

## Олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка

В олімпіаді можуть брати участь учні випускних класів середніх шкіл, ліцеїв та гімназій України, які бажають вступити на механіко - математичний факультет. Олімпіада проходить в два тури. Перший – заочний, другий – очний.

Переможці першого туру запрошуються до участі в другому турі.

Усі учасники олімпіади повинні надіслати або передати особисто до деканату механіко - математичного факультету не пізніше 1 березня 2011 року розв'язки задач першого туру у тонкому зошиті, а також поштовий конверт із маркою та своєю зворотною адресою. Анкета учасника наклеюється на обкладинку зошита.

### АНКЕТА УЧАСНИКА ОЛІМПІАДИ

Прізвище \_\_\_\_\_

Ім'я \_\_\_\_\_

По-батькові \_\_\_\_\_

Область \_\_\_\_\_

Місто, село \_\_\_\_\_

Номер школи, клас \_\_\_\_\_

Адреса школи, телефон \_\_\_\_\_

Домашня поштова адреса, телефон \_\_\_\_\_

---

Зошити надсилаються за адресою:

01601 МСП, Київ, Володимирська, 64,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,  
журі олімпіади з математики, механіко-математичний факультет.

**Заочний тур олімпіади з математики  
механіко–математичного факультету в 2011 році**

1. Знайти найбільше значення функції  $y = 3x + 4\sqrt{1-x^2}$ .

2. Знайти всі пари  $x$  та  $y$ , які задовольняють рівняння

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) = 1,5.$$

3. Знайти площу фігури, яка знаходиться на площині  $Oxy$  і обмежена лінією, заданою рівнянням  $|2x - y| + |x + 3y| = 6$ .

4. Знайти усі пари цілих чисел  $(x, y)$ , для яких справджується рівність

$$\sqrt{xy} - \sqrt{x} = \sqrt{39 - 6\sqrt{y}}.$$

5. Побудувати графіки функцій

$$1) y = \frac{1}{\cos 2x} + \operatorname{tg} 2x, \quad 2) y = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & \text{якщо } x \geq 0, \\ \log_{1/2}(1-x), & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

6. Основою піраміди є трикутник, сторони якого дорівнюють 3 см, 25 см і 26 см. Площі відповідних бічних граней дорівнюють  $12 \text{ см}^2$ ,  $100 \text{ см}^2$  і  $104 \text{ см}^2$ .

Знайти висоту піраміди.

7. На дузі параболи  $y = x^2 + 2x - 1$ , що з'єднує точки  $M(0; -1)$  і  $N(-3; 2)$ , знайти таку точку  $K$ , щоб площа трикутника  $MNK$  була найбільшою.

8. В коло вписано чотирикутник  $ABCD$ . На хорді  $AB$  знайти точку  $M$  таку, щоб  $\angle ADM$  дорівнював  $\angle BCM$ .

9. Обчислити суму  $\sin^3 \frac{\alpha}{3} + 3 \sin^3 \frac{\alpha}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n}$ .

10. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} x^2 + yz = 1, \\ z^2 - xy = 3, \\ y^2 + zx = 2. \end{cases}$$

11. Довести, що  $\sqrt{5-x-2y} + \sqrt{x+3} + \sqrt{y+1} \leq 5$ . При яких значеннях  $x$  і  $y$  виконуватиметься рівність?