

Олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка

В олімпіаді можуть брати участь учні випускних класів середніх шкіл, ліцеїв та гімназій України, які бажають вступити на механіко - математичний факультет. Олімпіада проходить в два тури. Перший — заочний, другий — очний.

Переможці першого туру запрошуються до участі в другому турі.

Усі учасники олімпіади повинні надіслати або передати особисто до деканату механіко - математичного факультету не пізніше 1 березня 2013 року розв'язки задач першого туру у тонкому зошиті, а також поштовий конверт із маркою та своєю зворотною адресою. Анкета учасника наклеюється на обкладинку зошита.

АНКЕТА УЧАСНИКА ОЛІМПІАДИ

Прізвище.....
Ім'я.....
По-батькові.....
Область.....
Місто, село.....
Номер школи, клас.....
Адреса школи, телефон.....
Домашня поштова адреса, телефон.....
.....

Зошити надсилаються за адресою:

01601 МСП, Київ, Володимирська, 64,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
журі олімпіади з математики, механіко-математичний факультет.

Заочний тур олімпіади з математики механіко-математичного факультету в 2013 році

1. Розв'язати нерівність $\log_{4-x^2}(3-x) \leq \log_{4-x^2}(x^2+3x-2)$.
2. Побудувати графіки:

$$\text{а) } y = \frac{|x-2| - |x+3|}{2x+1}; \quad \text{б) } y = \cos(|\pi x|) \cdot |\operatorname{tg}(\pi x)|.$$

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$$

4. У трикутнику ABC з периметром 8 см величина кута BAC дорівнює 60° . Коло з центром у точці O дотикається сторони BC і продовжень сторін AB і AC у точках K і L відповідно. Знайти площу трикутника AOL .

5. Знайти усі натуральні числа n , для яких дріб $\frac{11n+8}{7n+3}$ можна скоротити.
6. Нехай $a = \log_{105} 294$, $b = \log_{70} 21$. Виразити число $x = \log_{14} 21$ через a і b .
7. Дві висоти трикутника ділять бісектрису внутрішнього кута на три рівних частини. Знайти величину кута трикутника, з якого проведено бісектрису.
8. При яких значеннях параметра a кожне з рівнянь $x^2 - 4x - 5 = a$ та $x^2 + 7x + 2 = a$ має по два цілих корені?
9. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} x - \sin 2x = \cos(x - \frac{\pi}{4}) - \operatorname{ctg} x$.
10. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і точки P, Q, R на відрізках $AB_1, DC, A_1 C_1$ відповідно. Відомо, що $AP : AB_1 = 1 : 3$, $DQ : DC = 2 : 3$, $A_1 R : A_1 C_1 = 1 : 2$. У якому відношенні площина PQR ділить відрізок $D_1 C_1$?
11. Знайти найбільше значення виразу $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y + 3)^2}$, якщо $2|x| + |y| = 2$.
12. Довести, що $\sqrt{7\sqrt{3} - 12} - \sqrt{4\sqrt{3} - 6} + \sqrt{13\sqrt{3} - 12} = 2\sqrt[4]{3}$.