Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу: задачі студентських олімпіад

Д.Ю. Мітін

Київ — 2014

Д.Ю. Мітін. Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу: задачі студентських олімпіад. — Київ, 2014. — 64 с.

Зміст

Розділ 1

Передмова

Посібник містить умови понад 200 задач, що пропонувалися на Міжнародній студентській математичній олімпіаді (International Mathematical Competition for University Students, IMC) у 1994–2013 рр., Міжнародній студентській математичній олімпіаді ім. Войтеха Ярніка (Vojtěch Jarník International Mathematical Competition, VJIMC) у 1991–2013 рр., Міжнародній Південно-Східній Європейській математичній олімпіаді для студентів молодших курсів (South Eastern European Mathematical Olympiad for University Students, SEEMOUS) у 2007–2013 рр. та інших.

Задачі впорядковано так, як відповідні теми вивчаються у нормативних курсах «Математичний аналіз: функції однієї змінної» та «Математичний аналіз: функції багатьох змінних» для студентів 1–2 курсів механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Посібник може стати в нагоді на практичних заняттях, гуртках, семінарах, при підготовці до студентських математичних олімпіад тощо.

Помічені неточності прохання повідомляти за адресою `dmitry.mitin@rambler.ru`.

Розділ 2

Перший семестр першого курсу

2.1 Множини, потужність. Відображення. Точні межі. Дійсні числа. Рівняння, нерівності. Математична індукція

1. Знайти всі комплексні числа z такі, що
$$|z^3 + 2 - 2i| + z\overline{z}\,|z| = 2\sqrt{2}.$$
(VJIMC 2014)

2. Нехай натуральне число k — парне. Довести рівність
$$\sum_{n=0}^{k/2}(-1)^n C_n^{k+2} C_{2(k-n)+1}^{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$
(VJIMC 2014)

3. Дано натуральні числа n та k. Довести рівність
$$\sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2 C_{n+2k-j}^{2k} = (C_{n+k}^k)^2.$$
(VJIMC 2013)

4. Позначимо через S_n суму перших n простих чисел. Довести, що при всіх n існує повний квадрат між S_n та S_{n+1}. (VJIMC 2013)

5. Довести, що найменшим дійсним числом C таким, що нерівність
$$\frac{x}{\sqrt{yz}(x+1)} + \frac{y}{\sqrt{zx}(y+1)} + \frac{z}{\sqrt{xy}(z+1)} \le C$$
справджується для всіх додатних дійсних чисел x, y, z таких, що $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$, є число $\sqrt{2}$. (VJIMC 2012)

6. Довести, що для натурального числа n існує натуральне k таке, що десятковий запис числа n^k починається та закінчується однаковою цифрою, тоді й тільки тоді, коли n не ділиться на 10. (VJIMC 2012)

7. Натуральне число m назвемо *самоописовим* за основою b, де натуральне $b \geq 2$, якщо у представленні

$$\overline{a_0 a_1 \ldots a_{b-1}}_{(b)}$$

числа m за основою b кожна цифра a_i дорівнює кількості входжень числа i до набору $a_0, a_1, \ldots, a_{b-1}$.

1) Довести, що самоописових чисел не існує лише за основами 2, 3, 6.

2) Довести, що у довільного самоописового числа за основою b останньою цифрою є 0. (VJIMC 2009)

8. Знайти всі функції $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такі, що $f(f(f(x))) + 4f(f(x)) + f(x) = 6x$. (VJIMC 2008)

9. Нехай $A = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1, \ z \neq -1\}$ та $f(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{1+\operatorname{Re} z}$. Довести, що відображення f є бієкцією між A та $\mathbb{R}$. Знайти f^{-1}. (VJIMC 2005)

10. Знайти всі функції $f : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такі, що $f(x, 0) = f(0, x) = x$ для всіх $x \in [0, +\infty)$, $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$ для всіх $x, y, z \in [0, +\infty)$ та існує дійсне число k таке, що $f(x+y, x+z) = kx + f(y, z)$ для всіх $x, y, z \in [0, +\infty)$. (VJIMC 2004)

11. Додатні числа $x_1, \ldots, x_n$ задовольняють рівність

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$

Довести нерівність

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n} \geq (n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right).$$

(VJIMC 2002)

12. Навести приклад зліченної множини X та незліченної сім'ї $\mathcal{F}$ її підмножин такої, що для довільних двох різних підмножин $A, B \in \mathcal{F}$ їхній перетин $A \cap B$ скінченний. (VJIMC 2000)

13. Нехай відображення $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ задано співвідношенням $f(n) = n^{\tau(n)/2}$, $n \in \mathbb{N}$, де $\tau(n)$ — кількість натуральних дільників числа n. Довести, що f є бієкцією на $\mathbb{N}$. (VJIMC 2000)

14. Нехай дано натуральні числа m, n та дійсне число $x \in [0,1]$. Довести нерівність $(1-x^n)^m+(1-(1-x)^m)^n \geq 1$. (VJIMC 2000)

15. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє рівність

$$f(xy) = \frac{f(x)+f(y)}{x+y}$$

для всіх $x, y \in \mathbb{R}$, $x+y \neq 0$. Довести, що $f \equiv 0$. (VJIMC 1994)

16. Чи існує ін'єктивна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що

$$f(x^2) - (f(x))^2 \geq \frac{1}{4}$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$? (VJIMC 1993)

17. Довести, що якщо функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє нерівності $f(x) \leq x$, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}$, то $f(x) = x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. (VJIMC 1993)

18. Нехай дано скінченну множину X та відображення $f : X \to X$. Довести, що відображення f ін'єктивне тоді й лише тоді, коли воно сюр'єктивне. (VJIMC 1992)

19. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які задовольняють рівність $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}$. (VJIMC 1992)

20. Дано натуральне число $n \geq 3$ та невід'ємні дійсні числа $x_1, \ldots, x_n$. Покладемо $A = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $B = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ та $C = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3$. Довести нерівність

$$(n+1)A^2B + (n-2)B^2 \geq A^4 + (2n-2)AC.$$

(IMC 2013)

21. Нехай z — комплексне число таке, що $|z+1| > 2$. Довести нерівність $|z^3 + 1| > 1$. (IMC 2013)

22. Нехай дійсні числа $a, b, c \in [-1, 1]$ такі, що $1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2$. Для всіх натуральних n довести нерівність $1 + 2(abc)^n \geq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$. (IMC 2010)

23. Дано додатні дійсні числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ такі, що $a_{k+1} - a_k \geq 1$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Довести нерівність

$$1 + \frac{1}{a_0} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k - a_0}\right) \leq \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right).$$

(IMC 2010)

24. Нехай $f(x) = x^2 + bx + c$, $b, c \in \mathbb{R}$. Покладемо $A = \{x \in \mathbb{R} : \ |f(x)| < 1\}$. Зрозуміло, що множина A або порожня, або складається з інтервалів, що не перетинаються. Довести, що сума їхніх довжин не перевищує $2\sqrt{2}$. (IMC 2005)

25. Нехай A — нескінченна множина дійсних чисел така, що $|a_1 + a_2 + \ldots + a_k| < 1$ для довільної скінченної підмножини $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset A$. Довести, що множина A злічення. (IMC 2004)

26. Нехай $p(x) = x^2 - 1$. Довести, що у рівняння

$$p(p(\ldots(p(x)))) = 0$$

2005 різних дійсних коренів. (IMC 2004)

27. Нехай $n \in \mathbb{N}$ та $a_k = \frac{1}{C_n^k}$, $b_k = 2^{k-n}$, $k = 1, \ldots, n$. Довести рівність $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k - b_k}{k} = 0$. (IMC 2002)

28. Нехай $n, m \in \mathbb{N}$ та $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1},\ b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ — невід'ємні дійсні числа такі, що
$$\Big(x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\Big)\Big(x^m + \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k\Big) = \sum_{k=0}^{n+m} x^k.$$
Довести, що кожен з коефіцієнтів a_k та b_k дорівнює 0 або 1. (IMC 2001)

29. Нехай $x_1, \ldots, x_n \geq -1$ та $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3 = 0$. Довести нерівність $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \leq \frac{n}{3}$. (IMC 1999)

30. Нехай $0 < c < 1$ та $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{c}, & x \in [0, c], \\ \frac{1-x}{1-c}, & x \in [c, 1]. \end{cases}$
Точка x називається *n-періодичною*, якщо
$$x = f(f(\ldots f(x)))$$
(n разів), причому число n є найменшим з такою властивістю. Довести, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ множина n-періодичних точок непорожня та скінченна. (IMC 1998)

31. Нехай X — довільна множина, $f : X \to X$ — бієкція. Довести, що існують відображення $g_1, g_2 : X \to X$ такі, що $f = g_1 \circ g_2$, $g_1 \circ g_1 = g_2 \circ g_2 = \mathrm{id}_X$. (IMC 1997)

32. Нехай для деякого $n \in \mathbb{N}$ обидва числа $\operatorname{ch} n\alpha$ та $\operatorname{ch}(n+1)\alpha$ раціональні. Довести, що число $\operatorname{ch}\alpha$ також раціональне. (IMC 1996)

2.2 Границя числової послідовності

33. Нехай $\{a_n : n \geq 1\}$ — така необмежена та строго зростаюча послідовність додатних дійсних чисел, що середнє арифметичне довільних чотирьох її послідовних членів a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3} теж є членом цієї послідовності. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \sqrt{2}$. (VJIMC 2011)

34. Дано послідовність дійсних чисел $\{a_n : n \geq 1\}$ таку, що $a_{n+1} - a_n \to 0$ та $a_{2n} - 2a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Довести, що $a_n \to 0$, $n \to \infty$. (VJIMC 2010)

35. Нехай $\{x_n : n \geq 2\}$ — послідовність дійсних чисел така, що $x_2 > 0$ та $x_{n+1} = -1 + \sqrt[n]{1 + nx_n}$, $n \geq 2$. Довести: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 0$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$. (VJIMC 2005)

36. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{\ldots + (n-1)\sqrt{1+n}}}} = 3$. (VJIMC 2003)

37. Нехай послідовність дійсних чисел $\{a_n : n \geq 1\}$ обмежена. Довести, що з співвідношень

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = b \quad \text{та} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = c$$

випливає, що $b = c$. (VJIMC 2000)

38. Довести рівність

$$\lim_{n\to\infty}(e^{1999/n}-1)\ln\Big(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+n}\Big)=-3998\ln 2.$$

(VJIMC 1999)

39. Нехай дійсне число $\alpha\in(0,1]$ та послідовність дійсних чисел $\{a_n : n\geq 1\}$ задовольняє нерівність

$$a_{n+1}\leq \alpha a_n+(1-\alpha)a_{n-1}$$

при $n=2,3,\ldots$ Довести, що якщо послідовність a_n обмежена, то збіжна. (VJIMC 1997)

40. Позначимо через $s(x)$ суму цифр числа натурального числа x, записаного у десятковій системі. Нехай $a_1=1997^{1996^{1997}}$, $a_{n+1}=s(a_n)$ при $n\geq 1$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. (VJIMC 1996)

41. Нехай послідовність $\{x_n : n\geq 1\}$ така, що $x_1=25$, $x_n=\operatorname{arctg}x_{n-1}$. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. (VJIMC 1995)

42. Довести, що границя $\lim\limits_{n\to\infty}\{(\sqrt{3}+1)^n\}$ не існує. (VJIMC 1991)

43. Нехай послідовність $\{a_n : n\geq 0\}$ така, що $\frac{1}{2}<a_n<1$ для всіх $n\geq 0$. Визначимо послідовність $\{x_n : n\geq 0\}$ співвідношеннями $x_0=a_0$, $x_{n+1}=\frac{a_{n+1}+x_n}{1+a_{n+1}x_n}$, $n\geq 0$. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. (IMC 2011)

44. Визначимо послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ рекурентно: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2$, $n \geq 1$. Довести рівність
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_{n+1}} = 1.$$
(IMC 2010)

45. Послідовність дійсних чисел $\{x_n : n \geq 1\}$ задано співвідношенням $x_{n+1} = x_n \cos x_n$, $n \geq 1$. Довести, що існує таке початкове значення x_1, що ця послідовність розбігається. (IMC 2010)

46. Послідовність дійсних чисел $\{x_n : n \geq 1\}$ задано співвідношенням $x_{n+1} = x_n \sin x_n$, $n \geq 1$. Довести, що для всіх початкових значень x_1 ця послідовність збігається. (IMC 2010)

47. 1) Нехай послідовність дійсних чисел $\{a_n : n \geq 1\}$ така, що $a_1 = 1$ та $a_{n+1} > \frac{3}{2} a_n$ для всіх $n \geq 1$. Довести, що послідовність $a_n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ має скінченну границю або прямує до $+\infty$.
2) Довести, що для всіх $\alpha > 1$ існує послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ з цими властивостями така, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \alpha$. (IMC 2003)

48. Нехай $a_0 = \sqrt{2}$, $b_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$, $b_{n+1} = \frac{2b_n}{2+\sqrt{4+b_n^2}}$. Довести, що:
1) послідовності a_n та b_n спадають,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,
3) послідовність $2^n a_n$ зростає, а послідовність $2^n b_n$ спадає,
4) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n b_n$,
5) існує стала $C > 0$ така, що для всіх n виконується нерівність $0 < b_n - a_n < \frac{C}{8^n}$. (IMC 2001)

49. Нехай $a_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$, $n \geq 2$. Довести, що:
1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} < \frac{1}{\sqrt{2}}$,
2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} \geq \frac{2}{3}$. (IMC 1996)

50. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n} \sum\limits_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\ln k \cdot \ln(n-k)} = 1$. (IMC 1994)

2.3 Границя функції в точці. Неперервні функції. Монотонність

51. Функція $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ називається *повільно змінною*, якщо для всіх $t > 1$ виконується: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = 1$. Довести, що у повільно змінної функції $f(x)$ постійний знак для достатньо великих x. (VJIMC 2007)

52. Довести рівність
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{e} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

(VJIMC 1998)

53. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервні функції. Чи обов'язково існують неперервні функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що $f(x) = g(x)\sin x + h(x)\cos x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$? (VJIMC 1995)

54. Нехай дано натуральне число n, функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ таку, що $f(2014) = 1 - f(2013)$, та деякі фіксовані попарно різні дійсні числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Довести, що якщо

$$\begin{vmatrix} 1+f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \ldots & f(x_n) \\ f(x_1) & 1+f(x_2) & f(x_3) & \ldots & f(x_n) \\ f(x_1) & f(x_2) & 1+f(x_3) & \ldots & f(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \ldots & 1+f(x_n) \end{vmatrix} = 0,$$

то функція f розривна. (SEEMOUS 2014)

55. Дано неперервну функцію $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$. Нехай при кожному $a > 0$ рівняння $f(x) = ax$ має принаймні один розв'язок на $[1, +\infty)$. Довести, що тоді це рівняння має нескінченно багато розв'язків при кожному $a > 0$. Навести приклад строго зростаючої неперервної функції з такими властивостями. (SEEMOUS 2008)

56. Дано неперервну функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ називається *точкою тіні*, якщо існує точка $y \in \mathbb{R}$ така, що $y > x$ та $f(y) > f(x)$. Припустимо, що $a < b$ — дійсні

числа, всі точки інтервалу (a, b) є точками тіні, кінці a, b не є точками тіні. Довести, що: 1) $f(x) \leq f(b)$ для всіх $a < x < b$, 2) $f(a) = f(b)$. (IMC 2011)

57. Дано неперервну функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таку, що число $f(x) - f(y)$ раціональне для всіх дійсних x, y таких, що число $x - y$ раціональне. Довести, що $f(x) = ax + b$, де $a \in \mathbb{Q}$ та $b \in \mathbb{R}$. (IMC 2008)

58. Дано неперервну функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Нехай для довільного $c > 0$ графік функції cf можна отримати з графіка f паралельним переносом чи поворотом. Показати, що звідси не випливає, що $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. (IMC 2007)

59. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Довести, що:

    1) з неперервності та сюр'єктивності f не випливає монотонність,

    2) з монотонності та сюр'єктивності f випливає неперервність,

    3) з монотонності та неперервності f не випливає сюр'єктивність. (IMC 2006)

60. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що для всіх дійсних чисел $a < b$ образом $f([a, b])$ є замкнений відрізок довжини $b - a$. Довести, що $f(x) = x + c$ або $f(x) = -x + c$, де c — деяка стала. (IMC 2006)

61. Нехай дано скінченну множину X та $\mathcal{F}$ — така сім'я підмножин множини X, що

$$A \in \mathcal{F},\ A \subset B \subset X \quad \Longrightarrow \quad B \in \mathcal{F}.$$

Довести, що функція $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, задана рівністю

$$f(t) := \sum_{A \in \mathcal{F}} t^{|A|}(1-t)^{|X \setminus A|},$$

неспадна. (VJIMC 2007)

62. Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — непорожні скінченні множини. Визначимо функцію

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} (-1)^{k-1} t^{|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}|}.$$

Довести, що функція f неспадна на $[0, 1]$. (IMC 2011)

63. Нехай $f(x)$ та $g(x)$ — взаємно обернені спадні функції на $(0, +\infty)$. Чи може нерівність $f(x) > g(x)$ виконуватися для всіх $x \in (0, +\infty)$? (VJIMC 1995)

64. Дано функції $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що $f(r) \le g(r)$ для всіх $r \in \mathbb{Q}$. Довести, що:

1) якщо f та g неспадні, то звідси, взагалі кажучи, не випливає, що $f(x) \le g(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$,

2) якщо f та g неперервні, то звідси випливає, що $f(x) \le g(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. (IMC 2009)

65. Довести, що не існує функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такої, що
$$f(x+y) \geq f(x) + yf(f(x))$$
для всіх $x, y \in \mathbb{R}$. (IMC 2001)

66. Довести, що: 1) якщо функція $f : [0,1] \to [0,1]$ зростає, то існує точка $x \in [0,1]$ така, що $f(x) = x$,
2) якщо функція $f : [0,1] \to [0,1]$ спадає, то такої точки може не існувати. (IMC 2000)

67. Припустимо, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє нерівність $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} 3^k(f(x+ky) - f(x-ky))\right| \leq 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ та $x, y \in \mathbb{R}$. Довести, що функція f стала. (IMC 1999)

68. Дано строго монотонну функцію $f; (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ таку, що $f\big(\frac{x^2}{f(x)}\big) = x$ для всіх $x \in (0,+\infty)$. Довести, що $f(x) = Cx$, $x \in (0,+\infty)$ для деякої сталої $C > 0$. (IMC 1999)

69. Довести, що не існує функції $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ такої, що $(f(x))^2 \geq f(x+y)(f(x)+y)$ для всіх $x, y > 0$. (IMC 1999)

70. Нехай функція $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ неперервна. Кажуть, що f *перетинає вісь* в точці x, якщо $f(x) = 0$, але в довільному околі точки x існують точки y, z такі, що $f(y) < 0$, $f(z) > 0$. Навести приклад неперервної функції, яка перетинає вісь нескінченно часто. Показати, що неперервна функція може перетинати вісь незліченну кількість разів. (IMC 1997)

71. Нехай функція $f : [0,1] \to [0,1]$ неперервна. Довести, що послідовність ітерацій $x_{n+1} = f(x_n)$ збігається тоді й лише тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. (IMC 1996)

72. 1) Довести, що для довільного $\varepsilon > 0$ існують $n \in \mathbb{N}$ та $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ такі, що $\max\limits_{x\in[-1,1]}\left|x - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^{2k+1}\right| < \varepsilon$.
    2) Довести, що для довільного $\varepsilon > 0$ та непарної неперервної функції f на $[-1,1]$ існують $n \in \mathbb{N}$ та $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k x^{2k+1}\right| < \varepsilon.$$

    (IMC 1995)

2.4 Похідна. Диференційовні функції. Монотонність, опуклість

73. Нехай натуральне число $n \geq 2$ та дійсне число $x > 0$. Довести нерівність $\left(1 - \sqrt{\operatorname{th} x}\right)^n + \sqrt{\operatorname{th} nx} < 1$. (VJIMC 2014)

74. Нехай P_1, P_2, P_3, P_4 — графіки чотирьох квадратних тричленів на координатній площині. Припустимо, що P_1 дотикається до P_2 у точці q_2, P_2 дотикається до P_3

у точці q_3, P_3 дотикається до P_4 у точці q_4, P_4 дотикається до P_1 у точці q_1. Нехай точки q_1, q_2, q_3, q_4 мають попарно різні x-координати. Довести, що q_1, q_2, q_3, q_4 лежать на графіку многочлена степеня не вище 2. (VJIMC 2014)

75. Нехай $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — диференційовна функція. Припустимо, що $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) + \frac{f'(x)}{x}\right) = 0$. Довести, що $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. (VJIMC 2014)

76. Нехай $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — така диференційовна функція, що $|f(x)| \leq C$ та $f(x)f'(x) \geq \cos x$ для всіх $x \in [0, +\infty)$, де $C > 0$. Довести, що $f(x)$ не має скінченної границі при $x \to +\infty$. (VJIMC 2013)

77. Нехай $f : [0, 1] \to [0, 1]$ — диференційовна функція така, що $|f'(x)| \neq 1$ для всіх $x \in [0, 1]$. Довести, що існують єдині точки $x_1, x_2 \in [0, 1]$ такі, що $f(x_1) = x_1$ та $f(x_2) = 1 - x_2$. (VJIMC 2012)

78. Довести, що для $c \in \mathbb{R}$ існує нескінченно диференційовна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ та $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $f^{(n+1)}(x) > f^{(n)}(x) + c$, тоді й тільки тоді, коли $c \leq 0$. (VJIMC 2008)

79. Нехай $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ — довільна функція така, що $\frac{f(x)+f(y)}{2} \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 1$ для всіх $x, y \in [0, 1]$. Довести для всіх $a, b, c \in [0, 1]$, $a < c < b$, нерівність
$$\frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) \leq f(c) + 2.$$

(VJIMC 2007)

80. Для функції $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *січною* у $a, b \in [0,1]$ називається пряма у $\mathbb{R}^2$, що проходить через точки $(a, f(a))$ та $(b, f(b))$. Кажуть, що функція f *перетинає свою січну* у a, b, якщо існує точка $c \in (a, b)$ така, що точка $(c, f(c))$ лежить на січній функції f у a, b.

    1) Знайти множину $\mathcal{F}$ всіх неперервних функцій f таких, що для всіх $a, b \in [0,1]$, $a < b$, функція f перетинає свою січну у a, b.

    2) Чи існує неперервна функція $f \notin \mathcal{F}$ така, що для всіх раціональних $a, b \in [0,1]$, $a < b$, функція f перетинає свою січну у a, b? (VJIMC 2006)

81. Припустимо, що $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — неперервно диференційовна функція така, що $f(0) = f(1) = 0$ та $f(a) = \sqrt{3}$ для деякого $a \in (0,1)$. Довести, що існують дві дотичні до графіка функції f, які утворюють правильний трикутник разом з відповідним відрізком осі x. (VJIMC 2004)

82. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — нескінченно диференційовна функція. Припустимо, що для кожного $x \in \mathbb{R}$ існує номер $n \in \mathbb{N}$ (який залежить від x) такий, що $f^{(n)}(x) = 0$. Довести, що f — многочлен. (VJIMC 2004)

83. Диференційовні функції $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ лінійно незалежні. Довести, що існує щонайменше $n - 1$ лінійно незалежні функції серед $f_1', \ldots, f_n'$. (VJIMC 2002)

84. Нехай натуральне число $n \geq 2$. Довести нерівність

$$\prod_{k=2}^{n} \ln k < \frac{\sqrt{n!}}{n}.$$

85. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ існує дійсне число t (яке залежить від x та y) таке, що $0 < t < 1$ та $f(tx+(1-t)y) = tf(x)+(1-t)f(y)$. Показати, що звідси, взагалі кажучи, не випливає рівність $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}$. (VJIMC 1998)

86. Нехай дійсні числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такі, що $a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k > 0$ для всіх $k = 1, 2, \ldots$ Покладемо

$$f(x) = \frac{1}{(1 - a_1x)(1 - a_2x) \ldots (1 - a_nx)}.$$

Довести, що $f^{(k)}(0) > 0$ для всіх $k = 1, 2, \ldots$ (VJIMC 1997)

87. На еліпсі $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ знайти точку таку, що трикутник, обмежений осями еліпса та дотичною в цій точці, має найменшу площу. (VJIMC 1996)

88. Нехай $f(x)$ — парна двічі диференційовна функція така, що $f''(0) \neq 0$. Довести, що у $f(x)$ локальний екстремум в точці $x = 0$. (VJIMC 1991, 1995)

89. Чи існує непостійна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що

$$(f(x) - f(y))^2 \leq |x - y|^3$$

для всіх $x, y \in \mathbb{R}$? (VJIMC 1994)

90. Скільки дійсних коренів має многочлен

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n}\,?$$

(VJIMC 1994)

91. Нехай $p^{(4)}(x) = x^6 + x^2 + 1$. Довести, що у $p(x)$ не може бути 10 різних дійсних коренів. (VJIMC 1993)

92. Знайти n-ту похідну функції $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$. (VJIMC 1992)

93. Довести, що існують дві дійсні опуклі функції f та g такі, що $f(x) - g(x) = \sin x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. (VJIMC 1992)

94. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — двічі диференційовна функція. Приаустимо, що $f(0) = 0$. Довести, що існує точка $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ така, що $f''(\theta) = f(\theta)(1 + 2\operatorname{tg}^2 \theta)$. (IMC 2013)

95. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервно диференційовна функція, яка задовольняє нерівність $f'(x) > f(f(x))$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Довести нерівність $f(f(f(x))) \leq 0$ для всіх $x \geq 0$. (IMC 2012)

96. Довести, що не існує неперервно диференційовної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такої, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконано, що $f(x) > 0$ та $f'(x) = f(f(x))$. (IMC 2002)

97. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ двічі диференційовна та така, що $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ та для всіх $x \in [0, +\infty)$ виконано нерівність $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0$. Довести для всіх $x \in [0, +\infty)$ нерівність $f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}$. (IMC 2009)

98. Нехай $p \neq 0$ — многочлен з дійсними коефіцієнтами. Визначимо послідовність многочленів $\{p_n : n \geq 0\}$ співвідношеннями: $p_0 = p$, $p_{n+1} = p_n + p'_n$, $n \geq 0$. Довести, що всі корені многочлена p_n дійсні для достатньо великих n. (IMC 2007)

99. Нехай $a, b, c, d, e > 0$ — дійсні числа такі, що $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2$ та $a^4 + b^4 + c^4 = d^4 + e^4$. Довести, що $a^3 + b^3 + c^3 < d^3 + e^3$. (IMC 2006)

100. Довести, що набір дійсних чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$ задовольняє такій умові:

     якщо $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — n разів диференційовна функція та $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ — дійсні числа такі, що $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n) = 0$, то існує точка $\theta \in (x_0, x_n)$, для якої
     $$a_0 f(\theta) + a_1 f'(\theta) + \ldots + a_n f^{(n)}(\theta) = 0,$$
     тоді й лише тоді, коли у многочлена $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ всі корені дійсні. (IMC 2006)

101. Довести нерівність $\mathrm{tg}(\sin x) > \sin(\mathrm{tg}\, x)$ для всіх $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. (IMC 2006)

102. Нехай функція $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ двічі неперервно диференційовна та така, що
$$|f''(x) + 2xf'(x) + (x^2 + 1)f(x)| \leq 1$$
для всіх x. Довести, що $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. (IMC 2005)

103. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ тричі диференційовна. Довести, що існує точка $\theta \in (-1, 1)$ така, що
$$\frac{f'''(\theta)}{6} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} - f'(0).$$
(IMC 2005)

104. 1) Довести, що не існує монотонної функції $f : [0, 1] \to [0, 1]$ такої, що для всіх $y \in [0, 1]$ рівняння $f(x) = y$ має незліченно багато розв'язків.
2) Довести, що не існує неперервно диференційовної функції $f : [0, 1] \to [0, 1]$ такої, що для всіх $y \in [0, 1]$ рівняння $f(x) = y$ має незліченно багато розв'язків. (IMC 2002)

105. Припустимо, що диференційовні функції $a, b, f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняють нерівностям $f(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$, $g(x) > 0$, $g'(x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, причому $\lim\limits_{x \to +\infty} a(x) = A > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} b(x) = B > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ та
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} + a(x)\frac{f(x)}{g(x)} = b(x).$$
Довести, що $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{B}{A+1}$. (IMC 2001)

106. Покладемо $f_n(x) = \prod\limits_{k=0}^{n} \sin(2^k x)$. Довести для всіх $n \in \mathbb{N}$ та $x \in \mathbb{R}$ нерівність $|f_n(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} |f_n(\pi/3)|$. (IMC 2001)

107. Нехай функція $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ задовольняє рівність $f(x)f(yf(x)) = f(x+y)$ для всіх $x, y \in (0, +\infty)$. Довести, що $f(x) = \frac{1}{1+ax}$, $x \in (0, +\infty)$ для деякої сталої $a \geq 0$. (IMC 2000)

108. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ двічі диференційовна та задовольняє рівності: $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$, $f(1) = 1$. Довести, що існує точка $\theta \in (0, 1)$, в якій

$$f(\theta)f'(\theta) + f''(\theta) = 0.$$

(IMC 1998)

109. Нехай p — дійсний многочлен степеня n, всі корені якого дійсні. Довести нерівність $(n-1)(p'(x))^2 \geq np(x)p''(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Коли досягається рівність? (IMC 1998)

110. Покладемо $\mathcal{P} = \big\{p : \ p(x) = \sum\limits_{k=0}^{3} a_k x^k, \ a_k \in \mathbb{R}, \ |f(\pm 1)| \leq 1, \ \big|f\big(\pm\frac{1}{2}\big)\big| \leq 1\big\}$. Знайти $\max\limits_{p \in \mathcal{P}} \max\limits_{x \in [-1,1]} |p''(x)|$. (IMC 1998)

111. Нехай функція $f \in C^3(\mathbb{R})$ невід'ємна, $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) > 0$. Покладемо $g(x) = \left(\frac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)}\right)'$, $x \neq 0$, $g(0) = 0$. Довести, що функція g обмежена в деякому околі точки 0. Показати, що твердження для $f \in C^2(\mathbb{R})$ хибне. (IMC 1997)

112. Нехай функція f двічі неперервно диференційовна на $(0, +\infty)$ та така, що $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} f''(x) = +\infty$. Довести, що $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$. (IMC 1995)

113. Нехай $f \in C^1((a,b))$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = -\infty$ та $f'(x) + (f(x))^2 \geq -1$ для всіх $x \in (a,b)$. Довести, що $b - a \geq \pi$. Коли досягається рівність? (IMC 1994)

114. Нехай $f \in C^1([a,b])$, $f(a) = 0$ та існує $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ таке, що $|f'(x)| \leq c|f(x)|$ для всіх $x \in [a,b]$. Довести, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in [a,b]$. (IMC 1994)

115. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $n+1$ раз диференційовна. Довести, що для всіх $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, таких, що
$$\ln \frac{f(b) + f'(b) + \ldots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \ldots + f^{(n)}(a)} = b - a,$$
існує точка $\theta \in (a,b)$, в якій $f^{(n+1)}(\theta) = f(\theta)$. (IMC 1994)

Розділ 3

Другий семестр першого курсу

3.1 Невизначений інтеграл

116. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{e^x(\operatorname{tg}^3 x - 1)}{\operatorname{tg} x - 1}\,\mathrm{d}x$.

117. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{e^{-2x} + \sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$.

118. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{(2x^5 - 3)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^{10} + x^6 + 2x^5 + 1}}$.

3.2 Інтеграл Рімана

119. Нехай $\mathcal{F}$ — множина всіх неперервно диференційовних функцій $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ таких, що $f(0) = 0$ та $f(1) = 1$. Довести, що
$$\min_{f\in\mathcal{F}} \int_0^1 (1+x^2)(f'(x))^2 \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}.$$
(VJIMC 2009)

120. Знайти всі неперервно диференційовні функції $f : [0,1] \to (0,+\infty)$ такі, що $\frac{f(1)}{f(0)} = e$ та
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(f(x))^2} + \int_0^1 (f'(x))^2 \mathrm{d}x \leq 2.$$
(VJIMC 2008)

121. Для дійсних чисел $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} < x_{2n+1} = 1$ таких, що $x_{i+1} - x_i \leq h$ при $1 \leq i \leq 2n$, довести нерівність
$$\frac{1-h}{2} < \sum_{i=1}^{n} x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1}) < \frac{1+h}{2}.$$
(VJIMC 2006)

122. Нехай $f, g : [0,1] \to (0,+\infty)$ — дві неперервні функції такі, що f та $\frac{g}{f}$ зростають. Довести нерівність
$$\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x \leq 2\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t.$$

(VJIMC 2003)

123. Нехай $\mathcal{F}$ — множина всіх неперервних функцій $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ таких, що $(f(x))^2 \leq 1 + 4\int_0^x t|f(t)|\mathrm{d}t,\ \forall x \in [0,1]$. Довести рівність

$$\max_{f\in\mathcal{F}} \int_0^1 \big((f(x))^2 - f(x)\big)\mathrm{d}x = \frac{16}{5}.$$

(VJIMC 2002)

124. Довести рівність

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\int_0^1 \sqrt[n]{1+x^n}\,\mathrm{d}x - 1\right) = \frac{\pi^2}{12}.$$

(VJIMC 2002)

125. Нехай $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — неперервна функція. Визначимо послідовність функцій таким чином:

$$f_0(x) = f(x), \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Довести, що якщо $f_n(1) = 0$ для всіх n, то $f(x) \equiv 0$. (VJIMC 2001)

126. Для всіх натуральних $n \geq 2$ довести нерівність

$$\frac{\pi n}{4} - \frac{1}{\sqrt{8n}} \leq \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}} \leq \frac{\pi n}{4}.$$

(VJIMC 1998)

127. Довести для неперервно диференційовної функції $f(x)$ такої, що $f(a) = f(b) = 0$, нерівність

$$\max_{x\in[a,b]}|f'(x)| \geq \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(VJIMC 1992)

128. Знайти всі неперервні функції $f : [1, 8] \to \mathbb{R}$ такі, що

$$\int_1^2 (f(x^3))^2\,\mathrm{d}x + 2\int_0^2 f(x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 (x^2-1)^2\,\mathrm{d}x.$$

(SEEMOUS 2013)

129. Нехай $\mathcal{F}$ — множина всіх неперервно диференційовних функцій $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ таких, що $f(0) = 0$ та $\int_0^1 (f'(x))^2 \mathrm{d}x \leq 1$. Довести, що

$$\max_{f\in\mathcal{F}}\int_0^1 (f'(x))^2 f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3}.$$

(SEEMOUS 2013)

130. Дано неперервну функцію $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Визначимо послідовності $L_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ та $U_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, $n \geq 1$. Відрізок $[L_n, U_n]$ розділили на три рівні частини. Довести, що для достатньо великих n число $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ належить середній з цих трьох частин. (SEEMOUS 2011)

131. Нехай p — многочлен степеня 5. Припустимо, що його графік має три точки перегину, які лежать на одній прямій. Обчислити відношення площ обмежених частин площини між цією прямою та графіком цього многочлена. (SEEMOUS 2009)

132. Нехай $0 < a < b$. Довести нерівність

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\mathrm{d}x \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

(IMC 2010)

133. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ неперервно диференційовна. Довести нерівність

$$\left| \int_0^1 (f(x))^3 \, \mathrm{d}x - (f(0))^2 \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| \left(\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x \right)^2.$$

(IMC 2005)

134. Нехай $f, g : [a, b] \to [0, +\infty)$ — неперервні неспадні функції такі, що для всіх $x \in [a, b]$ виконано нерівність $\int_a^x \sqrt{f(t)}\mathrm{d}t \leq \int_a^x \sqrt{g(t)}\mathrm{d}t$ та рівність $\int_a^b \sqrt{f(t)}\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{g(t)}\mathrm{d}t$. Довести нерівність

$$\int_a^b \sqrt{1 + f(t)} \, \mathrm{d}t \leq \int_a^b \sqrt{1 + g(t)} \, \mathrm{d}t.$$

(IMC 2004)

135. Нехай $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ — неперервна функція та послідовність функцій $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ задано співвідношеннями $f_0(x) = g(x)$ та $f_{n+1}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$, $x \in (0,1]$, $n \geq 0$. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(0)$, $x \in (0,1]$. (IMC 2003)

136. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0+} \int_x^{2x} \frac{\sin^m t}{t^n}\,\mathrm{d}t$, $m, n \in \mathbb{N}$. (IMC 2003)

137. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ диференційовна та зростає, причому $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ та f' обмежена. Покладемо $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Визначимо послідовність $\{a_n : n \geq 0\}$ рекурентно: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{f(a_n)}$. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - F^{-1}(a_n)) = 0$. (IMC 2000)

138. Припустимо, що графік многочлена степеня 6 дотикається прямої у трьох точках A_1, A_2, A_3, де A_2 лежить між A_1 та A_3.
1) Довести, що якщо довжини відрізків A_1A_2 та A_2A_3 рівні, то площі фігур, обмежених цими відрізками та графіком многочлена, теж рівні.
2) Позначимо $k = \frac{A_2A_3}{A_1A_2}$, а через K — відношення площ відповідних фігур. Довести нерівність $\frac{2}{7}k^5 < K < \frac{7}{2}k^5$. (IMC 2000)

139. Нехай $f(x) = 2x(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Визначимо $f_n = f \circ \ldots \circ f$ (n разів).

1) Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

2) Довести, що $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2^n+1)}$. (IMC 1998)

140. Нехай $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, яка для всіх $x, y \in [0,1]$ задовольняє нерівність $xf(y) + yf(x) \le 1$. Довести, що $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \le \frac{\pi}{4}$. Коли досягається рівність? (IMC 1998)

141. Нехай послідовність додатних дійсних чисел $\{x_n : n \ge 1\}$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n} + x_n\right) = -1.$$

(IMC 1997)

142. Довести, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \text{ парне},\\ \pi, & n \text{ непарне}. \end{cases}$$

(IMC 1996)

143. 1) Нехай $a, b \in \mathbb{R}$, $b \le 0$, $1 + ax + bx^2 \ge 0$ для всіх $x \in [0,1]$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 (1+ax+bx^2)^n \mathrm{d}x = \begin{cases} -\frac{1}{a}, & a < 0,\\ +\infty, & a \ge 0. \end{cases}$$

2) Нехай $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ — двічі неперервно диференційовна функція та $f''(x) \le 0$ для всіх $x \in [0,1]$. Припустимо, що $L = \lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 (f(x))^n \mathrm{d}x$ існує, причому $0 < L < +\infty$. Довести, що f' має сталий знак та $\min\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)| = \frac{1}{L}$. (IMC 1996)

144. Нехай функцію $f : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ задано так: $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. Довести, що функція f ін'єктивна та $f((1,+\infty)) = (\ln 2,+\infty)$. (IMC 1995)

145. 1) Нехай $f \in C([0,b])$, $g \in C(\mathbb{R})$ та g — періодична функція з періодом b. Довести рівність

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^b f(x)\, g(nx)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{b} \int_0^b f(x)\, \mathrm{d}x \cdot \int_0^b g(x)\, \mathrm{d}x.$$

2) Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+3\cos^2 nx}\, \mathrm{d}x = 1$. (IMC 1994)

3.3 Числові ряди. Нескінченні добутки

146. Довести, що для будь-якої бієкції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nf(n)}$ збігається. (VJIMC 2010)

147. Довести, що існує бієкція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ така, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+f(n)}$ збігається. (VJIMC 2010)

148. Довести, що для будь-якої бієкції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2}$ розбігається. (IMC 1999)

149. Нехай послідовність дійсних чисел $\{a_n : n \geq 1\}$ така, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ збігається. Довести, що послідовність $b_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ збігається. Знайти її границю. (VJIMC 2006)

150. Довести, що $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{2}$. (VJIMC 2004)

151. Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — розбіжний ряд з додатними незростаючими членами. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ розбігається. (VJIMC 2004)

152. Нехай послідовність дійсних чисел $\{a_n : n \geq 0\}$ задовольняє співвідношення: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ та $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{2^n}$, $n \geq 0$. Довести рівність

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(n-1)/2} \prod_{k=1}^{n}(2^k - 1)}.$$

153. Позначимо через $f(n)$ кількість нулів у десятковому записі натурального числа n. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{f(n)}}{n^2}$

збігається при дійсному α тоді й тільки тоді, коли $0 < \alpha < 91$. (VJIMC 1997)

154. Довести рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(7n)!} = \frac{1}{7^3} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=0}^{6} e^{\cos(2\pi j/7)} \cos\left(\frac{2k\pi j}{7} + \sin\frac{2\pi j}{7}\right).$$

(VJIMC 1997)

155. Довести нерівність $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq 3$. (VJIMC 1994)

156. Розглянемо послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$, задану співвідношеннями

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + 1 + \sqrt{x_n^2 + 2x_n + 5}}{2}, \ n \geq 1.$$

Довести, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2 - 1} = \frac{2}{3}$. (SEEMOUS 2014)

157. Нехай $a_n > 0$ при $n \geq 1$. Розглянемо прямокутні трикутники $\triangle A_0A_1A_2$, $\triangle A_0A_2A_3$, ..., $\triangle A_0A_{n-1}A_n$, ..., побудовані таким чином: для кожного $n \geq 2$ гіпотенуза A_0A_n трикутника $\triangle A_0A_{n-1}A_n$ є катетом трикутника $\triangle A_0A_nA_{n+1}$ з прямим кутом $\angle A_0A_nA_{n+1}$, причому вершини A_{n-1} та A_{n+1} лежать по різні боки від прямої A_0A_n; $|A_{n-1}A_n| = a_n$, $n \geq 1$. Довести, що якщо множина точок A_n, $n \geq 0$, обмежена, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \angle A_{n-1}A_0A_n$ збігається. (SEEMOUS 2012)

158. Довести, що існує послідовність комплексних чисел $\{a_n : n \geq 1\}$ така, що для натурального n ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ збігається тоді й лише тоді, коли p непросте. (IMC 2013)

159. Визначимо послідовність $\{a_n : n \geq 0\}$ рекурентно: $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$ та $a_{n+1} = \frac{na_n^2}{1+(n+1)a_n}$ при $n \geq 1$. Довести рівність $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. (IMC 2012)

160. Довести рівність $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\bigl(1+\frac{1}{n}\bigr) \cdot \ln\bigl(1+\frac{1}{2n}\bigr) \cdot \ln\bigl(1+\frac{1}{2n+1}\bigr) = \frac{\ln^3 2}{3}$. (IMC)

161. 1) Довести для спадної послідовності додатних чисел $\{x_n : 1 \leq k \leq n\}$ нерівність

$$\Bigl(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Bigr)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{k}}.$$

2) Довести для спадної послідовності додатних чисел $\{x_n : n \geq 1\}$ нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \Bigl(\sum_{k=n}^{\infty} x_k^2\Bigr)^{1/2} \leq \pi \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

(IMC 2000)

162. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

1) Довести, що такий ряд збігається: $a_1 + a_2 + a_4 + a_3 +$

$a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_{16} + a_{15} + \ldots + a_9 + a_{32} + \ldots$
2) Довести, що такий ряд може розбігатися: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_7 + a_6 + a_8 + a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15} + a_{10} + a_{12} + a_{14} + a_{16} + a_{17} + a_{19} + \ldots$ (IMC 1997)

163. (Нерівність Карлемана.) 1) Нехай $a_n > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. Довести нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2) Довести, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ така, що $a_n > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ та

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} > (e - \varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(IMC 1996)

3.4 Функціональні ряди

164. Довести рівність

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1 + x^{2n+2}}{(1 - x^{2n+2})^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(1 - x^{n+1})^2}$$

для всіх $x \in (-1, 1)$. (VJIMC 2011)

165. Дано натуральне число k. Довести, що

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\dots\sum_{n_k=1}^{\infty}\frac{1}{n_1n_2\dots n_k(n_1+n_2+\dots+n_k+1)}=k!$$

(VJIMC 2011)

166. Навести приклад послідовності неперервних функцій на $\mathbb{R}$, яка збігається поточково до 0, але не є рівномірно збіжною на жодній непорожній відкритій множині. (VJIMC 1998)

167. Довести, що: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\displaystyle\int_0^n \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(n\displaystyle\int_0^n \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\Big)=-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$.
(SEEMOUS 2014)

168. Дано неперервну функцію $f_0:[0,1]\to\mathbb{R}$. Визначимо послідовність функцій $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ так: $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t$, $n\geq 1$. Довести рівність

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)=\int_0^x f_0(t)e^{x-t}\mathrm{d}t,\quad x\in[0,1].$$

(SEEMOUS 2010)

169. Для $x\in\mathbb{R}$, $y\geq 0$ та $n\in\mathbb{Z}$ позначимо через $w_n(x,y)\in[0,\pi)$ кут у радіанах, під яким відрізок, що сполучає точки $(n,0)$ та $(n+y,0)$, видно з точки $(x,1)$.

1) Довести, що ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} w_n(x,y)$ збігається.

Позначимо його суму через $w(x,y)$.

2) Довести нерівність $w(x,y) \le ([y]+1)\pi$.

3) Довести, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх y, $0 < y < \delta$, та всіх $x \in \mathbb{R}$ маємо $w(x,y) < \varepsilon$.

4) Довести, що функція $w : \mathbb{R} \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ неперервна. (SEEMOUS 2007)

170. Довести рівність $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} = \frac{\ln 2}{4} - \frac{\pi}{24}$. (IMC 2010)

171. Нехай послідовність $\{a_n : n \ge 0\}$ задано співвідношеннями

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}, \ n \ge 0.$$

Довести, що $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{e}{2}$. (IMC 2003)

172. Нехай $a_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$, $b_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^n}{k!}$, $n \ge 1$. Довести, що $a_n \cdot b_n \in \mathbb{Z}$. (IMC 2002)

173. Довести, що $\lim\limits_{x \to 1-} (1-x) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \ln 2$. (IMC 2001)

174. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin(\ln n)}{n^{\alpha}}$ збігається тоді й лише тоді, коли $\alpha > 0$. (IMC 1997)

175. Нехай послідовність додатних дійсних чисел $a_n : n \geq 0$ задано так: $a_0 = 1$, $a_n = 2 + \sqrt{a_{n-1}} - 2\sqrt{1 + \sqrt{a_{n-1}}}$. Довести, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n 2^n = 2 - 2\ln 2$. (IMC 1995)

3.5 Функції обмеженої варіації. Інтеграл Рімана-Стілтьєса

176. Нехай дано натуральне число n та неспадну функцію $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Довести нерівність

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}(x^{n+1}).$$

Коли досягається рівність? (SEEMOUS 2011)

Розділ 4

Перший семестр другого курсу

4.1 Метричні простори

177. Нехай ABC — невироджений трикутник на евклідовій площині. Визначимо послідовність точок $\{C_n : n \geq 0\}$ так: $C_0 := C$, а C_{n+1} — центр вписаного кола у трикутник ABC_n. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$. (VJIMC 2009)

178. Навести приклад множини $A \subset [0,1] \times [0,1]$, щільної у $[0,1] \times [0,1]$ та такої, що довільна вертикальна та до-

вільна горизонтальна пряма перетинає A у щонайбільше одній точці. (VJIMC 2007)

179. Позначимо через $B(c,r)$ відкриту кулю з центром c та радіусом r у площині. Довести, що існує збіжна послідовність $\{z_n : n \geq 1\}$ у $\mathbb{R}^2$ така, що відкриті кулі $B(z_n, 1/n)$ попарно не перетинаються. (VJIMC 2004)

180. Нехай $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Припустимо, що функція $f : [a,b] \to [a,b]$ задовольняє нерівність $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ для всіх $x, y \in [a,b]$. Виберемо $x_1 \in [a,b]$ та визначимо послідовність $x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Довести, що x_n збігається до деякої нерухомої точки функції f. (VJIMC 1999)

181. Нехай дано зліченну множину A куль та одиничний куб у $\mathbb{R}^3$. Припустимо, що для довільної скінченної підмножини $B \subset A$ всі кулі з B можна розташувати в цьому кубі так, щоб їхні внутрішності попарно не перетинались. Довести, що тоді й всі ці кулі можна розташувати в цьому кубі так, щоб їхні внутрішності попарно не перетинались. (VJIMC 1999)

182. Нехай $P_0, P_1, P_2, \ldots$ — послідовність опуклих многокутників таких, що при кожному $k \geq 0$ вершини многокутника P_{k+1} є серединами всіх сторін многокутника P_k. Довести, що існує єдина точка, яка лежить всередині всіх цих многокутників. (SEEMOUS 2008)

183. Нехай C — непорожня замкнена обмежена множина дійсної осі та $f : C \to C$ — неспадна неперервна фун-

кція. Довести, що існує точка $x \in C$ така, що $f(x) = x$. (IMC 2007)

184. Нехай S_n — множина значень суми $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, де $n \geq 2$, $0 \leq x_1, x_2, \ldots, x_n \leq \frac{\pi}{2}$ та $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin x_k = 1$.
1) Довести, що S_n — проміжок.
2) Позначимо через l_n довжину S_n. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = \frac{\pi}{2} - 1$. (IMC 2004)

185. Нехай B — замкнений одиничний круг у площині, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — точки у B. Довести, що існує точка $x \in B$ така, що сума відстаней від x до кожної з точок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не менше за 1. (IMC 2004)

186. Нехай A — замкнена множина у $\mathbb{R}^n$ та B — множина всіх точок $b \in \mathbb{R}^n$, для яких існує єдина точка $a_0 \in A$ така, що $\|a_0 - b\| = \inf\limits_{a \in A} \|a - b\|$. Довести, що множина B скрізь щільна у $\mathbb{R}^n$. (IMC 2003)

187. 1) Довести, що для довільної функції $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ існує функція $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ така, що $f(x, y) \leq g(x) + g(y)$ для всіх $x, y \in \mathbb{Q}$.
2) Навести приклад функції $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої не існує функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такої, що $f(x, y) \leq g(x) + g(y)$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}$. (IMC 2003)

188. Нехай $f : [a, b] \to [a, b]$ — неперервна функція та $x \in [a, b]$. Покладемо $x_0 = x$ та $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$. При-

пустимо, що множина $T_x = \{x_n : n \geq 0\}$ замкнена. Довести, що ця множина нескінченна. (IMC 2002)

189. Нехай функція f неперервна на $[0, 1]$ та не монотонна на жодному інтервалі. Довести, що множина точок, де ця функція досягає локальних мінімумів, скрізь щільна у $[0, 1]$. (IMC 2000)

190. Нехай $p > 1$. Довести, що існує стала $C_p > 0$ така, що для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ таких, що $|x|^p + |y|^p = 2$, виконується нерівність $(x - y)^2 \leq C_p(4 - (x + y)^2)$. (IMC 1995)

4.2 Диференціальне числення функцій багатьох змінних

191. Довести, що для дійсного числа $r > 0$ виконано умову:

    для довільної диференційовної функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такої, що $\|\nabla f(0, 0)\| = 1$ та $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq \|x - y\|$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}^2$, максимум функції f на крузі $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq r\}$ досягається рівно в одній точці,

    тоді й лише тоді, коли $r \leq 1/2$. (IMC 2005)

192. Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — опукла функція така, що її градієнт $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ існує в усіх точках $\mathbb{R}^n$ та задовольняє умові

$$\exists L > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n : \quad \|\nabla f(x_1) - \nabla f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|.$$

Довести, що

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n :$$
$$\|\nabla f(x_1) - \nabla f(x_2)\|^2 \leq L \big(\nabla f(x_1) - \nabla f(x_2),\ x_1 - x_2\big).$$

(IMC 2002)

193. Нехай функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задано так:

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2}.$$

Знайти всі точки (x, y), я яких $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Визначити, в яких з цих точок досягаються найбільше чи найменше значення. (IMC 1994)

4.3 Векторні відображення

194. Дано функцію на колі $f : S \to \mathbb{R}$. Розглянемо відображення $(f, f', f'') : S \to \mathbb{R}^3$. Чи може образ цього відображення бути несамоперетинною кривою, завузленою як трилистник? [10]

4.4 Невласні інтеграли. Інтеграли, що залежать від параметру

195. Нехай $0 < a < b$ та $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — така неперервна функція, що $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Довести нерівність
$$\int_a^b \int_a^b f(x)f(y)\ln(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le 0.$$
(VJIMC 2014)

196. Нехай $\mathcal{F}$ — множина всіх неперервних функцій $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ таких, що
$$\Big|\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t\Big| \le 1 \quad \text{для всіх } x \in (0,1].$$
Довести, що $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}}\big|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\big| = \frac{2}{\pi}$. (VJIMC 2013)

197. Нехай функція $f : [1,+\infty) \to (0,+\infty)$ не зростає та $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{f(2^{n+1})}{f(2^n)} < \frac{1}{2}$. Довести, що $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$. (VJIMC 2012)

198. Нехай a, b, c, x, y, z, t — додатні числа такі, що $1 \le x, y, z \le 4$. Довести нерівність
$$\frac{x}{(2a)^t}+\frac{y}{(2b)^t}+\frac{z}{(2c)^t} \ge \frac{y+z-x}{(b+c)^t}+\frac{z+x-y}{(c+a)^t}+\frac{x+y-z}{(a+b)^t}.$$
(*Вказівка*: $\frac{1}{p^k} = \frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-pt}\mathrm{d}t,\ p > 0$.) (VJIMC 2012)

199. Нехай $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — строго опукла неперервна функція така, що $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Довести, що невласний інтеграл $\int_0^{+\infty} \sin(f(x))\mathrm{d}x$ збігається умовно. (VJIMC 2006)

200. Нехай функція $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ спадна та така, що $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$. Довести, що $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$. (VJIMC 2001)

201. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k+1} \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n x^k \mathrm{d}x = \frac{k!}{2^{k+1}}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (SEEMOUS 2012)

202. Нехай $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ — неперервна функція. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^1 (x(1-x))^n f(x)\,\mathrm{d}x = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

(SEEMOUS 2009, див. задачу 205)

203. Довести нерівність $\int_0^1\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^{-1}+|\ln y|-1} \leq 1$. (IMC 2004)

204. 1) Довести, що $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x^2)^2} = \frac{1}{2}$.

2) Довести, що існує стала $C > 0$ така, що для всіх $x \in [0, +\infty)$ виконується нерівність

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x^2)^2} - \frac{1}{2}\Big| \leq \frac{C}{x}.$$

Розділ 5

Другий семестр другого курсу

5.1 Кратні інтеграли

205. Нехай $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ — неперервна функція. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \right)^2 \iint_{[0,1]^2} (xy(1-x)(1-y))^n f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

(VJIMC 2005)

206. Нехай $D_1, D_2, \dots, D_n$ — набір замкнених кругів на евклідовій площині та $a_{ij} = S(D_i \cap D_j)$ — площа фігури $D_i \cap D_j$. Довести, що для довільних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ виконується така нерівність:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \geq 0.$$

(VJIMC 2003)

207. Нехай $f_1, f_2, \dots, f_n \in C([0,1]^n)$ — невід'ємні неперервні функції, причому f_i не залежить від i-тої змінної при $i = 1, \dots, n$. Довести нерівність

$$\left(\int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{n} f_i \right)^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} \int_{[0,1]^n} f_i^{n-1}.$$

(VJIMC 1999)

208. Нехай $f \in C^2(\overline{D})$, $f = 0$ на ∂D, де D — відкрита одинична куля у $\mathbb{R}^3$. Для $\varepsilon > 0$ довести нерівність

$$\int_D \|\nabla f\|^2 \, \mathrm{d}V \leq \varepsilon \int_D (\triangle f)^2 \, \mathrm{d}V + \frac{1}{4\varepsilon} \int_D f^2 \, \mathrm{d}V.$$

(VJIMC)

209. Нехай f — неперервна функція на $[0,1]$ така. що для всіх $x \in [0,1]$ виконується нерівність $\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t \geq \frac{1-x^2}{2}$. Довести нерівність $\int_0^1 (f(x))^2 \mathrm{d}x \geq \frac{1}{3}$. (IMC 1995)

5.2 Інтеграли по многовидах

Диференціальна форма ω на многовиді M називається *замкненою*, якщо $\mathrm{d}\omega = 0$ на M. Диференціальна форма ω на многовиді M називається *точною* (або *повним диференціалом*), якщо існує така диференціальна форма ω_1 на M, що $\omega = \mathrm{d}\omega_1$ на M.

210. Довести, що диференціальна форма $\omega = x_1\,\mathrm{d}x_2$ на колі $x_1^2 + x_2^2 = 1$ є замкненою, але не є точною.

211. Довести, що диференціальна форма $\omega = \frac{x_1\,\mathrm{d}x_2 - x_2\,\mathrm{d}x_1}{x_1^2+x_2^2}$ на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ є замкненою, але не є точною. [13]

212. Довести, що диференціальна форма $\omega = x_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ на сфері $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$ є замкненою, але не є точною.

213. Довести, що диференціальна форма
$$\omega = \frac{x_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + x_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + x_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}$$
на $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ є замкненою, але не є точною. [13]

5.3 Ряди Фур'є

214. Довести для всіх дійсних $k > 1$ нерівність
$$\Big|\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\cos(kx)\mathrm{d}x\Big| < \frac{3}{k^{3/2}}.$$
(VJIMC 2010)

215. Довести, що існує стала $C > 0$ така, що для всіх дійсних $k > 1$ виконується нерівність

$$\Big|\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\sin(kx)\mathrm{d}x\Big| > \frac{C}{k}.$$

(VJIMC 2010)

216. Дано натуральне число n та неперервну функцію $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ таку, що

$$\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = 1 \quad \text{для всіх } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Довести нерівність $\int_0^1 (f(x))^2 \mathrm{d}x \geq n^2$. (SEEMOUS 2008)

217. Дано многочлен $p(z)$ з цілими коефіцієнтами такий, що $|p(z)| \leq 2$ для всіх комплексних чисел z одиничної довжини. Довести, що у цього многочлена може бути лише 0, 1 чи 2 ненульових коефіцієнтів. (IMC 2007)

218. Нехай A — підмножина множини $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, яка містить не більше $\frac{\ln n}{100}$ елементів. Визначимо k-ий коефіцієнт Фур'є множини A: $f(k) = \sum\limits_{j\in A} \exp\left(\frac{2\pi i}{n} jk\right)$, $k \in \mathbb{Z}_n$.

Довести, що існує $k \neq 0$, для якого $|f(k)| \geq \frac{|A|}{2}$.

219. 1) Довести, що довільна функція вигляду

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \cos x + \sum_{n=2}^{N} a_n \cos(nx),$$

де $|a_0| < 1$, приймає як додатні, так і від'ємні значення на періоді $[0, 2\pi)$.

2) Довести, що функція $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{100} \cos(n^{3/2}x)$ має принаймні 40 нулів на інтервалі $(0, 1000)$. (IMC 1995)

Список рекомендованих джерел

[1] Vojtěch Jarník International Mathematical Competition, http://vjimc.osu.cz.

[2] International Mathematical Competition for University Students, http://imc-math.org.

[3] South Eastern European Mathematical Olympiad for University Students, http://www.massee-org.eu/index.php/mathematical/seemous.

[4] William Lowell Putnam Mathematics Competition, http://kskedlaya.org/putnam-archive/.

[5] Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету КНУ з математики,
`http://putnam.ho.ua/mechmat.html`.

[6] II етап Всеукраїнської студентської олімпіади з математики для класичних університетів,
`http://www.mmf.lnu.edu.ua/index.php/navchannia/olimpiady.html`.

[7] International Scientific Mathematics, Chemistry and Statistics Olympiads for University Students,
`http://olympiad.sanjesh.org/en/index.asp`.

[8] Miklós Schweitzer Memorial Competition,
`http://www.math.u-szeged.hu/~mmaroti/schweitzer/`.

[9] College Playground at MathLinks forum,
`http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewforum.php?f=218`.

[10] Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. Задачи студенческих математических олимпиад. Москва, 1987.

[11] Садовничий В. А., Подколзин А. С. Задачи студенческих олимпиад по математике. Москва, 1978.

[12] Дороговцев А. Я. Математический анализ: Сборник задач. Киев, 1987.

[13] Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. Москва, 1967.

[14] Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. В 2-х т. Москва, 1978.

[15] Biler P., Witkowski A. Problems in mathematical analysis. New York, 1990.

[16] Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. Избранные задачи по вещественному анализу. Москва, 1992.

[17] Математика сегодня: Сборники статей. Киев, с 1983 г.

[18] Попов И.Ю. Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики. Санкт-Петербург, 2008.

[19] Булдигін В. В., Кушніревич В. А., Шкабара О. С. Студентські математичні олімпіади. Київ, 2002.

[20] Деркач М. И., Обжерин Ю. Е., Песчанский А. И., Хрусталёв А. Ф. Всеукраинская олимпиада по математике среди студентов технических, экономических и аграрных вузов. Севастополь, 2012.

[21] Ройтенберг В. Ш., Оленикова Ю. К., Сидорова Л. А. Задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ. Ярославль, 2012.

[22] Курченко О. О., Рабець К. В. Задачі студентських олімпіад з математики. Суми, 2008.

[23] Избранные задачи из журнала “American Mathematical Monthly”. Москва, 1977.

[24] Зарубежные математические олимпиады. Москва, 1987.

[25] Брайман В. Б., Кукуш О. Г. Відкриті студентські олімпіади механіко-математичного факультету Київського національного університету ім. Тараса Шевченка (1995–2014). Київ.

[26] Булдигін В.В., Ільєнко А.Б., Орловський І.В. Математичні олімпіади - 2008: Методичні вказівки до розв'язання задач для студентів усіх форм навчання та школярів. Київ, 2008.