $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 0$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Довести, що $\forall\, T > 0$ знайдеться розв'язок рівняння $\dfrac{dz}{dt} = izf(z)$, що є періодичним з періодом T.

193. Нехай $J(\lambda)$ - $n \times n$ клітина Жордана з власним значенням λ і $f(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$ - неперервна T - періодична вектор-функція. Довести, що система

$$\dot{y} = J(\lambda)y + e^{\lambda t} f(t)$$

має розв'язок виду $y = e^{\lambda t}\varphi(t)$, де $\varphi(t) - T$ - періодична вектор-функція тоді і лише тоді, коли $\int\limits_0^T f_n(t)dt = 0$.

194. Нехай $A(t)$ – неперервна на $[0, +\infty)$ матриця $n \times n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ - множина початкових значень x_0 таких, що розв'язок задачі Коші $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)x, \\ x(0) = x_0; \end{cases}$

обмежений на $[0, +\infty)$. Довести, що B є підпростором і якщо $\forall\ f \in$ $\in C([0, +\infty))$ система $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$ має обмежений розв'язок, то $\forall\ f \in C([0, +\infty))$ існує єдиний розв'язок системи $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$ такий, що $x(0) \in B^{\perp}$ і $x(t)$ обмежений на $[0, +\infty)$.

195. Довести, що система $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y^2 - xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^4 - x^3 y; \end{cases}$ не має періодичних розв'язків, відмінних від сталих.

196. Довести, що система $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x^4 - x^3 y + y^4, \\ \dfrac{dy}{dt} = ax^4 + bx^2 y^2 + cxy^3; \end{cases}$ не має замкнених фазових траєкторій, що охоплюють початок координат.

197. Чи може n - вимірна система $\dot{x}(t) = f(t, x)$, $f(t + T, x) \equiv f(t, x)$ мати нетривіальний періодичний розв'язок з періодом τ, раціонально неспіввимірним з T (тобто $\dfrac{T}{\tau}$ – ірраціональне)?

198. Дослідити існування граничного циклу та зобразити поведінку фазових траєкторій:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y(x^2 + y^2 - 1); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y + x(x^2 + y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + y(x^2 + y^2). \end{cases}$

199. На фазовій площині $(x, \dot{x})$ дослідити поведінку траєкторій рівняння Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x},$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр.

200. Дослідити існування граничного циклу та зобразити поведінку фазових

траєкторій системи $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x + x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y + y^3. \end{cases}$

Відповіді та вказівки

1. Дослідити $y(t)$ на монотонність та опуклість.

2. Скористатись методом ізоклін.

3. <u>Відповідь:</u> $f(x,y)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}+f\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$.

4. Скористатись властивостями інтегралу зі змінною верхньою межею.

5. Відокремити змінні та проаналізувати невласні інтеграли.

6. Відокремити змінні та проаналізувати невласні інтеграли.

7. Довести, що $f(c)=0$.

8. Зробити заміну незалежної змінної.

9. Перейти до полярних координат та довести періодичність функції $r = r(\varphi)$.

10. <u>Відповідь:</u> $p=q(p+1)$.

11. <u>Відповідь:</u> $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{f(k)-k}{1+kf(k)}$.

12. Скористатись попередньою задачею.

13. Відокремити змінні та проінтегрувати рівняння.

14. Звести задачу до аналізу невласного інтеграла $\int\limits_0^x \dfrac{ds}{as^{\frac{1}{3}}+f(s)}$.

15. Довести, що якщо для розв'язку $y=y(x)$ виконується $y(x_1)=y(x_2)$, то функція $y(x)$ є сталою на $[x_1,x_2]$.

16. Скористатися попередньою задачею.

17. Див. [21, глава 2, параграф 5].

18. В якості множини нулів функції f взяти канторову множину.

19. Скористатися попередньою задачею.

20 – 27. Проаналізувати формулу загального розв'язку для лінійного рівняння.

28. Знайти обмежений розв'язок.

    <u>Відповідь:</u> $y(x) = \int\limits_0^\infty e^{-s-\sin s \cos(s+2x)} \sin(x+s) ds.$

29. Скористатися правилом Лопіталя для виразу $\dfrac{f \cdot g^A}{g^{A+1}}$.

    <u>Відповідь:</u> $\dfrac{B}{A+1}$.

30. Впровадити заміну $y = xu$.

31. Проаналізувати диференціальне рівняння для $y_1(x) - y_2(x)$.

32. Скористатись тим, що заміна $u = \dfrac{1}{y - y_i}$ зводить рівняння Ріккаті до лінійного неоднорідного рівняння.

33. Міркуючи від супротивного, проаналізувати різниці $y_3 - y_1$, $y_3 - y_2$.

34. Розглянути функцію $g(t) = te^{1-t}$, $t \geq 0$.

35. Довести, що пікарівські наближення $\{y_{2m}\}$ і $\{y_{2m-1}\}$ $\forall\ x \neq 0$ мають різні граничні точки.

36. Домножити диференціальне рівняння на y і оцінити $|y|$.

37. Скористатися оцінкою $x^2 + y^2 < y^2 + \varepsilon^2$ при $|x| < \varepsilon$ і теоремою порівняння.

Відповідь: а) так; б) ні.

38. Домножити на y і оцінити $|y|$.

39. Скористатися тим, що $y_k = x + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ – розв'язки даного рівняння.

40. Застосувати теорему про продовження.

    Відповідь: $(-\infty; +\infty)$.

41. Оцінити праву частину і застосувати теорему про продовження.

42. Відповідь: а) $a \in (0, 1]$; б) $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$; в) $(1, +\infty)$.

43. Шукати розв'язок рівняння у вигляді $y(x) = k_0 x + x\delta(x)$, де $\delta(x) \to \to 0,\ x \to 0$.

44. Розглянути різницю $y(x) - z(x)$, де $z(x)$ – розв'язок задачі Коші $\begin{cases} z' = k(x)z, \\ z(x_0) = y_0. \end{cases}$

45. Скористатися тим що, якщо $x = x(t)$ розв'язок рівняння, то $x(t+T)$ також буде розв'язком.

46. Від супротивного. Розглянути найближчу до x_0 точку, в якій порушується єдиність.

47. Скориставшись теоремою про продовження та теоремою Брауера про нерухому точку, проаналізувати відображення $y_0 \mapsto y(T)$.

48. Для неліпшицевої функції f побудувати апроксимуючу послідовність, кожен елемент якої задовольняє умови задачі 47.

49. Скористатися методом від супротивного. Див. [13, глава 3, параграф 12].

50. Розглянути верхню та нижню границю $x(t)$ при $t \to \infty$ і довести їх рівність.

51. Скористатись попередньою задачею, зваживши на те, що $z(t)$ задовольняє рівняння $z' = f(t)z - z^2$.

52. Скористатися теоремою про порівняння ($x - y^2 < x + 1$ і $y(x) > 0, \forall\, x$) і задачею 46.

53. Розглянути диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$.

54. Відповідь: $k < 1$.

55. Відповідь: так.

56. Розглянути диференціальне рівняння відносно функції $v(t) = C + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)u(s)ds$.

57. Проаналізувати рівняння $\varphi(t) = \psi(t) + \int\limits_{a}^{t} \chi(s)\varphi(s)ds$.

58. Розглянути функцію $w(t) = C + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\Phi(u(s))ds$.

59. Розглянути $\rho(x) = z(x) - y(x)$ і скористатися методом від супротивного.

60. Дослідити властивості додатної функції $w(t) = \sqrt{\sup\limits_{s\in[0,\ t]} a(s)} + \int\limits_{0}^{t} b(s)ds$.

61. Відповідь: $\mu = e^{-\int a(x)dx}$.

62. Скористатися формулою диференціювання складної функції.

63. Записати умову інтегруючого множника.

64. Скористатись теоремою про характеризацію рівняння в повних диференціалах.

65. Записати умову інтегруючого множника.

66. Записати умову інтегруючого множника.

67. Продиференціювати обидві частини по x.

68. Проаналізувати формулу загального розв'язку.

Відповідь: 2.

69. Міркуючи від супротивного, проаналізувати різниці $y_1 - y_2$, $y_1 - y_3$, $y_4 - y_2$, $y_4 - y_3$.

70. Скористатися методом від супротивного і розглянути різницю двох неперервних $T-$періодичних розв'язків.

Відповідь: ні.

71. Скористатися методом від супротивного.

Відповідь: ні.

72. Розглянути послідовність $x_k = \varphi(kT)$ і довести її монотонність.

73. Скористатись результатом задачі 46 і періодичністю f.

74. Розглянути рівняння для допоміжних функцій $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ та $\psi(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

75. Скористатись тим, що пряма $y = 0$ складається з точок неєдиності задачі Коші.

76. Скористатись тим, що формула $x(t) = \varphi(t+C)$, $C \in \mathbb{R}$ дає всі розв'язки рівняння.

77. Скористатись попередньою задачею.

78. Розглянути ортонормовану систему $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin t, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kt, \ldots\right\}$ на $[0, \pi]$. Показати, що $f(x)$ можна як завгодно точно наблизити лінійними комбінаціями з цієї системи. Записати рівність Парсеваля.

79. Скористатися методом від супротивного і довести спочатку, що кількість спільних точок скінчена.

80. Розглянути $\alpha = \min\limits_{x\in[a.b]} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \max\limits_{x\in[a.b]} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$. Ці значення досягаються в деяких точках. Далі розглянути деяку лінійну комбінацію даних в умовах рівностей.

81. З умови того, що початок координат є центром, вивести рівність $b = m$.

82. Показати, що корені характеристичного рівняння є парою комплексно-спряжених чисел з ненульовою дійсною частиною.

83. На площині XOY визначити області знакосталості y', y'', а також криві, на яких ці похідні рівні нулю або необмежені. На основі цього з'ясувати, з якого боку інтегральні криві підходять до особливої точки (див. [2, глава 6, пар.3]).

84. Скористатись тим, що фазові траєкторії системи мають вісь симетрії.

85. Скористатись теоремою Гробмана-Хартмана та попередньою задачею.

86. З'ясувати поведінку фазових траєкторій в околі положень рівноваги за допомогою задачі 83. За допомогою 1-го інтегралу побудувати фазові криві в усій площині.

87. Скористатись вказівкою [17, глава 5, пар. 5.5]

88. Побудувати графік функції $\Pi(x)$ та скористатись вказівкою до попередньої задачі.

89. Скористатись тим, що дана система є системою Ньютона.

90. Дане рівняння є рівнянням Ньютона. Його детальний аналіз міститься в [17, глава 5, пар. 5.5].

91. Скористатись теоремою про існування і єдиність розв'язку задачі Коші.

    Відповідь: $n \geq 5$.

92. Проаналізувати вид $x^{(n)}(t)$, де $x(t) = e^{-1/t}$.

    Відповідь: ні.

93. Оцінити праву частину та скористатись теоремою про продовження.

    Відповідь: $a \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

94. Виходячи з умови, оцінити $\|y\|$.

95. Домножити на $\dot{x}$ та проінтегрувати частинами.

96. Домножити на y' та проінтегрувати від 0 до x.

97. Домножити на $\dot{x}$ та проінтегрувати від 0 до t. Оцінити отримані інтеграли.

98. Оцінити $\|x(t)\|$.

    Відповідь: так.

99. Звести задачу до диференціального рівняння.

100. Застосувати метод від супротивного та формулу інтегрування частинами.

Відповідь: жодного, крім тотожнього нуля.

101. Скористатися попередньою задачею.

Відповідь: не більше одного.

102. Домножити на y' та отримати $(y')^2 = 2\cos y + C$. Довести, що $C = 2$.

103. Оцінити $\|x(t)\|$.

104. Звести до системи, розглянути $V(t, x, y) = \int\limits_0^x f(s)ds + \frac{y^2}{2q(t)}$ і скористатись задачею 101.

105. Звести до системи, розглянути $V(x, y) = \sqrt{\frac{y^2}{2} + G(x)}$ і скористатись задачею 101.

106. Скористатися методом від супротивного. (Див. [13, параграф 29]).

107. а) Від супротивного.

б) Скористатись методом від супротивного і результатом пункту а).

в) Скористатись пунктом б) і вибрати максимальний з таких інтервалів.

108. Див. пункт б) задачі 107.

109. Впровадити заміну $t = \psi(x)$.

110. Продиференціювати кілька разів рівність $u(x)v(x) \equiv 1$.

Відповідь: $q' + 2pq = 0$.

111. Відповідь:

$\mu = 0 \Rightarrow y(x) = d;$

$\mu = 2 \Rightarrow y(x) = cx;$

$\mu = 6 \Rightarrow y(x) = -3dx^2 + d;$

$\mu = 12 \Rightarrow y(x) = ax^3 - \dfrac{3}{5}\, ax.$

112. Скористатись виглядом фундаментальної системи розв'язків і записати формулу загального розв'язку рівняння.

<u>Відповідь:</u> $a > 2,\ b > a - 1.$

113. Скористатись виглядом фундаментальної системи розв'язків і записати формулу загального розв'язку рівняння.

<u>Відповідь:</u> $a = 2\sqrt{b}.$

114. Розглянути $h(x) = \dfrac{z(x)}{y(x)}$ і показати, що $h' < 0$ на (x_0, x_1).

115. Скористатися методом варіації довільної сталої. Шуканий розв'язок записати у вигляді невласного інтеграла.

116. Зробити пряму підстановку та скористатись формулою Ліувілля – Остроградського.

117. Шукати розв'язок у вигляді многочлена. Інший розв'язок знайти за формулою Абеля.

118. Скористатись попередньою задачею.

119. Довести, що $y''(x) = (a^2 - b^2)y(x)$. Далі розглянути можливі варіанти знаку $a^2 - b^2$.

120. Розглянути оператор $i_\lambda = f(x) + \lambda f'(x)$ та з'ясувати, що є композицією n таких операторів.

121. Скористатись вказівкою в умові задачі.

122. Див. [19, глава 6, пар. 2].

123. Скористатися перетворенням Ліувілля (задача 121).

124. Скористатися перетворенням Ліувілля (задача 121).

125. Впровадити заміну $y(x) = e^x z(x)$.

126. Побудувати алгоритм знаходження розв'язку за скінчену кількість кроків аналогічно до того, що існує для спеціального рівняння Ріккаті в інтегровному випадку.

127. Проаналізувати загальний розв'язок системи.

128. Проаналізувати загальний розв'язок системи.

Відповідь: $\omega(x) = 0$ або $\omega(x) = -1$.

129. Скористатися тим, що з ортогональности фундаментальної матриці системи, випливає, що довжина векторів, які входять до фундаментальної системи розв'язків не змінюється з часом.

130. Скористатися теоремою про оцінку відстані між послідовними нулями довільного коливного розв'язку.

131. Розбиваючи відрізок $[0, 25]$ на менші відрізки, на кожному з них використати теорему порівняння.

132. Скористатися теоремою про оцінку відстані між двома послідовними нулями довільного коливного розв'язку.

133. Скористатися теоремою порівняння.

134. Скористатися задачею 114.

135 – 138. Скористатися теоремою порівняння.

139. Див. [21, глава 11, параграф 5].

140. Сконструювати розв'язок з двох розв'язків допоміжних задач Коші та скористатися теоремою про неколивність.

141. Скористатись задачею 140.

142. Скористатися теоремою про неколивність.

Відповідь: $f(x) \equiv 0$ – єдиний розв'язок.

143. Відповідь: $a \neq \pi^2 n^2$.

144. Формально побудувати функцію Гріна та обґрунтувати її.

Відповідь: 1) $G = 1/2 \sin|x - s|$;

2) $G = -x$ $(0 \leq x \leq s)$, $G = -s$ $(s \leq x)$;

3) $G = -1$ $(0 \leq x \leq s)$, $G = -e^{s-x}$ $(s \leq x < \infty)$;

4) $G = -\ln x$ $(1 \leq x \leq s)$, $G = -\ln s$ $(s \leq x < \infty)$;

5) $G = 1/2 e^s (e^{-3x} - e^{-x}$ $(0 \leq x \leq s)$, $G = 1/2 e^{-3x}(e^s - e^{3s})$ $(s \leq x < \infty)$;

6) $G = (1 - x^2)/2s^2 x$ $(1 \leq x \leq s)$, $G = (1 - s^2)/2s^2 x$ $(s \leq x < \infty)$;

7) $G = x(s^3 - 1)/3s^2$ $(0 \leq x \leq s)$, $G = s(x^3 - 1)/3x^2$ $(s \leq x \leq 1)$;

8) $G = -(1/2)e^{-|x-s|}$;

9) $G = -x^2/3s^3$ $(0 \leq x \leq s)$, $G = -1/3x$ $(s \leq x < \infty)$.

145. Скористатись теоремою про існування розв'язку крайової задачі і задачею 143.

Відповідь: $a \neq \pi^2 n^2$.

146. Записати розв'язок за допомогою функції Гріна.

147. Скористатись інтегральною неперервністю.

148. Скористатись єдиністю розв'язку задачі Коші та одновимірністю рівняння.

149. Скористатись вказівкою до задачі 148.

150. Скористатись означенням стійкості та інтегральною неперервністю.

151. Скористатись критерієм Рауса - Гурвіца.

152. Скористатись теоремою про стійкість за першим наближенням.

153. Використати перший інтеграл.

Відповідь: 1) стійкий; 2) нестійкий.

154. При $bc < 0$ скористатись теоремою про стійкість за першим наближенням, при $bc > 0$ застосувати метод функцій Ляпунова.

155. Перейти до системи та застосувати теореми Ляпунова.

156 – 158. Побудувати функцію Ляпунова.

159. Відповідь: ні.

160. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $a_n = 1$. Індукцією за числом лінійних або квадратичних множників, на які розкладається многочлен $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$, довести твердження задачі.

161. Розглянути $B(t)y$ як вільний член лінійної неоднорідної системи, застосувати метод варіації довільної сталої та за допомогою нерівності Гронуолла - Беллмана оцінити $\|y\|$.

162. Скориставшись тим, що $\max\limits_j Re\lambda_j(A) < 0$, оцінити $\|e^{At}\|$ і оцінити $\|y\|$ за допомогою нерівності Гронуолла-Беллмана.

163. Оцінити $\|y\|$ за допомогою міркувань з задачі 162.

164. Зробити заміну незалежної змінної $\tau = \dfrac{t^{m+1}}{m+1}$ і скористатись задачею 162.

165. Скористатись задачею 164.

166. Шляхом розширення фазового простору перейти до відповідної системи. Далі скористатися задачею 161.

167. Розглянути $f(t,x)$ як вільний член лінійної неоднорідної системи та скористатись задачею 161.

168. Скористатись нерівністю Гронуолла-Беллмана. Для доведення другого твердження див. [4, глава 3, пар.10].

169. Оцінити $\dfrac{d}{dt}\left(\|x\|^2\right) = x^T\,\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dx^T}{dt}\,x$ за допомогою нерівності Гронуолла-Беллмана.

170. Скористатися тим, що $\Lambda(t) = \max\limits_{x\in S^{n-1}} \dfrac{1}{2}\left(A(t) + A^T(t)\right)x, \quad \lambda(t) = \min\limits_{x\in S^{n-1}} \frac{1}{2}\left(A(t) + A^T(t)\right)x$, де $S^{n-1} - n - 1$-вимірна одинична сфера в $\mathbb{R}^n$.

171. Вивести нерівність $\lambda(t)\|x\|^2 \le x^T A^H(t)x \le \Lambda(t)\|x\|^2$ та оцінити $\dfrac{d}{dt}\|x(t)\|^2$.

172. Скористатись задачею 171.

173. Скористатись задачею 171.

174. Скористатись теоремою про нестійкість.

175. Скористатись тим, що якщо $\eta(\cdot)$ – розв'язок автономної системи, то при будь-якому $\delta > 0$ функція $y_\delta(t) = \eta(t+\delta)$ також є розв'язком цієї системи.

176. Розглянути ситуацію стійкого центру, що охоплюється замкненими фазовими траєкторіями різного періоду.

177. Продиференціювати декілька разів рівність, що задає $f(x)$.

178. Скористатись правилом Лопіталя.

179. Міркуючи від супротивного, проаналізувати поведінку спільного розв'язку в нулі.

180. Міркуючи від супротивного, підставити в рівняння і проаналізувати поведінку відповідних виразів при $x \to 0$.

   Відповідь: ні.

181. Проінтегрувати, звівши до рівняння.

182. Дана умова рівносильна умові опуклості вниз функції $y(x)$.

   Відповідь: $n = 1$ або $n = 2$.

183. Відповідь: так, наприклад $f(x,y) = \int\limits_0^{x+y} h(t)dt$, де h – неперервна ніде не диференційовна функція.

184. Відповідь: ні, наприклад, $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{x^2}{y^2}}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$

185. Скористатись теоремою про диференціювання інтеграла по параметру.

186. Скористатись теоремою про диференціювання інтеграла по параметру.

187. Для функції $u = e^{-t^2}$ скористатись рівностями $u^{(n+2)} = -2tu^{(n+1)} - -2(n+1)u^{(n)}$, $u^{(n)} = (-1)^n e^{-t^2} H_n(t)$.

188. Знайти явний вигляд многочлена Лежандра і зробити пряму підстановку.

189. Продиференціювати кілька разів рівність $T_m(\cos t) = \cos mt$.

190. Скористатись вказівкою задачі 120.

Відповідь: всі такі послідовності $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, що всі корені рівняння $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ дійсні.

191. Розглянути задачу Коші для нескінченої системи $\dot{x}_n = x_n^2$, $x_n(0) = = -1/n$, $n \geq 1$.

192. Перейти до полярних координат та проаналізувати інтеграл одержаного рівняння для полярного кута.

193. Здійснити підстановку та записати умову періодичності функції φ.

194. Скористатись тим, що простір початкових даних є прямою сумою B і $B^{\perp}$.

195. Міркуючи від супротивного, за допомогою першого інтегралу прийти до протиріччя.

196. Перейти до полярних координат.

197. Розглянути систему з правою частиною, що не залежить від часу в точках τ-періодичного розв'язку.

 Відповідь: Так.

198. Перейти до полярних координат та дослідити функцію $r = r(\varphi)$.

199. Перейти до системи та скористатись достатньою умовою існування граничного циклу в термінах додатних коренів спеціального рівняння (див. [17, глава 5, пар.5]).

200. Скористатись достатньою умовою існування граничного циклу - принципом кільця (див. [17, глава 5, пар.5]).

Література

1. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 239 с.

2. *Боярчук А.К., Головач Г.П.* Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 384 с.

3. *Гудименко Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О.* Збірник задач з диференціальних рівнянь. – К.: Вища школа, 1972. – 154 с.

4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

5. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – М.: Физматлит, 2003. – 384 с.

6. *Еругин Н.П., Штокало И.З., Бондаренко Т.С.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 326 с.

7. *Краснов М.П., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. – М.: УРСС, 2002. – 256 с.

8. *Кривошея С.А., Перестюк М.О., Бурим В.М.* Диференціальні та інтегральні рівняння. – К.: Либідь, 2004. – 407 с.

9. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Иностранная литература, 1958. – 474 с.

10. *Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф.* Диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1981. – 503 с.

11. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1963. – 546 с.

12. *Перестюк М.О., Свіщук М.Я.* Збірник задач з диференціальних рівнянь. – К.: ТВіМС, 2004. – 224 с.

13. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Московский университет, 1984. – 295 с.

14. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982. – 331 С.

15. *Садовничий В.А., Григорьян А.А., Конягин С.В.* Задачи студенческих математических олимпиад. – М.: Издательство МГУ, 1987. – 311 с.

16. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения. Практический курс. – М.: Высшая школа, 2006. – 383 с.

17. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О.* Диференціальні рівняння в задачах. – К.: Либідь, 2003. – 504 с.

18. *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.

19. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 462 с.

20. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1979. – 128 с.

21. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.