

1. Знайти всі значення k , для яких обидва корені рівняння

$$x^2 - (k + 1)x + 3k = 0 \text{ є цілими числами.}$$

2. Розв'язати рівняння $\cos(\pi \log_2(x - 4)) \cdot \cos(\pi \log_2(x - 1)) = 1$.

3. Знайти всі цілі числа x , для яких число $3 \cdot 2^x + 1$ є квадратом цілого числа.

4. З усіх квадратних тричленів $f(x) = ax^2 + bx + c$, таких що $f(1) = 5$, $f(5) = 1$, знайти той, для якого число $|a| + |b| + |c|$ – найменше.

5. Знайти всі значення параметра a , при яких функція $y = 8ax - a \sin 6x - 7x - \sin 5x$ зростає на проміжку $(-\infty, +\infty)$.

6. При яких a існує рівно чотири значення числа x на проміжку $[3\pi/2, 2\pi]$, для яких $\sin^2 4x + (a^2 - 3) \sin 4x + a^2 - 4 = 0$?

7. На координатній площині Oxy зобразити множину точок, для яких $2y - 1 - |y - 3| + |x + 1| = 0$. Довести, що ця множина є графіком деякої функції $y=f(x)$, знайти область визначення і множину значень цієї функції. При якому значенні параметра a функція $y=f(x+a)$ буде парною?

8. Розв'язати нерівність $\log_2(6 - x) \leq 2^{x-1}$.

9. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x - 3$ та $y = 1 - \sqrt{8 + 2x - x^2}$.

10. Довести, що в правильній 5-кутній піраміді для кожного її ребра існує інше ребро, перпендикулярне до даного.

11. Площа трикутника, вершинами якого є основи висот гострокутного трикутника ABC в чотири рази менша від його площі. Довести, що ABC – рівносторонній.

12. Скільки коренів має рівняння

а) $16 \cdot 2^{-|x|} \sin(\pi x) = 1$?

б) $x^5 - 2x^3 = a - x$?

13. Нехай O – точка перетину відрізків, які сполучають середини протилежних сторін чотирикутника $ABCD$. Довести, що $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.

14. Скільки існує п'ятицифрових чисел, всі цифри яких різні?

15. На площині проведено n кіл так, що кожні два з них перетинаються і жодні три не мають спільної точки. На скільки частин ділять площину ці кола?

16. Знайти найбільший член послідовності a_n , якщо

а) $a_n = (12 - |7 - n|) \cos(\pi n)$,

б) $a_n = 10n^2 - n^3$.

17. Висота конуса дорівнює h , а його твірні нахилені до площини основи під кутом α . Перпендикулярна до висоти конуса площина ділить повну поверхню конуса навпіл. Знайти відстань від цієї площини до площини основи конуса.